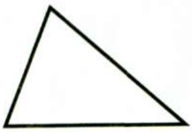
А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

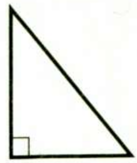
7

ГЕОМЕТРИЯ

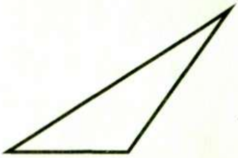
ГІМНАЗІЯ



Остроугольный треугольник



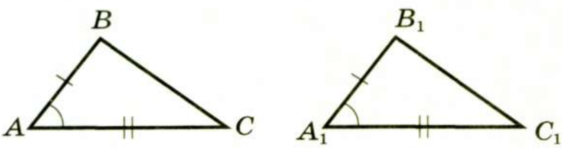
Прямоугольный треугольник



Тупоугольный треугольник

ПЕРВЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ:

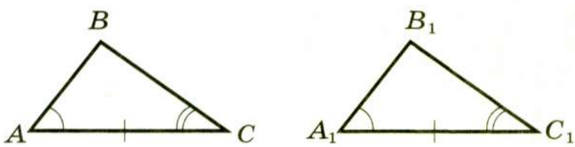
по двум сторонам и углу между ними



Если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

ВТОРОЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ:

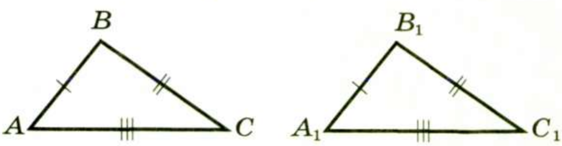
по стороне и прилежащим к ней углам



Если $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

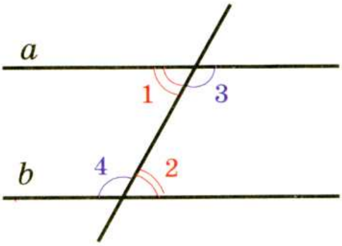
ТРЕТИЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ:

по трем сторонам

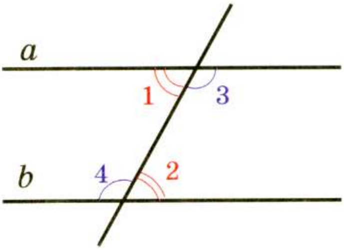


Если $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$

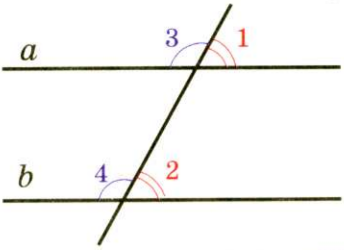
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ



Если $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$), то $a \parallel b$

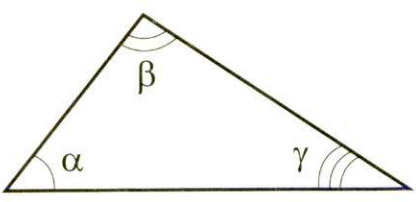


Если $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ ($\angle 2 + \angle 3 = 180°$), то $a \parallel b$



Если $\angle 1 = \angle 2$ ($\angle 3 = \angle 4$), то $a \parallel b$

СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

А. Г. Мерзляк
В. Б. Полонский
М. С. Якир

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7-го класса

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины

Харьков
«Гимназия»
2008

УДК 373:513
ББК 22.151.0я721
М52

Рекомендовано
Министерством образования и науки Украины
(Письмо № 1/11-6717 от 04.09.2007 г.)

Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.
М52 Геометрия: Учебник для 7-го класса. — X.: Гимназия, 2008.— 208 с.
ISBN 978-966-8319-82-2.

УДК 373:513
ББК 22.151.0я721

Навчальне видання

МЕРЗЛЯК Аркадій Григорович
ПОЛОНСЬКИЙ Віталій Борисович
ЯКІР Михайло Семенович

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7-го класу

Для середнього шкільного віку

Російською мовою

Відповідальний за випуск *В. Л. Маркіанов*
Редактор *М. В. Москаленко*
Художники *П. М. Репринцев, О. С. Юхтман*
Художній редактор *С. Е. Кулинич*
Комп'ютерна верстка *І. Л. Маркіанової*
Коректор *І. Л. Безсонова*

Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.
Підписано до друку 25.02.2008. Формат 60×90/16. Гарнітура шкільна.
Папір офсетний. Друк офсетний. Умов. друк. арк. 13,0.

ТОВ ТО «Гімназія». Україна, 61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а
Тел. (057) 758-83-93, 719-46-80

Віддруковано з готових діапозитивів у друкарні ПП «Модем»,
61103, м. Харків, вул. Дерев'янка, 16а.
Тел. (057) 758-15-80, 758-15-90

ISBN 978-966-8319-82-2

ОТ АВТОРОВ

Дорогие семиклассники!

Вы начинаете изучать новый школьный предмет — **геометрию**. Обратите внимание, что в словах «география» и «геометрия» одинаковая часть — «гео», что в переводе с греческого означает «земля». Но если на уроках географии в шестом классе вы действительно занимались землеописанием («графия» — по-гречески «описание»), то на уроках геометрии вам не придется заниматься землемерием («метрео» — по-гречески «мерить»).

Геометрия — одна из самых древних наук. Ее название можно объяснить тем, что зарождение и развитие геометрии было тесно связано с разнообразной практической деятельностью человека: разметкой границ земельных участков, строительством дорог, оросительных каналов, зданий и других сооружений, т. е. геометрия, как говорят в таких случаях, была *прикладной наукой*. Постепенно, шаг за шагом человечество накапливало знания, и геометрия превратилась в красивую и совершенную, строгую и последовательную математическую теорию. Знакомиться с этой наукой и учиться применять полученные знания на практике вы и будете на уроках геометрии.

Знать геометрию чрезвычайно важно. Действительно, посмотрите вокруг — везде геометрия, точнее, **геометрические фигуры**: отрезки, треугольники, прямоугольники, прямоугольные параллелепипеды, шары и т. п.

а)

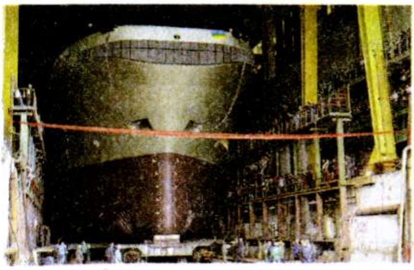
б)

Рис. 1. *а*) Гостиница «Салют» (г. Киев); *б*) административное здание (г. Лондон)

Рис. 2. Сырецкая телевизионная башня (г. Киев)

Без глубоких геометрических знаний не могли бы появиться сложные строительные конструкции (рис. 1, 2), корабли и самолеты (рис. 3) и даже детский конструктор и узоры вышивок (рис. 4). Создание узоров требует от мастерицы знания о таких геометрических понятиях, как симметрия и параллельный перенос. Не зная геометрию, невозможно стать хорошим инженером-конструктором, токарем, столяром, ученым, архитектором, дизайнером, модельером, специалистом в области компьютерной графики и т. д. Вообще, геометрические знания — важнейшая составляющая человеческой культуры.

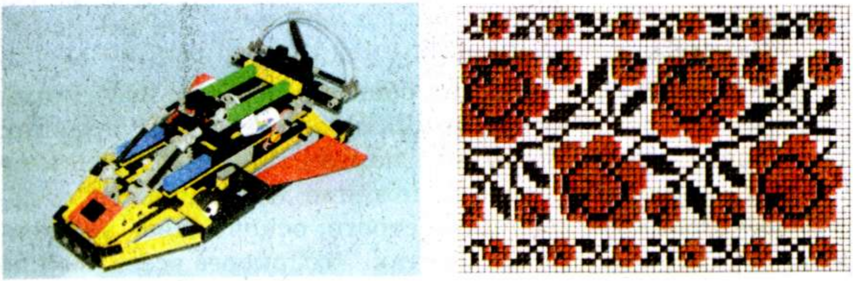
Геометрия — очень интересный предмет. Мы надеемся, что вы в этом скоро убедитесь, и поможет этому учебник, который вы держите в руках. Познакомьтесь, пожалуйста, с его структурой.



а)

б)

Рис. 3. *а*) На стапелях Николаевского судостроительного завода; *б*) самолет АН-225 («Мрия»)



а) *б*)

Рис. 4. *а*) Детский конструктор; *б*) узор вышивки

Учебник разделен на четыре параграфа, каждый из которых состоит из пунктов. В пунктах изложен теоретический материал, при изучении которого особое внимание обращайте на текст, выделенный **жирным *шрифтом***. Также обращайте внимание на слова, напечатанные *курсивом*.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому пункту подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым мы советуем приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения, так и трудные задачи (самые трудные из них обозначены «звездочкой» (*)).

Каждый пункт завершает особая рубрика, которую мы назвали «Наблюдайте, рисуйте, конструируйте, фантазируйте». В ней собраны задачи, для решения которых нужны не специальные геометрические знания, а смекалка, изобретательность и сообразительность. Эти задачи полезны, как витамины. Они развивают «геометрическое зрение» и интуицию.

Кроме того, в учебнике вы сможете прочитать рассказы по истории геометрии. Названия этих рассказов напечатаны синим цветом.

Дерзайте! Желаем успеха!

Уважаемые коллеги!

Мы считаем, что в рамках общеобразовательной школы невозможно реализовать формально-логический принцип построения курса геометрии: положить в основу систему аксиом, а дальше строить изложение дедуктивно, т. е. доказывать теоремы логически строго, основываясь на аксиомах и ранее доказанных фактах. Это, скорее всего, можно пояснить тем, что число учащихся (особенно семиклассников), склонных к дедуктивному мышлению, невелико. На самом деле большинству присущ наглядно-образный тип мышления. Поэтому для ребенка апелляция к наглядной очевидности совершенно естественна и оправданна.

Исходя из сказанного, в основу данного учебника положен **наглядно-дедуктивный принцип в сочетании с частичной аксиоматизацией.**

Мы считаем, что цель изучения геометрии в школе — это не только развитие логического мышления и умения проводить доказательство. Авторы учебника ставят более широкую задачу: уточнить представление учащихся об элементарных геометрических объектах (точка, прямая, луч, отрезок, угол), ознакомить их с важнейшими свойствами базовых фигур элементарной геометрии (треугольник, окружность, четырехугольник и т. п.), развить в них потребность в доказательстве, т. е. заложить основы дедуктивного и эвристического мышления, а главное — **научить учащихся применять свойства геометрических фигур при решении практических и теоретических задач.**

Мы надеемся, что вы оцените этот учебник как таковой, который поможет вам справиться с реализацией этих целей.

В книге собран обширный и разнообразный дидактический материал. Однако за один учебный год все задачи решить невозможно, да в этом и нет никакой необходимости. Вместе с тем гораздо удобнее работать, когда есть большой запас задач. Это позволит реализовать принципы уровневой дифференциации и индивидуального подхода в обучении.

Красным цветом отмечены номера задач, рекомендуемых для домашней работы, **синим** цветом — номера задач, которые с учетом индивидуальных особенностей учащихся класса по усмотрению учителя можно решать устно.

Давайте превратим школьный курс геометрии в ясный и привлекательный предмет.

Желаем творческого вдохновения и терпения.

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

n°	задания, соответствующие начальному и среднему уровням учебных достижений;
$n^{\bullet}$	задания, соответствующие достаточному уровню учебных достижений;
$n^{\bullet\bullet}$	задания, соответствующие высокому уровню учебных достижений;
n^{*}	задачи для математических кружков и факультативов;
🔑	задачи, результат которых можно использовать при решении других задач;
⊙	доказательство теоремы, соответствующее достаточному уровню учебных достижений;
⊙⊙	доказательство теоремы, соответствующее высокому уровню учебных достижений;
⊛	доказательство теоремы, необязательное для изучения;
▲	окончание доказательства теоремы.

ВВЕДЕНИЕ

Хотя геометрия — это новый школьный предмет, однако на уроках математики вы уже знакомились с азами этой мудрой науки. Так, все геометрические фигуры, изображенные на рисунке 5, вам хорошо известны.

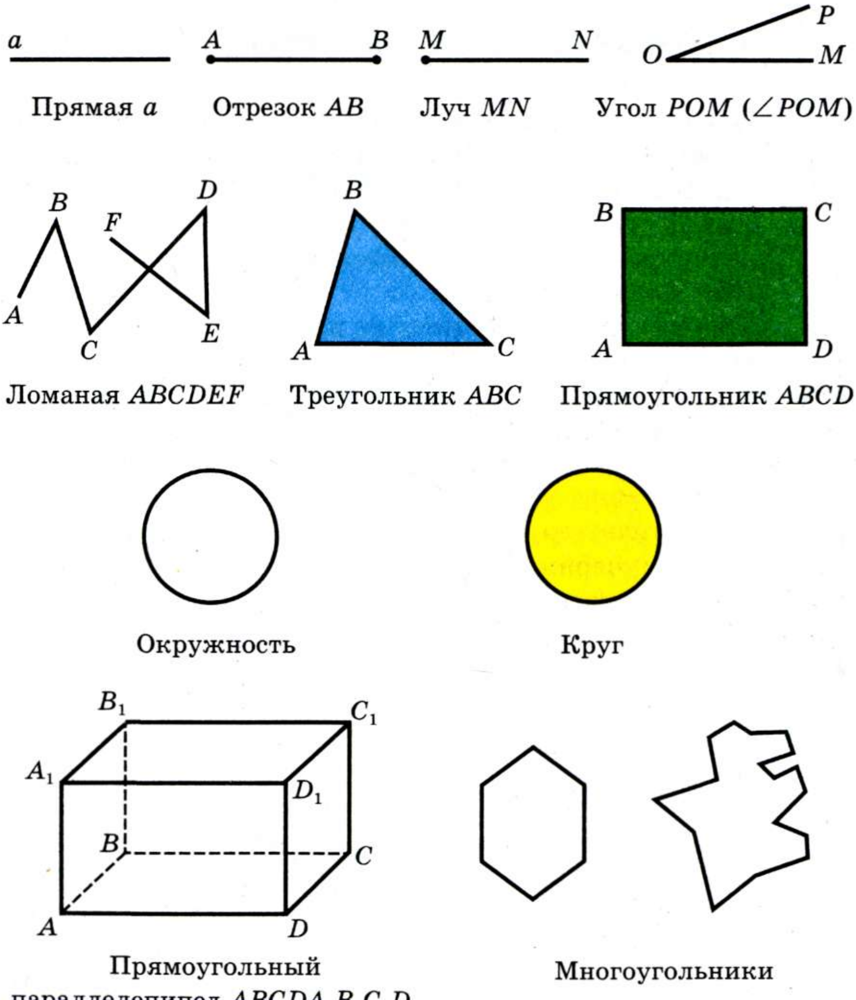


Рис. 5

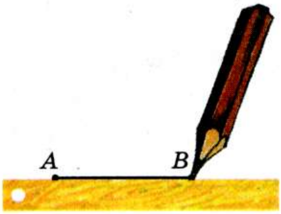


Рис. 6

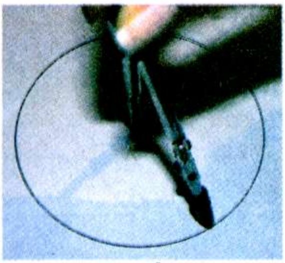


Рис. 7

Вы умеете с помощью линейки соединять две точки отрезком (рис. 6), с помощью циркуля строить окружность (рис. 7), с помощью линейки и угольника строить перпен-

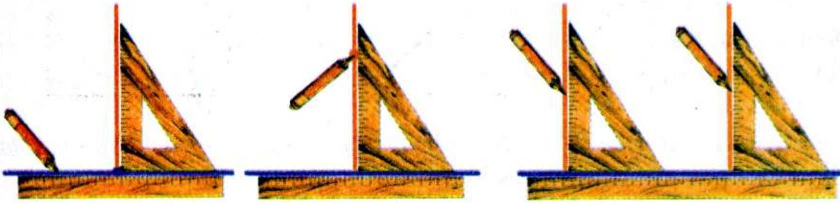


Рис. 8

дикулярные и параллельные прямые (рис. 8), измерять длину отрезка и строить отрезок заданной длины с помощью линейки с миллиметровыми делениями (рис. 9), находить

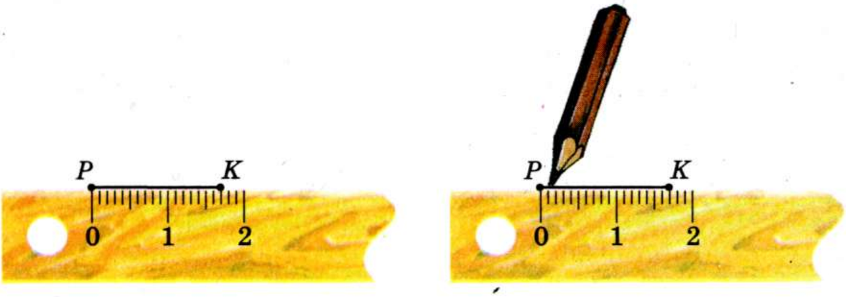


Рис. 9

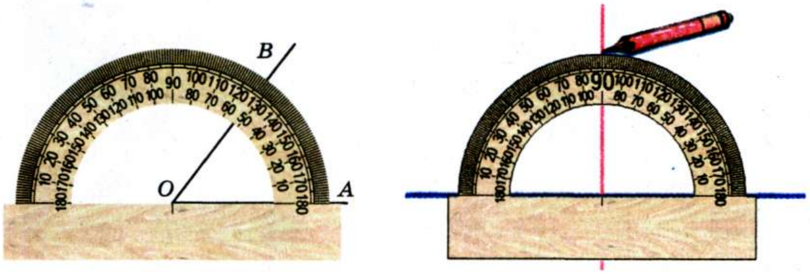


Рис. 10

величину угла и строить угол заданной величины с помощью транспортира (рис. 10), классифицировать треугольники (см. форзац).

Однако знать, как «выглядит» фигура, или уметь выполнять простейшие построения — это всего лишь самые начальные знания *науки о свойствах геометрических фигур*, т. е. *геометрии*.

При изучении *систематического курса* геометрии вы будете постепенно в определенной последовательности изучать свойства геометрических фигур, а следовательно, и сами фигуры, как знакомые, так и новые. Это означает, что вы должны научиться по одним свойствам фигуры находить, а главное, **доказывать** другие ее свойства.

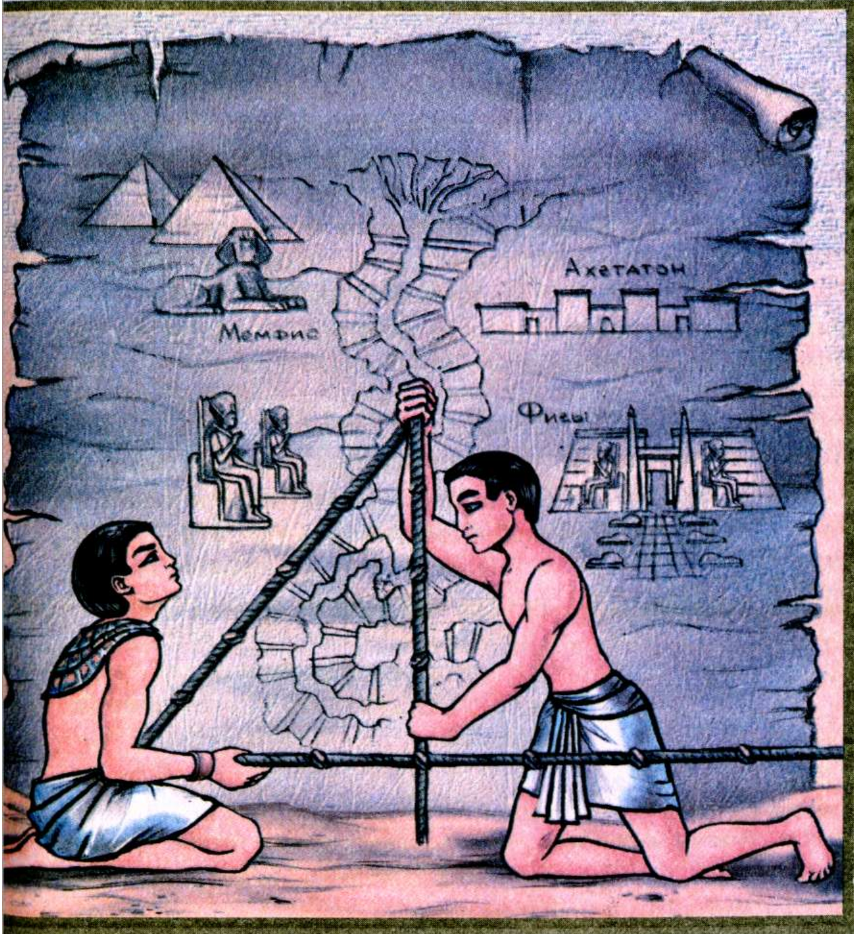
Школьный курс геометрии традиционно делится на **планиметрию** и **стереометрию**. Планиметрия изучает фигуры на плоскости («планум» в переводе с латинского — «плоскость»). В стереометрии изучают фигуры в пространстве («стереос» в переводе с греческого — «пространственный»).

Итак, мы приступаем к изучению планиметрии.

ПРОСТЕЙШИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ И ИХ СВОЙСТВА §1

В этом параграфе рассматриваются знакомые вам из предыдущих классов геометрические фигуры: точки, прямые, отрезки, лучи и углы.

Вы узнаете больше о свойствах этих фигур. Некоторые из этих свойств научитесь **доказывать**. Слова **определение**, **теорема**, **аксиома** станут для вас привычными, понятными и часто употребляемыми.



1. Точки и прямые

Точка — самая простая геометрическая фигура. Это единственная фигура, которую нельзя разбить на части. Например, каждая из фигур, изображенных на рисунке 11, разбита на части. И даже о фигуре, изображенной на рисунке 12, состоящей из двух точек, можно сказать, что она состоит из двух частей: точки A и точки B.

Рис. 11

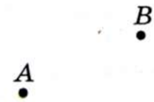


Рис. 12

На рисунке 13 изображены прямая a и две точки A и B. Говорят, что *точка A принадлежит прямой a*, или *точка A лежит на прямой a*, или *прямая a проходит через точку A* и соответственно *точка B не принадлежит прямой a*, или *точка B не лежит на прямой a*, или *прямая a не проходит через точку B*.

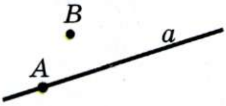


Рис. 13

Прямая — это геометрическая фигура, обладающая определенными свойствами.

Основное свойство прямой. **Через любые две точки[1] можно провести прямую, и притом только одну.**

Почему это свойство прямой — основное?

Через точки A и B можно провести много различных *линий* (рис. 14). Прямая же задается этими точками однозначно. В этом и состоит суть основного свойства прямой.

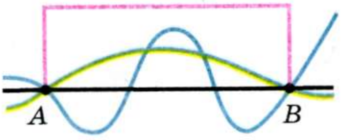


Рис. 14

[1] Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем иметь в виду, что это разные точки и разные прямые. Случай их совпадения будем оговаривать особо.

Это свойство позволяет обозначать прямую, называя две любые ее точки. Так, прямую, проведенную через точки M и N, называют «прямая MN» (или «прямая NM»).

Если хотят разъяснить смысл какого-либо слова (термина), то используют **определения**. Например:

1) часами называют прибор для измерения времени;
2) геометрия — это раздел математики, изучающий свойства фигур.

Определения есть и в геометрии.

Определение. **Две прямые, имеющие общую точку, называют пересекающимися.**

На рисунке 15 изображены прямые a и b, пересекающиеся в точке O.

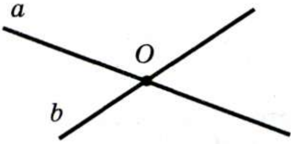


Рис. 15

Часто справедливость (истинность) какого-либо факта приходится устанавливать с помощью *логических рассуждений*.

Рассмотрим такую задачу. Известно, что все жители Геометрической улицы — математики. Женя живет по адресу ул. Геометрическая, 5. Является ли Женя математиком?

Из условия задачи следует, что Женя живет на Геометрической улице. А поскольку все жители этой улицы математики, то Женя — математик.

Приведенные логические рассуждения называют **доказательством** того факта, что Женя — математик.

В математике утверждение, истинность которого устанавливается с помощью доказательства, называют **теоремой**.

Теорема 1.1. ***Любые две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку.***

Доказательство. ⊙ Пусть пересекающиеся прямые a и b помимо общей точки A имеют еще одну общую точку B (рис. 16). Тогда через две точки A и B проходят две

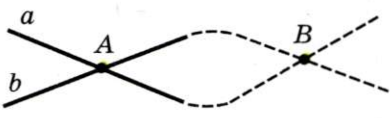


Рис. 16

прямые. А это противоречит основному свойству прямой. Следовательно, наше предположение о существовании второй точки пересечения прямых a и b неверно. ▲

?

1. Какую фигуру нельзя разбить на части?
2. Сформулируйте основное свойство прямой.
3. Какое свойство прямой позволяет обозначать ее, называя любые две точки прямой?
4. Для чего используют определения?
5. Какие две прямые называют пересекающимися?
6. Как называют утверждение, истинность которого устанавливают с помощью доказательства?
7. Сформулируйте теорему о пересечении двух прямых.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

1.° Проведите прямую, обозначьте ее буквой m. Отметьте точки A и B, лежащие на этой прямой, и точки C, D, E, не лежащие на ней.

2.° Отметьте точки M и K и проведите через них прямую. Отметьте на этой прямой точку E. Запишите все возможные обозначения полученной прямой.

3.° Проведите прямые a и b так, чтобы они пересекались. Обозначьте точку их пересечения буквой C. Принадлежит ли точка C прямой a? прямой b?

4.° Отметьте три точки так, чтобы они не лежали на одной прямой, и через каждую пару точек проведите прямую. Сколько образовалось прямых?

5.° Отметьте: 1) четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой; 2) пять точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой.

6.• Проведите три прямые так, чтобы каждые две из них пересекались. Отметьте точки пересечения этих прямых. Сколько можно получить точек пересечения?

7.• Отметьте 4 точки так, чтобы при проведении прямой через каждые две из них на рисунке образовалось: 1) 1 прямая; 2) 4 прямых; 3) 6 прямых. Проведите эти прямые.

УПРАЖНЕНИЯ

8.˙ Пользуясь рисунком 17:

1) определите, пересекаются ли прямые a и MK;
2) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a; прямой MK;
3) укажите все отмеченные точки, не принадлежащие прямой a; прямой MK;
4) укажите все отмеченные точки, принадлежащие прямой a, но не принадлежащие прямой MK.

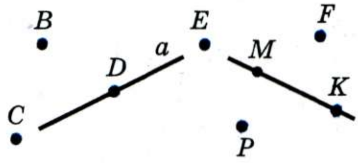


Рис. 17

9.˙ Пользуясь рисунком 18, укажите:

1) какие из отмеченных точек принадлежат прямой p, а какие не принадлежат ей;
2) каким прямым принадлежит каждая из точек A, B, C, D и E;
3) какие прямые проходят через каждую из точек C, B и A;
4) в какой точке пересекаются прямые k и p, m и k;
5) в какой точке пересекаются три прямые.

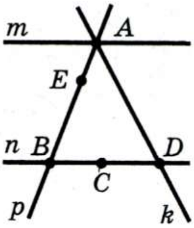


Рис. 18

10.˙ Точка C принадлежит прямой AB. Являются ли различными прямые AB и AC? Ответ обоснуйте.

11.˙ Провели 4 прямые, каждые 2 из которых пересекаются, причем через каждую точку пересечения проходят только 2 прямые. Сколько точек пересечения при этом образовалось?

12.˙˙ Как надо расположить 6 точек, чтобы они определяли 6 прямых?

13.˙˙ Данную прямую пересекают 4 прямые. Сколько может образоваться точек пересечения этих прямых с данной?

14.˙˙ Провели 4 прямые, каждые 2 из которых пересекаются. Сколько точек пересечения может образоваться?

15.˙˙ Провели 5 прямых, каждые 2 из которых пересекаются. Каково наименьшее возможное количество точек пересечения этих прямых? Какое наибольшее количество точек пересечения может образоваться?

16.* Можно ли провести 6 прямых и отметить на них 11 точек так, чтобы на каждой прямой было отмечено ровно 4 точки?

17.* На плоскости проведены 3 прямые. На первой прямой отметили 5 точек, на второй — 7 точек, а на третьей — 3 точки. Каким может быть наименьшее количество отмеченных точек?

18.* Можно ли отметить несколько точек и провести несколько прямых так, чтобы на каждой прямой лежало ровно 3 отмеченные точки и через каждую точку проходило ровно 3 из проведенных прямых?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

19. Из фигурок, имеющих вид «уголка» (рис. 19), сложите квадрат.

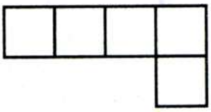


Рис. 19

2. Отрезок и его длина

На рисунке 20 изображена прямая a, проходящая через точки A и B. Эти точки ограничивают часть прямой a, выделенную красным цветом. Такую часть прямой вместе с точками A и B называют **отрезком**, а точки A и B — **концами** этого **отрезка**.

Понятно, что для любых двух точек M и N существует *единственный* отрезок, для которого эти точки являются концами (рис. 21), то есть *отрезок своими концами задается однозначно*. Поэтому отрезок на рисунке 21 обозначают так: MN или NM (читают: «отрезок MN» или «отрезок NM»).

Рис. 20

Рис. 21

Рис. 22

Рис. 23

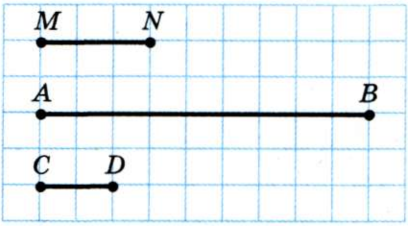


Рис. 24

На рисунке 22 изображены отрезок AB и точка X, принадлежащая этому отрезку, но не совпадающая ни с одним из его концов. Точку X называют **внутренней точкой** отрезка AB. В этом случае также говорят, что точка X **лежит между** точками A и B.

Таким образом, отрезок AB состоит из точек A и B, а также всех точек прямой AB, лежащих между точками A и B.

Определение. **Два отрезка называют равными, если их можно совместить наложением.**

На рисунке 23 изображены равные отрезки AB и CD. Пишут: $AB = CD$.

Вы знаете, что каждый отрезок имеет определенную длину, и для ее измерения надо выбрать **единичный отрезок.** В качестве единичного можно выбрать любой отрезок.

Например, будем считать отрезок MN на рисунке 24 единичным. Этот факт записывают так: $MN = 1$ ед. Тогда длину отрезка AB считают равной **3 единицам длины** и записывают $AB = 3$ ед. или просто $AB = 3$ и говорят: «отрезок AB равен 3». Для отрезка CD имеем: $CD = \frac{2}{3}$.

На практике чаще всего используют такие единичные отрезки: 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км.

В зависимости от выбора единицы длины меняется **численное значение длины** отрезка. Например, на рисунке 25 $AB = 17$ мм, или $AB = 1{,}7$ см, или $AB = 0{,}17$ дм и т. д.

Рис. 25

На производстве и в быту используют различные приборы для измерения длины отрезка:

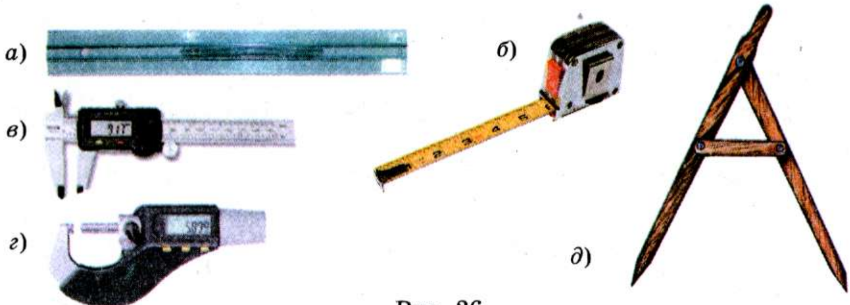


Рис. 26

линейку с делениями (*а*), рулетку (*б*), штангенциркуль (*в*), микрометр (*г*), полевой циркуль (*д*) (рис. 26).

Ясно, что *равные отрезки имеют равные длины* и наоборот, *если длины отрезков равны, то равны и сами отрезки*.

Если длина отрезка AB больше длины отрезка MN, как, например, на рисунке 24, то будем говорить, что отрезок AB больше отрезка MN, и записывать $AB > MN$.

В дальнейшем, говоря «сумма отрезков», будем подразумевать сумму длин этих отрезков.

Основное свойство длины отрезка. **Если точка C является внутренней точкой отрезка AB, то отрезок AB равен сумме отрезков AC и CB, т. е.**

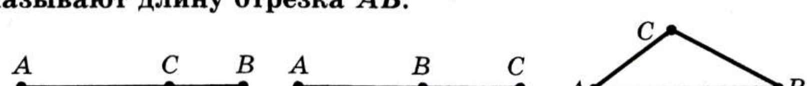
$$AB = AC + CB.$$

Если точка C не принадлежит отрезку AB, то

$$AB < AC + CB.$$

Рисунок 27 иллюстрирует это свойство, суть которого состоит в том, что кратчайший путь из точки A в точку B проходит по отрезку AB. Поэтому естественно принять следующее

Определение. **Расстоянием между точками A и B называют длину отрезка AB.**



$AB = AC + CB$ $\quad$ $AB < AC + CB$ $\quad$ $AB < AC + CB$

Рис. 27

Если точки A и B совпадают, то расстояние между ними считают равным нулю.

Теорема 2.1. ***Если три точки A, B и C таковы, что выполняется равенство $AB = AC + CB$, то точка C является внутренней точкой отрезка AB.***

Доказательство. ⊙ Пусть точка C не является внутренней точкой отрезка AB. В силу договоренности, принятой в п. 1 (см. сноску на с. 12), точки A, B и C различны, т. е. точка C не совпадает ни с одним из концов отрезка AB. Значит, точка C не принадлежит отрезку AB. Тогда из основного свойства длины отрезка следует неравенство $AB < AC + CB$, которое противоречит условию. Следовательно, предположение о том, что точка C не является внутренней точкой отрезка AB, неверно. ▲

Определение. **Серединой отрезка AB называют такую его точку C, что $AC = CB$.**

Рис. 28

На рисунке 28 точка C — середина отрезка AB.

Пример. Точки A, B и C принадлежат одной прямой, $AB = 8$ см, отрезок AC на 2 см длиннее отрезка BC. Найдите отрезки AC и BC[1].

Решение. В условии не указано, каково взаимное расположение данных точек на прямой. Поэтому рассмотрим три возможных случая.

Рис. 29

1) Точка B — внутренняя точка отрезка AC (рис. 29). Тогда отрезок AC длиннее отрезка BC на длину отрезка AB, то есть на 8 см. Это противоречит условию. Значит, такой случай невозможен.

2) Точка C — внутренняя точка отрезка AB (рис. 30). В этом случае $AC + BC = AB$. Пусть $BC = x$ см, тогда $AC = (x + 2)$ см. Имеем:

$$x + 2 + x = 8;$$
$$x = 3.$$

Рис. 30

Следовательно, $BC = 3$ см, $AC = 5$ см.

[1] Здесь и далее вместо «Найдите длину отрезка...» будем говорить просто «Найдите отрезок...».

Рис. 31

3) Точка A — внутренняя точка отрезка BC (рис. 31). В этом случае $AB + AC = BC$ и тогда $AC < BC$. Это противоречит условию. Значит, такой случай невозможен.

Ответ: $AC = 5$ см, $BC = 3$ см.

?

1. Сколько существует отрезков, концами которых являются две данные точки?
2. Из каких точек состоит отрезок AB?
3. Какие два отрезка называют равными?
4. Какие длины имеют равные отрезки?
5. Что можно сказать об отрезках, имеющих равные длины?
6. Сформулируйте основное свойство длины отрезка.
7. Можно ли любой отрезок выбрать в качестве единичного?
8. Что называют расстоянием между двумя точками?
9. Чему равно расстояние между двумя совпадающими точками?
10. Сформулируйте условие, при котором точка C является внутренней точкой отрезка AB.
11. Какую точку называют серединой отрезка AB?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

20.° Отметьте две точки A и B и проведите через них прямую. Отметьте точки C, D и E, принадлежащие отрезку AB, и точки F, M и K, не принадлежащие отрезку AB, но принадлежащие прямой AB.

21.° Проведите прямую и отметьте на ней 3 точки. Сколько образовалось отрезков?

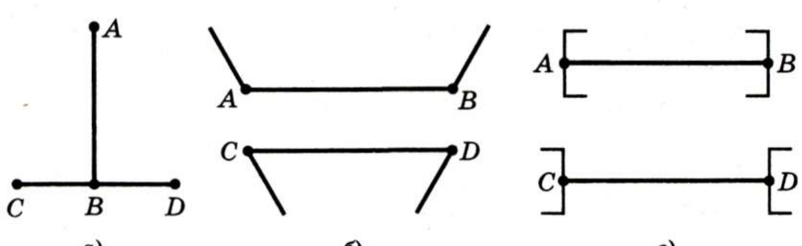


Рис. 32

22.° Отметьте на прямой точки A, B, C и D так, чтобы точка C лежала между точками A и B, а точка D — между точками B и C.

23.° Отметьте на прямой точки A, B и C так, чтобы выполнялось:

1) равенство $AC = AB + BC$;

2) неравенство $AC < AB + BC$.

24.° Сравните на глаз отрезки AB и CD (рис. 32). Проверьте свои выводы измерением.

25.° Сравните на глаз отрезки AB и BC (рис. 33). Проверьте свой вывод измерением.

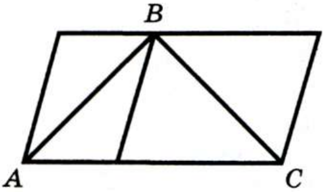


Рис. 33

УПРАЖНЕНИЯ

26.° Назовите все отрезки, изображенные на рисунке 34.

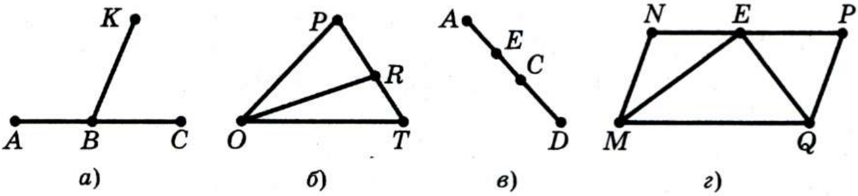


Рис. 34

27.° Найдите длину каждого из отрезков, изображенных на рисунке 35, если единичный отрезок равен отрезку: 1) AB; 2) MN.

28.° Какая из точек, отмеченных на рисунке 36, лежит между двумя другими? Запишите соответствующее равенство,

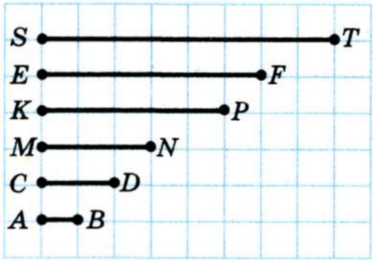


Рис. 35

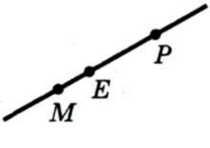


Рис. 36

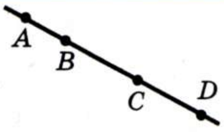


Рис. 37

Рис. 38

следующее из основного свойства длины отрезка, для отрезков ME, MP и EP.

29.° Между какими точками лежит точка B (рис. 37)? Для каждого случая запишите соответствующее равенство, следующее из основного свойства длины отрезка.

30.° Точка D — внутренняя точка отрезка ME. Найдите:
1) расстояние между точками M и E, если $MD = 1{,}8$ дм, $DE = 2{,}6$ дм;
2) длину отрезка MD, если $ME = 42$ мм, $DE = 1{,}5$ см.

31.° Точки A, B и C расположены так, что $AC + AB = BC$. Лежит ли какая-нибудь из этих точек между двумя другими? Если да, то укажите, какая именно, и сделайте рисунок.

32.° Точки A, B и C лежат на одной прямой (рис. 38). Какие из следующих утверждений верны:
1) $AB + BC = AC$;
2) $AC + AB > BC$;
3) $AB + BC > AC$;
4) $AC - AB = BC$?

33.° Лежат ли точки P, R и T на одной прямой, если:
1) $PR = 1{,}8$ см, $PT = 3{,}4$ см, $RT = 1{,}6$ см;
2) $PR = 2{,}4$ см, $PT = 5{,}6$ см, $RT = 8{,}2$ см?

В случае утвердительного ответа укажите, какая точка лежит между двумя другими. Ответ обоснуйте.

34.° Может ли точка E лежать между точками C и D, если $CE = 6{,}3$ см, $ED = 2{,}7$ см, $CD = 8{,}9$ см? Ответ обоснуйте.

35.° Точка K является серединой отрезка MN. Можно ли совместить наложением: 1) отрезки MK и KN; 2) отрезки MK и MN?

36.° Точка K — середина отрезка MN, точка E — середина отрезка KN, $EN = 5$ см. Найдите длины отрезков MK, ME и MN.

37.° Точка C — внутренняя точка отрезка AB, длина которого равна 20 см. Найдите длины отрезков AC и BC, если:

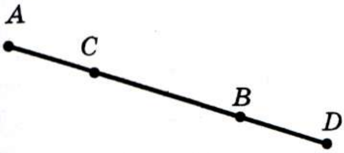


Рис. 39

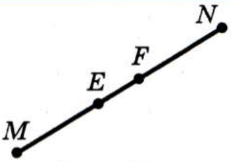


Рис. 40

Рис. 41

1) длина отрезка AC на 5 см больше длины отрезка BC;

2) длина отрезка AC в 4 раза меньше длины отрезка BC;

3) $AC : BC = 9 : 11$.

38.° Точка K принадлежит отрезку CD, длина которого равна 28 см. Найдите длины отрезков CK и KD, если:

1) длина отрезка CK на 4 см меньше длины отрезка KD;

2) длина отрезка CK в 6 раз больше длины отрезка KD;

3) $CK : KD = 3 : 4$.

39.• Отрезки AB и CD равны (рис. 39). Докажите, что отрезки AC и BD также равны.

40.• Отрезки ME и FN равны (рис. 40). Докажите, что $MF = EN$.

41.• Точка C делит отрезок AB, длина которого равна a, на два неравных отрезка. Найдите расстояние между серединами отрезков AC и BC.

42.• Точки A, B и C лежат на одной прямой. Найдите длину отрезка BC, если $AB = 24$ см, $AC = 32$ см. Сколько решений имеет задача?

43.•• На прямой m (рис. 41) найдите такую точку C, чтобы сумма расстояний от нее до точек A и B была наименьшей. Ответ обоснуйте.

44.•• На прямой отмечены точки A, B и C так, что $AB = 15$ см, $AC = 9$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и AC.

45.•• Длина отрезка EF равна 12 см. Найдите на прямой EF все точки, для которых сумма расстояний от концов отрезка EF равна: 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 10 см.

46.•• Через точки A и B проведена прямая. Где на этой прямой лежит точка C, расстояние от которой до точки B в 2 раза больше расстояния от нее до точки A?

47.•• Отрезок, длина которого равна 32 см, разделили на три неравных отрезка. Расстояние между серединами

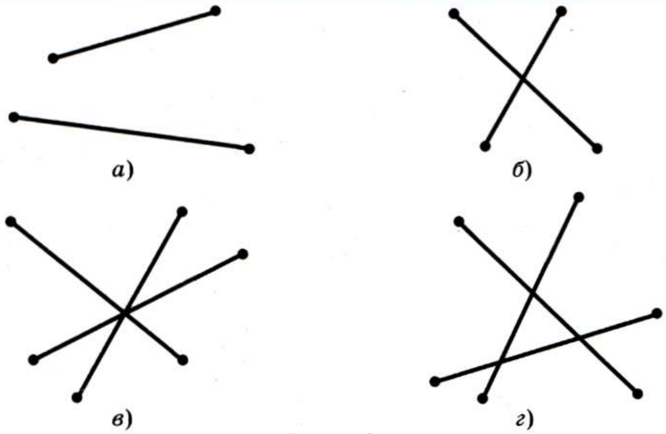


Рис. 42

крайних отрезков равно 18 см. Найдите длину среднего отрезка.

48.* Какое наименьшее количество внутренних точек надо отметить на отрезках, изображенных на рисунке 42, чтобы на каждом из них было по две отмеченные внутренние точки?

49.* Сколько точек надо отметить между точками A и B, чтобы вместе с отрезком AB образовалось 6 отрезков?

50.* На шкале линейки нанесены только деления 0 см, 5 см и 13 см (рис. 43). Как, пользуясь этой линейкой, можно построить отрезок длиной:

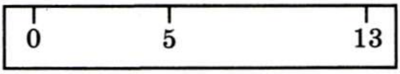


Рис. 43

1) 3 см; 2) 2 см; 3) 1 см?

51.* На шкале линейки нанесены только деления 0 см, 7 см и 11 см. Как, пользуясь этой линейкой, можно построить отрезок длиной: 1) 8 см; 2) 5 см?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

52. Составьте из прямоугольников размерами 1×1, 1×2, 1×3, ..., 1×13 прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.

3. Луч. Угол. Измерение углов

Проведем прямую AB и отметим на ней произвольную точку O. Эта точка разбивает прямую на две части, выделенные на рисунке 44 разными цветами. Каждую из этих частей вместе с точкой O называют **лучом** или **полупрямой.** Точку O называют **началом** луча.

Каждый из лучей, изображенных на рисунке 44, состоит из точки O и всех точек прямой AB, *лежащих по одну сторону от точки* O.

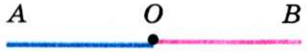


Рис. 44

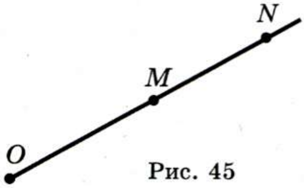


Рис. 45

Это позволяет обозначать луч, называя две его точки: первой обязательно указывают начало луча, второй — любую другую точку, принадлежащую лучу. Так, луч с началом в точке O (рис. 45) можно обозначить OM или ON.

Лучи OA и OB (рис. 44) дополняют друг друга до прямой. Также можно сказать, что объединением этих лучей является прямая.

Определение. **Два луча, имеющие общее начало и лежащие на одной прямой, называют дополнительными.**

Например, лучи BC и BA — дополнительные (рис. 46). Заметим, что, объединив лучи CA и AC, мы тоже получим прямую AC. Однако эти лучи не считают дополнительными: у них нет общего начала.

На рисунке 47, *а* изображена фигура, состоящая из двух лучей OA и OB, имеющих общее начало. Эта фигура делит плоскость на две части, выделенные разными цветами. Каждую из этих частей вместе с лучами OA и OB называют **углом.**

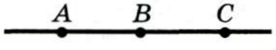


Рис. 46

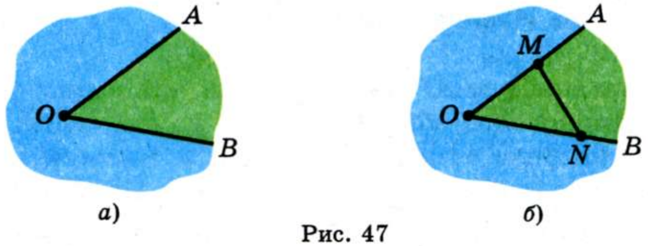


Рис. 47

Лучи OA и OB называют **сторонами угла**, а точку O — **вершиной угла.**

Как видим, углы на рисунке 47, *а* внешне существенно различаются. Это различие определено следующим свойством. На лучах OA и OB выберем произвольно точки M и N (рис. 47, *б*). Отрезок MN принадлежит «зеленому» углу, а «синему» углу принадлежат лишь концы отрезка.

В дальнейшем, говоря «угол», будем подразумевать лишь тот из них, который содержит любой отрезок с концами на его сторонах. Случаи, в которых придется рассматривать углы, не обладающие этим свойством, будут специально оговариваться.

Есть несколько способов обозначения углов. Угол на рисунке 48 можно обозначить так: $\angle MON$, или $\angle NOM$, или просто $\angle O$.

На рисунке 49 изображено несколько углов, имеющих общую вершину. Здесь обозначение угла одной буквой может привести к путанице. В таких случаях углы удобно обозначать с помощью цифр: $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ (читают соответственно: «угол один», «угол два», «угол три»).

Определение. **Угол, стороны которого являются дополнительными лучами, называют развернутым** (рис. 50).

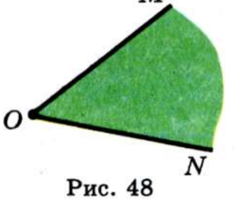


Рис. 48

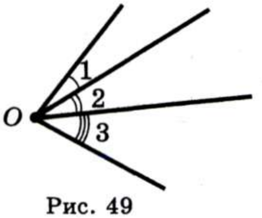


Рис. 49

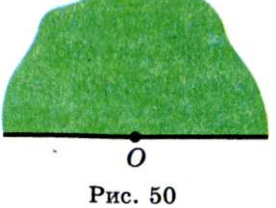


Рис. 50

Любая прямая делит плоскость на две **полуплоскости**, для которых эта прямая является **границей** (рис. 51). Считают, что прямая принадлежит каждой из двух полуплоскостей, для которых она является границей. А так как стороны развернутого угла образуют прямую, то можно также сказать, что развернутый угол — это полуплоскость, на границе которой отмечена точка — вершина угла.

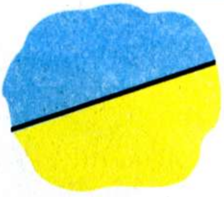


Рис. 51

Определение. **Два угла называют равными, если их можно совместить наложением.**

На рисунке 52 изображены равные углы ABC и MNK. Пишут: $\angle ABC = \angle MNK$.

Понятно, что все развернутые углы равны.

На рисунке 53 изображены угол AOB и луч OC, принадлежащий этому углу, но отличный от его сторон. Будем говорить, что луч *OC проходит между сторонами угла AOB* и делит его на два угла AOC и COB.

Определение. **Биссектрисой угла называют луч с началом в его вершине, делящий этот угол на два равных угла.**

На рисунке 54 луч OK — биссектриса угла AOB. Значит, $\angle AOK = \angle KOB$.

Вы знаете, что каждый угол имеет величину и для ее измерения нужно выбрать единицу измерения — **единичный**

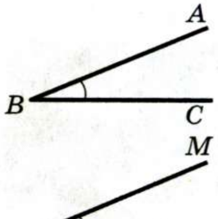


Рис. 52

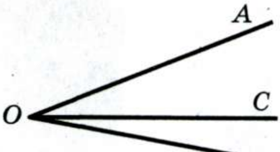


Рис. 53

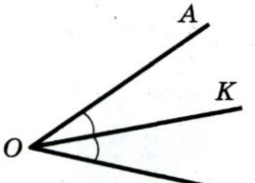


Рис. 54

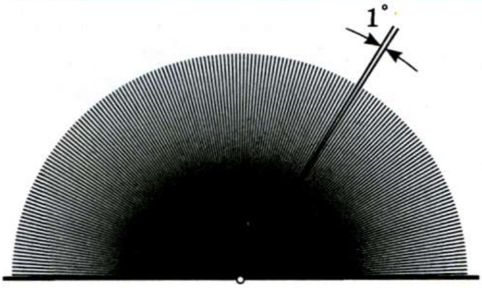


Рис. 55

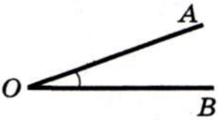


Рис. 56

угол. Выбрать его можно, например, так. Разделим развернутый угол на 180 равных углов (рис. 55). Угол, образованный двумя соседними лучами, принимают за единичный и называют **градусом**. Записывают: 1°.

Например, градусная мера (величина) угла AOB (рис. 56) равна 20° (этот факт легко установить с помощью транспортира). В таком случае говорят: «угол AOB равен 20°» и записывают: $\angle AOB = 20°$.

Очевидно, что градусная мера развернутого угла равна 180°, или коротко: развернутый угол равен 180°.

На практике, помимо транспортира, используют и другие приборы специального назначения: астролябию (рис. 57),

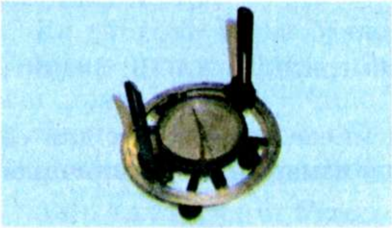


Рис. 57

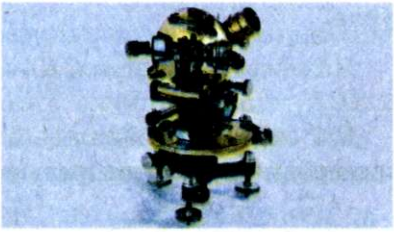


Рис. 58

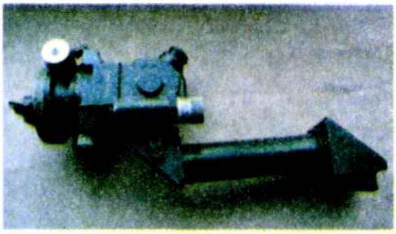


Рис. 59

Рис. 60

теодолит (рис. 58) — для измерения на местности; буссоль (рис. 59) — в артиллерии, секстант (рис. 60) — в морском деле.

Для более точных результатов измерения углов используют части градуса. $\frac{1}{60}$ градуса равна одной минуте ($1'$), т. е. $1° = 60'$. $\frac{1}{60}$ минуты называют секундой ($1''$), т. е. $1' = 60''$. Например, запись $23°15'11''$ означает, что градусная мера угла составляет 23 градуса 15 минут 11 секунд.

Существуют и другие единицы измерения углов, например, моряки используют единицу 1 румб ($11°15'$).

Определение. **Угол, градусная мера которого равна 90°, называют прямым. Угол, градусная мера которого меньше 90°, называют острым. Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°, называют тупым.**

На рисунке 61 изображены углы каждого из трех видов.

Острый угол Прямой угол Тупой угол

Рис. 61

Очевидно, что *равные углы имеют равные величины*, и наоборот, *если величины углов равны, то равны и сами углы*.

Если величина угла ABC больше величины угла MNP, то говорят, что «угол ABC больше угла MNP», и записывают $\angle ABC > \angle MNP$.

В дальнейшем, говоря «сумма углов», будем подразумевать сумму величин этих углов.

Основное свойство величины угла. **Если луч OC делит угол AOB на два угла AOC и COB, то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$** (рис. 62).

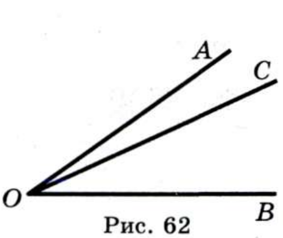


Рис. 62

Рис. 63

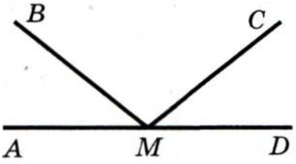


Рис. 64

В этом пункте вы познакомились с некоторыми приборами для измерения углов. На рисунке 63 изображен старинный угломерный прибор астролябия (в переводе с греческого — «схватывающая звезды»). Многие столетия именно такой прибор помогал мореплавателям находить верный путь, а астрономам — определять положение звезд.

Пример. На рисунке 64 $\angle AMC = \angle DMB$, $\angle BMC = 118^\circ$. Найдите угол AMB[1].

Решение.

$\angle AMC = \angle AMB + \angle BMC$,

$\angle DMB = \angle DMC + \angle BMC$.

Так как $\angle AMC = \angle DMB$, то $\angle AMB = \angle DMC$.

$\angle AMB + \angle BMC + \angle CMD = \angle AMD = 180^\circ$.

Тогда $2\angle AMB + 118^\circ = 180^\circ$; $\angle AMB = 31^\circ$.

Ответ: 31°.

?

1. Как называют фигуру, образованную точкой прямой и одной из частей, на которые эта точка делит прямую? Как при этом называют данную точку?
2. Как обозначают луч?
3. Какие два луча называют дополнительными?
4. Как называют фигуру, образованную двумя лучами с общим началом и одной из частей, на которые эти лучи делят плоскость? Как при этом называют данные лучи? их общее начало?
5. Как обозначают угол?

[1] Здесь и далее вместо «Найдите градусную меру угла...» будем говорить просто «Найдите угол...».

6. Какой угол называют развернутым?
7. Как называют части, на которые прямая делит плоскость?
8. Какие два угла называют равными?
9. Что называют биссектрисой угла?
10. В каких единицах измеряют углы?
11. Какова градусная мера развернутого угла?
12. Как называют угол, градусная мера которого равна $90°$?
13. Какой угол называют острым?
14. Какой угол называют тупым?
15. Каковы величины равных углов?
16. Что можно сказать об углах, величины которых равны?
17. Сформулируйте основное свойство величины угла.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

53.° Проведите два луча AB и AC так, чтобы они имели общее начало и не были дополнительными. Постройте для каждого из этих лучей дополнительный. Обозначьте и запишите все образовавшиеся лучи.

54.° Проведите отрезок AB и два луча AB и BA. Являются ли эти лучи дополнительными? Ответ обоснуйте.

55.° Начертите угол MNE и проведите лучи NA и NC между его сторонами. Запишите все образовавшиеся углы.

56.° Проведите лучи OA, OB, OC и OD так, чтобы луч OC проходил между сторонами угла AOB, а луч OD — между сторонами угла BOC.

57.• Начертите два луча так, чтобы их общая часть была: 1) точкой; 2) отрезком; 3) лучом.

УПРАЖНЕНИЯ

58.° Прямая EF пересекает прямые AB и CD (рис. 65). Укажите:

1) все образовавшиеся лучи с началом в точке M;
2) все пары дополнительных лучей с началом в точке K.

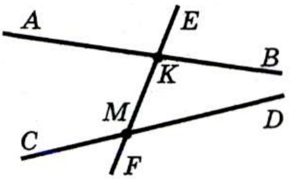


Рис. 65

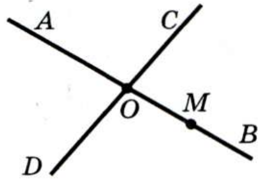


Рис. 66

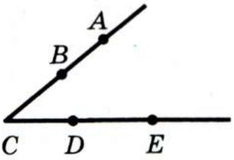


Рис. 67

59.° Запишите все лучи, изображенные на рисунке 66. Укажите, какие из них являются дополнительными лучами с началом в точке O.

60.° Можно ли угол, изображенный на рисунке 67, обозначить:

1) $\angle ABC$;
2) $\angle ACD$;
3) $\angle ADC$;
4) $\angle DCA$;
5) $\angle ACE$;
6) $\angle BCD$;
7) $\angle BDE$;
8) $\angle ECD$?

61.° Назовите все углы, изображенные на рисунке 68.

62.° На рисунке 69 $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD = \angle DOE = \angle EOF$.

1) Какой луч является биссектрисой угла AOC? угла DOF? угла BOF?
2) Биссектрисой каких углов является луч OC?

63.° Луч OC — биссектриса угла AOB. Можно ли совместить наложением:

1) углы AOC и BOC; 2) углы AOC и AOB?

64.° Луч BD делит угол ABC на два угла. Найдите:

1) угол ABC, если $\angle ABD = 54°$, $\angle CBD = 72°$;
2) угол CBD, если $\angle ABC = 158°$, $\angle ABD = 93°$.

65.° Луч OP проходит между сторонами угла MOK. Найдите угол MOP, если $\angle MOK = 172°$, $\angle POK = 85°$.

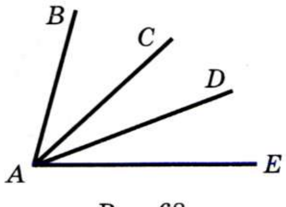


Рис. 68

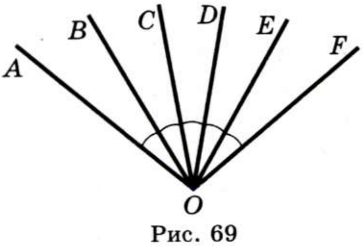


Рис. 69

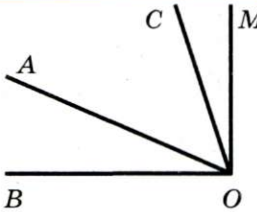


Рис. 70

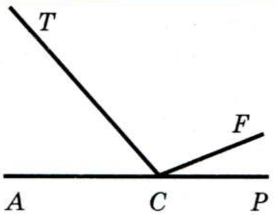


Рис. 71

66.° Верно ли утверждение:

1) любой угол, который меньше тупого, — острый;
2) угол, который меньше развернутого, — тупой;
3) половина тупого угла — острый угол;
4) сумма двух острых углов больше прямого угла;
5) половина развернутого угла больше любого острого угла;
6) угол, который больше прямого, — тупой?

67.° Из вершины прямого угла BOM (рис. 70) провели два луча OA и OC так, что $\angle BOC = 74°$, $\angle AOM = 62°$. Найдите угол AOC.

68.° Из вершины развернутого угла ACP (рис. 71) провели два луча CT и CF так, что $\angle ACF = 158°$, $\angle TCP = 134°$. Найдите угол TCF.

69.° Угол CEF равен $152°$, луч EM проходит между его сторонами, угол CEM на $18°$ больше угла FEM. Найдите углы CEM и FEM.

70.° Луч AK принадлежит углу BAD. Найдите углы BAK и DAK, если угол BAK в 7 раз меньше угла DAK и $\angle BAD = 72°$.

71.° На рисунке 72 равные углы отмечены дугами. Найдите каждый из изображенных углов, если в качестве единичного угла взять: 1) угол ABC; 2) угол MKE.

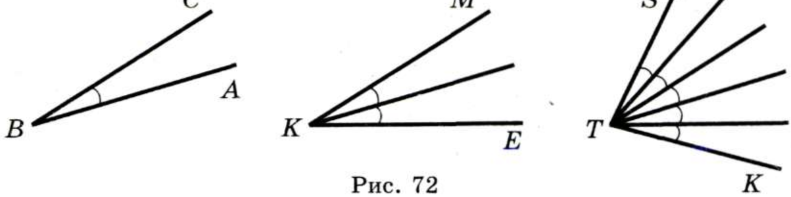


Рис. 72

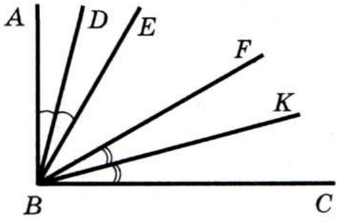


Рис. 73

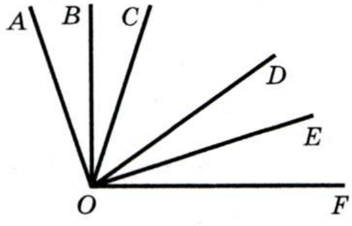


Рис. 74

72.$^{\bullet}$ Точки A, B и C расположены так, что $AB = 3{,}2$ см, $AC = 4{,}8$ см, $BC = 8$ см. Являются ли лучи AB и AC дополнительными?

73.$^{\bullet}$ На рисунке 73 угол ABC — прямой, $\angle ABE = \angle EBF = \angle FBC$, лучи BD и BK — биссектрисы углов ABE и FBC соответственно. Найдите угол DBK.

74.$^{\bullet}$ На рисунке 74 $\angle AOC = \angle COD = \angle DOF$, луч OB — биссектриса угла AOC, луч OE — биссектриса угла DOF, $\angle BOE = 72^\circ$. Найдите угол AOF.

75.$^{\bullet}$ На рисунке 75 $\angle AOB = \angle DOC$. Есть ли еще на этом рисунке равные углы? Ответ обоснуйте.

76.$^{\bullet}$ Углы FOK и MOE равны (рис. 76). Равны ли углы FOM и KOE?

77.$^{\bullet}$ Луч BK является биссектрисой угла CBD, $\angle ABK = 146^\circ$ (рис. 77). Найдите угол CBD.

78.$^{\bullet}$ Луч BK является биссектрисой угла CBD, $\angle CBD = 54^\circ$ (рис. 77). Найдите угол ABK.

79.$^{\bullet}$ На сколько градусов поворачивается за 1 мин: 1) минутная стрелка; 2) часовая стрелка?

80.$^{\bullet}$ Найдите угол между стрелками часов, если они показывают: 1) 3 ч; 2) 6 ч; 3) 4 ч; 4) 11 ч; 5) 7 ч.

81.$^{\bullet\bullet}$ Угол ABC равен 30°, угол CBD — 80°. Найдите угол ABD. Сколько решений имеет задача?

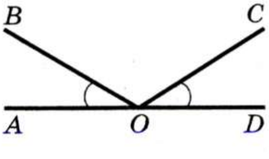


Рис. 75

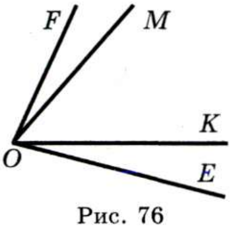


Рис. 76

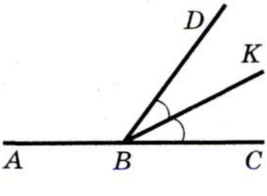


Рис. 77

82.•• Найдите угол MOK, если $\angle MON = 120°$, $\angle KON = 43°$. Сколько решений имеет задача?

83.•• Луч, проведенный из вершины прямого угла, делит его на два угла. Докажите, что угол между биссектрисами образовавшихся углов равен 45°.

84.•• Как, имея шаблон угла, равный 70°, построить угол, равный 40°?

85.•• Как, имея шаблон угла, равный 40°, построить угол, равный: 1) 80°; 2) 160°; 3) 20°?

86.* Как, используя шаблон угла, равный 13°, построить угол, равный 2°?

87.* Как построить угол, равный 1°, используя шаблон угла, равный: 1) 19°; 2) 7°?

88.* Проведите 6 прямых, пересекающихся в одной точке. Верно ли, что среди образовавшихся при этом углов есть угол, который меньше 31°?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

89. Не отрывая карандаш от бумаги, проведите через девять точек (рис. 78) 4 отрезка (возвращаться в исходную точку не обязательно).

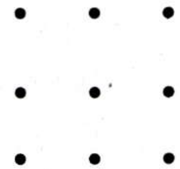


Рис. 78

4. Смежные и вертикальные углы

Определение. **Два угла называют смежными, если у них одна сторона общая, а две другие являются дополнительными лучами.**

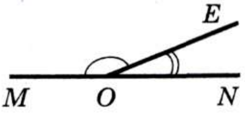


Рис. 79

На рисунке 79 углы MOE и EON — смежные.

Теорема 4.1. ***Сумма смежных углов равна* 180°.**

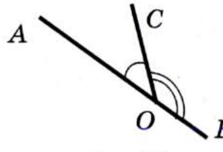


Рис. 80

Доказательство. ⊙ Пусть углы AOC и COB — смежные (рис. 80). Надо доказать, что $\angle AOC + \angle COB = 180°$.

Так как углы AOC и COB смежные, то лучи OA и OB являются дополнительными. Тогда $\angle AOB$ — развернутый. Следовательно, $\angle AOB = 180^\circ$. Луч OC принадлежит углу AOB. По основному свойству величины угла имеем: $\angle AOC + \angle COB = \angle AOB = 180^\circ$. ▲

Определение. **Два угла называют вертикальными, если стороны одного угла являются дополнительными лучами сторон другого.**

На рисунке 81 углы AOB и COD — вертикальные.

Очевидно, что при пересечении двух прямых образуются две пары вертикальных углов. На рисунке 81 углы AOC и BOD — также вертикальные.

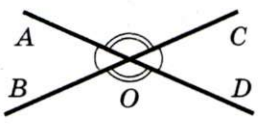


Рис. 81

Теорема 4.2. ***Вертикальные углы равны.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 82 углы 1 и 2 — вертикальные. Надо доказать, что $\angle 1 = \angle 2$.

Каждый из углов 1 и 2 смежный с углом 3. Тогда $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$. Отсюда $\angle 1 = 180^\circ - \angle 3$ и $\angle 2 = 180^\circ - \angle 3$. Градусные меры углов 1 и 2 равны, а значит, равны и сами углы. ▲

Пример. На рисунке 83 $\angle ABE = \angle DCP$. Докажите, что $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$.

Решение. $\angle DCP + \angle BCP = 180^\circ$, так как $\angle DCP$ и $\angle BCP$ — смежные;

$\angle DCP = \angle ABE$ по условию;

углы ABE и FBC равны как вертикальные.

Следовательно, $\angle DCP = \angle FBC$, и тогда $\angle FBC + \angle BCP = 180^\circ$.

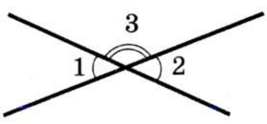


Рис. 82

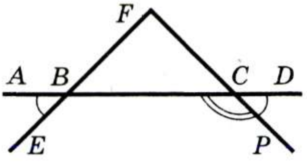


Рис. 83

1. Какие два угла называют смежными?
2. Чему равна сумма смежных углов?
3. Какие два угла называют вертикальными?
4. Сформулируйте теорему о свойстве вертикальных углов.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

90.° Начертите три угла: острый, прямой и тупой. Для каждого из них постройте смежный угол.

91.° Начертите два неравных смежных угла так, чтобы их общая сторона была вертикальной.

УПРАЖНЕНИЯ

92.° Укажите пары смежных углов (рис. 84).

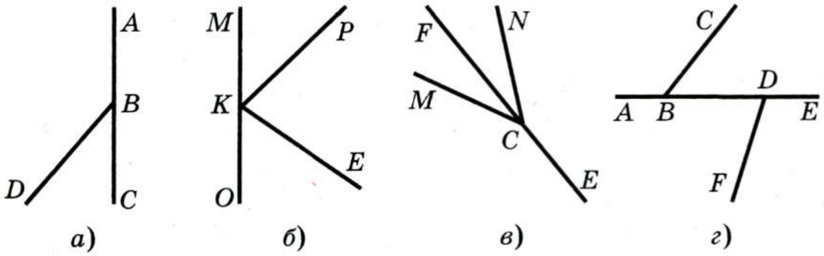


Рис. 84

93.° Являются ли углы ABC и DBE вертикальными (рис. 85)?

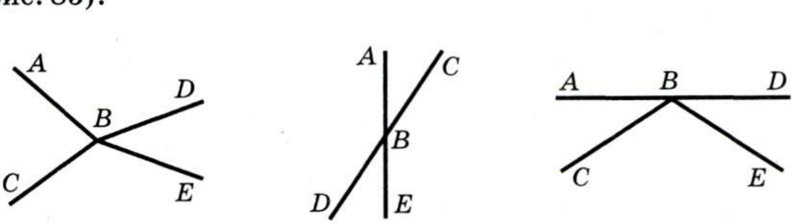


Рис. 85

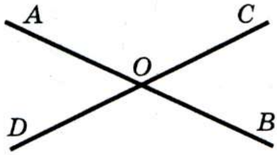


Рис. 86

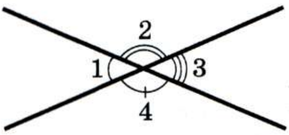


Рис. 87

94.° Сколько пар смежных углов изображено на рисунке 86? Назовите их. Укажите пары вертикальных углов.

95.° Могут ли два смежных угла быть равными:
1) 24° и 156°; 2) 63° и 107°? Ответ обоснуйте.

96.° Найдите угол, смежный с углом:
1) 29°; 2) 84°; 3) 98°; 4) 135°.

97.° Может ли пара смежных углов состоять:
1) из двух острых углов;
2) из двух тупых углов;
3) из прямого и тупого углов;
4) из прямого и острого углов?

98.° Один из смежных углов — прямой. Каким является второй угол?

99.° Найдите угол, смежный с углом ABC, если:
1) $\angle ABC = 36°$;
2) $\angle ABC = 102°$.

100.° Найдите углы 2, 3 и 4 (рис. 87), если $\angle 1 = 42°$.

101.° Найдите смежные углы, если:
1) один из них на 70° больше второго;
2) один из них в 8 раз меньше второго;
3) их градусные меры относятся как 3 : 2.

102.° Найдите смежные углы, если:
1) один из них в 17 раз больше второго;
2) их градусные меры относятся как 19 : 26.

103.° Верно ли утверждение:
1) для каждого угла можно построить только один вертикальный угол;
2) для каждого угла можно построить только один смежный угол;
3) если углы равны, то они вертикальные;
4) если углы не равны, то они не вертикальные;
5) если углы не вертикальные, то они не равны;

6) если два угла смежные, то один из них острый, а второй — тупой;
7) если два угла смежные, то один из них больше другого;
8) если сумма двух углов равна $180°$, то они смежные;
9) если сумма двух углов не равна $180°$, то они не смежные;
10) если два угла равны, то смежные с ними углы также равны;
11) если смежные углы равны, то они прямые;
12) если равные углы имеют общую вершину, то они вертикальные;
13) если два угла имеют общую сторону, то они смежные?

104.• Сумма двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна $140°$. Докажите, что эти углы — вертикальные.

105.• Найдите углы, образованные в результате пересечения двух прямых, если:

1) сумма двух из них равна $106°$;
2) сумма трех из них равна $305°$.

106.• Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если разность двух из них равна $64°$.

107.• Три прямые пересекаются в одной точке (рис. 88). Найдите сумму $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$.

108.• Прямые AB, CD и MK пересекаются в точке O (рис. 89), $\angle AOC = 70°$, $\angle MOB = 15°$. Найдите $\angle DOK$, $\angle AOM$ и $\angle AOD$.

109.• Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

110.• Найдите угол между биссектрисами вертикальных углов.

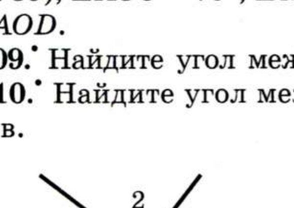


Рис. 88

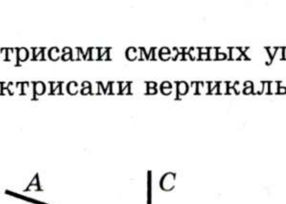


Рис. 89

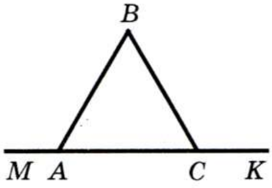


Рис. 90

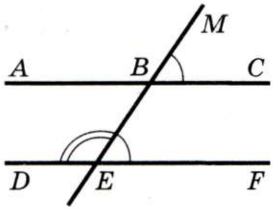


Рис. 91

111.• Углы ABF и FBC — смежные, $\angle ABF = 80°$, луч BD принадлежит углу ABF, $\angle ABD = 30°$. Найдите угол между биссектрисами углов DBF и FBC.

112.• Углы AOB и BOC — смежные, луч OD — биссектриса угла AOB, угол BOD на $18°$ меньше угла BOC. Найдите углы AOB и BOC.

113.• Найдите смежные углы MKE и PKE, если угол FKE на $24°$ больше угла PKE, где луч KF — биссектриса угла MKE.

114.• На рисунке 90 $\angle MAB + \angle ACB = 180°$. Докажите, что $\angle MAB = \angle KCB$.

115.• На рисунке 91 $\angle MBC = \angle BEF$. Докажите, что $\angle ABE + \angle BED = 180°$.

116.•• Два угла имеют общую сторону, а их сумма равна $180°$. Являются ли эти углы смежными?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

117. Разделите фигуру, изображенную на рисунке 92, на 6 частей двумя прямыми.

Рис. 92

5. Перпендикулярные прямые

При пересечении двух прямых a и b образовалось 4 угла (рис. 93). Легко показать (сделайте это самостоятельно), что если один из углов прямой (например, угол 1), то и углы 2, 3 и 4 также прямые.

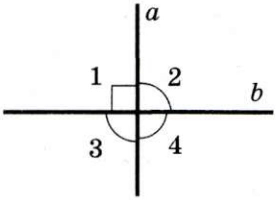


Рис. 93

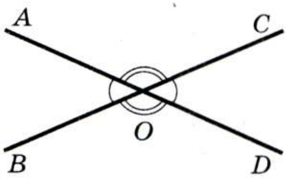


Рис. 94

Определение. **Две прямые называют перпендикулярными, если при пересечении они образуют прямые углы.**

На рисунке 93 прямые a и b — перпендикулярные. Пишут: $a \perp b$ или $b \perp a$.

На рисунке 94 прямые AD и BC не перпендикулярны. Они при пересечении образовали пару равных острых углов и пару равных тупых углов. Величину острого угла называют **углом между прямыми** AD и BC.

Если прямые перпендикулярны, то считают, что угол между ними равен 90°.

Определение. **Два отрезка называют перпендикулярными, если они лежат на перпендикулярных прямых.**

На рисунке 95 отрезки AB и CD — перпендикулярные. Пишут: $AB \perp CD$.

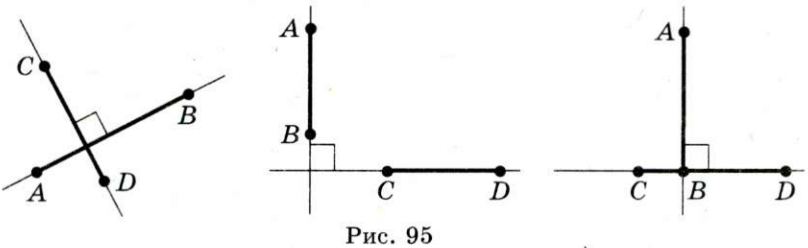


Рис. 95

Также можно говорить о перпендикулярности двух лучей, луча и отрезка, прямой и луча, отрезка и прямой. Например, на рисунке 96 изображены перпендикулярные отрезок CD и луч AB.

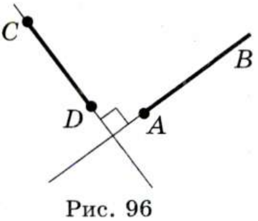


Рис. 96

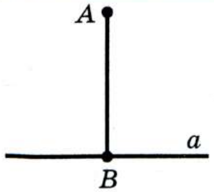


Рис. 97

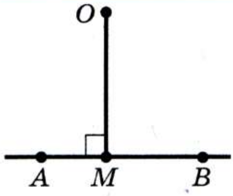


Рис. 98

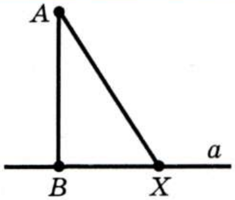


Рис. 99

На рисунке 97 изображена прямая a и перпендикулярный ей отрезок AB, конец B которого принадлежит прямой a. В таком случае говорят, что из точки A на прямую a **опустили перпендикуляр** AB. Точку B называют **основанием перпендикуляра** AB.

Длину перпендикуляра AB называют **расстоянием от точки A до прямой a**. Если точка A принадлежит прямой a, то естественно считать, что расстояние от точки A до прямой a равно нулю.

На рисунке 98 изображен перпендикуляр OM, опущенный из точки O на прямую AB. Точка M, его основание, принадлежит отрезку AB (лучу AB). В таких случаях длину этого перпендикуляра также называют расстоянием от точки O до отрезка AB (луча AB)[1].

Если точка принадлежит отрезку (лучу), то естественно считать, что расстояние от этой точки до отрезка (луча) равно нулю.

Опустим из точки A на прямую a перпендикуляр AB (рис. 99). Пусть X — произвольная точка прямой a, отличная от точки B. Отрезок AX называют **наклонной**, проведенной из точки A к прямой a.

Теорема 5.1. ***Через каждую точку прямой проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.***

Доказательство. ⊙ Отметим на прямой AB произвольную точку M и построим прямой угол CMB (рис. 100). Тогда $CM \perp AB$.

[1] Случай, когда точка M не принадлежит отрезку AB, будет рассмотрен в старших классах.

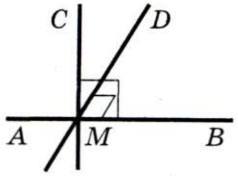


Рис. 100

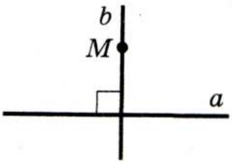


Рис. 101

Предположим, что через точку M проходит еще одна прямая MD, отличная от CM и перпендикулярная прямой AB.

Рассмотрим случай, когда луч MD принадлежит углу CMB. Тогда по основному свойству величины угла $\angle CMB = \angle CMD + \angle DMB$. Отсюда $\angle CMB > \angle DMB$. Однако $\angle CMB = \angle DMB = 90°$. Следовательно, наше предположение неверно.

Аналогично рассматривают случай, когда луч MC принадлежит углу DMB. ▲

Вы умеете через произвольную точку M, не принадлежащую прямой a, проводить прямую b, перпендикулярную прямой a (рис. 101). То, что прямая b единственна, докажем в п. 7.

?

1. Если при пересечении двух прямых один из образовавшихся углов — прямой, то какими являются остальные углы?

2. Какие две прямые называют перпендикулярными?

3. Каким символом обозначают перпендикулярные прямые?

4. Как читают запись $m \perp n$?

5. Какие два отрезка называют перпендикулярными?

6. Что называют расстоянием от точки до прямой?

7. Сколько через каждую точку прямой можно провести прямых, перпендикулярных данной?

8. Что называют углом между двумя пересекающимися прямыми?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

118.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 102. Проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой a.

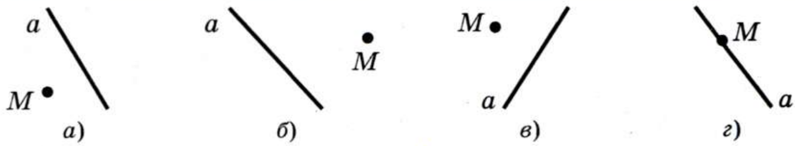


Рис. 102

119.° Проведите прямую d и отметьте точку M, не принадлежащую ей. С помощью угольника проведите через точку M прямую, перпендикулярную прямой d.

120.° Проведите прямую c и отметьте на ней точку K. Пользуясь угольником, проведите через точку K прямую, перпендикулярную прямой c.

121.° Начертите угол ABK, равный: 1) 73°; 2) 146°. Отметьте на луче BK точку C и проведите через нее прямые, перпендикулярные прямым AB и BK.

122.° Начертите два перпендикулярных отрезка так, чтобы они: 1) пересекались; 2) не имели общих точек; 3) имели общий конец.

123.° Начертите два перпендикулярных луча так, чтобы они: 1) пересекались; 2) не имели общих точек.

УПРАЖНЕНИЯ

124.° На рисунке 103 прямые AC и DK — перпендикулярные. Перпендикулярны ли:

1) отрезки AB и BK; 3) лучи BC и BK;
2) отрезки BC и DF; 4) отрезок AB и луч FD?

125.° Может ли угол между прямыми быть равным:

1) 1°; 3) 90°; 5) 101°?
2) 80°; 4) 92°;

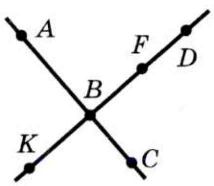


Рис. 103

126.• Докажите, что если биссектрисы углов AOB и BOC перпендикулярны, то точки A, O и C лежат на одной прямой.

127.• На рисунке 104 $AB \perp CD$, $\angle COK = 42°$, $\angle MOC + \angle BOK = 130°$. Найдите:

1) $\angle MOK$;
2) $\angle MOD$.

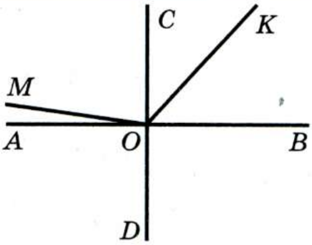


Рис. 104

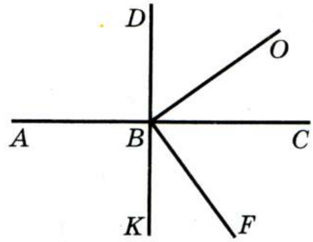


Рис. 105

128.[•] На рисунке 105 $AC \perp DK$, $OB \perp BF$, $\angle DBO = 54°$. Найдите угол ABF.

129.[•] Угол ABC равен $160°$, лучи BK и BM проходят между сторонами этого угла и перпендикулярны им. Найдите угол MBK.

130.[•] На рисунке 106 $BF \perp AC$, $BD \perp BK$. Докажите, что $\angle ABD = \angle FBK$.

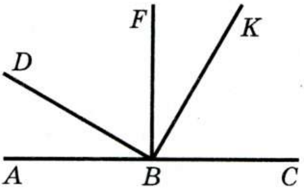


Рис. 106

131.[•] На рисунке 106 $\angle ABD = \angle FBK$, $\angle DBF = \angle KBC$. Докажите, что $BF \perp AC$.

132.[••] Из вершины угла ABC, равного $70°$, проведены лучи BD и BF так, что $BD \perp BA$, $BF \perp BC$, лучи BD и BC принадлежат углу ABF. Найдите углы DBF и ABF.

133.[*] Пользуясь угольником и шаблоном угла $17°$, постройте угол, равный: 1) $5°$; 2) $12°$.

134.[*] Пользуясь угольником и шаблоном угла $20°$, постройте угол, равный $10°$.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

135. На рисунке 107 прямая пересекает все стороны восьмиугольника. Может ли прямая пересекать все стороны тринадцатиугольника, не проходя ни через одну из его вершин?

Рис. 107

6. Аксиомы

В предыдущих пунктах были доказаны пять теорем. Каждый раз, доказывая новое свойство фигуры, мы опирались на ранее известные геометрические факты. Например, при доказательстве теоремы о вертикальных углах было использовано свойство смежных углов. Руководствуясь этим принципом, мы докажем еще много новых теорем. Но уже сейчас, на начальном этапе изучения геометрии, возникает естественный вопрос: если свойства геометрических фигур изучают по принципу «новое из старого», то должны существовать первоначальные факты, и тогда на чем основано их доказательство? Ведь до них никаких истинных утверждений нет. Решить эту проблему можно единственным способом: принять первые свойства без доказательств. Так и поступают математики. Эти свойства называют **аксиомами**.

В качестве аксиом выбирают утверждения, которые просты, очевидны, не вызывают сомнений. Ведь недаром слово «аксиома», происходящее от греческого «*аксиос*», означает «достойное признания».

Некоторые аксиомы были сформулированы в предыдущих пунктах. Они назывались основными свойствами и были напечатаны **синим** цветом. Часть аксиом мы не выделяли каким-то специальным образом, а просто формулировали как наглядно очевидные утверждения. Так, в п. 2 были сформулированы такие аксиомы:

для любых двух точек M и N существует единственный отрезок, для которого эти точки являются концами, и **каждый отрезок имеет определенную длину**.

Мы опирались и на некоторые другие истинные утверждения, принятые без доказательства, т. е. по сути аксиомы, но не сформулированные в явном виде. Например, в п. 1, описывая рисунок 13, мы фактически использовали такую аксиому:

какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей.

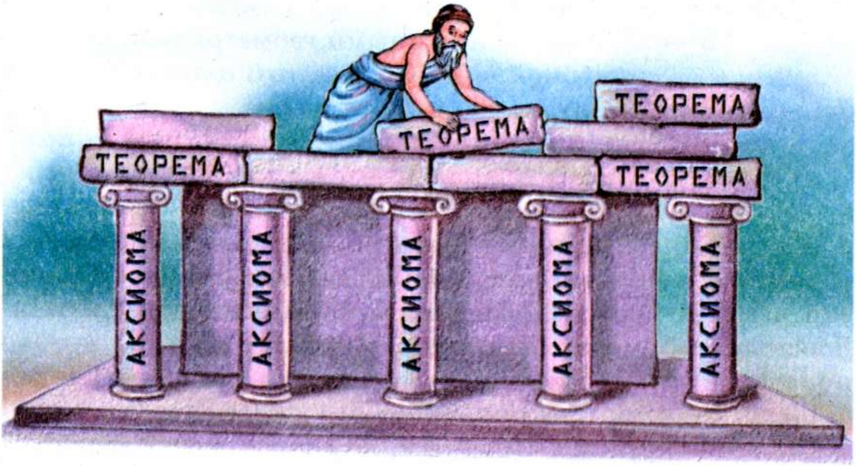


Рис. 108

Аксиомы используют не только в математике. Нередко в обыденной жизни любое истинное утверждение называют аксиомой. Например, говорят: «После марта наступит апрель. Это аксиома».

Аксиомы возникают не только из практики или наблюдений.

Для любого гражданина Украины Конституция — это список аксиом. Поэтому аксиому можно рассматривать как закон или правило. Но законы (правила игры) принимают, т. е. они возникают в результате договоренности людей между собой. Следовательно, и аксиомы геометрии можно рассматривать как утвержденные правила, на основании которых геометры, как каменщики, строят здание науки (рис. 108).

Тогда у вас может возникнуть вопрос: «Неужели на геометрию можно смотреть как на игру, например такую, как шахматы?» В какой-то степени — да. Но при этом надо четко понимать, что шахматные правила, а значит и сама игра, возникли благодаря человеческой фантазии. Вместе с тем геометрические правила (аксиомы) возникли из практики и наблюдений. Поэтому геометрия, в отличие от шахмат, используется очень широко.

Если вы изберете профессию математика, то сможете познакомиться с совершенно иными геометриями, отличающимися от изучаемой в школе тем, что они строятся на аксиомах-фантазиях.

ИЗ ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИИ

Когда и где возникли первые геометрические сведения? Специалисты на этот вопрос не отвечают однозначно. Одни считают, что первооткрывателями были египетские и вавилонские землемеры, жившие за 4000 лет до н. э., другие полагают, что геометрия зародилась в Древнем Египте 5000 лет назад.

Может показаться странным, но вопрос, когда возникла **наука геометрия**, не вызывает споров. Историки отвечают не с точностью до тысячелетий, а едины во мнении, указывая VI в. до н. э. Такое единодушие, на первый взгляд, может удивить: ведь до VI в. до н. э. народы Древнего мира накопили огромный объем геометрических знаний. Например, совершенно очевидно, что без геометрического опыта египтяне не подарили бы миру одно из «семи чудес» — пирамиды. И все-таки, почему обилие геометрических фактов неравносильно существованию геометрической науки?

Древний папирус

Египетские пирамиды

Геометрия стала называться наукой лишь тогда, когда ее истины начали устанавливать путем доказательства.

Появление «доказательной геометрии» связано с именем первого из «семи мудрецов» — Фалеса Милетского[1] (ок. 625–547 г. до н. э.) — филосо-

[1] Милет — порт в Малой Азии на побережье Эгейского моря.

фа, ученого, купца и государственного деятеля.

Задолго до Фалеса было известно, что вертикальные углы равны, диаметр делит круг на две равные части. Никто в истинности этих фактов не сомневался. А Фалес доказал их, тем самым прославив себя.

Фалес Милетский

В VI–III вв. до н. э., благодаря ученым Древней Греции, таким как Пифагор, Евдокс, Архит, Теэтет, Евклид, Архимед, геометрия из прикладной науки превратилась в математическую теорию.

Книгу, по которой учили геометрию более 2000 лет, без преувеличения можно назвать великой. Ее название «Начала», ее автор Евклид (ок. 365–300 г. до н. э.). К сожалению, о самом Евклиде мало что известно. В таких случаях личность обрастает легендами, одна из которых очень поучительна. Царь Птолемей I спросил Евклида, существует ли более простой путь познания геометрии, чем изложенный в «Началах». Евклид ответил: «В геометрии нет царских дорог».

Евклид

А какой же путь в геометрию избрал Евклид в своих «Началах»? Аксиоматический. В фундаменте науки — список простейших фактов. Их называют постулатами[1] и аксиомами. Затем на их основе путем логических рассуждений доказывают все другие свойства — теоремы.

Постулатов у Евклида пять. Приведем первые четыре.

I постулат. Требуется, чтобы от каждой точки ко всякой другой точке можно было провести прямую линию.

[1] От латинского *postulatum* — требование.

II постулат. И чтобы каждую прямую можно было неограниченно продолжить.

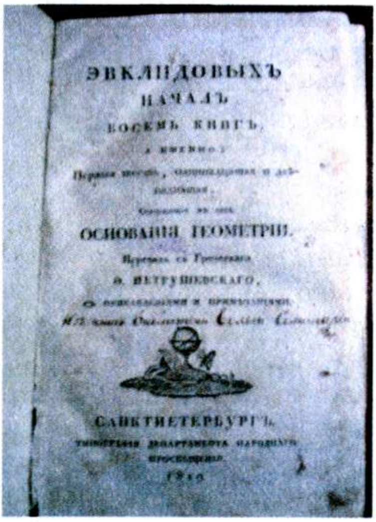
III постулат. И чтобы из любого центра можно было описать окружность любого радиуса.

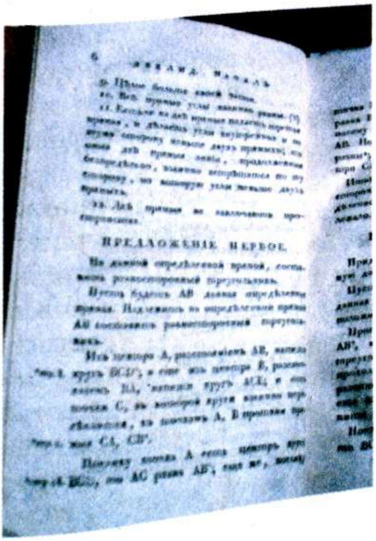
IV постулат. И чтобы все прямые углы были равны.

О пятом постулате мы расскажем после п. 14.

По популярности с «Началами» Евклида может сравниться разве что Библия. Так, еще в конце XIX века в ряде европейских стран геометрию преподавали по упрощенным изданиям «Начал».

И сейчас геометрия, которую изучают в школе, во многом следует идеям Евклида.


ЭВКЛИДОВЫХЪ
НАЧАЛЪ
ВОСЕМЬ КНИГЪ,
ОСНОВАНІЯ ГЕОМЕТРІИ.
САНКТПЕТЕРБУРГЪ


ПРЕДЛОЖЕНІЕ ПЕРВОЕ.

«Начала» Евклида

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - аксиома, теорема, определение;
  - пересекающиеся прямые;
  - равные отрезки и равные углы;
  - дополнительные лучи;
  - развернутый угол, прямой угол, острый угол, тупой угол;
  - биссектриса угла;
  - смежные и вертикальные углы;
  - перпендикулярные прямые, отрезки, лучи;
  - перпендикуляр;
  - расстояние от точки до прямой;

- вы изучили:
  - основное свойство прямой;
  - основные свойства длины отрезка и величины угла;
  - теоремы о свойствах пересекающихся прямых, смежных и вертикальных углов;
  - теорему о единственности прямой, перпендикулярной данной и проходящей через ее заданную точку;

- вы ознакомились:
  - с единицами измерения длины отрезка и величины угла;
  - с приборами для измерения длины отрезка и величины угла;

- вы узнали, как строится наука геометрия.

ЗАДАНИЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Сколько прямых определяют 3 точки, не лежащие на одной прямой?

А) 2; Б) 4; В) 3; Г) 1.

2. Сколько можно провести отрезков, содержащих 2 заданные точки?

А) 1; Б) 2; В) 3; Г) бесконечно много.

3. Точка M является внутренней точкой отрезка PQ. Какое из следующих утверждений истинно?

А) $PM + MQ = PQ$; В) $MQ = PQ + PM$;
Б) $PQ > PM + MQ$; Г) $PM = PQ + MQ$.

4. Точка C не принадлежит прямой AB. Какое из следующих утверждений неверно?

А) $AC < AB + CB$; В) $AB = AC + CB$;
Б) $CB < AB + AC$; Г) $AB < AC + CB$.

5. Длина отрезка AB равна 12 см. Сколько существует на прямой AB точек, для которых сумма расстояний до концов отрезка AB равна 14 см?

А) Бесконечно много; В) 2;
Б) 1; Г) ни одной.

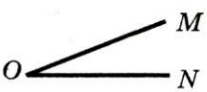
6. Длина отрезка AB равна 12 см. Сколько существует на прямой AB точек, для которых сумма расстояний до концов отрезка AB равна 12 см?

А) Ни одной; В) бесконечно много;
Б) 2; Г) 1.

7. Два луча являются дополнительными, если:

А) они имеют общее начало;
Б) их объединением является прямая и они имеют общее начало;
В) они принадлежат одной прямой;
Г) их объединением является прямая.

8. Какое обозначение угла, изображенного на рисунке, является неверным?



А) $\angle O$; Б) $\angle OMN$; В) $\angle MON$; Г) $\angle NOM$.

9. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Смежные углы имеют общую вершину;

Б) смежные углы имеют общую сторону;

В) всегда один из смежных углов острый, а другой — тупой;

Г) если углы AOC и COB — смежные, то лучи OA и OB — дополнительные.

10. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Вертикальные углы равны;

Б) если углы равны, то они вертикальны;

В) вертикальные углы имеют общую вершину;

Г) стороны вертикальных углов образуют две пары дополнительных лучей.

11. Какое из следующих утверждений истинно?

А) Перпендикулярные отрезки всегда имеют общую точку;

Б) перпендикулярные лучи всегда имеют общую точку;

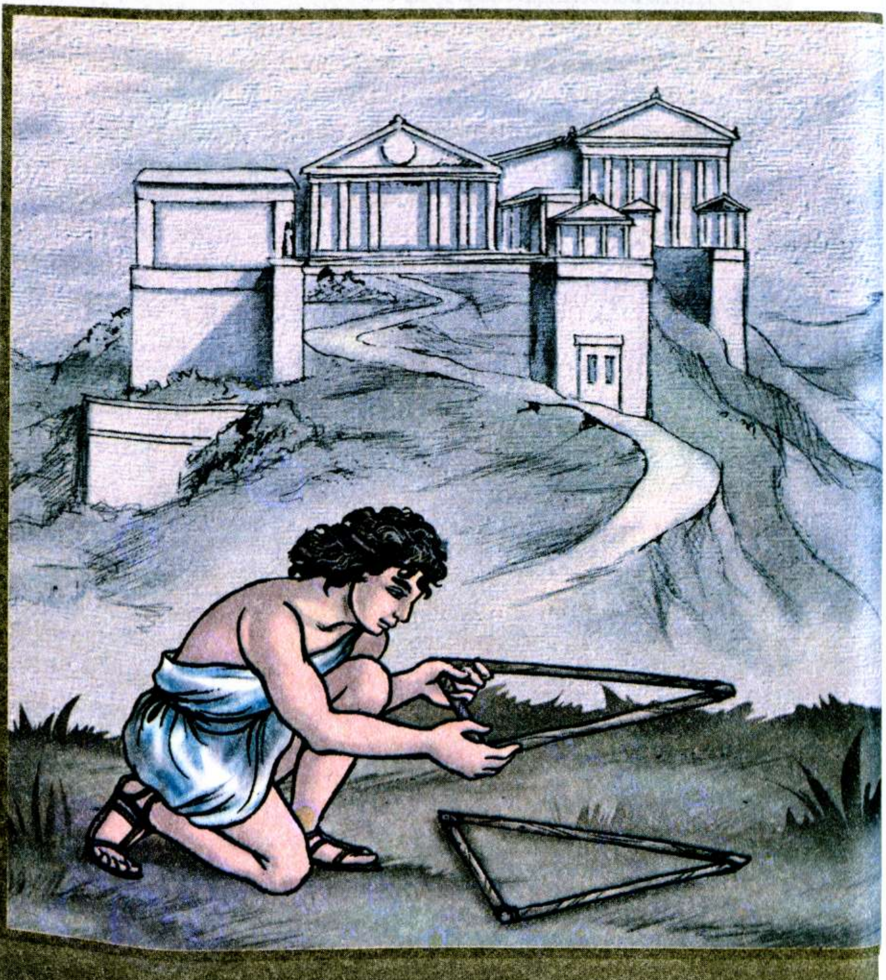
В) перпендикулярные прямые всегда имеют общую точку;

Г) перпендикулярные луч и отрезок всегда имеют общую точку.

§2 ТРЕУГОЛЬНИКИ

Как, не накладывая треугольники один на другой, узнать, что они равны? Какими особыми свойствами обладают равнобедренный и равносторонний треугольники? Как «устроена» теорема?

На эти и многие другие вопросы вы найдете ответы в данном параграфе.



7. Равные треугольники. Высота, медиана, биссектриса треугольника

Рассмотрим три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Соединим их отрезками AB, BC, CA. Полученная фигура ограничивает часть плоскости, выделенную на рисунке 109 зеленым цветом. Эту часть плоскости вместе с отрезками AB, BC и CA называют **треугольником**. Точки A, B, C называют **вершинами**, а отрезки AB, BC, CA — **сторонами** треугольника.

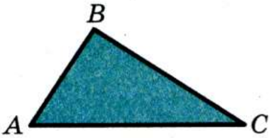


Рис. 109

Треугольник называют и обозначают по его вершинам. Треугольник, изображенный на рисунке 109, обозначают так: $\triangle ABC$, или $\triangle BCA$, или $\triangle ACB$ и т. д. (читают: «треугольник ABC, треугольник BCA» и т. д.). Углы BAC, ABC, BCA (рис. 110) называют **углами треугольника** ABC.

В треугольнике ABC, например, угол B называют углом, *противолежащим стороне* AC, углы A и C — углами, *прилежащими к стороне* AC, сторону AC — *стороной, противолежащей углу* B, стороны AB и AC — *сторонами, прилежащими к углу* A (рис. 110).

Определение. **Периметром треугольника называют сумму длин всех его сторон.**

Например, для периметра треугольника MNK используют обозначение P_{MNK}.

Определение. **Треугольник называют прямоугольным, если один из его углов прямой; тупоугольным, если один из его углов тупой. Если все углы острые, то треугольник называют остроугольным** (рис. 111).

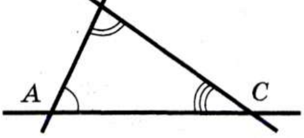


Рис. 110

Рис. 111

Т е о р е м а 7.1 (н е р а в е н с т в о т р е у г о л ь н и к а). ***Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. ⊙ Рассмотрим ΔABC (рис. 109). Точка C не принадлежит отрезку AB. Тогда в силу основного свойства длины отрезка $AB < AC + CB$. Аналогично доказывают остальные два неравенства: $AC < AB + BC$, $BC < BA + AC$. ▲

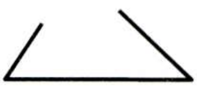


Рис. 112

Из доказанной теоремы следует, что если длина одного из трех данных отрезков не меньше суммы длин двух других, то эти отрезки не могут служить сторонами треугольника (рис. 112).

В п. 23 будет показано, что если любой из трех данных отрезков меньше суммы двух других, то эти отрезки могут служить сторонами треугольника.

О п р е д е л е н и е. **Два треугольника называют р а в н ы м и, если их можно совместить наложением.**

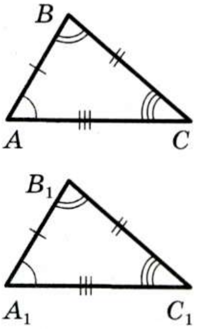


Рис. 113

На рисунке 113 изображены равные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Записывают: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Эти треугольники можно совместить так, что вершины A и A_1, B и B_1, C и C_1 совпадут. Тогда можно записать: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$.

Те стороны и те углы, которые совмещаются при наложении треугольников, называют **соответственными сторонами** и **соответственными углами**. Так, на рисунке 113 углы A и A_1, стороны AC и A_1C_1 — соответственные.

Обычно на рисунках равные стороны отмечают одинаковым количеством черточек, а равные углы — одинаковым количеством дуг. На рисунке 113 таким способом отмечены соответственные стороны и углы.

Заметим, что в равных треугольниках против соответственных углов лежат соответственные стороны, и наоборот: против соответственных сторон лежат соответственные углы.

То, что для каждого треугольника существует равный ему треугольник, обеспечивает такое

Основное свойство равенства треугольников. **Для данного треугольника ABC и луча A_1M существует треугольник $A_1B_1C_1$, равный треугольнику ABC, такой, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ и сторона A_1B_1 принадлежит лучу A_1M, а вершина C_1 лежит в заданной полуплоскости относительно прямой A_1M** (рис. 114).

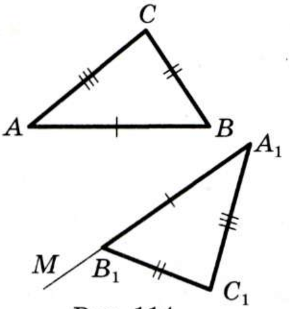


Рис. 114

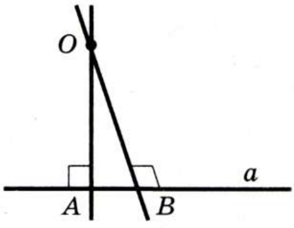


Рис. 115

Теорема 7.2. ***Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только одна прямая, перпендикулярная данной.***

Доказательство. ⊖ Рассмотрим прямую a и не принадлежащую ей точку O (рис. 115). Предположим, что через точку O проходят две прямые OA и OB, перпендикулярные прямой a.

В силу основного свойства равенства треугольников существует треугольник O_1AB, равный треугольнику OAB (рис. 116). Тогда $\angle OAB = \angle O_1AB = 90°$. Отсюда $\angle OAO_1 = 180°$, а значит, точки O, A, O_1 лежат на одной прямой. Аналогично доказывают, что точки O, B, O_1 также лежат на одной прямой. Но тогда прямые OA и OB имеют две точки пересечения: O и O_1. А это противоречит теореме 1.1. Следовательно, наше предположение неверно. ▲

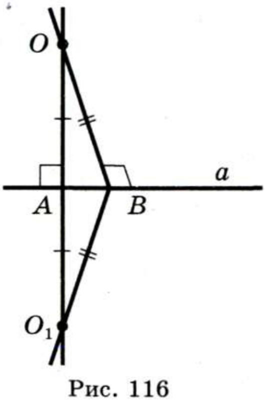


Рис. 116

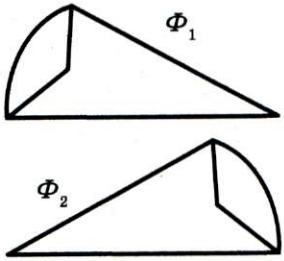


Рис. 117

Возможно, вы заметили, что определения равных отрезков, равных углов и равных треугольников очень похожи. Поэтому целесообразно принять следующее

Определение. **Две фигуры называют равными, если их можно совместить наложением.**

На рисунке 117 изображены равные фигуры Φ_1 и Φ_2. Пишут: $\Phi_1 = \Phi_2$.

Понятно, что любые две прямые (два луча, две точки) равны.

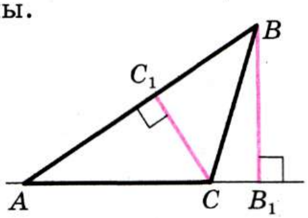


Рис. 118

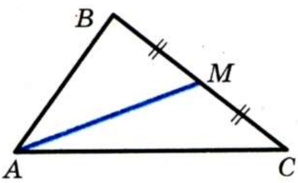


Рис. 119

Определение. **Перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону, называют высотой треугольника.**

На рисунке 118 отрезки BB_1 и CC_1 — высоты треугольника ABC.

Определение. **Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называют медианой треугольника.**

На рисунке 119 отрезок AM — медиана треугольника ABC.

Определение. **Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называют биссектрисой треугольника.**

На рисунке 120 отрезок BL — биссектриса треугольника ABC.

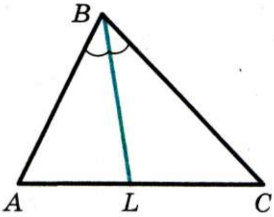


Рис. 120

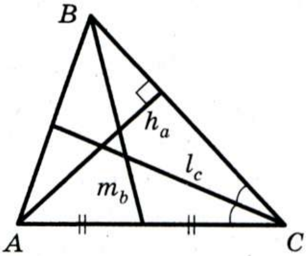


Рис. 121

Далее, говоря «биссектриса угла треугольника», будем иметь в виду биссектрису треугольника, проведенную из вершины этого угла.

Ясно, что каждый треугольник имеет три высоты, три медианы и три биссектрисы.

Часто длины сторон, противолежащих углам A, B, C, обозначают соответственно a, b, c. Длины высот обозначают h_a, h_b, h_c, медиан — m_a, m_b, m_c, биссектрис — l_a, l_b, l_c. Индекс показывает, к какой стороне проведен отрезок (рис. 121).

?

1. Как называют и обозначают треугольник?
2. Что называют периметром треугольника?
3. Какие существуют виды треугольников в зависимости от вида их углов?
4. Какой треугольник называют прямоугольным? тупоугольным? остроугольным?
5. Как формулируют теорему о неравенстве треугольника?
6. Какие два треугольника называют равными?
7. Как называют пары сторон и пары углов равных треугольников, которые совмещаются при наложении?
8. Какие две фигуры называют равными?
9. Что называют высотой треугольника?
10. Что называют медианой треугольника?
11. Что называют биссектрисой треугольника?
12. Сколько у каждого треугольника высот? медиан? биссектрис?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

136.° Начертите треугольник:

1) остроугольный; 2) прямоугольный; 3) тупоугольный.

Проведите из каждой вершины треугольника высоту.

137.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 122, проведите высоту, общую для всех трех изображенных треугольников. У какого из них эта высота расположена вне треугольника?

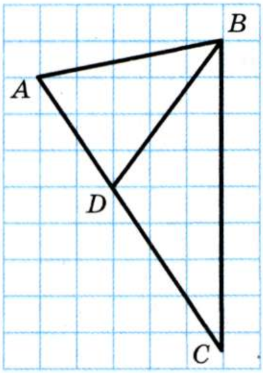
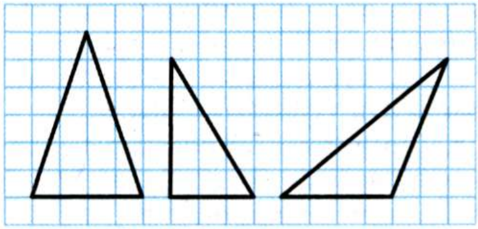


Рис. 122



а) *б*) *в*)

Рис. 123

138.° Перерисуйте в тетрадь треугольники, изображенные на рисунке 123, проведите в каждом из них все три высоты.

139.° Начертите произвольный треугольник и проведите все его медианы.

140.° Начертите произвольный треугольник и проведите все его биссектрисы.

УПРАЖНЕНИЯ

141.° Начертите произвольный треугольник, обозначьте его вершины буквами M, K и E. Укажите:

1) сторону, противолежащую углу M;
2) угол, противолежащий стороне MK;
3) стороны, прилежащие к углу K;
4) углы, прилежащие к стороне KE.

142.° Назовите стороны, вершины, углы треугольника CEF (рис. 124). Укажите:

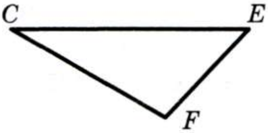


Рис. 124

1) угол, противолежащий стороне CF;
2) углы, прилежащие к стороне CE;
3) сторону, противолежащую углу E;
4) стороны, прилежащие к углу F.

143.° Одна из сторон треугольника в 5 раз меньше второй и на 25 см меньше третьей. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 74 см.

144.° Стороны треугольника относятся как $5:7:11$, а сумма наибольшей и наименьшей сторон равна 80 см. Вычислите периметр треугольника.

145.° Периметр треугольника равен 48 см, а длины его сторон относятся как $7:9:8$. Найдите стороны треугольника.

146.° Могут ли стороны треугольника быть равными:
1) 6 см, 5 см, 12 см; 2) 6 см, 5 см, 11 см?

147.° Треугольники APK и MCE равны, углы A и C соответственные, $PK = 10$ см. Найдите сторону ME.

148.° Треугольники ABC и DEF равны, стороны AB и DE, BC и DF соответственные, $\angle B = 32^\circ$. Найдите $\angle D$.

149.° Треугольники ABC и KTM равны, углы A и M, B и K соответственные, $\angle C = 40^\circ$, $MK = 5$ см. Найдите угол T и сторону AB.

150.° Верно ли утверждение:
1) если треугольники равны, то их периметры также равны;
2) если периметры двух треугольников равны, то и сами треугольники равны?

151.° Какие из элементов треугольника — биссектриса, медиана, высота — всегда принадлежат треугольнику?

152.° Какой из элементов треугольника — биссектриса, медиана, высота — может:
1) не принадлежать треугольнику;
2) совпадать с его стороной?
Укажите вид треугольника, для которого это возможно.

153.° 1) Может ли одна высота треугольника принадлежать ему, а две другие — нет?

2) Может ли только одна высота треугольника совпадать с его стороной?

3) В каком треугольнике три высоты пересекаются в его вершине?

154.• Периметр треугольника равен 30 см. Может ли одна из его сторон быть равной:

1) 20 см; 2) 15 см?

155.• Длины двух сторон треугольника равны 7 см и 9 см. Может ли периметр этого треугольника быть равным:

1) 20 см; 2) 32 см; 3) 18 см?

156.• Существует ли треугольник, одна из сторон которого на 2 см меньше второй и на 6 см меньше третьей, а периметр равен 20 см?

157.• Медиана BD треугольника ABC разбивает его на два треугольника, периметры которых равны 32 см и 36 см. Найдите периметр треугольника ABC, если $BD = 10$ см.

158.• Медиана треугольника, периметр которого равен 60 см, разбивает его на два треугольника, периметры которых равны 36 см и 50 см. Чему равна длина этой медианы?

159.* Одна сторона треугольника равна 2,8 см, а вторая — 0,6 см. Найдите третью сторону этого треугольника, если ее длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

160. На рисунке 125 $KP = PE = EF = FT = 2$ см. Какие равные отрезки есть еще на этом рисунке? Найдите их длины.

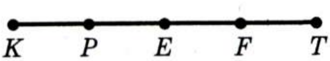


Рис. 125

161. Луч BD разбивает угол ABC, равный $72°$, на два угла ABD и CBD так, что $\angle ABD = 5\angle CBD$. Луч BK проходит так, что луч BA является биссектрисой угла DBK. Определите градусную меру и вид угла DBK.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

162. Разрежьте каждую из фигур, изображенных на рисунке 126, на две равные фигуры (разрезать не обязательно по линиям сетки).

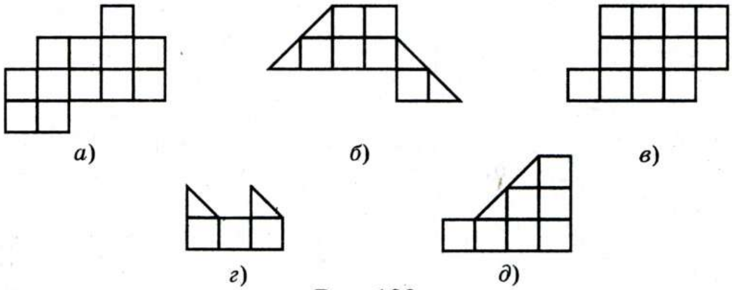


Рис. 126

8. Первый и второй признаки равенства треугольников

Если для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются шесть условий $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$, то очевидно, что эти треугольники совпадут при наложении, значит, они равны.

Попробуем уменьшить количество условий. Например, оставим лишь два равенства: $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$. Но тогда треугольники не обязательно окажутся равными (рис. 127).

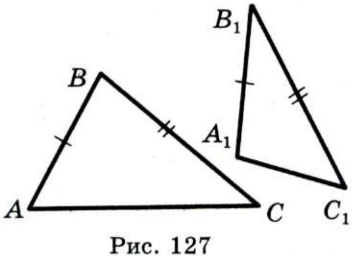


Рис. 127

Как же сократить список требований до минимума, но при этом сохранить равенство треугольников? На этот вопрос отвечают теоремы, которые называют **признаками равенства треугольников**.

Теорема 8.1 (первый признак равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними). ***Если две стороны и угол между ними одного***

треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

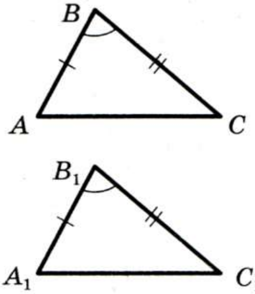


Рис. 128

Доказательство. ⊙ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$ (рис. 128). Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы луч BA совместился с лучом B_1A_1, а луч BC совместился с лучом B_1C_1. Это можно сделать, так как по условию $\angle B = \angle B_1$. Поскольку по условию $BA = B_1A_1$ и $BC = B_1C_1$, то при таком наложении сторона BA совместится со стороной B_1A_1, а сторона BC — со стороной B_1C_1. Следовательно, ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ полностью совместятся, значит, они равны. ▲

Определение. **Прямую, перпендикулярную отрезку и проходящую через его середину, называют серединным перпендикуляром отрезка.**

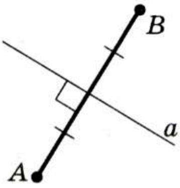


Рис. 129

На рисунке 129 прямая a является серединным перпендикуляром отрезка AB.

Теорема 8.2. ***Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.***

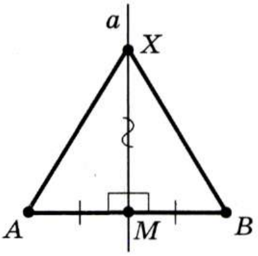


Рис. 130

Доказательство. ⊙ Пусть X — произвольная точка серединного перпендикуляра a отрезка AB, точка M — середина отрезка AB. Надо доказать, что $XA = XB$.

Если точка X совпадает с точкой M (а это возможно, так как X — произвольная точка прямой a), то $XA = XB$. Если точки X и M не совпадают, то рассмотрим треугольники AXM и BXM (рис. 130).

В этих треугольниках $AM = MB$, так как M — середина отрезка AB. Сторона XM — общая, $\angle AMX = \angle BMX = 90°$. Следовательно, $\Delta AXM = \Delta BXM$ по первому признаку равенства треугольников. Значит, отрезки XA и XB равны как соответственные стороны равных треугольников. ▲

Теорема 8.3 (второй признак равенства треугольников: по стороне и двум прилежащим к ней углам). ***Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. ⊖ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рис. 131). Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

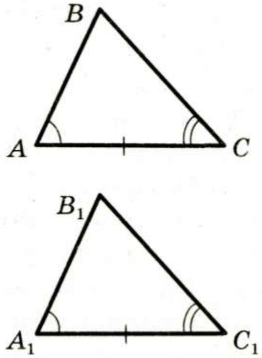


Рис. 131

Наложим ΔABC на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы точка A совместилась с точкой A_1, отрезок AC — с отрезком A_1C_1 (это возможно, так как $AC = A_1C_1$) и точки B и B_1 лежали в одной полуплоскости относительно прямой A_1C_1. Поскольку $\angle A = \angle A_1$ и $\angle C = \angle C_1$, то луч AB совместится с лучом A_1B_1, а луч CB — с лучом C_1B_1. Тогда точка B — общая точка лучей AB и CB — совместится с точкой B_1 — общей точкой лучей A_1B_1 и C_1B_1. Значит, ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ полностью совместятся, следовательно, они равны. ▲

Пример. На рисунке 132 точка O — середина отрезка BD, $\angle ABO = \angle CDO$. Докажите, что $BC = AD$.

Решение. Рассмотрим ΔAOB и ΔCOD. $BO = OD$, так как точка O — середина отрезка BD. $\angle ABO = \angle CDO$ по условию. $\angle AOB$ и $\angle COD$ равны как вертикальные. Следовательно, $\Delta AOB = \Delta COD$ по стороне и двум прилежащим углам.

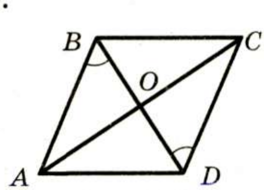


Рис. 132

Рассмотрим ΔABC и ΔADC.

$AB = CD$, $\angle BAC = \angle DCA$, так как $\Delta AOB = \Delta COD$. AC — общая сторона. Следовательно, $\Delta ABC = \Delta ADC$ по двум сторонам и углу между ними.

Тогда $BC = AD$.

1. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.
2. Какую прямую называют серединным перпендикуляром отрезка?
3. Каким свойством обладают точки серединного перпендикуляра?
4. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

163.° С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, две стороны которого равны 3 см и 6 см, а угол между ними — 40°.

164.° С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, две стороны которого равны 3 см и 4 см, а угол между ними — 90°. Укажите вид этого треугольника.

165.° С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, одна сторона которого равна 3 см, а углы, прилежащие к этой стороне, — 100° и 20°. Укажите вид этого треугольника.

166.° С помощью линейки и транспортира постройте треугольник, одна сторона которого равна 6 см, а углы, прилежащие к этой стороне, — 90° и 45°.

167.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 133. С помощью угольника и линейки найдите на прямой l точку, равноудаленную от концов отрезка AB.

168.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 134. С помощью угольника и линейки найдите точку, равноудаленную от точек A и B, а также точек C и D.

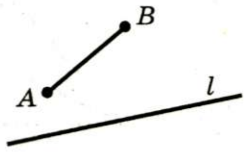


Рис. 133

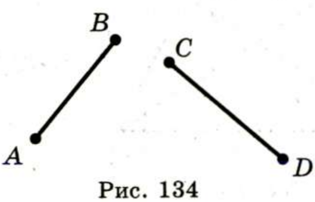


Рис. 134

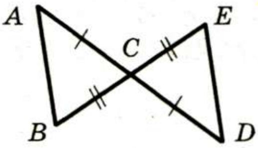


Рис. 135

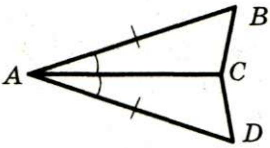


Рис. 136

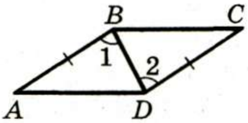


Рис. 137

УПРАЖНЕНИЯ

169.° На рисунке 135 $AC = DC$, $BC = EC$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta DEC$.

170.° На рисунке 136 $AB = AD$, $\angle BAC = \angle DAC$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ADC$.

171.° На рисунке 137 $AB = CD$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = 7$ см, $\angle C = 34°$. Найдите отрезок BC и угол A.

172.° На рисунке 138 $AO = OD$, $BO = OC$. Найдите сторону CD и угол OCD треугольника OCD, если $AB = 8$ см, $\angle OBA = 43°$.

173.° Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (рис. 139). Докажите, что $\angle OAD = \angle OCB$.

174.° Дано: $AD \perp BC$, $BD = CD$ (рис. 140). Докажите, что $AB = AC$.

175.° Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a и на одинаковом расстоянии от нее, опущены на эту прямую перпендикуляры AC и BD. Найдите угол ACB, если $\angle ADC = 25°$.

176.° Отрезки AD и BC пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Найдите угол ACD, если $\angle ABC = 64°$, $\angle ACO = 56°$.

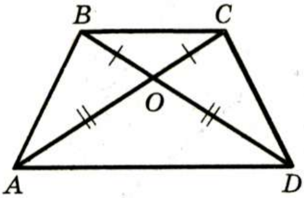


Рис. 138

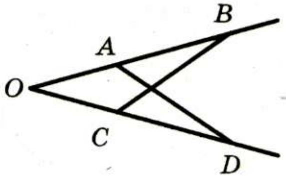


Рис. 139

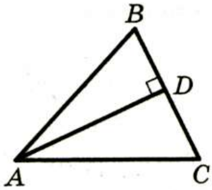


Рис. 140

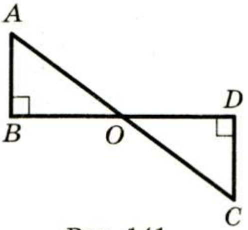


Рис. 141

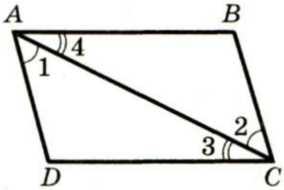


Рис. 142

177.° На рисунке 141 $AB \perp BD$, $CD \perp BD$, O — середина отрезка BD. Докажите, что $\triangle ABO = \triangle CDO$.

178.° На рисунке 142 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Найдите стороны AD и CD треугольника ADC.

179.° На рисунке 143 $\angle ABC = \angle DEF$, $BO = OE$. Докажите, что $\triangle BCO = \triangle EFO$.

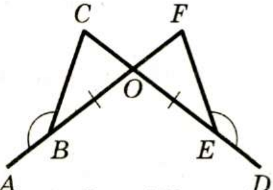


Рис. 143

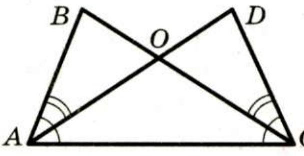


Рис. 144

180.° На рисунке 144 $\angle BAO = \angle DCO$, $\angle BAC = \angle DCA$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.

181.° На сторонах угла с вершиной в точке B отмечены точки A и C, а на его биссектрисе — точка D так, что $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите, что $AB = BC$.

182.° Через точку M, принадлежащую биссектрисе угла с вершиной в точке O, провели прямую, перпендикулярную биссектрисе. Эта прямая пересекает стороны данного угла в точках A и B. Докажите, что $AM = MB$.

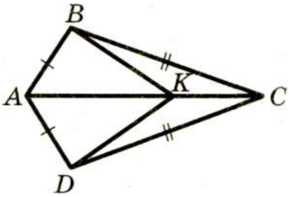


Рис. 145

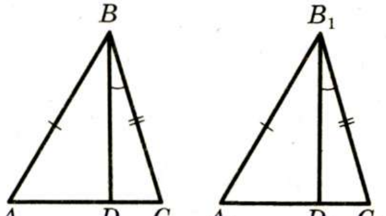


Рис. 146

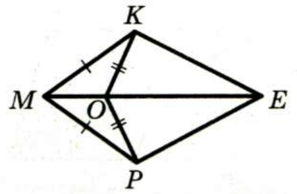


Рис. 147

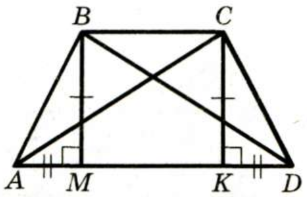


Рис. 148

183.° На рисунке 145 $\Delta ABC = \Delta ADC$. Докажите, что $\Delta ABK = \Delta ADK$.

184.• На рисунке 146 $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, $\angle DBC = \angle D_1B_1C_1$. Докажите, что $\Delta DBC = \Delta D_1B_1C_1$.

185.• На рисунке 147 $\Delta MKO = \Delta MPO$. Докажите, что $\Delta KOE = \Delta POE$.

186.• На рисунке 148 $BM \perp AD$, $CK \perp AD$, $BM = CK$, $AM = KD$. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta ACD$.

187.• Докажите, что в равных треугольниках биссектрисы соответственных углов равны.

188.• Докажите, что в равных треугольниках медианы, проведенные к соответственным сторонам, равны.

189.• На продолжении медианы AM треугольника ABC за точку M отложен отрезок MK, равный AM. Найдите расстояние от точки K до вершины C, если $AB = 6$ см.

190.• Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся точкой пересечения пополам. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta ABD$.

191.• На рисунке 149 прямые m и n — серединные перпендикуляры сторон AB и AC треугольника ABC. Докажите, что точка O равноудалена от всех вершин данного треугольника.

192.• Для нахождения расстояния от точки B до колокольни A, расположенной на другом берегу реки (рис. 150), с помощью вешек, рулетки и астролябии отметили на местности точки C, D и E так, что точки B, C и D лежат на одной прямой, причем точка C является серединой отрезка BD, наметили прямую AE, проходящую

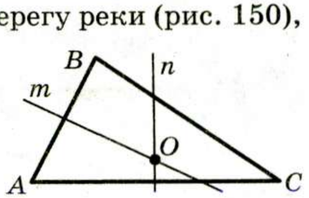


Рис. 149

Рис. 150

через точку C, причем $\angle ABC = \angle CDE$. Потом, измерив одну из сторон треугольника CDE, определили расстояние от B до A. Какую сторону измеряли? Ответ обоснуйте.

193.• Для определения ширины озера (рис. 151) на его берегу отметили точки A и B, а потом еще точки C, D и O так, что точка O — общая середина отрезков AC и BD. Как теперь можно определить ширину озера? Ответ обоснуйте.

194.•• Докажите равенство двух треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углом между этой стороной и медианой.

195.•• Докажите равенство двух треугольников по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе этого угла.

196.•• Докажите равенство двух треугольников по углу, биссектрисе этого угла и углу, образованному биссектрисой с противолежащей стороной.

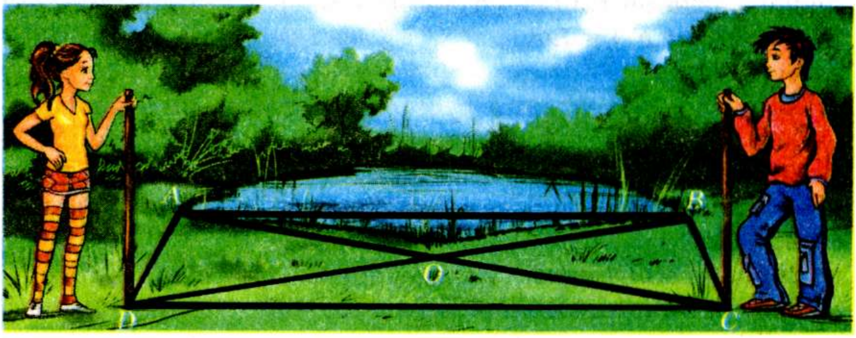


Рис. 151

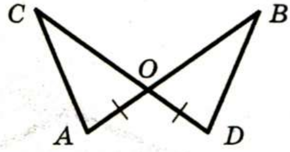


Рис. 152

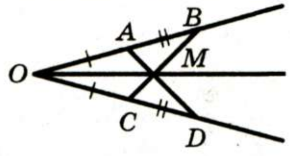


Рис. 153

197.•• Серединный перпендикуляр стороны BC треугольника ABC пересекает его сторону AB в точке D. Найдите длину отрезка AD, если $CD = 4$ см, $AB = 7$ см.

198.•• Серединный перпендикуляр стороны AB треугольника ABC пересекает его сторону BC в точке M. Найдите длину стороны AC треугольника ABC, если $BC = 16$ см, а периметр треугольника AMC равен 26 см.

199.•• На рисунке 152 $OA = OD$. Дополните условие задачи одним требованием так, чтобы можно было утверждать, что $\Delta AOC = \Delta BOD$:

1) по первому признаку равенства треугольников;

2) по второму признаку равенства треугольников.

200.•• Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. На отрезке AC отмечена точка M, а на отрезке BD — точка K так, что $AM = BK$. Докажите, что:

1) $OM = OK$;

2) точки M, O и K лежат на одной прямой.

201.•• На одной стороне угла с вершиной в точке O (рис. 153) отмечены точки A и B, а на другой — точки C и D так, что $OA = OC$, $AB = CD$. Докажите, что луч OM является биссектрисой угла BOD, где M — точка пересечения прямых AD и BC.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

202. Истинно ли утверждение: если через каждые две из трех данных точек провести прямую, то получим три прямые?

203. Лучи OD и OF — биссектрисы смежных углов AOB и BOC соответственно, $\angle AOD : \angle FOC = 2 : 7$. Найдите $\angle AOD$ и $\angle FOC$.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

204. Разделите каждую из фигур, изображенных на рисунке 154, по линиям сетки на четыре равные части так, чтобы в каждой части был ровно один кружок.

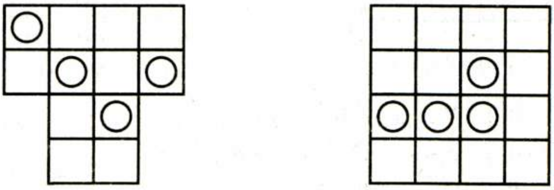


Рис. 154

9. Равнобедренный треугольник и его свойства

Определение. **Треугольник, у которого две стороны равны, называют равнобедренным.**

На рисунке 155 изображен равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$.

Равные стороны треугольника называют **боковыми** сторонами, а третью сторону — **основанием** равнобедренного треугольника.

Вершиной равнобедренного треугольника называют общую точку его боковых сторон (точка B на рисунке 155).

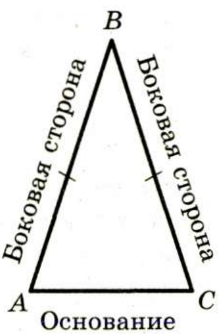


Рис. 155

При этом угол B называют **углом при вершине**, а углы A и C — **углами при основании** равнобедренного треугольника.

Определение. **Треугольник, у которого все стороны равны, называют равносторонним.**

На рисунке 156 изображен равносторонний треугольник ABC. Равносторонний треугольник — частный случай равнобедренного треугольника.

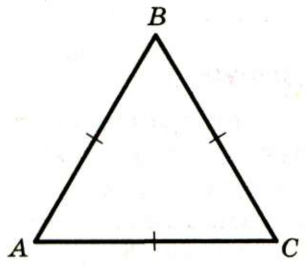


Рис. 156

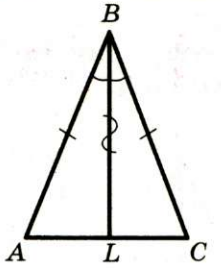


Рис. 157

Теорема 9.1. ***В равнобедренном треугольнике:* 1) *углы при основании равны;* 2) *биссектриса угла при вершине является медианой и высотой.***

Доказательство. ⊙ Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, у которого $AB = BC$, отрезок BL — его биссектриса (рис. 157). Требуется доказать, что $\angle A = \angle C$, $AL = LC$, $BL \perp AC$.

В треугольниках ABL и CBL сторона BL — общая, $\angle ABL = \angle CBL$, так как по условию BL — биссектриса угла ABC, стороны AB и BC равны как боковые стороны равнобедренного треугольника. Следовательно, $\Delta ABL = \Delta CBL$ по первому признаку равенства треугольников. Отсюда можно сделать такие выводы:

1) $\angle A$ и $\angle C$ равны как соответственные углы в равных треугольниках;
2) отрезки AL и LC равны как соответственные стороны равных треугольников, следовательно, BL — медиана;
3) $\angle ALB = \angle CLB$. Но $\angle ALB + \angle CLB = 180°$. Отсюда следует, что $\angle ALB = \angle CLB = 90°$, значит, BL — высота. ▲

Из этой теоремы следует, что:

1) ***в треугольнике против равных сторон лежат равные углы;***

2) ***в равнобедренном треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные из его вершины, совпадают;***

3) ***в равностороннем треугольнике все углы равны;***

4) ***в равностороннем треугольнике биссектриса, высота и медиана, проведенные из одной вершины, совпадают.***

О п р е д е л е н и е. Если в треугольнике все стороны имеют разную длину, то такой треугольник называют р а з н о с т о р о н н и м.

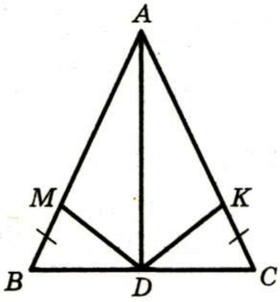


Рис. 158

П р и м е р. Отрезок AD — медиана равнобедренного треугольника ABC, проведенная к основанию. На сторонах AB и AC отмечены соответственно точки M и K так, что $BM = CK$. Докажите равенство треугольников AMD и AKD.

Р е ш е н и е. Имеем: $AB = AM + BM$, $AC = AK + CK$ (рис. 158).

Так как $AB = AC$ и $BM = CK$, то $AM = AK$.

$\angle BAD = \angle CAD$, поскольку медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является его биссектрисой.

AD — общая сторона треугольников AMD и AKD.

Следовательно, $\Delta AMD = \Delta AKD$ по двум сторонам и углу между ними.

?

1. Какие существуют виды треугольников в зависимости от количества равных сторон?
2. Какой треугольник называют разносторонним? равнобедренным? равносторонним?
3. Какие стороны равнобедренного треугольника называют боковыми?
4. Какую сторону равнобедренного треугольника называют основанием?
5. Сформулируйте свойство углов равнобедренного треугольника.
6. Сформулируйте свойство биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к основанию.
7. Каким свойством обладают углы треугольника, лежащие против его равных сторон?
8. Сформулируйте свойство углов равностороннего треугольника.
9. Каким свойством обладают биссектриса, высота и медиана равностороннего треугольника, проведенные из одной вершины?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

205.° Начертите:

1) разносторонний остроугольный треугольник;
2) равнобедренный прямоугольный треугольник;
3) равнобедренный тупоугольный треугольник.

206.° Начертите:

1) разносторонний прямоугольный треугольник;
2) разносторонний тупоугольный треугольник.

207.° Начертите равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 3 см, так, чтобы его угол при вершине был:

1) острым; 2) прямым; 3) тупым.

В построенных треугольниках проведите высоты к боковым сторонам.

УПРАЖНЕНИЯ

208.° 1) Найдите периметр равнобедренного треугольника, основание которого равно 13 см, а боковая сторона — 8 см.

2) Периметр равнобедренного треугольника равен 39 см, а основание — 15 см. Найдите боковые стороны треугольника.

209.° Периметр равнобедренного треугольника равен 28 см, а боковая сторона — 10 см. Найдите основание треугольника.

210.° Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 32 см, а основание на 5 см больше боковой стороны.

211.° Найдите стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 54 см, а основание в 4 раза меньше боковой стороны.

212.° В равнобедренном треугольнике ABC сторона AC — основание, $\angle C = 40°$, $\angle ABC = 100°$, BD — медиана. Найдите углы треугольника ABD.

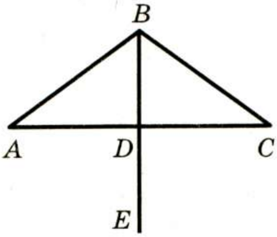


Рис. 159

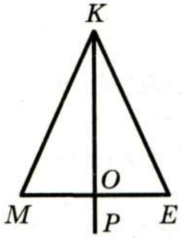


Рис. 160

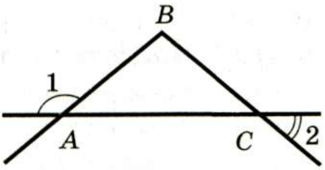


Рис. 161

213.° На рисунке 159 $AB = BC$, BD — медиана треугольника ABC, $\angle ABD = 53°$. Найдите $\angle ABC$ и $\angle ADE$.

214.• На рисунке 160 $MK = KE$, $OE = 6$ см, $\angle MKE = 48°$, $\angle POE = 90°$. Найдите сторону ME и угол MKO.

215.° На рисунке 161 $AB = BC$, $\angle 1 = 140°$. Найдите $\angle 2$.

216.° Угол, вертикальный углу при вершине равнобедренного треугольника, равен 68°. Найдите угол между боковой стороной треугольника и медианой, проведенной к основанию.

217.• Угол, смежный с углом при вершине равнобедренного треугольника, равен 76°. Найдите угол между боковой стороной треугольника и высотой, опущенной на основание.

218.° На рисунке 162 $AB = BC$, $DC = DE$. Докажите, что $\angle A = \angle E$.

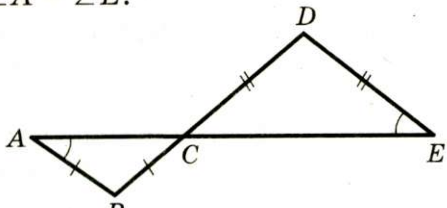


Рис. 162

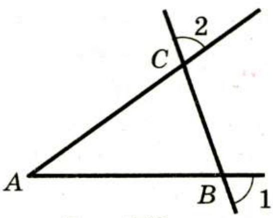


Рис. 163

219.• Прямая пересекает стороны угла A в точках B и C так, что $AB = AC$ (рис. 163). Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

220.° На рисунке 164 $AO = CO$, $\angle AOB = \angle COB$. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

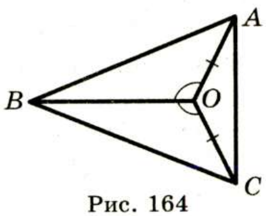


Рис. 164

221.° Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC, BD — его биссектриса, DM — биссектриса треугольника BDC. Найдите угол ADM.

222.° Один ученик утверждает, что ΔABC — равнобедренный, а другой ученик — что он равносторонний.

1) Могут ли оба ученика быть правыми?
2) В каком случае прав только один ученик и какой именно?

223.° Используя признаки равенства треугольников, обоснуйте признаки равенства равнобедренных треугольников:

1) по боковой стороне и углу при вершине;
2) по основанию и прилежащему к нему углу.

224.• На основании AC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки M и K так, что точка M лежит между точками A и K, причем $AM = CK$. Докажите, что ΔMBK — равнобедренный.

225.• В треугольнике MKE $MK = ME$. На стороне KE отмечены точки F и N так, что точка N лежит между точками F и E, причем $\angle KMF = \angle EMN$. Докажите, что $\angle MFN = \angle MNF$.

226.• На боковых сторонах равнобедренного треугольника ABC с основанием AB отложены равные отрезки CK и CM на сторонах CA и CB соответственно. Докажите, что: 1) $\Delta AMC = \Delta BKC$; 2) $\Delta AMB = \Delta BKA$.

227.• В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC на медиане BD отметили произвольную точку M. Докажите, что: 1) $\Delta AMB = \Delta CMB$; 2) $\Delta AMD = \Delta CMD$.

228.• Докажите, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны.

229.• Докажите, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.

230.• Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами равнобедренного треугольника.

231.• Одна из сторон равнобедренного треугольника равна 20 см, а другая — 8 см. Какая из этих сторон является основанием треугольника?

232.• Найдите третью сторону равнобедренного треугольника, если две другие его стороны равны:

1) 7 см и 4 см; 2) 7 см и 3 см.

Сколько решений в каждом случае имеет задача?

233.• Одна из сторон равнобедренного треугольника равна 4 см. Найдите две другие стороны, если периметр треугольника равен:

1) 20 см; 2) 14 см.

Сколько решений в каждом случае имеет задача?

234.• Верно ли утверждение:

1) биссектриса равнобедренного треугольника является его высотой и медианой;
2) биссектриса равностороннего треугольника является его высотой и медианой;
3) если периметр треугольника в 3 раза больше одной из его сторон, то этот треугольник равносторонний?

235.• На сторонах равностороннего треугольника ABC (рис. 165) отметили точки M, K и D так, что $AD = BM = CK$. Докажите, что ΔMKD — равносторонний.

236.•• На продолжениях сторон AB, BC, AC равностороннего треугольника ABC (рис. 166) за точки A, B и C соответственно отложили равные отрезки AD, BK и CE. Докажите, что ΔDEK — равносторонний.

237.•• Основание равнобедренного треугольника равно 20 см, а его медиана разбивает данный треугольник на два треугольника так, что периметр одного из них на 6 см меньше периметра другого. Найдите боковую сторону данного треугольника. Сколько решений имеет задача?

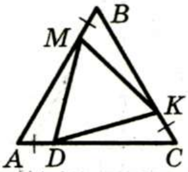


Рис. 165

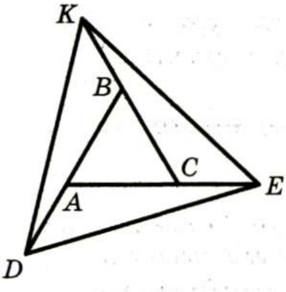


Рис. 166

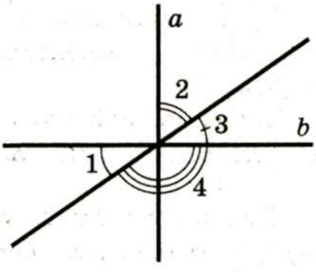


Рис. 167

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

238. На рисунке 167 $a \perp b$, $\angle 1 = 35°$. Найдите $\angle 2$, $\angle 3$, $\angle 4$.

239. Точки C и D разделили отрезок AB, длина которого равна a, на три отрезка AC, CD и DB так, что $AC = 2CD$, $CD = 2DB$. Найдите расстояние между: 1) точкой A и серединой отрезка CD; 2) серединами отрезков AC и DB.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

240. Нарисуйте шестиугольник, который можно одним разрезом разделить на два треугольника.

10. Признаки равнобедренного треугольника

В предыдущем пункте мы рассмотрели свойства равнобедренного треугольника. А как среди треугольников «распознавать» равнобедренные? На этот вопрос дают ответ следующие теоремы.

Теорема 10.1. ***Если медиана треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.***

Доказательство. ⊙ Рассмотрим треугольник ABC, у которого отрезок BM — медиана и высота. Надо доказать, что $AB = BC$ (рис. 168).

Из условия теоремы следует, что прямая BM — серединный перпендикуляр отрезка AC.

Тогда по свойству серединного перпендикуляра $AB = BC$. ▲

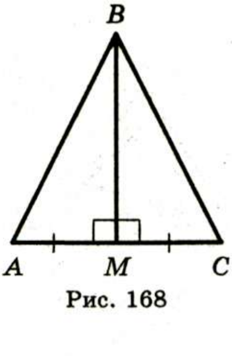


Рис. 168

Теорема 10.2. ***Если биссектриса треугольника является его высотой, то этот треугольник равнобедренный.***

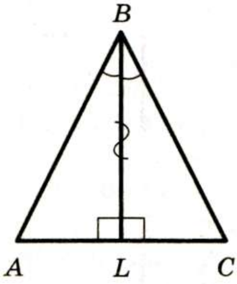


Рис. 169

Доказательство. ⊙ Рассмотрим треугольник ABC, у которого отрезок BL — биссектриса и высота. Надо доказать, что $AB = BC$ (рис. 169).

В треугольниках ABL и CBL сторона BL — общая, $\angle ABL = \angle CBL$, так как по условию BL — биссектриса угла ABC, $\angle ALB = \angle CLB = 90^\circ$, так как по условию BL — высота. Следовательно, $\Delta ABL = \Delta CBL$ по второму признаку равенства треугольников. Тогда стороны AB и BC равны как соответственные стороны равных треугольников. ▲

Теорема 10.3. ***Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный.***

Доказательство. ⊛ Рассмотрим треугольник ABC, у которого $\angle A = \angle C$. Надо доказать, что $AB = BC$.

Проведем серединный перпендикуляр a стороны AC. Докажем, что прямая a проходит через вершину B.

Предположим, что это не так. Тогда прямая a пересекает или сторону AB (рис. 170), или сторону BC (рис. 171).

Рассмотрим первый из этих случаев. Пусть K — точка пересечения прямой a со стороной AB. Тогда по свойству серединного перпендикуляра (теорема 8.2) $AK = CK$. Следовательно, ΔAKC — равнобедренный, а значит $\angle A = \angle ACK$. Но по условию $\angle A = \angle ACB$. Тогда имеем: $\angle ACB = \angle ACK$, что противоречит основному свойству величины угла (п. 3).

Аналогично получаем противоречие и для второго случая (рис. 171).

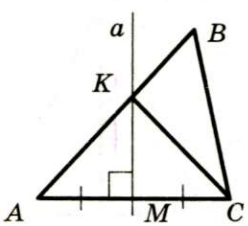


Рис. 170

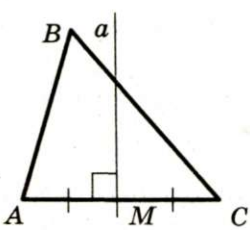


Рис. 171

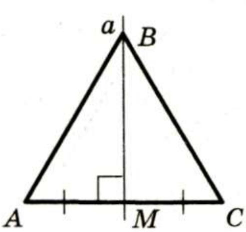


Рис. 172

Следовательно, наше предположение неверно. Прямая a проходит через точку B (рис. 172), и по свойству серединного перпендикуляра $BA = BC$. ▲

Из этой теоремы следует, что ***в треугольнике против равных углов лежат равные стороны.***

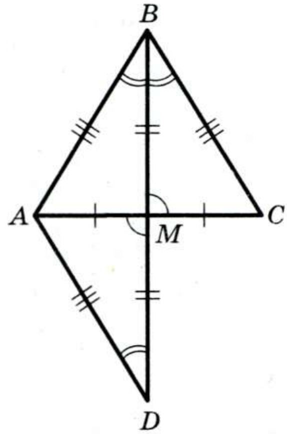


Рис. 173

Теорема 10.4. ***Если медиана треугольника является его биссектрисой, то этот треугольник равнобедренный.***

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC, у которого отрезок BM — медиана и биссектриса (рис. 173). Надо доказать, что $AB = BC$.

На луче BM отложим отрезок MD, равный отрезку BM (рис. 173).

В треугольниках AMD и CMB $AM = MC$, так как по условию BM — медиана, $BM = MD$ по построению, $\angle AMD$ и $\angle CMB$ равны как вертикальные. Следовательно, $\Delta AMD = \Delta CMB$ по первому признаку равенства треугольников. Тогда стороны AD и BC, $\angle ADM$ и $\angle CBM$ равны как соответственные элементы равных треугольников.

Поскольку BD — биссектриса угла ABC, то $\angle ABM = \angle CBM$. С учетом доказанного получаем, что $\angle ABM = \angle ADM$. Тогда по теореме 10.3 ΔDAB — равнобедренный, откуда $AD = AB$. Но уже доказано, что $AD = BC$. Следовательно, $AB = BC$. ▲

Пример. В треугольнике ABC проведена биссектриса BM (рис. 174), $\angle BAK = 70^\circ$, $\angle AKC = 110^\circ$. Докажите, что $BM \perp AK$.

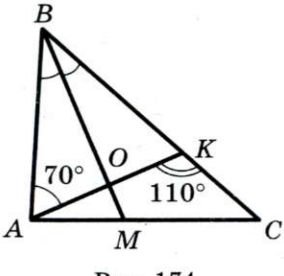


Рис. 174

Решение. Так как $\angle BKA$ и $\angle AKC$ — смежные, то $\angle BKA = 180^\circ - \angle AKC = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$.

Следовательно, в треугольнике ABK $\angle BAK = \angle BKA = 70^\circ$.

Тогда ΔABK — равнобедренный с основанием AK, и его биссектриса BO (O — точка пересечения AK и BM) является также высотой, т. е. $BM \perp AK$.

1. Сформулируйте признаки равнобедренного треугольника.
2. Какова связь между равными углами и равными сторонами треугольника?

УПРАЖНЕНИЯ

241.° В треугольнике ABC медиана BK перпендикулярна стороне AC. Найдите $\angle ABC$, если $\angle ABK = 25°$.

242.° Серединный перпендикуляр стороны AC треугольника ABC проходит через вершину B. Найдите $\angle C$, если $\angle A = 17°$.

243.° В треугольнике ABC $\angle ACB = 90°$, $\angle A = \angle B = 45°$, CK — высота. Найдите сторону AB, если $CK = 7$ см.

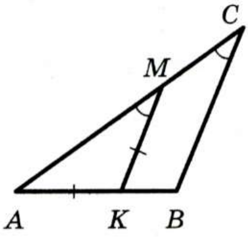


Рис. 175

244.° На рисунке 175 $\angle AMK = \angle ACB$, $AK = MK$. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

245.° Прямая, перпендикулярная биссектрисе угла A, пересекает его стороны в точках B и C. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

246.° Биссектрисы AM и CK углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что ΔAOC — равнобедренный.

247.° В треугольнике ABC биссектриса BK является его высотой. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABK равен 16 см и $BK = 5$ см.

248.° Верно ли утверждение:

1) если медиана и высота треугольника, проведенные из одной вершины, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным;
2) если биссектриса треугольника делит противолежащую сторону пополам, то этот треугольник равнобедренный?

249.[•] Медианы AE и CF, проведенные к боковым сторонам AB и BC равнобедренного треугольника ABC, пересекаются в точке M. Докажите, что ΔAMC — равнобедренный.

250.[•] Точки M и K принадлежат соответственно боковым сторонам AB и BC равнобедренного треугольника ABC, $AM = CK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что ΔAOC — равнобедренный.

251.[••] На сторонах AB и BC треугольника ABC отметили соответственно точки D и E так, что $\angle EAC = \angle DCA$. Отрезки AE и CD пересекаются в точке F, $DF = EF$. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

252.[••] Через середину D стороны AB треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисам углов ABC и BAC. Эти прямые пересекают стороны AC и BC в точках M и K соответственно. Докажите, что $AM = BK$.

253.[••] Медиана AM треугольника ABC перпендикулярна его биссектрисе BK. Найдите сторону AB, если $BC = 16$ см.

254.[••] Прямая, проходящая через вершину A треугольника ABC перпендикулярно его медиане BD, делит эту медиану пополам. Найдите отношение длин сторон AB и AC треугольника ABC.

255.[••] В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle A = 67{,}5°$, $\angle B = 22{,}5°$, CK — биссектриса треугольника ABC, CM — биссектриса треугольника BCK (рис. 176). Докажите, что точка M — середина отрезка AB.

256.[*] Длины сторон треугольника, выраженные в сантиметрах, равны трем последовательным натуральным числам. Найдите стороны этого треугольника, если одна из его медиан перпендикулярна одной из его биссектрис.

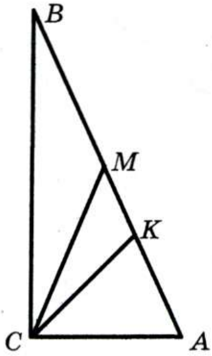


Рис. 176

257.[*] В треугольнике ABC $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $AC = 6$ см. На стороне BC отметили точку M такую, что $CM = 1$ см. Прямая, проходящая через точку M перпендикулярно биссектрисе угла ACB, пересекает отрезок AC в точке K, а прямая, проходящая через точку K перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает прямую AB в точке D. Найдите длину отрезка BD.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

258. На прямой последовательно отметили точки A, B, C, D, E и F так, что $AB = BC = CD = DE = EF$. Найдите отношения $AB:CF$, $AB:BF$, $BD:AE$.

259. Найдите углы, образованные при пересечении двух прямых, если один из них на $42°$ больше половины второго угла.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

260. Разрежьте прямоугольник размером 4×9 на две равные части, из которых можно сложить квадрат.

11. Третий признак равенства треугольников

Теорема 11.1 (третий признак равенства треугольников: по трем сторонам). ***Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.***

Доказательство. ⊛ Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 177), у которых $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA =$

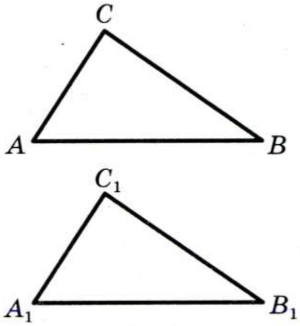


Рис. 177

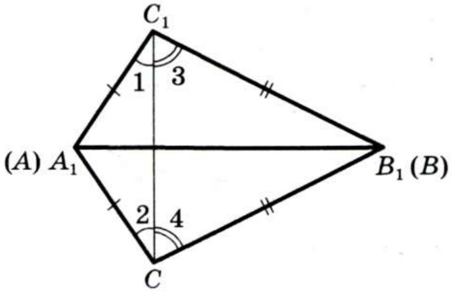


Рис. 178

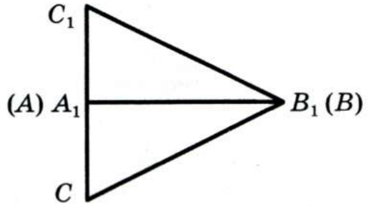


Рис. 179

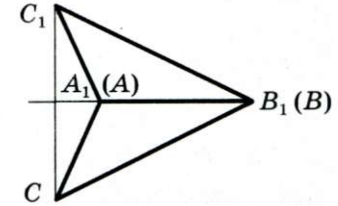


Рис. 180

$= C_1A_1$ (эти равенства указывают, какие стороны треугольников соответствуют друг другу). Докажем, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина B — с B_1, а вершины C и C_1 лежали в разных полуплоскостях относительно прямой AB (рис. 178). Проведем отрезок CC_1. Поскольку $A_1C_1 = AC$, то треугольник A_1C_1C — равнобедренный, значит, $\angle 1 = \angle 2$. Аналогично можно доказать, что $\angle 3 = \angle 4$. Следовательно, $\angle A_1C_1B_1 = \angle A_1CB_1$. Тогда $\Delta A_1C_1B_1 = \Delta A_1CB_1$ по первому признаку равенства треугольников.

Казалось бы, доказательство завершено. Однако мы рассмотрели лишь случай, когда отрезок CC_1 пересекает отрезок A_1B_1 во внутренней точке. На самом деле отрезок CC_1 может проходить через один из концов отрезка A_1B_1, например, через точку A_1 (рис. 179), или не иметь общих точек с отрезком A_1B_1 (рис. 180). В обоих этих случаях доказательства будут аналогичными приведенному. Проведите их самостоятельно. ▲

Из третьего признака равенства треугольников следует, что *треугольник — жесткая фигура*. Действительно, если четыре рейки скрепить так, как показано на рисунке 181, *а*, то такая конструкция не будет жесткой (рис. 181, *б*, *в*). Если же добавить еще одну рейку, создав два треугольника

а) *б*) *в*) *г*)

Рис. 181

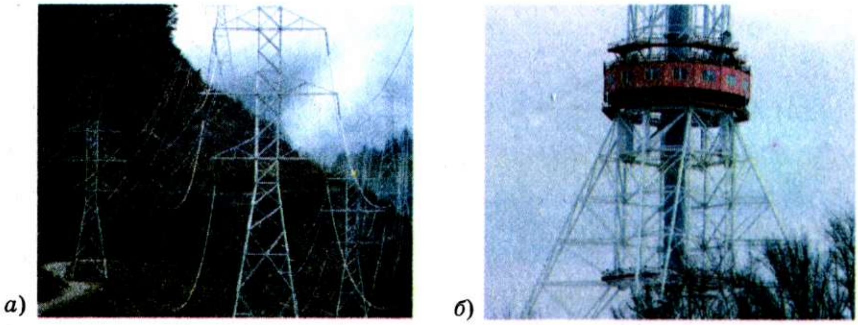


Рис. 182. Жесткие конструкции: *а*) опоры линий электропередачи; *б*) телевизионная башня

(рис. 181, *г*), то полученная конструкция станет жесткой. Этот факт широко используют в практике (рис. 182).

Теорема 11.2. ***Если точка равноудалена от концов отрезка, то она принадлежит серединному перпендикуляру этого отрезка.***

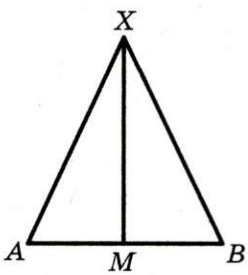


Рис. 183

Доказательство. Пусть точка X равноудалена от концов отрезка AB, т. е. $XA = XB$ (рис. 183). Рассмотрим треугольники AXM и BXM, где M — середина отрезка AB. Тогда $\Delta AXM = \Delta BXM$ по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AMX = \angle BMX$. Но сумма этих углов равна $180°$, следовательно, каждый из них равен $90°$. Значит, прямая XM — серединный перпендикуляр отрезка AB.

Заметим, что мы рассмотрели случай, когда точка X не принадлежит прямой AB. Если точка X принадлежит прямой AB, то она совпадает с серединой отрезка AB, а значит, принадлежит его серединному перпендикуляру. ▲

?

1. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.

2. Где находятся точки, равноудаленные от концов отрезка?

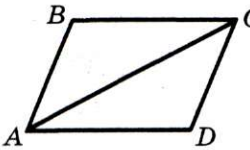


Рис. 184

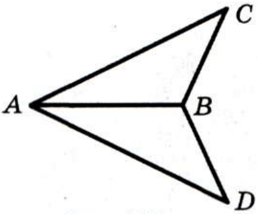


Рис. 185

УПРАЖНЕНИЯ

261.° На рисунке 184 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $\angle B = \angle D$.

262.° На рисунке 185 $AC = AD$, $BC = BD$. Найдите угол BAC, если $\angle BAD = 25°$.

263.° Докажите, что два равнобедренных треугольника равны, если боковая сторона и основание одного треугольника соответственно равны боковой стороне и основанию другого треугольника.

264.° Докажите, что два равносторонних треугольника равны, если сторона одного треугольника равна стороне другого треугольника.

265.° На рисунке 186 $\Delta ABC = \Delta BCD$, причем $AB = CD$. Докажите, что $\Delta ABD = \Delta ACD$.

266.° На рисунке 186 $AB = CD$, $AC = BD$. Докажите, что ΔBOC — равнобедренный.

267.° Каждая из точек M и N равноудалена от концов отрезка AB. Докажите, что прямая MN — серединный перпендикуляр отрезка AB.

268.• На рисунке 187 $AB = KE$, $BC = KM$, $AM = EC$. Докажите, что $\angle AMK = \angle BCE$.

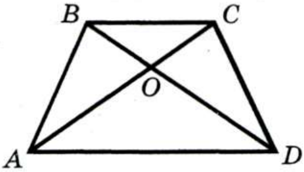


Рис. 186

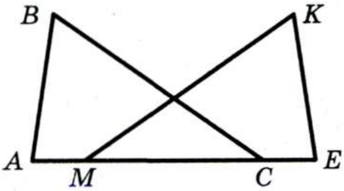


Рис. 187

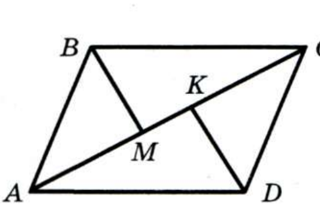


Рис. 188

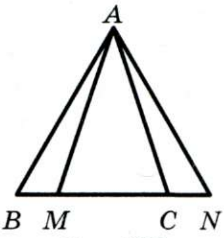


Рис. 189

269.˙ На рисунке 188 $AB = CD$, $BC = AD$, BM — биссектриса угла ABC, DK — биссектриса угла ADC. Докажите, что $\Delta ABM = \Delta DCK$.

270.˙ Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O так, что $OA = OD$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta DBC$.

271.˙ Отрезки BD и B_1D_1 — биссектрисы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

272.˙˙ Коля утверждает, что ему удалось сделать рисунок, на котором $AB = AC$ и $AM = AN$ (рис. 189). Прав ли Коля?

273.˙˙ Будут ли два треугольника равными, если каждой стороне одного треугольника равна некоторая сторона другого треугольника?

274.* Докажите равенство двух треугольников по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

275. На отрезке AB отметили точки C и D так, что $AC : BC = 7 : 8$, $AD : BD = 13 : 17$. Найдите длину отрезка AB, если расстояние между точками C и D равно 2 см.

276. Прямые AB и CD пересекаются в точке O, лучи OM и OK — биссектрисы соответственно углов AOC и BOC, образовавшихся при этом. Будет ли угол MOK прямым?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

277. Квадрат разрезали по диагоналям на 4 треугольника (рис. 190). Сложите из этих треугольников два квадрата.

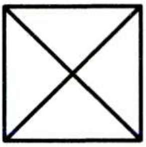


Рис. 190

12. Теоремы

Вы видите, что в учебнике появляется все больше и больше теорем. И это не удивительно: ведь геометрия в основном состоит из теорем и их доказательств.

Формулировки всех теорем, которые мы доказали, состоят из двух частей. Первую часть теоремы (то, что дано) называют **условием** теоремы, вторую часть теоремы (то, что требуется доказать) — **заключением**.

Например, в теореме 8.1 (первый признак равенства треугольников) условием является то, что две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, а заключением — равенство треугольников.

Все знакомые вам теоремы можно условно разделить на **теоремы-свойства** и **теоремы-признаки**. Например, теорема 1.1 устанавливает свойство пересекающихся прямых, теорема 9.1 — свойство равнобедренного треугольника.

Теоремы-признаки перечисляют свойства, по которым можно распознать фигуру, т. е. отнести ее к тому или иному виду (классу).

Так, теоремы-признаки равенства треугольников указывают требования, по которым два треугольника можно причислить к классу равных. Например, в теоремах 10.1–10.4 сформулированы свойства, по которым «распознают» равнобедренный треугольник.

Теоремы, которые следуют *непосредственно* из аксиом или теорем, называют **теоремами-следствиями** или просто **следствиями**.

Например, теорема 7.1 (неравенство треугольника) является следствием из основного свойства длины отрезка. Свойство углов, противолежащих равным сторонам треугольника, является следствием из теоремы 9.1.

Если в теореме 8.2 о свойстве серединного перпендикуляра поменять местами условие и заключение, то получим теорему 11.2. В таких случаях теоремы называют **взаимно обратными**. Если какую-то из этих теорем назвать **прямой**, то вторую теорему будем называть **обратной**.

При формулировке обратной теоремы надо быть очень внимательными: не всегда можно получить истинное утверждение. Например, утверждение, обратное теореме 4.1 о сумме смежных углов, неверно. Действительно, если сумма каких-то двух углов равна $180°$, то совершенно не обязательно, чтобы эти углы были смежными. В таких случаях говорят, что обратная теорема неверна.

Вы знаете, что справедливость теоремы устанавливают путем логических рассуждений, т. е. доказательства.

Первая теорема этого учебника была доказана методом **от противного**. Название этого метода фактически отражает его суть. Мы предположили, что заключение теоремы 1.1 неверно. На основании этого предположения с помощью логических рассуждений был получен факт, который противоречил основному свойству прямой.

Методом от противного также были доказаны и другие теоремы, например теоремы 2.1, 5.1, 10.3.

Очень важно, чтобы доказательство теоремы было полным. Так, полное доказательство теоремы 11.1 (третий признак равенства треугольников) потребовало рассмотрения всех трех возможных случаев.

Умение видеть все тонкости доказательства — важнейшее качество, формирующее математическую культуру. Если бы, например, при доказательстве теоремы 8.2 о свойстве серединного перпендикуляра мы не рассмотрели отдельно случай, когда точка X является серединой отрезка AB, то обращение к треугольникам AXM и BXM было бы не совсем «законным».

При доказательстве теоремы 10.4 (признак равнобедренного треугольника) мы использовали **прием дополнительного построения**: чертеж дополнили элементами, о которых не шла речь в условии теоремы. Этот метод является ключом к решению многих задач и доказательству ряда теорем. Поэтому очень важно научиться видеть «выгодное» (результативное) дополнительное построение.

А как приобрести такое «геометрическое зрение»? Вопрос непростой, и на него сложно ответить конкретными рекомендациями. Но все же мы советуем, во-первых, не быть

равнодушными к геометрии, а полюбить этот красивый предмет, во-вторых, решать больше задач, чтобы развить интуицию и приобрести нужный опыт. Дерзайте!

1. Из каких двух частей состоит формулировка теоремы?

2. Как называют теоремы, в которых перечислены свойства, относящие фигуру к какому-то виду (классу)?

3. Как называют теорему, непосредственно следующую из аксиомы или другой теоремы?

4. Как называют теоремы, в которых условие и заключение поменяли местами?

5. В чем состоит метод доказательства от противного?

6. Какие из теорем 1.1, 2.1, 4.2, 5.1, 8.3 доказаны методом от противного?

7. В чем состоит прием дополнительного построения?

УПРАЖНЕНИЯ

278.° В теоремах 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 укажите условие и заключение теоремы.

279.° Из теорем 4.1, 8.2, 9.1, 10.3, 11.2 выберите:

1) теоремы-свойства;
2) теоремы-признаки.

280.° Сформулируйте утверждение, обратное данному:

1) если треугольник равносторонний, то его углы равны;
2) если два угла вертикальные, то их биссектрисы являются дополнительными лучами;
3) если угол между биссектрисами двух углов прямой, то эти углы смежные;
4) если сторона и противолежащий ей угол одного треугольника равны соответственно стороне и противолежащему ей углу другого треугольника, то эти треугольники равны.

В каком из этих примеров:

1) прямое и обратное утверждения истинны;
2) прямое утверждение истинно, а обратное — ложно;
3) прямое утверждение ложно, а обратное — истинно?

281.° Сформулируйте утверждение, обратное данному:

1) если точка B лежит между точками A и C, то $AB + BC = AC$;
2) если два треугольника не равны, то их периметры также не равны;
3) если градусная мера угла больше 90°, то он тупой.

В каком из этих примеров:

1) прямое и обратное утверждения истинны;
2) прямое утверждение истинно, а обратное — ложно;
3) прямое утверждение ложно, а обратное — истинно?

282.° Сформулируйте утверждение, противоположное данному:

1) отрезок AB пересекает прямую m;
2) градусная мера угла ABC больше 40°;
3) из двух смежных углов хотя бы один не больше 90°;
4) лучи OA и OB не являются дополнительными;
5) отрезок имеет только одну середину.

283.° Сформулируйте утверждение, противоположное данному:

1) угол ABC не является прямым;
2) треугольник MKE — равнобедренный;
3) через точку на прямой можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной;
4) луч AC делит угол BAK пополам.

284.• Докажите, используя метод от противного, что если любая высота треугольника не совпадает с биссектрисой, проведенной из этой же вершины, то треугольник не является равнобедренным.

285.• Докажите, используя метод от противного, что если стороны AB и BC треугольника ABC не равны, то его медиана BD не является его высотой.

286.• Докажите методом от противного, что если разность двух углов равна 1°, то они не могут быть вертикальными.

287.• Докажите методом от противного, что из двух смежных углов хотя бы один не меньше 90°.

288.• Сформулируйте и докажите признак равенства равнобедренных треугольников по боковой стороне и медиане, проведенной к боковой стороне.

289.• Сформулируйте и докажите признак равенства треугольников по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и углу между медианой и этой стороной.

290.•• Докажите признак равенства треугольников по медиане и углам, на которые она разбивает угол треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

291. Отметьте на прямой точки A, B и C. Поставьте вместо многоточия один из знаков «<», «>», «=», чтобы образовалась правильная запись:

1) $AB + BC \ldots AC$;
2) $AB + AC \ldots BC$;
3) $AC + BC \ldots AB$.

292. Угол между биссектрисой одного из смежных углов и их общей стороной составляет $\frac{1}{3}$ второго смежного угла. Найдите градусные меры этих смежных углов.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

293. Длины сторон прямоугольника равны 4 см и 3 см. Найдите сумму длин всех отрезков, расположенных внутри прямоугольника (рис. 191).

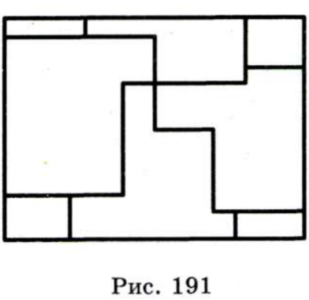


Рис. 191

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - углы треугольника;
  - периметр треугольника;
  - прямоугольный треугольник, остроугольный треугольник, тупоугольный треугольник;
  - равные треугольники, соответственные стороны и соответственные углы равных треугольников;
  - высота, медиана, биссектриса треугольника;
  - серединный перпендикуляр отрезка;
  - равнобедренный треугольник, равносторонний треугольник, разносторонний треугольник;

- вы изучили:
  - неравенство треугольника;
  - основное свойство равных треугольников;
  - три признака равенства треугольников;
  - свойства серединного перпендикуляра отрезка и точек, равноудаленных от концов отрезка;
  - свойства и признаки равнобедренного треугольника;

- вы познакомились:
  - со структурой теоремы, видами теорем;
  - с некоторыми методами доказательства теорем.

ЗАДАНИЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Треугольник является остроугольным, если:

А) среди его углов нет тупого;

Б) каждый его угол меньше прямого;

В) среди его углов нет прямого;

Г) каждый его угол меньше тупого.

2. Сумма двух сторон треугольника равна 5 см. Найдите третью сторону этого треугольника, если ее длина, выраженная в сантиметрах, не меньше 4 и равна целому числу.

А) 5; Б) 4; В) 6; Г) 1.

3. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Медиана треугольника не может совпадать со стороной;

Б) высота треугольника не может совпадать со стороной;

В) высота треугольника может совпадать со стороной;

Г) биссектриса треугольника не может совпадать со стороной.

4. Два треугольника равны, если:

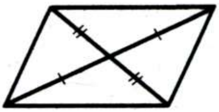
А) две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого треугольника;

Б) два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника;

В) две стороны и угол одного треугольника равны двум сторонам и углу другого треугольника;

Г) две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника.

5. Сколько пар равных треугольников изображено на рисунке (равным количеством черточек отмечены равные отрезки)?



А) 1; Б) 2; В) 3; Г) 4.

6. Известно, что M — середина стороны AC треугольника ABC. На луче BM вне треугольника отложили отрезок ME, равный отрезку BM. Найдите EC, если $AB = 4{,}2$ см.

А) 2,1 см; Б) 4,2 см; В) 4,8 см; Г) 8,4 см.

7. Какое из следующих утверждений истинно?

А) Равнобедренный треугольник — частный случай разностороннего треугольника;

Б) равносторонний треугольник — частный случай разностороннего треугольника;

В) равносторонний треугольник — частный случай равнобедренного треугольника;

Г) равнобедренный треугольник — частный случай равностороннего треугольника.

8. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Если высота треугольника делит сторону, к которой она проведена, на равные отрезки, то этот треугольник — равнобедренный;

Б) если медиана и биссектриса, проведенные из одной вершины, не совпадают, то этот треугольник не является равнобедренным;

В) если треугольник равносторонний, то длина любой его высоты равна длине любой его биссектрисы;

Г) если два угла треугольника равны, то биссектриса третьего угла делит противолежащую сторону треугольника на равные отрезки.

9. Треугольник является равносторонним, если:

А) его сторона в 3 раза меньше его периметра;

Б) каждая его сторона в 3 раза меньше его периметра;

В) две его высоты равны;

Г) две его биссектрисы равны.

10. Периметр равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) равен 16 см. Периметр треугольника ABM, где M — середина отрезка AC, равен 12 см. Найдите длину медианы BM.

А) 4 см; Б) 6 см; В) 2 см; Г) 5 см.

11. Каждая из точек X и Y равноудалена от концов отрезка AB и обе лежат в одной полуплоскости относительно прямой AB. Какое из следующих утверждений неверно?

А) Прямые XY и AB перпендикулярны;

Б) $\angle XAY = \angle XBY$;

В) $\angle AXB = \angle AYB$;

Г) $\angle AXY = \angle BXY$.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА §3

Как установить параллельность двух прямых? Какими свойствами обладают параллельные прямые? Чему равна сумма углов любого треугольника? Какими свойствами обладает прямоугольный треугольник? Изучив материал этого параграфа, вы получите ответы на поставленные вопросы.

13. Параллельные прямые

О п р е д е л е н и е. **Две прямые называют п а р а л л е л ь н ы м и, если они не пересекаются.**

На рисунке 192 изображены параллельные прямые a и b. Пишут: $a \parallel b$ (читают: «прямые a и b параллельны» или «прямая a параллельна прямой b»).

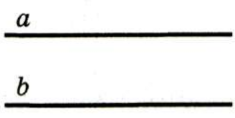


Рис. 192

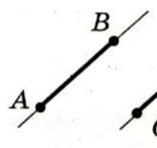


Рис. 193

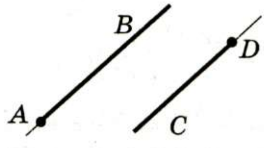


Рис. 194

Если два отрезка лежат на параллельных прямых, то их также называют параллельными.

На рисунке 193 отрезки AB и CD параллельны. Пишут: $AB \parallel CD$.

Также можно говорить о параллельности двух лучей, луча и отрезка, прямой и луча, отрезка и прямой. Например, на рисунке 194 изображены параллельные лучи.

Т е о р е м а 13.1 (п р и з н а к п а р а л л е л ь н о с т и п р я м ы х). ***Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. ⊙ На рисунке 195 $a \perp c$ и $b \perp c$. Надо доказать, что $a \parallel b$.

Предположим, что прямые a и b пересекаются в некоторой точке M (рис. 196). Тогда через точку M, не принадлежащую прямой c, проходят две прямые a и b, перпендикулярные прямой c. Это противоречит теореме 7.2. Следовательно, $a \parallel b$. ▲

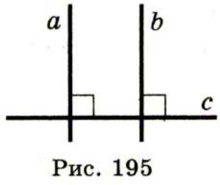


Рис. 195

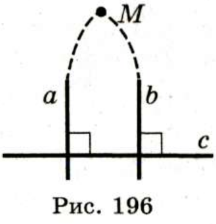


Рис. 196

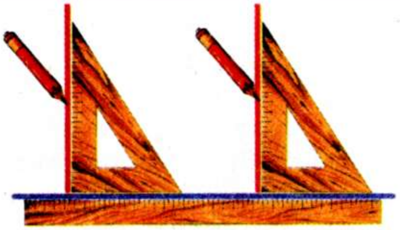


Рис. 197

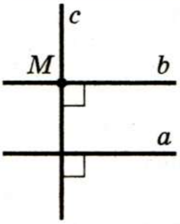


Рис. 198

Доказанная теорема позволяет с помощью линейки и угольника строить параллельные прямые (рис. 197).

Следствие. ***Через данную точку M, не принадлежащую прямой a, можно провести прямую b, параллельную прямой a.***

Доказательство. ⊙ Пусть точка M не принадлежит прямой a (рис. 198).

Проведем (например, с помощью угольника) через точку M прямую c, перпендикулярную прямой a. Теперь через точку M проведем прямую b, перпендикулярную прямой c. В силу теоремы 13.1 $a \parallel b$. ▲

Можно ли через точку M (рис. 198) провести еще одну прямую, параллельную прямой a? Ответ дает следующее

Основное свойство параллельных прямых (аксиома параллельности прямых). **Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.**

Теорема 13.2. ***Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.***

Доказательство. ⊙ Пусть $b \parallel a$ и $c \parallel a$. Докажем, что $b \parallel c$.

Предположим, что прямые b и c не параллельны, а пересекаются в некоторой точке M (рис. 199). Получается, что через точку M проходят две прямые, параллельные прямой a, что противоречит аксиоме параллельности прямых. Следовательно, $b \parallel c$. ▲

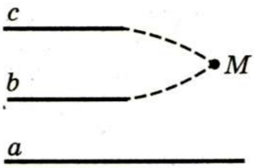


Рис. 199

Задача. *Докажите, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую.*

Решение. Пусть прямые a и b параллельны, прямая c пересекает прямую b в точке M (рис. 200). Предположим, что прямая c не пересекает прямую a, тогда $c \parallel a$. Но в этом случае через точку M проходят две прямые b и c, параллельные прямой a, что противоречит аксиоме параллельности прямых.

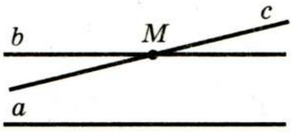


Рис. 200

Следовательно, прямая c пересекает прямую a.

?

1. Какие две прямые называют параллельными?
2. Каким символом обозначают параллельность прямых?
3. Как читают запись $m \parallel n$?
4. Какие отрезки называют параллельными?
5. Каково взаимное расположение двух прямых, перпендикулярных третьей прямой?
6. Сформулируйте аксиому параллельности прямых.
7. Каково взаимное расположение двух прямых, параллельных третьей прямой?
8. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то как эта прямая расположена относительно второй из параллельных прямых?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

294°. Перерисуйте в тетрадь рисунок 201. Проведите через каждую из точек A и B прямую, параллельную прямой m.

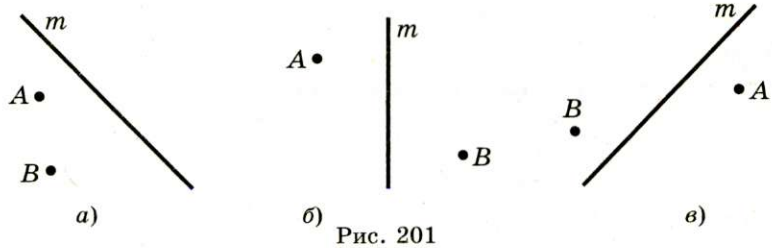


Рис. 201

295.° Начертите треугольник и проведите через каждую его вершину прямую, параллельную противолежащей стороне.

296.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 202. Проведите через точку B прямую m, параллельную прямой AC, а через точку D — прямую n, параллельную прямой AC. Каково взаимное расположение прямых m и n?

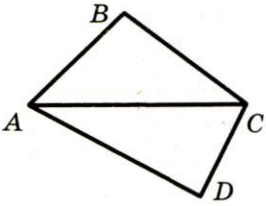


Рис. 202

УПРАЖНЕНИЯ

297.° Можно ли провести прямую, которая была бы параллельна каждой из пересекающихся прямых a и b?

298.° Прямая a параллельна стороне AB треугольника ABC. Может ли прямая a быть параллельной стороне AC или стороне BC?

299.° Прямые a и b пересекаются. Можно ли провести такую прямую c, которая была бы параллельна прямой a и пересекала прямую b?

300.° Можно ли считать два отрезка параллельными, если они не имеют общих точек?

301.° Верно ли, что из точки, не принадлежащей данной прямой, можно провести только один луч, параллельный данной прямой?

302.• Сколько через точку, не принадлежащую прямой, можно провести отрезков, параллельных данной прямой?

303.• Прямые a и b перпендикулярны прямой c, прямая d пересекает прямую a. Пересекает ли прямая d прямую b?

304.•• Докажите, что если любая прямая, пересекающая прямую a, пересекает и прямую b, то прямые a и b параллельны.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

305. На отрезке AB отметили точки C и D так, что $AC = BD$. Точка O — середина отрезка CD. Найдите расстояние между точками C и D, если $AB = 21$ см, $AO : OD = 7 : 2$.

306. Углы ABD и DBC, а также углы ABF и FBC — смежные и лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC, $\angle ABD = 80°$, $\angle ABF = 150°$, BM — биссектриса угла DBF. Найдите угол MBC.

307. В треугольнике ABC медиана CM равна половине стороны AB, $\angle A = 47°$, $\angle B = 43°$. Чему равен угол ACB?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

308. Катя и Женя подошли к квадратному пруду, в середине которого находился квадратный остров (рис. 203). На берегу они нашли две доски чуть-чуть короче ширины пролива между берегом пруда и островом. Как им все-таки попасть на остров?

Рис. 203

14. Признаки параллельности двух прямых

Если две прямые a и b пересечь третьей прямой c, то образуется восемь углов (рис. 204). Прямую c называют **секущей** прямых a и b.

Углы 3 и 6, 4 и 5 называют **односторонними**.

Углы 3 и 5, 4 и 6 называют **накрест лежащими**.

Углы 6 и 2, 5 и 1, 3 и 7, 4 и 8 называют **соответственными**.

Теорема 14.1. ***Если накрест лежащие углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.***

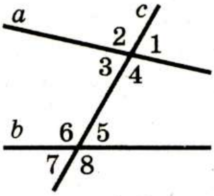


Рис. 204

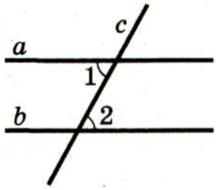


Рис. 205

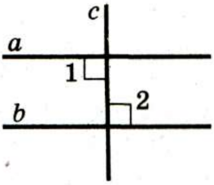


Рис. 206

Доказательство. ⊙ На рисунке 205 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$.

Если $\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (рис. 206), то параллельность прямых a и b следует из теоремы 13.1.

Пусть теперь прямая c не перпендикулярна ни прямой a, ни прямой b. Отметим точку M — середину отрезка AB (рис. 207). Через точку M проведем перпендикуляр ME к прямой a. Пусть прямая ME пересекает прямую b в точке F. Имеем: $\angle 1 = \angle 2$ по условию; $\angle 3$ и $\angle 4$ равны как вертикальные. Следовательно, $\Delta AME = \Delta BMF$ по второму признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle AEM = \angle MFB = 90°$. Мы показали, что прямые a и b перпендикулярны прямой EF, значит, они параллельны. ▲

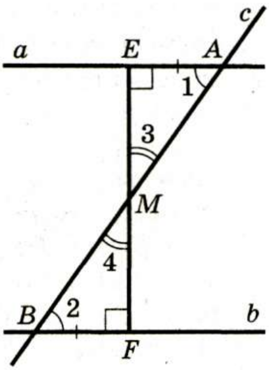


Рис. 207

Теорема 14.2. ***Если сумма односторонних углов, образующихся при пересечении двух прямых секущей, равна 180°, то прямые параллельны.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 208 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 1 и 3 смежные, следовательно, $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Тогда $\angle 2 = \angle 3$. Но они накрест лежащие. Поэтому в силу теоремы 14.1 $a \parallel b$. ▲

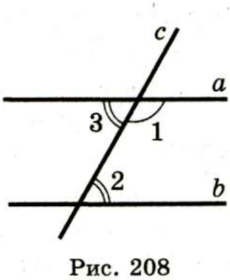


Рис. 208

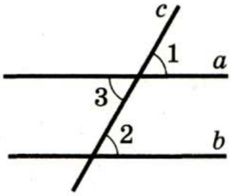


Рис. 209

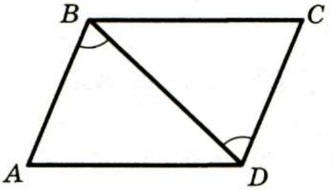


Рис. 210

Теорема 14.3. ***Если соответственные углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей, равны, то прямые параллельны.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 209 прямая c является секущей прямых a и b, $\angle 1 = \angle 2$. Докажем, что $a \parallel b$.

Углы 1 и 3 равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 3 = \angle 2$. Но они накрест лежащие. Поэтому в силу теоремы 14.1 $a \parallel b$. ▲

Пример. На рисунке 210 $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

Решение. Рассмотрим ΔABD и ΔCDB.

$AB = CD$, $\angle ABD = \angle CDB$ — по условию. BD — общая сторона. Значит, $\Delta ABD = \Delta CDB$ по двум сторонам и углу между ними.

Тогда $\angle BDA = \angle DBC$. Кроме того, $\angle BDA$ и $\angle DBC$ — накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей BD. Следовательно, $BC \parallel AD$.

?

1. Какими должны быть накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?
2. Какими должны быть соответственные углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?
3. Какими должны быть односторонние углы, образованные при пересечении двух прямых секущей, чтобы данные прямые были параллельными?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

309.° Проведите две прямые AB и CD. Проведите прямую MK, пересекающую каждую из прямых AB и CD. Отметьте точку пересечения прямых AB и MK буквой O, а прямых CD и MK — буквой E. Заполните пропуски в тексте:

1) углы AOM и ... — соответственные;
2) углы AOE и ... — соответственные;
3) углы AOE и ... — накрест лежащие;
4) углы AOE и ... — односторонние.

Укажите, какими углами (соответственными, накрест лежащими или односторонними) являются углы:

1) $\angle BOM$ и $\angle DEM$; 2) $\angle BOE$ и $\angle DEM$; 3) $\angle BOE$ и $\angle OEC$.

310.° Начертите две прямые и проведите их секущую. Пронумеруйте углы, образованные при пересечении данных прямых секущей. Укажите среди этих углов все пары:

1) соответственных углов;
2) односторонних углов;
3) накрест лежащих углов.

УПРАЖНЕНИЯ

311.° На рисунке 211 укажите все пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов.

312.° На рисунке 212 укажите углы:

1) односторонние при прямых BC и AD и секущей AB;
2) односторонние при прямых CE и CD и секущей AD;
3) накрест лежащие при прямых BC и AD и секущей CE;
4) соответственные при прямых CE и CD и секущей AD;
5) односторонние при прямых BC и AD и секущей CE.

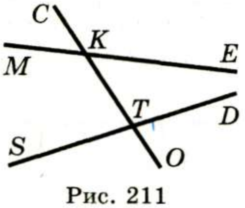


Рис. 211

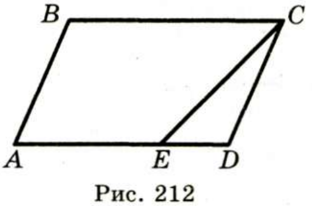
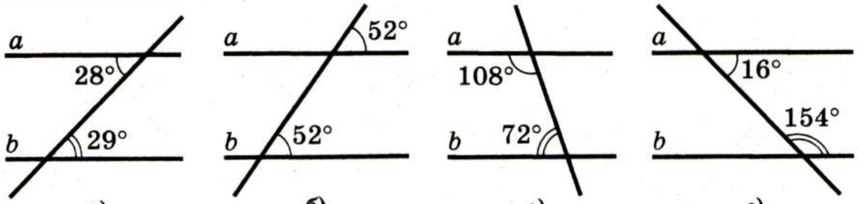


Рис. 212



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 213

313.° На каких из рисунков 213, *а–г* прямые a и b параллельны?

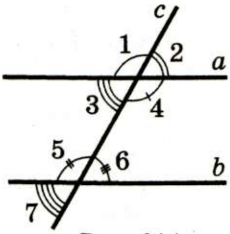
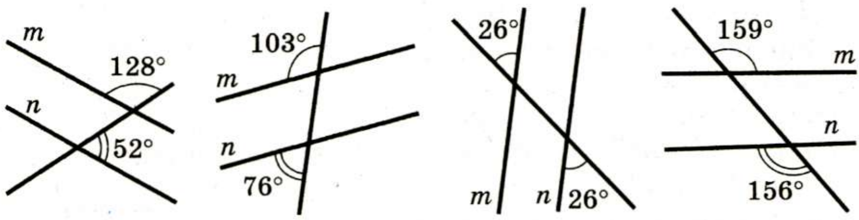


Рис. 214

314.° Параллельны ли изображенные на рисунке 214 прямые a и b, если:

1) $\angle 3 = \angle 6$;
2) $\angle 2 = \angle 6$;
3) $\angle 4 = 125^\circ$; $\angle 6 = 55^\circ$;
4) $\angle 2 = 35^\circ$; $\angle 5 = 146^\circ$;
5) $\angle 1 = 98^\circ$; $\angle 6 = 82^\circ$;
6) $\angle 1 = 143^\circ$; $\angle 7 = 37^\circ$?



а) *б)* *в)* *г)*

Рис. 215

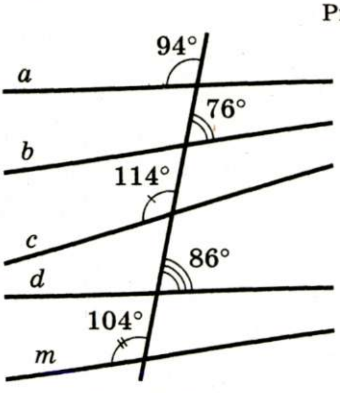


Рис. 216

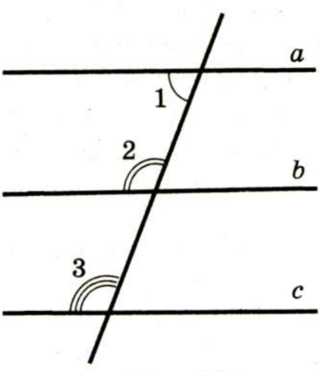


Рис. 217

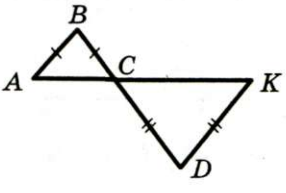


Рис. 218

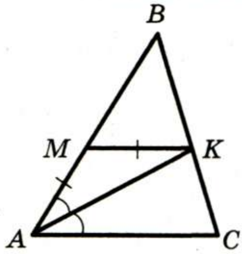


Рис. 219

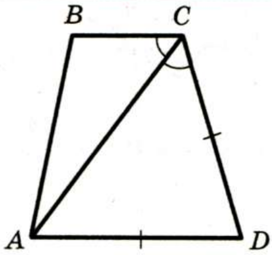


Рис. 220

315.° На каких из рисунков 215, *а–г* прямые m и n параллельны?

316.° На рисунке 216 укажите все пары параллельных прямых.

317.° На рисунке 217 укажите параллельные прямые, если $\angle 1 = 53°$, $\angle 2 = 128°$, $\angle 3 = 127°$.

318.° На рисунке 218 $AB = BC$, $CD = DK$. Докажите, что $AB \parallel DK$.

319.• На рисунке 219 AK — биссектриса угла BAC, $AM = MK$. Докажите, что $MK \parallel AC$.

320.• На рисунке 220 $\angle ACB = \angle ACD$, $AD = CD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

321.• В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle A = 60°$, $\angle BCD$ — смежный с $\angle ACB$, CM — биссектриса угла BCD. Докажите, что $AB \parallel CM$.

322.• Отрезки AB и CD пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Докажите, что $AC \parallel BD$.

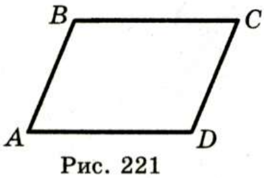


Рис. 221

323.• На рисунке 221 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

324.• На рисунке 222 прямая m пересекает прямую a. Пересекает ли прямая m прямую b?

325.• Каково взаимное расположение прямых CD и EF на рисунке 223?

326.•• Угол ABC равен 60°, а угол BCD — 120°. Можно ли утверждать, что прямые AB и CD параллельны?

327.•• Угол между прямыми a и c равен углу между прямыми b и c. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?

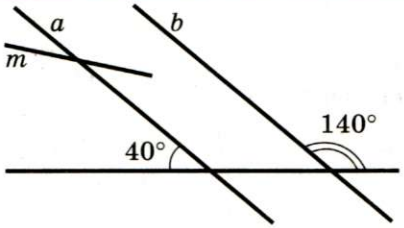


Рис. 222

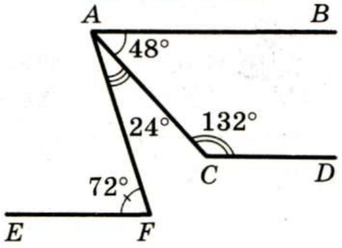


Рис. 223

328.•• Каждый из четырех углов, образованных при пересечении прямых a и b прямой c, равен $40°$, а любой из остальных углов — $140°$. Можно ли утверждать, что прямые a и b параллельны?

329.•• Прямая пересекает биссектрису BM треугольника ABC в точке O, являющейся серединой отрезка BM, а сторону BC — в точке K. Докажите, что если $OK \perp BM$, то $MK \parallel AB$.

330.•• Отрезки AM и CK — медианы треугольника ABC. На продолжении отрезка AM за точку M отложен отрезок MF, а на продолжении отрезка CK за точку K — отрезок KD так, что $MF = AM$, $KD = CK$. Докажите, что точки B, D и F лежат на одной прямой.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

331. Луч OC разбивает угол AOB на два угла так, что $\angle AOC : \angle BOC = 3 : 5$. Найдите угол между лучом OC и биссектрисой угла, смежного с углом AOB, если угол BOC на $42°$ больше угла AOC.

332. На рисунке 224 $AB = BC$, $\angle ABK = \angle CBM$. Докажите, что $BM = BK$.

333. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC. Прямая BD пересекает отрезок AC в точке E. Докажите, что $AE = EC$.

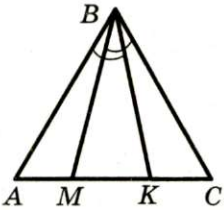


Рис. 224

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

334. Приведите пример, когда общей частью (пересечением) треугольника и четырехугольника является восьмиугольник.

ПЯТЫЙ ПОСТУЛАТ ЕВКЛИДА

В п. 6 вы узнали, что в качестве аксиом выбирают очевидные утверждения. Тогда почему бы, например, теоремы 1.1–5.1 не включить в список аксиом: ведь они тоже очевидны? Ответ на этот вопрос совершенно ясен: если какое-то утверждение можно доказать с помощью аксиом, то это утверждение — теорема, а не аксиома.

С этих позиций очень поучительна история, связанная с пятым постулатом Евклида (напомним, что в рассказе «Из истории геометрии» мы сформулировали первых четыре постулата).

V постулат. И чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны от секущей, с которой эта сумма меньше двух прямых углов (рис. 225).

Можно показать, что пятый постулат и сформулированная нами в п. 13 аксиома параллельности прямых равносильны, т. е. из постулата следует аксиома и наоборот — из аксиомы следует постулат.

Более 20 веков многие ученые пытались доказать пятый постулат (аксиому параллельности прямых), т. е. вывести его из других аксиом Евклида. Лишь в начале XIX века несколько математиков независимо друг от друга пришли к выводу: утверждение, что *через данную точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной*, является аксиомой.

$\alpha + \beta < 180°$

Рис. 225

Н. И. Лобачевский

Вам может показаться, что в этом выводе ничего особенного нет: присоединяем аксиому параллельности к уже существующему списку аксиом-правил, а дальше доказываем теоремы.

Однако если в футболе поменять только одно правило, например, потребовать от полевых игроков играть руками, а не ногами, то мы получим совершенно новую игру.

Если пятый постулат — это правило, которое мы принимаем, а не теорема, то его можно заменить противоположным утверждением.

Так и поступил выдающийся русский математик, профессор Казанского университета Николай Иванович Лобачевский (1792–1856). Он заменил лишь одно правило — аксиому параллельности прямых — таким: через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную. Новая аксиома позволила построить новую геометрию — неевклидову.

С подобной идеей несколько позже выступил венгерский математик Янош Бойяи (1802–1860).

15. Свойства параллельных прямых

Теорема 15.1 (обратная теореме 14.1). ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару накрест лежащих углов, равны.***

Доказательство. ⊖ На рисунке 226 $a \parallel b$, c — секущая. Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

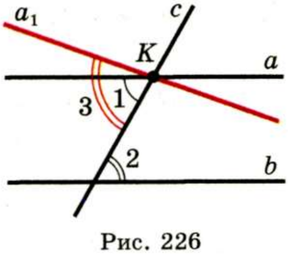


Рис. 226

Пусть $\angle 1 \neq \angle 2$. Тогда через точку K проведем прямую a_1 так, чтобы $\angle 3 = \angle 2$ (рис. 226). Углы 3 и 2 являются накрест лежащими при прямых a_1 и b и секущей c. Тогда по теореме 14.1 $a_1 \parallel b$. Получили, что через точку K проходят две прямые, параллельные прямой b. Это противоречит аксиоме

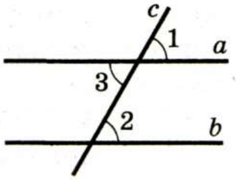


Рис. 227

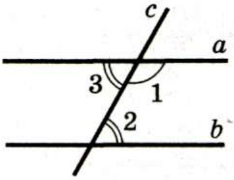


Рис. 228

параллельности прямых. Таким образом, наше предположение неверно, и $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Теорема 15.2 (обратная теореме 14.3). ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то углы, образующие пару соответственных углов, равны.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 227 $a \parallel b$, c — секущая. Докажем, что $\angle 1 = \angle 2$.

По теореме 15.1 $\angle 3$ и $\angle 2$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c. Но $\angle 3$ и $\angle 1$ равны как вертикальные. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$. ▲

Теорема 15.3 (обратная теореме 14.2). ***Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма углов, образующих пару односторонних углов, равна 180°.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 228 $a \parallel b$, c — секущая. Докажем, что $\angle 1 + \angle 2 = 180°$.

По теореме 15.1 $\angle 3$ и $\angle 2$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и b и секущей c. Но углы 3 и 1 смежные, поэтому $\angle 1 + \angle 3 = 180°$. Следовательно, $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. ▲

Следствие. ***Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой*** (рис. 229).

Докажите эту теорему самостоятельно.

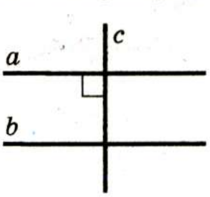


Рис. 229

Задача. *Докажите, что все точки одной из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.*

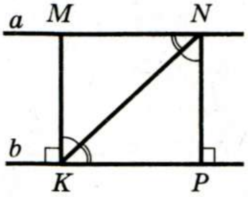


Рис. 230

Решение. Пусть прямые a и b параллельны (рис. 230), M и N — две произвольные точки прямой a. Опустим из них перпендикуляры MK и NP на прямую b. Докажем, что $MK = NP$. Для этого рассмотрим треугольники MKN и PNK.

KN — их общая сторона.

Так как $MK \perp b$ и $NP \perp b$, то $MK \parallel NP$, а углы MKN и PNK равны как накрест лежащие при параллельных прямых MK и NP и секущей KN.

Аналогично $\angle MNK$ и $\angle PKN$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых MN и KP и секущей KN.

Следовательно, треугольники MKN и PNK равны по стороне и двум прилежащим углам. Тогда $MK = NP$.

Определение. **Расстоянием между двумя параллельными прямыми называют расстояние от любой точки одной из прямых до другой прямой.**

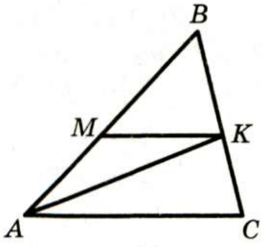


Рис. 231

Пример. На рисунке 231 отрезок AK — биссектриса треугольника ABC, $MK \parallel AC$. Докажите, что треугольник AMK — равнобедренный.

Решение. Так как AK — биссектриса треугольника ABC, то $\angle MAK = \angle KAC$.

Углы KAC и MKA равны как накрест лежащие при параллельных прямых MK и AC и секущей AK.

Следовательно, $\angle MAK = \angle MKA$.

Тогда ΔAMK — равнобедренный с основанием AK.

1. Сравните накрест лежащие углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей.

2. Сравните соответственные углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей.

3. Чему равна сумма односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей?

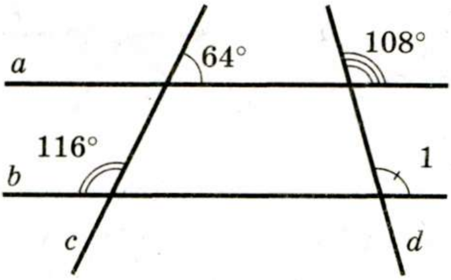


Рис. 232

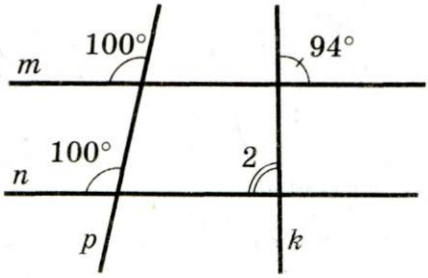


Рис. 233

4. Известно, что прямая перпендикулярна одной из двух параллельных прямых. Обязательно ли она перпендикулярна другой прямой?

5. Что называют расстоянием между двумя параллельными прямыми?

УПРАЖНЕНИЯ

335.° На рисунке 232 найдите угол 1.

336.° На рисунке 233 найдите угол 2.

337.° Разность односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна 50°. Найдите эти углы.

338.° Один из односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, в 4 раза больше другого. Найдите эти углы.

339.° Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если:

1) один из этих углов равен 48°;

2) отношение градусных мер двух из этих углов равно $2:7$.

340.° Найдите все углы, образованные при пересечении двух параллельных прямых секущей, если один из них на 24° меньше другого.

341.° На рисунке 234 $m \parallel n$, $p \parallel k$, $\angle 1 = 50°$. Найдите $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$.

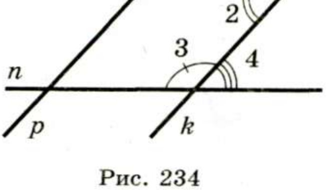


Рис. 234

342.° Прямая, параллельная основанию AC равнобедренного треугольника ABC, пересекает его

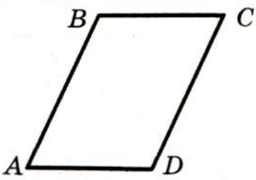


Рис. 235

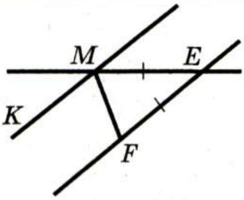


Рис. 236

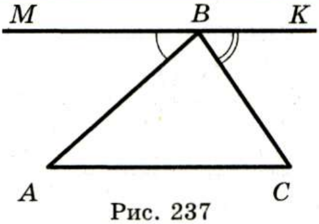


Рис. 237

боковые стороны AB и BC в точках D и F соответственно. Докажите, что ΔDBF — равнобедренный.

343.° На продолжениях сторон AC и BC треугольника ABC ($AB = BC$) за точки A и B отметили соответственно точки P и K так, что $PK \parallel AB$. Докажите, что ΔKPC — равнобедренный.

344.° Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, $AO = BO$, $AC \parallel BD$. Докажите, что $CO = DO$.

345.° Отрезки MK и DE пересекаются в точке F, $DK \parallel ME$, $DK = ME$. Докажите, что $\Delta MEF = \Delta DKF$.

346.° Ответьте на вопросы:

1) Могут ли оба односторонних угла при двух параллельных прямых и секущей быть тупыми?
2) Может ли сумма накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей быть равной $180°$?
3) Могут ли быть равными односторонние углы при двух параллельных прямых и секущей?

347.• На рисунке 235 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что $BC = AD$.

348.• На рисунке 235 $BC = AD$, $BC \parallel AD$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

349.• На рисунке 236 $MK \parallel EF$, $ME = EF$, $\angle KMF = 70°$. Найдите $\angle MEF$.

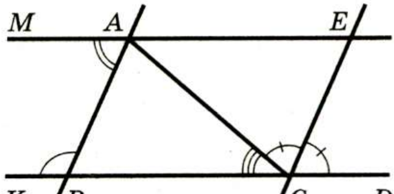


Рис. 238

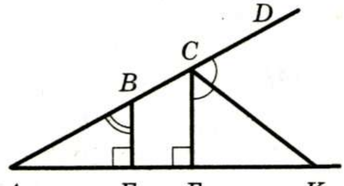


Рис. 239

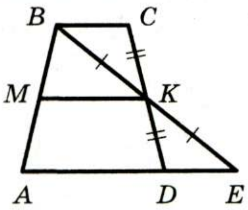


Рис. 240

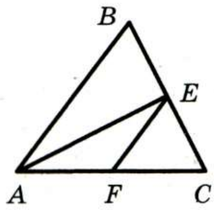


Рис. 241

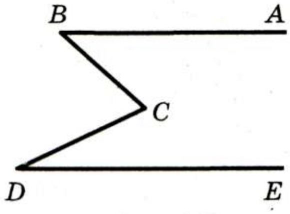


Рис. 242

350.$^{\bullet}$ Через вершину B треугольника ABC (рис. 237) провели прямую MK, параллельную прямой AC, $\angle MBA = 42°$, $\angle CBK = 56°$. Найдите углы треугольника ABC.

351.$^{\bullet}$ Прямая, проведенная через вершину A треугольника ABC параллельно его противолежащей стороне, образует со стороной AC угол, равный углу BAC. Докажите, что данный треугольник — равнобедренный.

352.$^{\bullet}$ На рисунке 238 $\angle MAB = 50°$, $\angle ABK = 130°$, $\angle ACB = 40°$, CE — биссектриса угла ACD. Найдите углы треугольника ACE.

353.$^{\bullet}$ На рисунке 239 $BE \perp AK$, $CF \perp AK$, CK — биссектриса угла FCD, $\angle ABE = 32°$. Найдите $\angle ACK$.

354.$^{\bullet}$ На рисунке 240 $BC \parallel MK$, $BK = KE$, $CK = KD$. Докажите, что $AD \parallel MK$.

355.$^{\bullet}$ На рисунке 241 $AB = AC$, $AF = FE$, $AB \parallel EF$. Докажите, что $AE \perp BC$.

356.$^{\bullet}$ Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC. Через произвольную точку M его биссектрисы BD проведены прямые, параллельные его сторонам AB и BC и пересекающие отрезок AC в точках E и F соответственно. Докажите, что $DE = DF$.

357.$^{\bullet\bullet}$ На рисунке 242 $AB \parallel DE$. Докажите, что $\angle BCD = \angle ABC + \angle CDE$.

358.$^{\bullet\bullet}$ На рисунке 243 $AB \parallel DE$, $\angle ABC = 100°$, $\angle CDE = 170°$. Докажите, что $BC \perp CD$.

359.$^{\bullet\bullet}$ Через вершину B треугольника ABC провели прямую, параллельную его биссектрисе AM. Эта

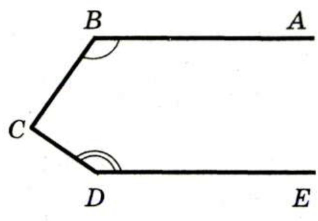


Рис. 243

прямая пересекает прямую AC в точке K. Докажите, что ΔBAK — равнобедренный.

360.** Через точку O пересечения биссектрис AE и CF треугольника ABC провели прямую, параллельную прямой AC. Эта прямая пересекает сторону AB в точке M, а сторону BC — в точке K. Докажите, что $MK = AM + CK$.

361.** Биссектрисы углов BAC и BCA треугольника ABC пересекаются в точке O. Через эту точку проведены прямые, параллельные прямым AB и BC и пересекающие сторону AC в точках M и K соответственно. Докажите, что периметр треугольника MOK равен длине стороны AC.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

362. На отрезке AB отметили точку C так, что $AC:BC = 2:1$. На отрезке AC отметили точку D так, что $AD:CD = 3:2$. В каком отношении точка D делит отрезок AB?

363. Отрезки AC и BD пересекаются в точке O, $AB = BC = CD = AD$. Докажите, что $AC \perp BD$.

364. В треугольнике MOE на стороне MO отметили точку A, в треугольнике TPK на стороне TP — точку B так, что $MA = TB$. Какова градусная мера угла BKP, если $MO = TP$, $\angle M = \angle T$, $\angle O = \angle P$, $\angle AEO = 17°$?

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

365. На рисунке 244 изображена очень сложная замкнутая ломаная. Она ограничивает некоторую часть плоскости (многоугольник). Как, отметив на рисунке любую точку, по возможности быстрее определить, принадлежит эта точка многоугольнику или нет?

Рис. 244

16. Сумма углов треугольника

Треугольник — ключевая фигура планиметрии. Мир треугольников разнообразен. Но всем им присуще одно свойство.

Теорема 16.1. ***Сумма углов треугольника равна 180°.***

Доказательство. ⊙ Рассмотрим произвольный треугольник ABC. Требуется доказать, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$.

Через вершину B проведем прямую a, параллельную прямой AC (рис. 245). Имеем: $\angle A$ и $\angle 1$ равны как накрест лежащие при параллельных прямых a и AC и секущей AB. Аналогично доказываем, что $\angle C = \angle 3$. Но углы 1, 2, 3 составляют развернутый угол с вершиной B. Следовательно, $\angle A + \angle ABC + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$. ▲

Следствие. ***Среди углов треугольника хотя бы два угла острые.***

Докажите эту теорему самостоятельно.

Определение. **Внешним углом треугольника называют угол, смежный с углом этого треугольника.**

На рисунке 246 углы 1, 2, 3 являются внешними углами треугольника ABC.

Теорема 16.2. ***Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 246 $\angle 1$ — внешний. Надо доказать, что $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$.

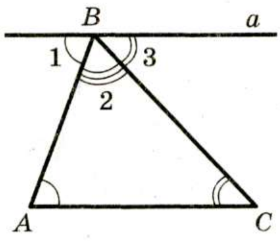


Рис. 245

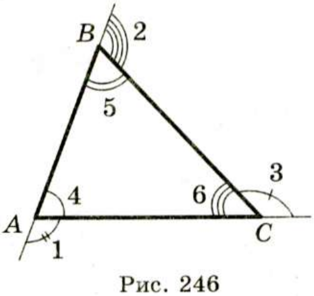


Рис. 246

Очевидно, что $\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ$. Та как $\angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$, то $\angle 1 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 5 + \angle 6$, отсюда $\angle 1 = \angle 5 + \angle 6$. ▲

Следствие. ***Внешний угол треугольника больше каждого из углов треугольника, не смежных с ним.***

Докажите эту теорему самостоятельно.

Вы уже знаете, что в треугольнике против равных сторон лежат равные углы, и наоборот, против равных углов лежат равные стороны (п. 9, 10). Это свойство дополняет следующая

Теорема 16.3. ***В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, и наоборот, против большего угла лежит большая сторона.***

Доказательство. ⊛ Рассмотрим треугольник ABC, у которого $AB > BC$. Надо доказать, что $\angle ACB > \angle A$ (рис. 247).

Поскольку $AB > BC$, то на стороне AB найдется такая точка M, что $BM = BC$. Получили равнобедренный треугольник MBC, в котором $\angle BMC = \angle BCM$.

Так как $\angle BMC$ — внешний угол треугольника AMC, то $\angle BMC > \angle A$. Следующая «цепочка» доказывает первую часть теоремы:

$$\angle ACB > \angle MCB = \angle BMC > \angle A.$$

Рассмотрим треугольник ABC, у которого $\angle A < \angle C$. Надо доказать, что $BC < AB$.

Поскольку $\angle C > \angle A$, то угол C можно разделить на два угла ACM и MCB так, что $\angle MCA = \angle A$ (рис. 248). Тогда ΔAMC — равнобедренный с равными сторонами MA и MC.

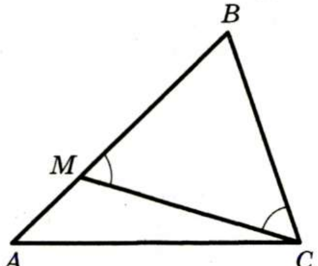


Рис. 247

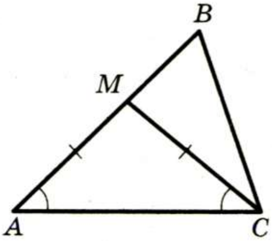


Рис. 248

Используя неравенство треугольника, получим:

$$BC < MB + MC = MB + MA = AB. \blacktriangle$$

Задача. ***Медиана CM треугольника ABC равна половине стороны AB. Докажите, что ΔABC — прямоугольный.***

Решение. **По условию $AM = CM$ (рис. 249). Тогда в треугольнике AMC $\angle A = \angle ACM$.**

Аналогично $BM = CM$, и в треугольнике BMC $\angle B = \angle BCM$.

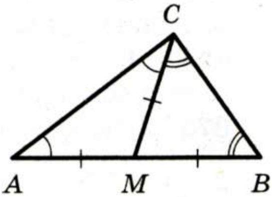


Рис. 249

В ΔACB: $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180°$. Учитывая, что $\angle ACM + \angle BCM = \angle ACB$, имеем:

$$\angle ACM + \angle BCM + \angle ACB = 180°;$$

$$2\angle ACB = 180°;$$

$$\angle ACB = 90°.$$

Следовательно, ΔABC — прямоугольный.

?

1. Чему равна сумма углов треугольника?
2. Какое наименьшее количество острых углов есть в любом треугольнике?
3. Какой угол называют внешним углом треугольника?
4. Как связаны внешний угол треугольника и два угла треугольника, не смежные с ним?
5. Сравните внешний угол треугольника с углом треугольника, не смежным с ним.
6. Сформулируйте теорему о соотношении между сторонами и углами треугольника.

УПРАЖНЕНИЯ

366.° **Найдите третий угол треугольника, если два его угла равны 35° и 96°.**

367.° **Один из углов треугольника в 3 раза меньше другого угла и на 35° меньше третьего. Найдите углы треугольника.**

368.° **Найдите углы треугольника, если их градусные меры относятся как 2 : 3 : 7.**

369.° Найдите углы равностороннего треугольника.

370.° Найдите углы равнобедренного прямоугольного треугольника.

371.° Угол при основании равнобедренного треугольника равен $63°$. Найдите угол при вершине этого треугольника.

372.° Найдите углы при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен $104°$.

373.° Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при вершине в 4 раза больше угла при основании.

374.° Найдите углы равнобедренного треугольника, если угол при основании на $48°$ меньше угла при вершине.

375.° Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен: 1) $110°$; 2) $50°$. Сколько решений имеет задача?

376.° Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из них равен: 1) $42°$; 2) $94°$. Сколько решений имеет задача?

377.° В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, AK — биссектриса, $\angle BAK = 18°$. Найдите углы AKC и ABC.

378.° В треугольнике ABC $AB = BC$, CK — биссектриса, $\angle A = 66°$. Найдите $\angle AKC$.

379.° Биссектрисы AK и CM треугольника ABC пересекаются в точке O, $\angle BAC = 116°$, $\angle BCA = 34°$. Найдите $\angle AOC$.

380.° В равнобедренном треугольнике ABC с углом при вершине B, равным $36°$, провели биссектрису AD. Докажите, что треугольники ADB и CAD — равнобедренные.

381.° В треугольнике ABC провели биссектрису BF. Найдите угол C, если $\angle A = 39°$, $\angle AFB = 78°$.

382.° Докажите, что если один из углов треугольника равен сумме двух других углов, то этот треугольник — прямоугольный.

383.° На рисунке 250 укажите внешние углы:

1) при вершинах E и F треугольника MEF;

2) при вершине E треугольника MKE.

384.° На рисунке 251 укажите треугольники, для которых внешним углом является: 1) угол AMB; 2) угол BMD.

385.° Один из внешних углов треугольника равен $75°$. Чему равны:

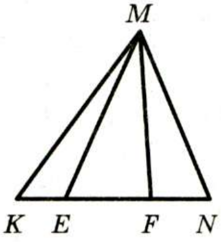


Рис. 250

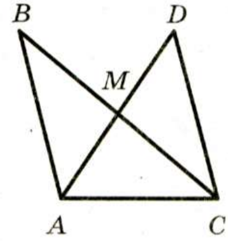


Рис. 251

1) угол треугольника при этой вершине;

2) сумма двух углов треугольника, не смежных с ним?

386.° Может ли внешний угол треугольника быть меньше угла треугольника? В случае утвердительного ответа укажите вид треугольника.

387.° Определите вид треугольника, если один из его внешних углов равен углу треугольника, смежному с ним.

388.° Один из внешних углов треугольника равен $136°$, а один из углов треугольника, не смежный с ним, — $61°$. Найдите второй угол треугольника, не смежный с данным внешним.

389.° Один из внешних углов треугольника равен $154°$. Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если один из этих углов на $28°$ больше другого.

390.° Один из внешних углов треугольника равен $98°$. Найдите углы треугольника, не смежные с ним, если один из этих углов в 6 раз меньше другого.

391.° Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при его вершине равен $38°$.

392.° Сравните углы треугольника ABC, если:

1) $AB > AC > BC$; 2) $AB = BC$, $BC > AC$.

393.° В треугольнике ABC $\angle A = 34°$, $\angle B = 28°$. Сравните стороны AB, BC и AC.

394.° Сравните стороны треугольника ABC, если:

1) $\angle C > \angle A > \angle B$;

2) $\angle B > \angle C$, $\angle A = \angle B$.

395.° Докажите, что если два угла одного треугольника равны соответственно двум углам другого треугольника, то и третьи углы этих треугольников равны.

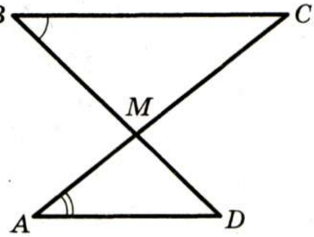


Рис. 252

396. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его внешних углов равен: 1) 54°; 2) 112°. Сколько решений имеет задача?

397. Внешний угол равнобедренного треугольника равен 130°. Найдите углы треугольника. Сколько решений имеет задача?

398. Биссектрисы углов при основании AC равнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что угол AOC равен внешнему углу треугольника при вершине A.

399. На рисунке 252 $BC \parallel AD$, $\angle A = 25°$, $\angle B = 55°$. Найдите угол CMD.

400. Отрезок BK — биссектриса равнобедренного треугольника ABC с основанием BC, $\angle AKB = 105°$. Найдите углы треугольника ABC.

401. На стороне AB треугольника ABC отметили точку D так, что $BD = BC$, $\angle ACD = 15°$, $\angle DCB = 40°$. Найдите углы треугольника ABC.

402. На сторонах треугольника ABC (рис. 253) отметили точки E и F так, что $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle 3 = \angle 4$.

403. На рисунке 254 $BC \parallel AD$, $\angle B = 100°$, $\angle ACD = 95°$, $\angle D = 45°$. Докажите, что $AB = BC$.

404. Через вершину C треугольника ABC проведена прямая, параллельная биссектрисе AM треугольника и пересекающая прямую AB в точке K. Найдите углы треугольника AKC, если $\angle BAC = 70°$.

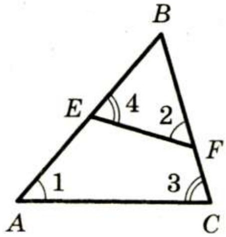


Рис. 253

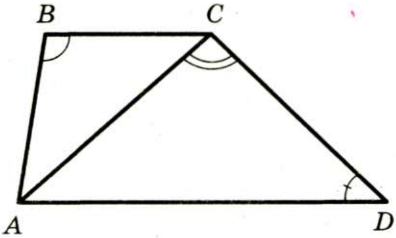


Рис. 254

405.$^{\bullet}$ В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Найдите $\angle AOC$, если $\angle B = 100°$.

406.$^{\bullet}$ Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна его основанию.

407.$^{\bullet}$ Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна его стороне, то этот треугольник равнобедренный.

408.$^{\bullet}$ Угол при основании AC равнобедренного треугольника ABC в 2 раза больше угла при вершине, AM — биссектриса треугольника. Докажите, что $BM = AC$.

409.$^{\bullet}$ Треугольник ABC равнобедренный с основанием AC. На стороне BC отметили точку M так, что $BM = AM = AC$. Найдите углы треугольника ABC.

410.$^{\bullet}$ Докажите, что в любом треугольнике существует угол: 1) не меньше 60°; 2) не больше 60°.

411.$^{\bullet}$ Определите вид треугольника, если:

1) один из его углов больше суммы двух других;

2) любой из его углов меньше суммы двух других.

412.$^{\bullet}$ Определите вид треугольника, если сумма любых двух его углов больше 90°.

413.$^{\bullet}$ В треугольнике ABC угол B — тупой. На продолжении стороны AB за точку A отметили произвольную точку D. Докажите, что $CD > AC$.

414.$^{\bullet}$ В треугольнике ABC $\angle C > 90°$. На стороне BC отметили произвольную точку D. Докажите, что $AD > AC$.

415.$^{\bullet\bullet}$ Существует ли треугольник, две биссектрисы которого перпендикулярны?

416.$^{\bullet\bullet}$ Существует ли треугольник, в котором одна биссектриса делит пополам другую биссектрису?

417.$^{\bullet\bullet}$ Биссектриса угла B равнобедренного треугольника ABC разбивает его на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

418.* В треугольнике ABC $\angle A = \alpha$, биссектрисы внешних углов при вершинах B и C пересекаются в точке O. Найдите $\angle BOC$.

419.* Отрезок AM — медиана треугольника ABC, $\angle CAM > \angle BAM$. Докажите, что $AB > AC$.

420.[*] На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки E и F так, что $AC = AF = EF = BE$. Найдите углы треугольника ABC.

421.[*] В треугольнике ABC $AB = 2$ см, $\angle A = 60°$, $\angle B = 70°$. На стороне AC отметили точку D так, что $AD = 1$ см. Найдите углы треугольника BDC.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

422. На прямой отметили точки A, B и C так, что точка B лежит между точками A и C и $BC = 2AB$. На отрезке BC отметили точку D так, что $BD : DC = 3 : 7$. Найдите расстояние между серединами отрезков AB и CD, если отрезок CD на 16 см длиннее отрезка BD.

423. На медиане BM треугольника ABC отметили точку O так, что $\angle OAC = \angle OCA$. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

424. Докажите, что сумма длин двух сторон треугольника больше удвоенной длины медианы, проведенной к третьей стороне.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

425. Существует ли шестиугольник, у которого никакие две диагонали не имеют общих точек, отличных от вершин?

17. Прямоугольный треугольник

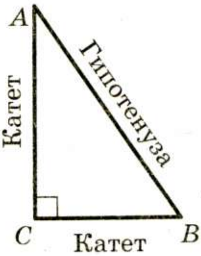


Рис. 255

На рисунке 255 изображен прямоугольный треугольник ABC, у которого $\angle C = 90°$.

Сторону прямоугольного треугольника, противолежащую прямому углу, называют **гипотенузой**, а стороны, прилежащие к прямому углу, — **катетами** (рис. 255).

Для доказательства равенства двух треугольников находят их равные элементы. У любых двух прямоугольных треугольников такие элементы есть всегда — это прямые углы. Поэтому для прямоугольных треугольников можно сформулировать «персональные» признаки равенства.

Теорема 17.1 (признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету). ***Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого, то такие треугольники равны.***

Доказательство. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$, у которых $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ (рис. 256). Надо доказать, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

Расположим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ так, чтобы вершина A совместилась с вершиной A_1, вершина C — с вершиной C_1, а точки B и B_1 лежали в разных полуплоскостях относительно прямой A_1C_1 (рис. 257).

Имеем: $\angle A_1C_1B + \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Значит, угол BC_1B_1 — развернутый, и тогда точки B, C_1, B_1 лежат на одной прямой. Получили равнобедренный треугольник BA_1B_1 с боковыми сторонами A_1B и A_1B_1 и высотой A_1C_1 (рис. 257). Тогда A_1C_1 — медиана этого треугольника, и $C_1B = C_1B_1$. Следовательно, $\Delta A_1BC_1 = \Delta A_1B_1C_1$ по третьему признаку равенства треугольников. ▲

При решении задач удобно пользоваться и другими признаками равенства прямоугольных треугольников, непосредственно вытекающими из признаков равенства треугольников.

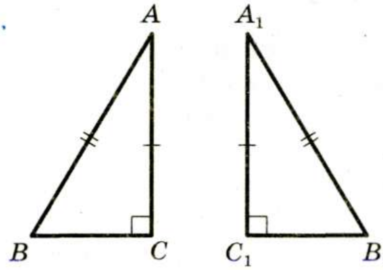


Рис. 256

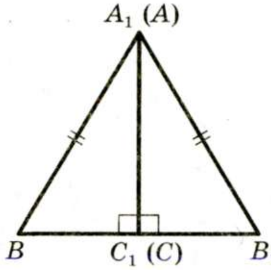


Рис. 257

Признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам. ***Если катеты одного прямоугольного треугольника соответственно равны катетам другого, то такие треугольники равны.***

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу. ***Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого, то такие треугольники равны.***

Очевидно, что если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то равны и два других острых угла. Воспользовавшись этим утверждением, список признаков равенства прямоугольных треугольников можно дополнить еще двумя признаками.

Признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу. ***Если катет и противолежащий ему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему ему острому углу другого, то такие треугольники равны.***

Признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу. ***Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие треугольники равны.***

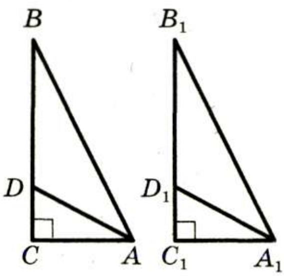


Рис. 258

Пример. Докажите равенство прямоугольных треугольников по острому углу и биссектрисе, проведенной из вершины этого угла.

Решение. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 258) $\angle C = \angle C_1 = 90°$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, отрезки AD и A_1D_1 — биссектрисы, $AD = A_1D_1$.

Так как $AD = A_1D_1$,

$$\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAC = \frac{1}{2}\angle B_1A_1C_1 = \angle C_1A_1D_1,$$

то прямоугольные треугольники ACD и $A_1C_1D_1$ равны по гипотенузе и острому углу. Тогда $AC = A_1C_1$ и прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по катету и прилежащему острому углу.

?

1. Какой треугольник называют прямоугольным?
2. Какую сторону прямоугольного треугольника называют гипотенузой?
3. Какую сторону прямоугольного треугольника называют катетом?
4. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.
5. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по двум катетам.
6. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и прилежащему острому углу.
7. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по катету и противолежащему острому углу.
8. Сформулируйте признак равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу.
9. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

426.° С помощью транспортира и линейки постройте прямоугольный треугольник:

1) катеты которого равны 3 см и 4 см;
2) один из катетов которого равен 2,5 см, а прилежащий к нему угол — 40°;
3) гипотенуза которого равна 6 см, а один из острых углов — 70°.

Обозначьте построенные треугольники, укажите в каждом из них катеты и гипотенузу.

427.° С помощью транспортира и линейки постройте равнобедренный прямоугольный треугольник:

1) с катетом, равным 5 см;

2) с гипотенузой, равной 4 см.

УПРАЖНЕНИЯ

428.° На рисунке 259 изображен треугольник MKE с прямым углом при вершине K. Укажите:

1) катеты и гипотенузу треугольника;

2) катет, прилежащий к углу E;

3) катет, противолежащий углу M.

429.° На рисунке 260 AD — высота треугольника ABC. Найдите на этом рисунке прямоугольные треугольники, укажите в каждом из них катеты и гипотенузу.

430.° Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 43°. Найдите второй острый угол.

431.° В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена высота AH. Найдите угол CAH, если $\angle B = 76°$.

432.° Угол между основанием равнобедренного треугольника и высотой, проведенной к боковой стороне, равен 19°. Найдите углы данного треугольника.

433.° На рисунке 261 $AB \perp BC$, $CD \perp BC$, $AC = BD$. Докажите, что $AB = CD$.

434.° На рисунке 262 $MO = FO$, $\angle MEO = \angle FKO = 90°$. Докажите, что $\Delta MEO = \Delta FKO$.

435.° Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой a, опущены перпендикуляры AM и BK на эту прямую, $AM = BK$. Докажите, что $AK = BM$.

436.° На рисунке 263 $AB = CD$, $AB \parallel CD$, $BM \perp AC$, $DK \perp AC$. Докажите, что $BM = DK$.

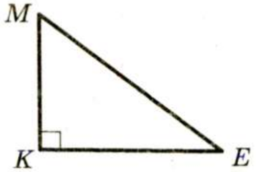


Рис. 259

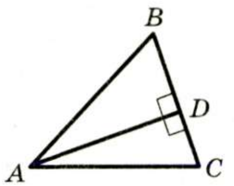


Рис. 260

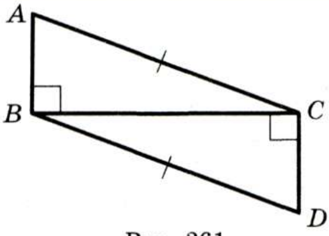


Рис. 261

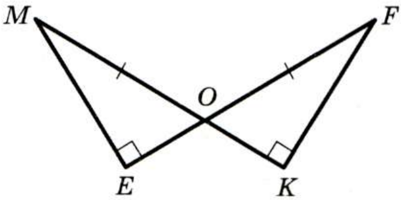


Рис. 262

437.° На рисунке 264 $AB = BC$, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$. Докажите, что $BE = BD$.

438.° На биссектрисе угла с вершиной в точке B отметили точку M, из которой опустили перпендикуляры MD и MC на стороны угла. Докажите, что $MD = MC$.

439.° На сторонах угла с вершиной в точке B отметили точки A и C так, что $AB = BC$. Через точки A и C провели прямые, перпендикулярные сторонам BA и BC соответственно, которые пересекаются в точке O. Докажите, что луч BO — биссектриса угла ABC.

440.• Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные к его боковым сторонам, равны.

441.• Докажите, что если две высоты треугольника равны, то этот треугольник является равнобедренным.

442.• Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведенной из вершины прямого угла.

443.• Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

444.• Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и биссектрисе, проведенной из вершины прилежащего к этому катету острого угла.

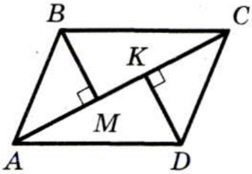


Рис. 263

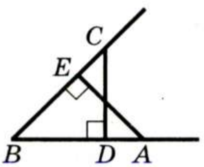


Рис. 264

445. Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и медиане, проведенной к другому катету.

446. Докажите, что в равных треугольниках высоты, опущенные на соответственно равные стороны, равны.

447. Докажите равенство остроугольных треугольников по стороне и двум высотам, проведенным из концов этой стороны.

448. Докажите равенство треугольников по стороне и проведенным к ней медиане и высоте.

449. Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC соответственно в точках M и K, являющихся серединами этих сторон. Докажите, что вершины данного треугольника равноудалены от прямой MK.

450. Прямая пересекает стороны AB и BC треугольника ABC в точках M и K соответственно. Вершины данного треугольника равноудалены от прямой MK. Докажите, что точки M и K являются серединами сторон AB и BC соответственно.

451. Высоты AM и CK треугольника ABC пересекаются в точке H, $HK = HM$. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

452. Высоты ME и NF треугольника MKN пересекаются в точке O, $OM = ON$, $MF = KE$. Докажите, что ΔMKN — равносторонний.

453. Можно ли утверждать, что если две стороны и высота, проведенная к третьей стороне, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне, другого треугольника, то эти треугольники равны?

454. Докажите равенство треугольников по двум углам и высоте, проведенной из вершины третьего угла.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

455. Углы ABC и DBC — смежные, луч BM принадлежит углу ABC, луч BK — углу DBC, $\angle MBC = \angle CBK = 30^\circ$, угол DBK в 5 раз больше угла ABM. Найдите углы ABC и DBC.

456. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $BM = BK$. Отрезки AK и CM пересекаются в точке O. Докажите, что:

1) ΔAOC — равнобедренный;

2) прямая BO — серединный перпендикуляр отрезка AC.

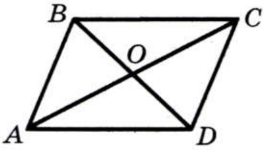


Рис. 265

457. На рисунке 265 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $AO = OC$.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

458. Можно ли замостить плоскость такими фигурами, как изображенная на рисунке 266?

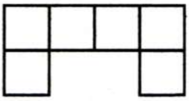


Рис. 266

18. Свойства прямоугольного треугольника

Теорема 18.1. ***В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.***

Доказательство. ⊙ Каждый из катетов лежит против острого угла, а гипотенуза лежит против прямого угла. Прямой угол больше острого угла, следовательно, в силу теоремы 16.3 гипотенуза больше любого из катетов. ▲

Следствие. ***Если из одной точки, не лежащей на прямой, к этой прямой проведены перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр меньше наклонной.***

На рисунке 267 отрезок AB — перпендикуляр, отрезок AX — наклонная, $AB < AX$.

Рис. 267

Часто при решении задач используют результаты следующих двух задач.

Задача 1. *Катет, лежащий против угла, величина которого равна* 30°, *равен половине гипотенузы.*

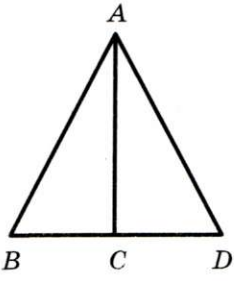


Рис. 268

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $\angle A = 30°$. Надо доказать, что $\mathbf{BC = \frac{1}{2}AB}$.

На прямой BC отложим отрезок CD, равный отрезку BC (рис. 268). Тогда $\Delta ABC = \Delta ADC$ по двум катетам. Действительно, стороны BC и CD равны по построению, AC — общая сторона этих треугольников и $\angle ACB = \angle ACD = 90°$. Тогда $\angle DAC = 30°$. Отсюда $\angle BAD = \angle ADB = 60°$. Следовательно, $\angle ABD = 60°$ и треугольник ABD — равносторонний. Значит, $\mathbf{BC = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}AB}$.

Задача 2. *Если катет равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен* 30°.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC, в котором $\angle ACB = 90°$, $\mathbf{BC = \frac{1}{2}AB}$. Надо доказать, что $\angle A = 30°$.

На прямой BC отложим отрезок CD, равный отрезку BC (рис. 268). Тогда $AB = BD$. Кроме того, отрезок AC является медианой и высотой треугольника BAD, следовательно, по признаку равнобедренного треугольника $AB = AD$. Теперь ясно, что $AB = BD = AD$ и треугольник BAD — равносторонний. Так как отрезок AC — биссектриса треугольника BAD, то $\mathbf{\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD = 30°}$.

?

1. Какая из сторон прямоугольного треугольника является наибольшей?

2. Каково свойство катета, лежащего против угла, равного 30°?

3. Какова градусная мера угла, лежащего против катета, равного половине гипотенузы?

УПРАЖНЕНИЯ

459.° Стороны прямоугольного треугольника равны 24 см, 10 см и 26 см. Найдите катеты и гипотенузу данного треугольника.

460.° В прямоугольном треугольнике DEF гипотенуза DE равна 18 см, $\angle D = 30^\circ$. Найдите катет FE.

461.° В прямоугольном треугольнике MKC $\angle M = 90^\circ$, $\angle C = 60^\circ$, $CM = 7$ см. Найдите гипотенузу CK.

462.° В равностороннем треугольнике ABC точка D — середина стороны AB. Из этой точки опущен перпендикуляр DE на сторону AC. Найдите отрезки, на которые точка E разбивает отрезок AC, если сторона данного треугольника равна 16 см.

463.° В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CK — высота, $CK = 7$ см, $AC = 14$ см. Найдите $\angle B$.

464.° Один из углов прямоугольного треугольника равен 30°, а разность гипотенузы и меньшего катета — 5 см. Найдите эти стороны треугольника.

465.° В треугольнике ABC $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 45^\circ$, CK — высота, $AC = 10$ см. Найдите отрезок BK.

466.° В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 30^\circ$, CD — высота, $BD = 7$ см. Найдите гипотенузу AB.

467.• На рисунке 269 AB — перпендикуляр, AC — наклонная, $AC = 2$ см. Найдите угол ACB и длину перпендикуляра AB, если эта длина, выраженная в сантиметрах, равна целому числу.

468.• Основание равнобедренного треугольника равно 18 см, а один из углов — 120°. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины угла при его основании.

469.• В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC провели высоту BM, $BM = 7{,}5$ см, $\angle MBC = 15^\circ$. Найдите боковую сторону треугольника.

470.• Биссектрисы AM и BK равностороннего треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что $AO : OM = 2 : 1$.

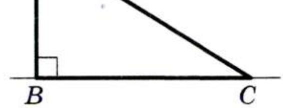


Рис. 269

471.•• В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 30°$. Серединный перпендикуляр отрезка AB пересекает его в точке M, а отрезок BC — в точке K. Докажите, что $MK = \frac{1}{3}BC$.

472.•• В треугольнике MKE $\angle K = 90°$, $\angle E = 30°$, $KE = 12$ см. Найдите биссектрису MC треугольника.

473.•• В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle BAC = 60°$, отрезок AD — биссектриса, отрезок CD на 3 см меньше отрезка BD. Найдите биссектрису AD.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

474. На рисунке 270 $AB = BC$, $AM = KC$, $\angle AKE = \angle FMC$. Докажите, что ΔFBE — равнобедренный.

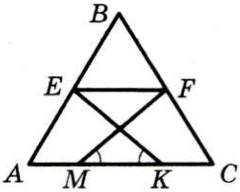


Рис. 270

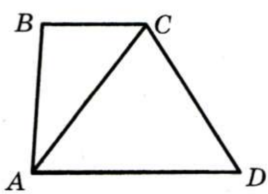


Рис. 271

475. Через вершины A и B треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ACB и пересекающие прямые AC и BC в точках M и K соответственно. Найдите периметр треугольника ABC, если $AC > BC$, $CM = 6$ см, $BK = 2$ см, $AB = 7$ см.

476. На рисунке 271 $BC \parallel AD$, луч CA — биссектриса угла BCD, $AD = 9$ см, $AC = 8$ см. Найдите периметр треугольника CAD.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

477. Разрежьте картонный треугольник на три части так, чтобы, перевернув каждую из них, можно было бы снова сложить треугольник, равный данному.

ИТОГИ

В этом параграфе:

- **были введены такие понятия:**
  - **параллельные прямые;**
  - **односторонние, накрест лежащие, соответственные углы;**
  - **расстояние между параллельными прямыми;**
  - **внешний угол треугольника;**
  - **гипотенуза, катет;**

- **вы изучили:**
  - **аксиому параллельности прямых;**
  - **свойства параллельных прямых;**
  - **признаки параллельности прямых;**
  - **свойство суммы углов треугольника;**
  - **свойство внешнего угла треугольника;**
  - **признаки равенства прямоугольных треугольников;**
  - **свойства прямоугольных треугольников.**

ЗАДАНИЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Какое из следующих утверждений верно?

А) Если два отрезка не имеют общих точек, то они параллельны.

Б) Если два луча не имеют общих точек, то они параллельны.

В) Если луч и отрезок не имеют общих точек, то они параллельны.

Г) Если две прямые не имеют общих точек, то они параллельны.

2. Какое из следующих утверждений верно?

А) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только один отрезок, параллельный этой прямой.

Б) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит только один луч, параллельный этой прямой.

В) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходит бесконечно много прямых, не параллельных этой прямой.

Г) Через точку, не принадлежащую данной прямой, проходят только две прямые, параллельные этой прямой.

3. Какое из следующих утверждений ошибочно?

А) Если $a \parallel b$ и $b \parallel c$, то $a \parallel c$.

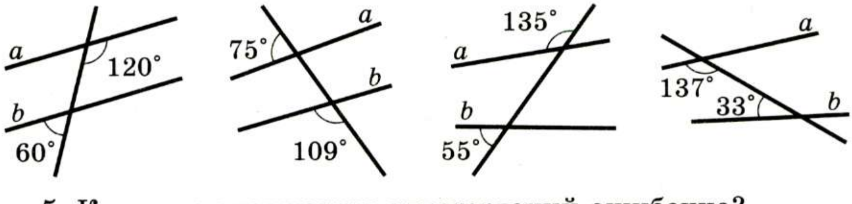
Б) Если $a \perp b$ и $b \perp c$, то $a \parallel c$.

В) Если $a \perp b$ и $b \perp c$, то $a \perp c$.

Г) Если $a \parallel b$ и $c \perp b$, то $c \perp a$.

4. На каком из рисунков прямые a и b параллельны?

А) Б) В) Г)



5. Какое из следующих утверждений ошибочно?

А) Если сумма углов одной пары накрест лежащих углов равна сумме углов другой пары, то прямые не параллельны.

Б) Если накрест лежащие углы не равны, то прямые не параллельны.

В) Если сумма односторонних углов не равна $180°$, то прямые не параллельны.

Г) Если соответственные углы не равны, то прямые не параллельны.

6. Сколько внешних углов у треугольника?

А) 3; Б) 6; В) 4; Г) 9.

7. Чему равна сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине?

А) $180°$; Б) $300°$; В) $360°$; Г) $100°$.

8. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и C пересекаются в точке O. Какое из следующих равенств верно?

А) $\angle AOC = 90° - \frac{1}{2}\angle B$; В) $\angle AOC = 90° + \frac{1}{2}\angle B$;

Б) $\angle AOC = 90° - \angle B$; Г) $\angle AOC = 90° + \angle B$.

9. В треугольнике ABC высоты, проведенные из вершин A и C, пересекаются в точке O. Какое из следующих равенств верно?

А) $\angle AOC = 90° - \angle B$; В) $\angle AOC = 90° + \angle B$;

Б) $\angle AOC = 180° - \angle B$; Г) $\angle AOC = 180° - \frac{1}{2}\angle B$.

10. Какое из следующих утверждений верно?

А) Если две стороны одного прямоугольного треугольника равны двум сторонам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Б) Если катет и острый угол одного прямоугольного треугольника равны катету и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

В) Если гипотенуза и два угла одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и двум углам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Г) Если сторона и два угла одного прямоугольного треугольника равны стороне и двум углам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

11. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$. Какое из следующих утверждений ошибочно?

А) $CB = \frac{1}{2}AB$; Б) $AC = \frac{1}{2}AB$; В) $AC < AB$; Г) $AC > BC$.

§ 4 ОКРУЖНОСТЬ И КРУГ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ

В этом параграфе вы познакомитесь со свойствами самой совершенной геометрической фигуры — окружности. Вы узнаете, как, отказавшись от привычных инструментов — угольника и транспортира, а используя лишь циркуль и линейку без делений, выполнить многие построения.

19. Геометрическое место точек. Окружность и круг

Любое множество точек — это геометрическая фигура. Изобразить произвольную фигуру легко: все, что нарисуете, — это геометрическая фигура (рис. 272). Однако изучать фигуры, состоящие из хаотически расположенных точек, вряд ли целесообразно. Поэтому разумно выделить тот класс фигур, все точки которых обладают каким-то характерным свойством. Каждую из таких фигур называют **геометрическим местом точек.**

Определение. **Геометрическим местом точек (ГМТ) называют множество всех точек, обладающих определенным свойством.**

Образно ГМТ можно представить так: задают некоторое свойство, а потом на белой плоскости *все точки*, обладающие этим свойством, красят в красный цвет. Та «красная фигура», которая при этом получится, и будет ГМТ.

Например, зафиксируем две точки A и B. Для всех точек зададим свойство: одновременно принадлежать лучам AB и BA. Ясно, что указанным свойством обладают все точки отрезка AB и только они (рис. 273). Поэтому искомым ГМТ является отрезок AB.

Рассмотрим перпендикулярные прямые a и b. Для всех точек зададим свойство: принадлежать прямой b и находиться на расстоянии 1 см от прямой a. Очевидно, что точки A и B (рис. 274) удовлетворяют этим условиям. Также понятно, что никакая другая точка, отличная от A и B, этим свойством не обладает. Следовательно, искомое ГМТ — это фигура, состоящая из двух точек A и B (рис. 274).

Рис. 272

Рис. 273

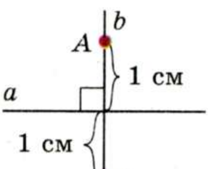


Рис. 274

Вообще, чтобы иметь право какое-то множество точек называть ГМТ, надо доказать две взаимно обратные теоремы:

1) *каждая точка данного множества обладает заданным свойством*;
2) *если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит данному множеству*.

Теорема 19.1. ***Серединный перпендикуляр отрезка является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов этого отрезка.***

Доказательство. ⊙ По теореме 8.2 каждая точка серединного перпендикуляра обладает заданным свойством. По теореме 11.2, если точка обладает заданным свойством, то она принадлежит серединному перпендикуляру. ▲

Теорема 19.2. ***Биссектриса угла является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудаленных от его сторон.***

Прямая теорема. ***Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.***

Доказательство. ⊙ Очевидно, что вершина угла обладает доказываемым свойством.

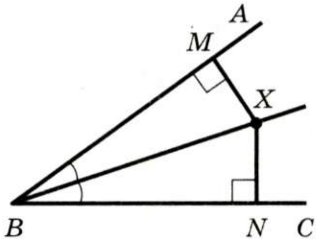


Рис. 275

Пусть какая-то точка X не совпадает с вершиной угла ABC и принадлежит его биссектрисе (рис. 275). Опустим перпендикуляры XM и XN соответственно на стороны BA и BC. Надо доказать, что $XM = XN$.

В прямоугольных треугольниках BXM и BXN гипотенуза BX — общая, $\angle MBX = \angle NBX$, так как BX — биссектриса угла ABC. Следовательно, $\Delta BXM = \Delta BXN$ по гипотенузе и острому углу. Отсюда $XM = XN$. ▲

Обратная теорема. ***Если точка, принадлежащая углу, равноудалена от его сторон, то она лежит на биссектрисе этого угла.***

Доказательство. ⊙ Очевидно, что вершина угла обладает доказываемым свойством.

Пусть какая-то точка X, принадлежащая углу ABC, не совпадает с его вершиной и равноудалена от его сторон. Опустим перпендикуляры XM и XN соответственно на стороны BA и BC. Надо доказать, что $\angle MBX = \angle NBX$ (рис. 275).

В прямоугольных треугольниках BXM и BXN гипотенуза BX — общая, $XM = XN$ по условию. Следовательно, $\Delta BXM = \Delta BXN$ по гипотенузе и катету. Отсюда $\angle MBX = \angle NBX$. ▲

Заметим, что доказательство теоремы будет полным, если показать, что равноудаленность точки угла от его сторон исключает возможность, когда одна из точек M или N принадлежит продолжению стороны угла (рис. 276). Исследовать эту ситуацию вы можете на занятии математического кружка.

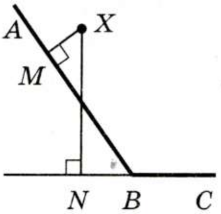


Рис. 276

Также отметим, что теорема остается справедливой и для развернутого угла.

Определение. **Окружностью называют геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки.**

Заданную точку называют **центром** окружности. На рисунке 277 точка O — центр окружности.

Любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, называют **радиусом** окружности. На рисунке 277 отрезок OX — радиус. Из определения следует, что все радиусы одной окружности равны.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называют **хордой** окружности. На рисунке 277 отрезок AB — хорда. Хорду, проходящую через центр окружности, называют **диаметром**. На рисунке 277 отрезок BD — диаметр окружности. Очевидно, что $BD = 2OX$, т. е. диаметр окружности в два раза больше ее радиуса.

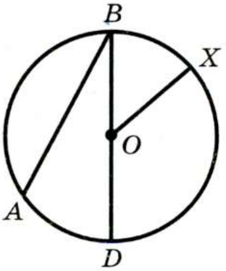


Рис. 277

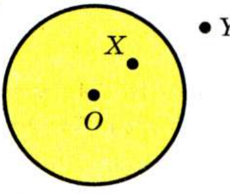


Рис. 278

Из курса математики шестого класса вы знаете, что фигуру, ограниченную окружностью, называют кругом (рис. 278). Теперь с помощью понятия ГМТ можно дать другое

Определение. **Кругом называют геометрическое место точек, расстояние от которых до заданной точки не больше данного положительного числа.**

Заданную точку называют **центром** круга, данное число — **радиусом** круга. Если X — произвольная точка круга с центром O радиуса R, то $OX \le R$ (рис. 278). Если $OX < R$, то говорят, что точка X лежит внутри окружности, ограничивающей данный круг. Точка Y кругу не принадлежит (рис. 278). Также говорят, что точка Y лежит вне окружности, ограничивающей круг.

Из определения круга следует, что окружность, ограничивающая круг, ему принадлежит.

Хорда и **диаметр** круга — это хорда и диаметр окружности, ограничивающей круг.

Пример. На продолжении хорды CD окружности с центром O за точку D отметили точку E такую, что отрезок DE равен радиусу окружности (рис. 279). Прямая OE пересекает данную окружность в точках A и B. Докажите, что $\angle AOC = 3\,\angle CEO$.

Решение. Пусть $\angle CEO = \alpha$.

Так как ΔODE — равнобедренный, то $\angle DOE = \angle CEO = \alpha$.

$\angle ODC$ — внешний угол треугольника ODE, $\angle ODC = \angle DOE + \angle CEO = 2\alpha$.

Так как ΔCOD — равнобедренный, то имеем: $\angle OCD = \angle ODC = 2\alpha$.

$\angle AOC$ — внешний угол треугольника COE. Тогда $\angle AOC = \angle OCD + \angle CEO = 2\alpha + \alpha = 3\alpha$, то есть $\angle AOC = 3\,\angle CEO$.

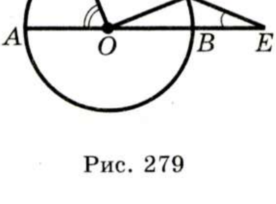


Рис. 279

?

1. Какое множество точек называют геометрическим местом точек?
2. Какие две теоремы надо доказать, чтобы иметь право утверждать, что некоторое множество точек является ГМТ?
3. Какая фигура является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка?
4. Какая фигура является геометрическим местом точек, принадлежащих углу и равноудаленных от его сторон?
5. Что называют окружностью?
6. Что называют радиусом окружности?
7. Что называют хордой окружности?
8. Что называют диаметром окружности?
9. Как связаны между собой диаметр и радиус окружности?
10. Что называют кругом?
11. Принадлежит ли окружности ее центр?
12. Принадлежит ли кругу его центр?
13. Какое неравенство выполняется для любой точки A, принадлежащей кругу с центром O и радиусом R?
14. Какое неравенство выполняется для любой точки B, не принадлежащей кругу с центром O и радиусом R?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

478.° Начертите окружность с центром O и радиусом 3,5 см. Отметьте на этом рисунке какие-нибудь:

1) точки A и B такие, что $OA < 3,5$ см, $OB < 3,5$ см;
2) точки C и D такие, что $OC = 3,5$ см, $OD = 3,5$ см;
3) точки E и F такие, что $OE > 3,5$ см, $OF > 3,5$ см.

479.° Начертите отрезок AB, длина которого равна 3 см. Найдите точку, удаленную от каждого из концов отрезка AB на 2 см. Сколько существует таких точек?

480.° Начертите отрезок CD, длина которого равна 4 см. Найдите точку, удаленную от точки C на 2,5 см, а от точки D — на 3,5 см. Сколько существует таких точек?

481.• Начертите окружность, диаметр которой равен 7 см. Отметьте на окружности точку A. Найдите на окружности точки, удаленные от точки A на 4 см.

УПРАЖНЕНИЯ

482.° На рисунке 280 изображена окружность с центром B. Укажите радиус, хорду и диаметр окружности. Сколько изображено на рисунке радиусов? хорд?

483.° Хорды AB и CD окружности с центром O равны. Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.

484.° На рисунке 281 точка O — центр окружности, $\angle COD = \angle MOK$. Докажите, что хорды CD и MK равны.

485.° Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что $\angle BAC = \angle CDB$.

486.° Отрезки MK и EF — диаметры окружности с центром O, $MK = 12$ см, $ME = 10$ см. Найдите периметр треугольника FOK.

487.° Отрезки AC и AB — соответственно диаметр и хорда окружности с центром O, $\angle BAC = 26^\circ$ (рис. 282). Найдите $\angle BOC$.

488.° Отрезки MP и MK — соответственно хорда и диаметр окружности с центром O, $\angle POK = 84^\circ$ (рис. 283). Найдите $\angle MPO$.

489.° Отрезки AB и AC — соответственно диаметр и хорда окружности с центром O, хорда AC равна радиусу этой окружности. Найдите $\angle BAC$.

490.° Отрезок CD — диаметр окружности с центром O. На окружности отметили точку E так, что $\angle COE = 90^\circ$. Докажите, что $CE = DE$.

491.° Чему равен диаметр окружности, если известно, что он на 4 см больше радиуса данной окружности?

492.° Отрезки AB и CD — диаметры окружности. Докажите, что $AC \parallel BD$.

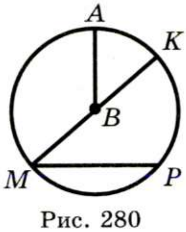


Рис. 280

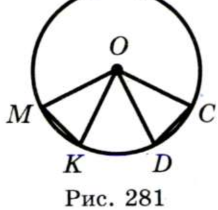


Рис. 281

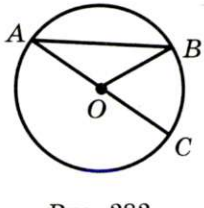


Рис. 282

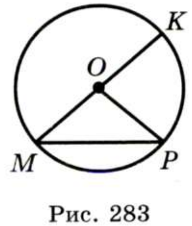


Рис. 283

493.$^{\bullet}$ Хорда пересекает диаметр окружности под углом 30° и делит его на отрезки длиной 4 см и 10 см. Найдите расстояние от центра окружности до этой хорды.

494.$^{\bullet}$ Хорда CD пересекает диаметр AB в точке M, $CE \perp AB$, $DF \perp AB$, $\angle AMC = 60^\circ$, $ME = 18$ см, $MF = 12$ см (рис. 284). Найдите хорду CD.

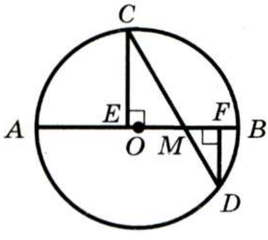


Рис. 284

495.$^{\bullet\bullet}$ Найдите геометрическое место центров окружностей данного радиуса, проходящих через данную точку.

496.$^{\bullet\bullet}$ Найдите геометрическое место центров окружностей, проходящих через две данные точки.

497.$^{\bullet\bullet}$ Найдите ГМТ, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых.

498.$^{\bullet\bullet}$ Найдите геометрическое место вершин равнобедренных треугольников, имеющих общее основание.

499.$^{\bullet\bullet}$ Найдите ГМТ, равноудаленных от двух параллельных прямых.

500.$^{\bullet\bullet}$ Найдите ГМТ, удаленных от данной прямой на заданное расстояние.

501.$^{\bullet\bullet}$ Отрезок AB — диаметр окружности, M — произвольная точка окружности, отличная от точек A и B. Докажите, что $\angle AMB = 90^\circ$.

502.* Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > BX$.

503.* Даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек X таких, что $AX > AB$.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

504. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведены биссектрисы AD и CE. Докажите, что $AE = ED$.

505. Из точки O через точки A, B и C проведены лучи OA, OB и OC. Известно, что $OA = OB = OC$, $\angle AOB = 80^\circ$, $\angle BOC = 110^\circ$, $\angle AOC = 170^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

506. На стороне AB треугольника ABC отметили точку M так, что $BM = CM$, MK — биссектриса угла AMC. Докажите, что $MK \parallel BC$.

507. В остроугольном треугольнике один из внешних углов равен $160°$. Найдите угол между прямыми, на которых лежат высоты, проведенные из двух других вершин треугольника.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

508. Прямоугольник на рисунке 285 составлен из квадратов. Найдите сторону самого большого квадрата, если сторона самого маленького квадрата равна 1.

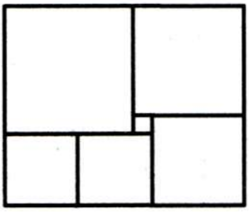


Рис. 285

20. Некоторые свойства окружности. Касательная к окружности

Теорема 20.1. ***Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.***

Доказательство. ⊙ Если хорда является диаметром, то теорема очевидна.

На рисунке 286 изображена окружность с центром O, M — точка пересечения диаметра CD и хорды AB, $CD \perp AB$. Надо доказать, что $AM = MB$.

Проведем радиусы OA и OB. В равнобедренном треугольнике AOB ($OA = OB$) отрезок OM — высота, а значит, и медиана, т. е. $AM = MB$. ▲

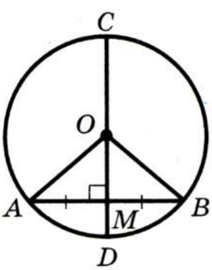


Рис. 286

Теорема 20.2. ***Диаметр окружности, делящий хорду, отличную от диаметра, пополам, перпендикулярен этой хорде.***

Докажите эту теорему самостоятельно. Подумайте, будет ли верным это утверждение, если хорда является диаметром.

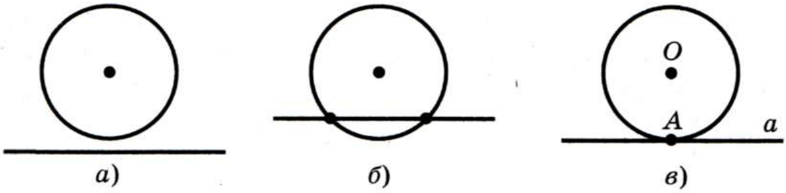


Рис. 287

На рисунке 287 изображены прямая и окружность, которые на рисунке 287, *а* не имеют общих точек, на рисунке 287, *б* имеют две общие точки, на рисунке 287, *в* — одну.

О п р е д е л е н и е. **Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют к а с а т е л ь н о й к окружности.**

Очевидно, что касательная к окружности имеет только одну общую точку с кругом, ограниченным этой окружностью.

На рисунке 287, *в* прямая a — касательная, A — точка касания.

Если отрезок (луч) принадлежит касательной к окружности и имеет с этой окружностью общую точку, то говорят, что отрезок (луч) *касается* окружности. Например, на рисунке 288 изображен отрезок AB, который касается окружности в точке C.

Т е о р е м а 20.3 (с в о й с т в о к а с а т е л ь н о й). ***Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.***

Д о к а з а т е л ь с т в о. ⊙ На рисунке 289 изображена окружность с центром O, A — точка касания прямой a и окружности. Надо доказать, что $OA \perp a$.

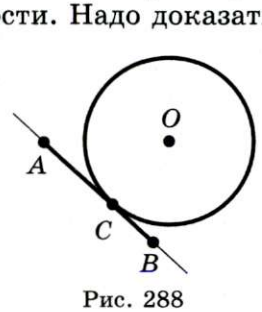


Рис. 288

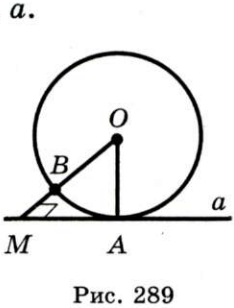


Рис. 289

Предположим, что это не так, то есть OA — наклонная к прямой a. Тогда из точки O опустим перпендикуляр OM на прямую a (рис. 289). Поскольку точка A — единственная общая точка прямой a и круга с центром O, то точка M не принадлежит этому кругу. Отсюда $OM = MB + OB > OB = OA$. Получили противоречие: перпендикуляр OM больше наклонной OA. Следовательно, $OA \perp a$. ▲

Теорема 20.4 (признак касательной к окружности). ***Если прямая, проходящая через точку окружности, перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то эта прямая является касательной к данной окружности.***

Доказательство. ⊙ На рисунке 290 изображена окружность с центром в точке O, отрезок OA — ее радиус, точка A принадлежит прямой a, $OA \perp a$. Докажем, что прямая a — касательная к окружности.

Пусть прямая a не является касательной, а имеет еще одну общую точку B с окружностью (рис. 291). Тогда ΔAOB — равнобедренный (OA и OB равны как радиусы). Отсюда получаем противоречие: в треугольнике AOB есть два прямых угла. Следовательно, прямая a является касательной к окружности. ▲

Следствие. ***Если расстояние от центра окружности до некоторой прямой равно радиусу окружности, то эта прямая является касательной к данной окружности.***

Часто при решении целого класса задач используют результат следующей задачи.

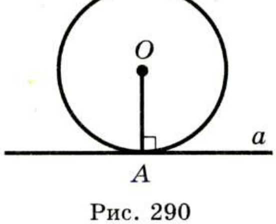


Рис. 290

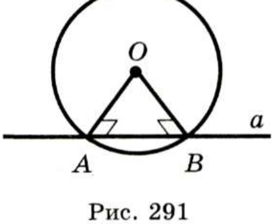


Рис. 291

Задача. ***Если из данной точки к окружности проведены две касательные, то отрезки касательных, соединяющих данную точку с точками касания, равны.***

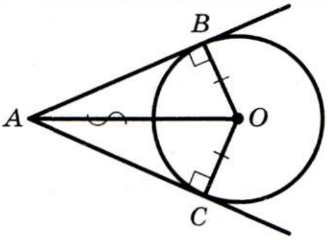


Рис. 292

Решение. На рисунке 292 изображена окружность с центром O. Прямые AB и AC — касательные, B и C — точки касания. Надо доказать, что $AB = AC$.

Проведем радиусы OB и OC в точки касания. По свойству касательной $OB \perp AB$ и $OC \perp AC$. В прямоугольных треугольниках AOB и AOC катеты OB и OC равны как радиусы одной окружности, AO — общая гипотенуза. Следовательно, $\Delta AOB = \Delta AOC$ по гипотенузе и катету. Отсюда $AB = AC$. ▲

?

- **1.** Как делит хорду диаметр, перпендикулярный ей?
- **2.** Чему равен угол между хордой, отличной от диаметра, и диаметром, делящим эту хорду пополам?
- **3.** Какую прямую называют касательной к окружности?
- **4.** Каким свойством обладает радиус, проведенный в точку касания прямой и окружности?
- **5.** Сформулируйте признак касательной к окружности.
- **6.** Каким свойством обладают касательные, проведенные к окружности из одной точки?
- **7.** Как могут быть взаимно расположены прямая и окружность?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

509.° Начертите окружность с центром O, проведите хорду AB. Пользуясь угольником, разделите эту хорду пополам.

510.° Начертите окружность с центром O, проведите хорду CD. Пользуясь линейкой со шкалой, проведите диаметр, перпендикулярный хорде CD.

511.° Начертите окружность произвольного радиуса, отметьте на ней точки A и B. Пользуясь линейкой и угольником, проведите прямые, которые касались бы окружности в точках A и B.

512.° Проведите прямую a и отметьте на ней точку M. Пользуясь угольником, линейкой и циркулем, постройте окружность с радиусом 3 см, которая касается прямой a в точке M. Сколько таких окружностей можно провести?

УПРАЖНЕНИЯ

513.° На рисунке 293 точка O — центр окружности, диаметр CD перпендикулярен хорде AB. Докажите, что $\angle AOD = \angle BOD$.

514.° Докажите, что равные хорды окружности равноудалены от ее центра.

515.° Докажите, что если хорды окружности равноудалены от ее центра, то они равны.

516.° Верно ли, что прямая, перпендикулярная радиусу окружности, касается этой окружности?

517.° Прямая CD касается окружности с центром O в точке A, отрезок AB — хорда окружности, $\angle BAD = 35°$ (рис. 294). Найдите $\angle AOB$.

518.° Прямая CD касается окружности с центром O в точке A, отрезок AB — хорда окружности, $\angle AOB = 80°$ (рис. 294). Найдите $\angle BAC$.

519.° Дана окружность, диаметр которой равен 6 см. Прямая a удалена от ее центра на: 1) 2 см; 2) 3 см; 3) 6 см. В каком случае прямая a является касательной к окружности?

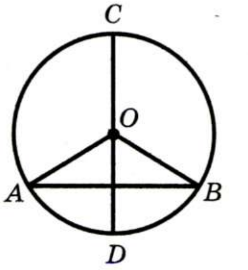


Рис. 293

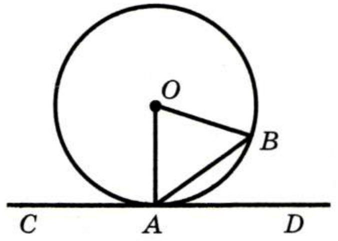


Рис. 294

520.° Докажите, что диаметр окружности больше любой хорды, отличной от диаметра.

521.° В окружности с центром O через середину радиуса провели хорду AB, перпендикулярную ему. Докажите, что $\angle AOB = 120°$.

522.° В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Докажите, что:

1) прямая BC является касательной к окружности с центром A, проходящей через точку C;
2) прямая AB не является касательной к окружности с центром C, проходящей через точку A.

523.° Найдите угол между радиусами OA и OB окружности, если расстояние от центра O окружности до хорды AB в 2 раза меньше:

1) длины хорды AB;
2) радиуса окружности.

524.° В окружности провели диаметр AB и хорды AC и CD так, что $AC = 12$ см, $\angle BAC = 30°$, $AB \perp CD$. Найдите длину хорды CD.

525.° Из точки M к окружности с центром O провели касательные MA и MB, A и B — точки касания, $\angle OAB = 20°$. Найдите $\angle AMB$.

526.° Через концы хорды AB, равной радиусу окружности, провели две касательные, пересекающиеся в точке C. Найдите $\angle ACB$.

527.° Через точку C окружности с центром O провели касательную к этой окружности, AB — диаметр окружности. Из точки A на касательную опущен перпендикуляр AD. Докажите, что луч AC — биссектриса угла BAD.

528.° Прямая AC касается окружности с центром O в точке A (рис. 295). Докажите, что угол BAC в 2 раза меньше угла AOB.

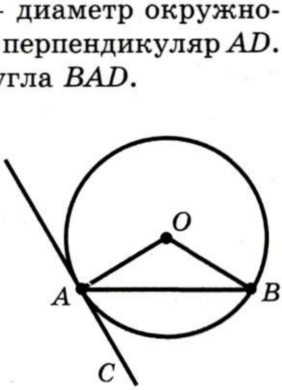


Рис. 295

529.° Отрезки AB и BC — соответственно хорда и диаметр окружности, $\angle ABC = 30°$. Через точку A провели касательную к окружности, пересекающую прямую BC в точке D. Докажите, что $\triangle ABD$ — равнобедренный.

530.° Известно, что диаметр AB делит хорду CD пополам, но не перпендикулярен ей. Докажите, что CD — также диаметр.

531.°° Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой в данной точке.

532.°° Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются обеих сторон данного угла.

533.°° Найдите геометрическое место центров окружностей, которые касаются данной прямой.

534.°° Прямые, касающиеся окружности с центром O в точках A и B, пересекаются в точке K, $\angle AKB = 120°$. Докажите, что $AK + BK = OK$.

535.°° Окружность касается стороны AB треугольника ABC в точке M и касается продолжения двух других сторон. Докажите, что сумма $BC + BM$ равна половине периметра треугольника ABC.

536.°° Через точку C проведены касательные AC и BC к окружности, A и B — точки касания (рис. 296). На окружности взяли произвольную точку M, лежащую в одной полуплоскости с точкой C относительно прямой AB, и через нее провели касательную к окружности, пересекающую прямые AC и BC в точках D и E соответственно. Докажите, что периметр треугольника DEC не зависит от выбора точки M.

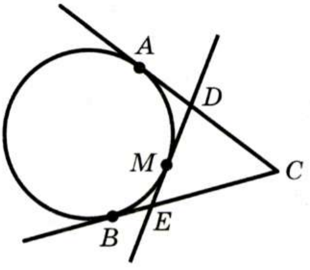


Рис. 296

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

537. Докажите, что середина M отрезка, концы которого принадлежат двум параллельным прямым, является серединой любого отрезка, который проходит через точку M и концы которого принадлежат этим прямым.

538. Отрезки AB и CD лежат на одной прямой и имеют общую середину. Точку M выбрали так, что ΔAMB — равнобедренный с основанием AB. Докажите, что ΔCMD также является равнобедренным с основанием CD.

539. На стороне MK треугольника MPK отметили точки E и F так, что точка E лежит между точками M и F, $ME = EP$, $PF = FK$. Найдите угол M, если $\angle EPF = 92°$, $\angle K = 26°$.

540. В остроугольном треугольнике ABC провели биссектрису BM. Из точки M на сторону BC опущен перпендикуляр MK. Оказалось, что $\angle ABM = \angle KMC$. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

541. Установите закономерность форм фигурок, изображенных на рисунке 297. Какую фигуру надо поставить следующей?

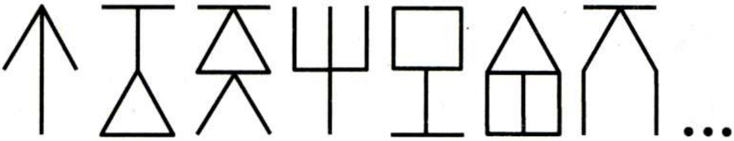


Рис. 297

21. Описанная и вписанная окружности треугольника

Определение. **Окружность называют описанной около треугольника, если она проходит через все вершины этого треугольника.**

На рисунке 298 изображена окружность, описанная около треугольника. В этом случае также говорят, что треугольник **вписан** в окружность.

Очевидно, что центр описанной окружности треугольника равноудален от всех его вершин. На рисунке 298 точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому $OA = OB = OC$.

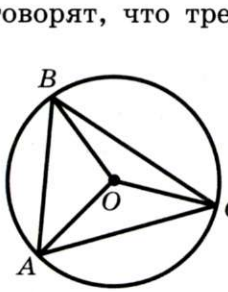


Рис. 298

Теорема 21.1. ***Вокруг любого треугольника можно описать окружность.***

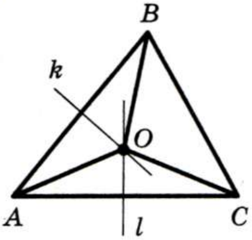


Рис. 299

Доказательство. ⊙ Для доказательства достаточно показать, что для любого треугольника ABC существует точка O, равноудаленная от всех его вершин. Тогда точка O будет центром описанной окружности, а отрезки OA, OB и OC — ее радиусами.

На рисунке 299 изображен произвольный треугольник ABC. Проведем серединные перпендикуляры k и l сторон AB и AC соответственно. Пусть точка O — точка пересечения этих прямых. Поскольку точка O принадлежит серединному перпендикуляру k, то $OA = OB$. Так как точка O принадлежит серединному перпендикуляру l, то $OA = OC$. Значит, $OA = OB = OC$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин треугольника. ▲

Заметим, что вокруг треугольника можно описать только одну окружность. Это следует из того, что серединные перпендикуляры k и l (рис. 299) имеют только одну точку пересечения. Следовательно, существует только одна точка, равноудаленная от всех вершин треугольника.

Следствие 1. ***Три серединных перпендикуляра сторон треугольника пересекаются в одной точке.***

Следствие 2. ***Центр описанной окружности треугольника — это точка пересечения серединных перпендикуляров его сторон.***

Определение. **Окружность называют вписанной в треугольник, если она касается всех его сторон.**

На рисунке 300 изображена окружность, вписанная в треугольник. В этом случае также говорят, что треугольник **описан** около окружности.

Точка O (рис. 300) — центр вписанной окружности треугольника ABC, отрезки OM, ON, OP — радиусы, проведенные в точки касания, $OM \perp AB$, $ON \perp BC$, $OP \perp AC$. Понятно, что центр вписанной окружности треугольника равноудален от всех его сторон.

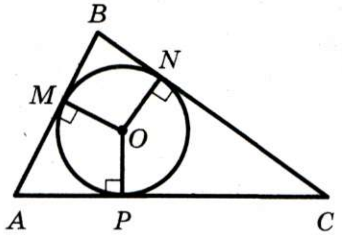


Рис. 300

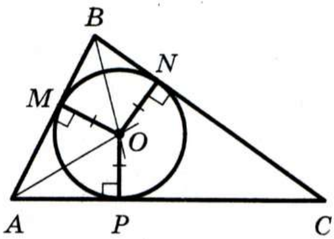


Рис. 301

Теорема 21.2. ***В любой треугольник можно вписать окружность.***

Доказательство. ⊙ Для доказательства достаточно показать, что для любого треугольника ABC существует точка O, удаленная от каждой его стороны на некоторое расстояние r. Тогда в силу следствия из теоремы 20.4 точка O будет центром окружности радиуса r, которая касается сторон AB, BC и AC.

На рисунке 301 изображен произвольный треугольник ABC. Проведем биссектрисы углов A и B, O — точка их пересечения. Так как точка O принадлежит биссектрисе угла A, то она равноудалена от сторон AB и AC (теорема 19.2). Аналогично, так как точка O принадлежит биссектрисе угла B, то она равноудалена от сторон BA и BC. Следовательно, точка O равноудалена от всех сторон треугольника. ▲

Заметим, что в треугольник можно вписать только одну окружность. Это следует из того, что биссектрисы углов A и B (рис. 301) пересекаются только в одной точке. Следовательно, существует только одна точка, равноудаленная от сторон треугольника.

Следствие 1. ***Биссектрисы углов треугольника пересекаются в одной точке.***

Следствие 2. ***Центр вписанной окружности треугольника — это точка пересечения его биссектрис.***

Задача. *Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, определяется по формуле* $r = \frac{a + b - c}{2}$, *где r — радиус вписанной окружности, a и b — катеты, c — гипотенуза.*

Решение. В треугольнике ABC (рис. 302) $\angle ACB = 90°$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, точка O — центр вписанной окружности, M, E и K — точки касания вписанной окружности со сторонами BC, AC и AB соответственно.

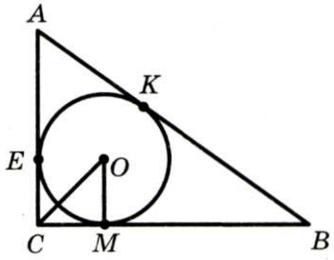


Рис. 302

Отрезок OM — радиус окружности, проведенный в точку касания. Тогда $OM \perp BC$.

Так как точка O — центр вписанной окружности, то CO — биссектриса угла ACB и $\angle OCM = 45°$. Тогда ΔCMO — равнобедренный прямоугольный, $CM = OM = r$.

Используя свойство отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, получаем:

$$CE = CM = r;$$
$$AK = AE = b - r;$$
$$BK = BM = a - r.$$

Так как $AK + BK = AB$, то $b - r + a - r = c$, $2r = a + b - c$,

$$r = \frac{a + b - c}{2}.$$

?

1. Какую окружность называют описанной около треугольника?
2. Какой треугольник называют вписанным в окружность?
3. Около какого треугольника можно описать окружность?
4. Какая точка является центром окружности, описанной около треугольника?
5. Какую окружность называют вписанной в треугольник?
6. Какой треугольник называют описанным около окружности?
7. В какой треугольник можно вписать окружность?
8. Какая точка является центром окружности, вписанной в треугольник?

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

542.° Начертите разносторонний остроугольный треугольник.

1) Пользуясь линейкой со шкалой и угольником, найдите центр окружности, описанной около данного треугольника.
2) Опишите около треугольника окружность.

Выполните задания пунктов 1 и 2 для разносторонних прямоугольного и тупоугольного треугольников.

543.° Начертите:

1) равнобедренный остроугольный треугольник;
2) равнобедренный тупоугольный треугольник.

Выполните задания пунктов 1 и 2 из задания 542.

544.° Перерисуйте в тетрадь рисунок 303. Проведите через точки A, B, C окружность, пользуясь линейкой со шкалой, угольником и циркулем.

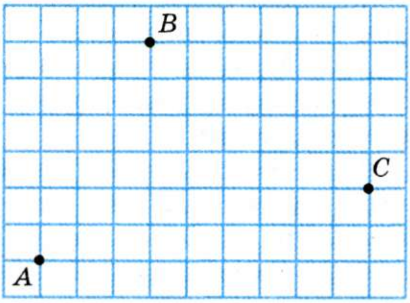


Рис. 303

545.° Начертите разносторонний треугольник.

1) Пользуясь линейкой и транспортиром, найдите центр окружности, вписанной в данный треугольник.
2) Пользуясь угольником, найдите точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника.
3) Впишите в данный треугольник окружность.

546.° Начертите равнобедренный треугольник. Выполните задания пунктов 1, 2 и 3 из задания 545.

УПРАЖНЕНИЯ

547.° Докажите, что центр описанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит прямой, которая содержит медиану, проведенную к его основанию.

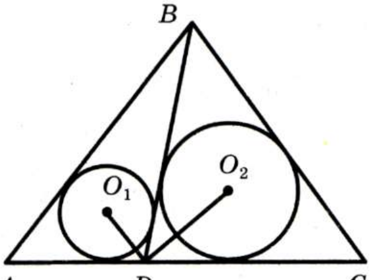


Рис. 304

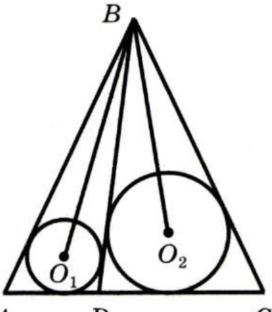


Рис. 305

548.° Докажите, что центр вписанной окружности равнобедренного треугольника принадлежит высоте, проведенной к его основанию.

549.° Докажите, что если центр вписанной окружности треугольника принадлежит его высоте, то этот треугольник — равнобедренный.

550.° Докажите, что центр описанной окружности равностороннего треугольника является точкой пересечения его биссектрис.

551.° На рисунке 304 в треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно. Докажите, что $\angle O_1DO_2$ — прямой.

552.° На рисунке 305 в треугольники ABD и CBD вписаны окружности с центрами O_1 и O_2 соответственно, $\angle ABC = 50^\circ$. Найдите угол O_1BO_2.

553.° Через центр O окружности, описанной около треугольника ABC, провели прямую, перпендикулярную стороне AC и пересекающую сторону AB в точке M. Докажите, что $AM = MC$.

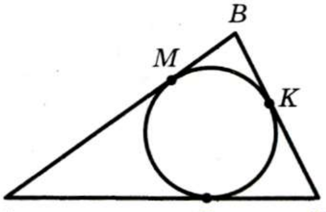


Рис. 306

554.° Окружность, вписанная в треугольник ABC (рис. 306), касается его сторон в точках M, K и E, $BK = 2$ см, $KC = 4$ см, $AM = 8$ см. Найдите периметр треугольника ABC.

555.° Окружность, вписанная в треугольник ABC (рис. 306), касается его сторон в точках M, K и E, $AM = 13$ см, $BK = 3$ см, периметр треугольника ABC равен 46 см. Найдите длину стороны AC.

556.• Докажите, что если центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его высоте, то этот треугольник равнобедренный.

557.• Докажите, что если центр окружности, вписанной в треугольник, принадлежит его медиане, то этот треугольник равнобедренный.

558.• Докажите, что если центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают, то этот треугольник — равносторонний.

559.• Боковая сторона равнобедренного треугольника делится точкой касания вписанной окружности в отношении $7:5$, считая от вершины треугольника. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 68 см.

560.• Периметр треугольника ABC, описанного около окружности, равен 52 см. Точка касания со стороной AB делит эту сторону в отношении $2 : 3$, считая от вершины A. Точка касания со стороной BC удалена от вершины C на 6 см. Найдите стороны треугольника.

561.• В треугольник с углами $30°$, $70°$ и $80°$ вписана окружность. Найдите углы треугольника, вершины которого являются точками касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.

562.• Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник ABC, касается его боковых сторон AB и BC в точках M и N соответственно. Докажите, что $MN \parallel AC$.

563.• Центр окружности, описанной около треугольника, принадлежит его стороне. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный.

564.•• В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M, $BC = a$. Докажите, что $AM = p - a$, где p — полупериметр треугольника ABC.

565.•• К окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной a, провели касательную, пересекающую две его стороны. Найдите периметр треугольника, который эта касательная отсекает от данного.

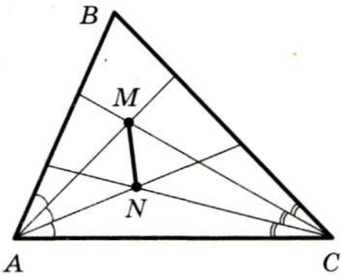


Рис. 307

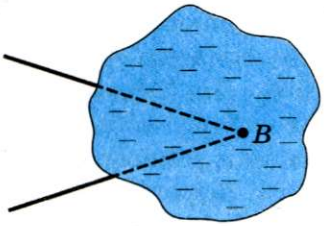


Рис. 308

566.* В равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$) с основанием 10 см вписана окружность. К этой окружности проведены три касательные, отсекающие от данного треугольника треугольники ADK, BEF и CMN. Сумма периметров этих треугольников равна 42 см. Чему равна боковая сторона данного треугольника?

567.* В треугольнике ABC отрезок BD — медиана, $AB =$ $= 7$ см, $BC = 8$ см. В треугольники ABD и BDC вписали окружности. Найдите расстояние между точками касания этих окружностей с отрезком BD.

568.* Каждый из углов BAC и ACB треугольника ABC разделили на три равные части (рис. 307). Докажите, что $\angle AMN = \angle CMN$.

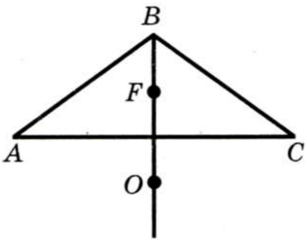


Рис. 309

569.* Вершина угла B недоступна (рис. 308). С помощью транспортира постройте прямую, содержащую биссектрису угла B.

570.* Точки F и O — центры вписанной и описанной окружностей равнобедренного треугольника ABC соответственно (рис. 309). Они находятся на одинаковом расстоянии от его основания AC. Найдите углы треугольника ABC.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

571. Биссектриса угла ABC образует с его стороной угол, равный углу, смежному с углом ABC. Найдите угол ABC.

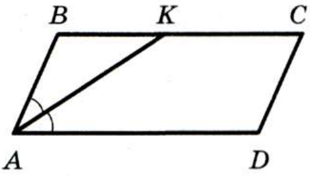


Рис. 310

572. В равнобедренном треугольнике из вершины одного угла при основании провели высоту треугольника, а из вершины другого угла при основании — биссектрису треугольника. Один из углов, образовавшихся при пересечении проведенных биссектрисы и высоты, равен $64°$. Найдите углы данного треугольника.

573. На рисунке 310 $BC \parallel AD$, $AB = 3$ см, $BC = 10$ см. Биссектриса угла BAD пересекает отрезок BC в точке K. Найдите отрезки BK и KC.

574. В треугольнике ABC $AB = BC$, AM и CK — медианы этого треугольника. Докажите, что $MK \parallel AC$.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

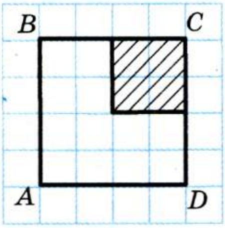


Рис. 311

575. В квадрате $ABCD$ вырезали заштрихованную фигуру (рис. 311). Разделите оставшуюся часть квадрата на 4 равные фигуры.

22. Задачи на построение

С помощью линейки с делениями, циркуля, угольника, транспортира, шаблонов (рис. 312) вам не раз приходилось проводить различные геометрические построения.

А можно ли обходиться меньшим количеством чертежных инструментов? Оказывается, что во многих случаях достаточно использовать только *циркуль* и *линейку без делений*. Например, чтобы провести биссектрису угла, совсем не обязательно иметь транспортир, а разделить отрезок пополам можно и тогда, когда на линейку не нанесена шкала.

Рис. 312

А стоит ли в наше время, когда созданы точнейшие приборы и совершенные компьютерные программы, позволяющие выполнять сложнейшие измерения и построения, обходиться такими «скудными» средствами, как циркуль и линейка? На практике, конечно, нет. Поэтому, например, конструкторы, строители, архитекторы, дизайнеры не ограничивают себя в выборе инструментов.

Однако при изучении геометрии очень полезно принять участие в игре по таким правилам:

1) все построения выполняются только с помощью циркуля и линейки без делений;
2) с помощью линейки можно через заданную точку A провести прямую, а также через заданные две точки A и B провести прямую AB;
3) с помощью циркуля можно построить окружность с данным центром и радиусом, равным заданному отрезку AB.

Итак, договоримся, что если в задаче требуется построить какую-то фигуру, то построение выполняется по описанным выше правилам.

Решить задачу на построение — это значит составить план (*алгоритм*) построения фигуры; реализовать план, выполнив построение; доказать, что полученная фигура является искомой.

Рассмотрим основные задачи на построение.

Задача 1. *Постройте угол, равный данному, одна из сторон которого является данным лучом.*

Решение. На рисунке 313 изображены угол A и луч OK. Надо построить угол, равный углу A, одной из сторон которого является луч OK.

Проведем окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Точки пересечения этой окружности со сторонами угла A обозначим B и C (рис. 314). Пусть $AB = AC = r$.

Проведем окружность радиуса r с центром в точке O (рис. 315). Она пересекает луч OK в точке M. Затем с центром в точке M проведем окружность, радиус которой ра-

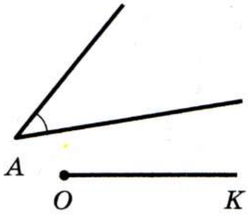


Рис. 313

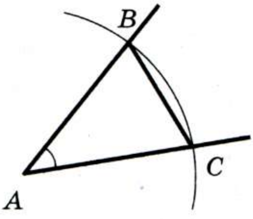


Рис. 314

вен BC. Пусть E и F — точки пересечения окружностей с центрами O и M.

Покажем, что каждый из углов EOM и FOM — искомый. Докажем, например, что $\angle EOM = \angle BAC$.

Рассмотрим треугольники ABC и OEM. Имеем: $AB = OE = r = AC = OM$. Кроме того, по построению $EM = BC$. Следовательно, $\Delta ABC = \Delta OEM$ по третьему признаку равенства треугольников. Отсюда $\angle EOM = \angle BAC$. Аналогично можно показать, что $\angle BAC = \angle FOM$.

Задача 2. *Постройте серединный перпендикуляр данного отрезка.*

Решение. Пусть AB — данный отрезок. Проведем две окружности с центрами A и B радиуса AB (рис. 316). Точки пересечения этих окружностей обозначим M и N.

Из построения следует, что $MA = MB = AB$ и $NA = NB = AB$. Следовательно, точки M и N принадлежат серединному перпендикуляру отрезка AB. Прямая MN и является серединным перпендикуляром отрезка AB.

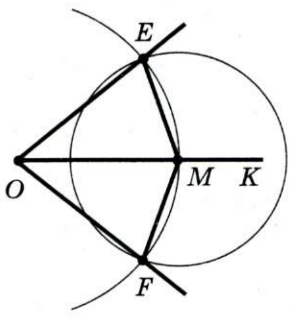


Рис. 315

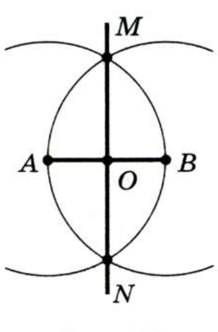


Рис. 316

Замечание. Поскольку прямая MN пересекает отрезок AB в его середине, точке O, то тем самым решена

Задача 3. *Разделите данный отрезок пополам.*

Задача 4. *Даны прямая и не принадлежащая ей точка. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной.*

Решение. Пусть m — данная прямая, A — не принадлежащая ей точка. Проведем окружность с центром в точке A так, чтобы она пересекла прямую m в двух точках. Обозначим эти точки M и N (рис. 317).

Поскольку $AM = AN$, то точка A принадлежит серединному перпендикуляру отрезка MN. Построив этот серединный перпендикуляр (см. задачу 2), мы тем самым решим задачу.

Задача 5. *Даны прямая и принадлежащая ей точка. Через эту точку проведите прямую, перпендикулярную данной.*

Решение. Пусть m — данная прямая, A — принадлежащая ей точка. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Она пересекает прямую m в точках M и N (рис. 318).

Поскольку $AM = AN$, то задача опять-таки свелась к построению серединного перпендикуляра отрезка MN.

Задача 6. *Постройте биссектрису данного угла.*

Решение. Пусть A — данный угол. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Эта окружность пересекает стороны угла в точках M и N (рис. 319). Тем же радиусом проведем окружности с центрами M и N.

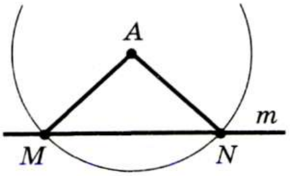


Рис. 317

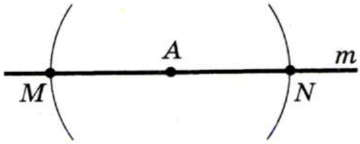


Рис. 318

Эти окружности пересекаются в точках A и K.

Докажем, что луч AK — искомая биссектриса.

Действительно, $\Delta AMK = \Delta ANK$ по трем сторонам. Следовательно, $\angle MAK = \angle NAK$.

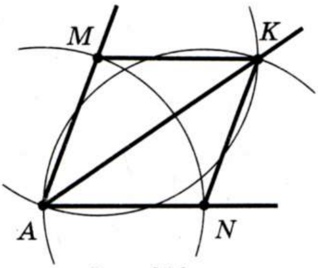


Рис. 319

Пример 1. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.

Решение. Проведем две перпендикулярные прямые m и n, C — точка их пересечения (рис. 320). На прямой m отложим отрезок CA, равный данному катету. С центром в точке A проведем окружность радиусом, равным данной гипотенузе. Эта окружность пересечет прямую n в двух точках B_1 и B_2 (рис. 321). Каждый из треугольников ACB_1 и ACB_2 — искомый.

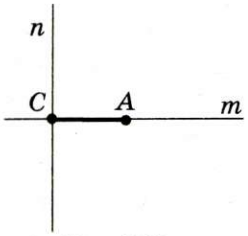


Рис. 320

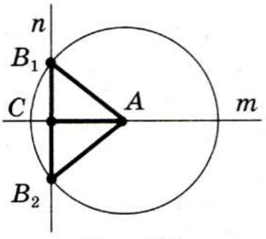


Рис. 321

Пример 2. Постройте треугольник по стороне и высотам, проведенным к двум другим сторонам.

Решение. На рисунке 322 изображен треугольник ABC, AA_1 и CC_1 — его высоты. Если известны отрезки AC, AA_1 и CC_1, то можно построить прямоугольные треугольники AA_1C и CC_1A по гипотенузе и катету.

Проведенный анализ подсказывает план построения.

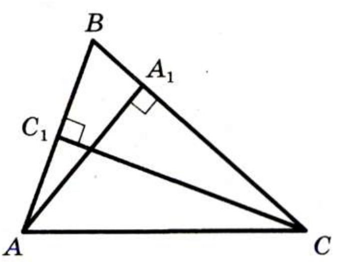


Рис. 322

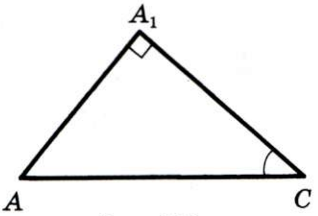


Рис. 323

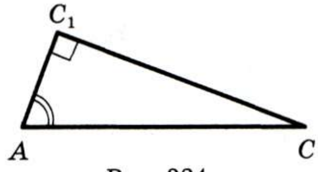


Рис. 324

Построим прямоугольный треугольник AA_1C, в котором гипотенуза AC равна данной стороне, а катет AA_1 — одной из данных высот (рис. 323). В построенном треугольнике угол ACA_1 равен одному из углов, прилежащих к заданной стороне искомого треугольника. С помощью аналогичного построения можно получить другой прилежащий к данной стороне угол (рис. 324).

Теперь осталось построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам. Выполните это построение самостоятельно.

Пример 3. Постройте треугольник по углу, высоте и биссектрисе, проведенным из вершины этого угла.

Решение. На рисунке 325 изображен треугольник ABC, в котором отрезок BD — высота, отрезок BK — биссектриса.

Если известны длины отрезков BD и BK, то прямоугольный треугольник BDK можно построить по гипотенузе и катету. Также отметим, что если известен угол ABC, то можно построить углы ABK и KBC, каждый из которых равен $\frac{1}{2}\angle ABC$. Отсюда получаем план построения.

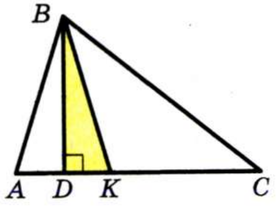


Рис. 325

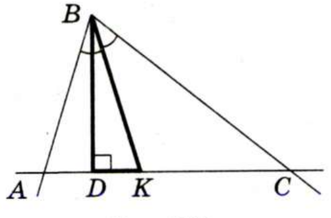


Рис. 326

Строим прямоугольный треугольник DBK, в котором гипотенуза BK равна данной биссектрисе, а катет BD — данной высоте (рис. 326). Строим два угла, каждый из которых равен половине данного, так, чтобы луч BK был их общей стороной. На рисунке 326 это углы ABK и KBC. Треугольник ABC — искомый.

?

1. С помощью каких инструментов договорились выполнять геометрические построения? Какие построения можно ими выполнять?
2. Что значит решить задачу на построение?

УПРАЖНЕНИЯ

576.° Начертите: 1) острый угол; 2) тупой угол. Постройте угол, равный начерченному.

577.° Начертите острый угол ABC и проведите луч DK. Постройте угол MDK такой, что $\angle MDK = 2\angle ABC$.

578.° Разделите данный отрезок на 4 равные части.

579.° Начертите произвольный угол. Разделите его на 4 равные части.

580.° Постройте угол, равный: 1) $45°$; 2) $60°$; 3) $75°$; 4) $120°$.

581.° Постройте угол, равный: 1) $30°$; 2) $22°30'$; 3) $15°$.

582.° Начертите: 1) остроугольный треугольник; 2) тупоугольный треугольник. Постройте все высоты этого треугольника.

583.° Начертите треугольник ABC. Постройте его:
1) высоту AM; 2) медиану BD; 3) биссектрису CK.

584.° Через данную точку, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, параллельную данной.

585.° Постройте треугольник:
1) по двум сторонам и углу между ними;
2) по стороне и двум прилежащим углам.

586.° Постройте окружность данного радиуса, касающуюся данной прямой в данной точке.

587.° Через данную точку, принадлежащую углу, проведите прямую, отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

588.° Постройте касательную к окружности, проходящую через данную точку окружности.

589.° Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла.

590.° Дан угол, равный 30°. Постройте окружность заданного радиуса, центр которой принадлежит одной из сторон данного угла и которая касается его другой стороны.

591.° Постройте окружность, касающуюся сторон данного угла и, кроме того, одной из них — в данной точке.

592.° Постройте прямоугольный треугольник:

1) по двум катетам;

2) по гипотенузе и острому углу;

3) по катету и прилежащему острому углу.

593.° Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащему острому углу.

594.° Постройте равнобедренный треугольник:

1) по боковой стороне и углу при вершине;

2) по высоте, опущенной на основание, и углу при вершине;

3) по основанию и медиане, проведенной к основанию;

4) по основанию и высоте, проведенной к боковой стороне.

595.° Постройте равнобедренный треугольник:

1) по основанию и углу при основании;

2) по боковой стороне и углу при основании;

3) по высоте, проведенной к основанию, и боковой стороне.

596.° Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник:

1) по катету; 2) по гипотенузе.

597.• Постройте окружность, центром которой является данная точка на стороне данного острого угла и которая отсекает на другой стороне угла отрезок данной длины.

598.• Как разделить пополам отрезок, длина которого в несколько раз больше расстояния, соответствующего максимальному раствору циркуля?

599.• Постройте прямоугольный треугольник:

1) по острому углу и биссектрисе этого угла;

2) по катету и высоте, проведенной к гипотенузе.

600.° Постройте прямоугольный треугольник:

1) по катету и медиане, проведенной к другому катету;
2) по острому углу и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

601.° Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу вписанной окружности.

602.° Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и биссектрисе треугольника, проведенной из вершины этого угла.

603.° Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к одной из двух других сторон, и углу между данной стороной и медианой.

604.° Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней острому углу и высоте, проведенной к данной стороне.

605.° Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон. Сколько решений может иметь задача?

606.° Постройте треугольник по данной стороне и данным медиане и высоте, проведенным из одного и того же конца данной стороны. Сколько решений может иметь задача?

607.° Постройте треугольник по высоте и двум углам, которые эта высота образует со сторонами треугольника, имеющими с высотой общую вершину. Сколько решений может иметь задача?

608.° Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к третьей стороне. Сколько решений может иметь задача?

609.° Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон. Сколько решений может иметь задача?

610.° Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и медиане, проведенной к данной стороне. Сколько решений может иметь задача?

611.°° Постройте треугольник по углу и высотам, проведенным из вершин двух других углов.

612.°° Постройте треугольник по двум высотам и углу, из вершины которого проведена одна из данных высот. Сколько решений может иметь задача?

613.•• Постройте прямоугольный треугольник по катету и радиусу вписанной окружности.

614.•• Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и радиусу вписанной окружности.

615.•• Постройте треугольник по радиусу вписанной окружности и отрезкам, на которые точка касания вписанной окружности делит одну из сторон.

616.•• Постройте треугольник по данной стороне и данным высоте и медиане, проведенным к этой стороне.

617.•• Постройте треугольник, если даны три точки, в которых вписанная окружность касается его сторон.

618.* Как разделить на 3 равные части угол, равный $54°$?

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

619. В треугольнике ABC $AB = BC$, AE и CF — биссектрисы этого треугольника. Докажите, что $EF \parallel AC$.

620. Определите углы треугольника ABC, если $\angle A + \angle B = 110°$, а $\angle A + \angle C = 85°$.

621. Прямая, проходящая через середину D гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC перпендикулярно к ней, пересекает катет BC в точке M, $\angle MAC : \angle MAB = 8 : 5$. Найдите острые углы треугольника ABC.

622. Внешний угол треугольника больше одного из углов треугольника, не смежных с ним, на $60°$, а другого — на $40°$. Определите вид треугольника.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

623. На листе бумаги нарисовали равносторонний треугольник и полностью накрыли его двумя другими равносторонними треугольниками разных размеров. Докажите, что для покрытия хватило бы одного из этих треугольников.

23. Метод геометрических мест точек в задачах на построение

Известно, что если смешать синий и желтый цвета, то получим зеленый.

Пусть на плоскости надо найти точки, обладающие какими-то двумя свойствами одновременно. Если синим цветом покрасить точки, обладающие первым свойством, а желтым — обладающие вторым свойством, то понятно, что «зеленые» точки будут обладать сразу двумя свойствами. В этом и состоит идея метода ГМТ, которую проиллюстрируем следующими задачами.

Задача. *Постройте треугольник по трем данным его сторонам.*

Решение. Пусть даны три отрезка, длины которых равны a, b, c (рис. 327). Надо построить треугольник ABC, в котором $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

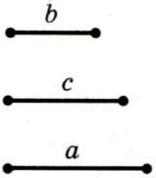


Рис. 327

Проведем произвольную прямую. С помощью циркуля отложим на ней отрезок CB, равный a (рис. 328). Понятно, что задача свелась к построению третьей вершины треугольника, точки A.

Воспользуемся тем, что точка A обладает сразу двумя свойствами:

1) принадлежит геометрическому месту точек, равноудаленных от точки B на расстояние c, т. е. «синей» окружности (рис. 328);
2) принадлежит геометрическому месту точек, равноудаленных от точки C на расстояние b, т. е. «желтой» окружности (рис. 328).

В качестве точки A можно выбрать любую из двух образовавшихся «зеленых» точек.

Полученный треугольник ABC является искомым, так как в нем $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

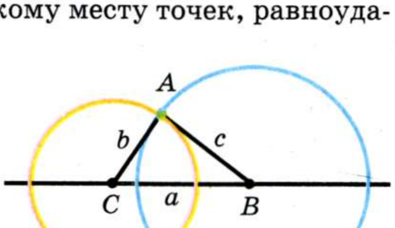


Рис. 328

Из описанного построения следует, что если каждый из трех данных отрезков меньше суммы двух других, то эти отрезки могут служить сторонами треугольника.

Пример 1. Постройте фигуру, все точки которой принадлежат данному углу, равноудалены от его сторон и находятся на заданном расстоянии a от его вершины.

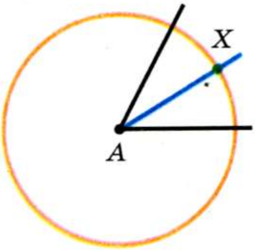


Рис. 329

Решение. Искомые точки принадлежат сразу двум геометрическим местам точек: биссектрисе данного угла и окружности с центром в его вершине и радиусом, равным a.

Построим биссектрису угла и указанную окружность (рис. 329). Их пересечением является искомая точка X.

Пример 2. Постройте центр окружности радиуса R, проходящей через данную точку M и касающуюся данной прямой a.

Решение. Поскольку окружность касается прямой a, то ее центр находится на расстоянии R от нее. Геометрическим местом точек, удаленных от данной прямой на данное расстояние, являются две параллельные прямые (см. задачу 500). Следовательно, центр окружности надо искать на «желтых» прямых (рис. 330).

Геометрическое место точек, являющихся центрами окружностей радиуса R, проходящих через точку M, — это окружность данного радиуса с центром в точке M. Поэтому

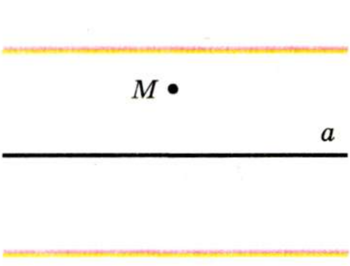


Рис. 330

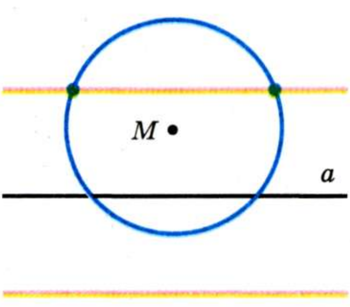


Рис. 331

в качестве центра искомой окружности можно выбрать любую из точек пересечения «синей» окружности с одной из «желтых» прямых (рис. 331).

Построение для случая, когда данная точка принадлежит данной прямой, рассмотрите самостоятельно.

Пример 3. Постройте треугольник по стороне, медиане, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности.

Решение. Построим окружность данного радиуса и проведем хорду AB, равную стороне искомого треугольника. Тогда концы хорды являются двумя вершинами искомого треугольника. Понятно, что третья вершина принадлежит одновременно построенной окружности («желтая» окружность) и окружности с центром в точке O, являющейся серединой хорды AB, и радиусом, равным данной медиане («синяя» окружность). Каждый из треугольников ABC_1 и ABC_2 (рис. 332) является искомым.

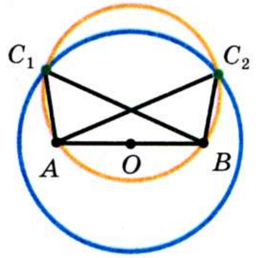


Рис. 332

УПРАЖНЕНИЯ

624.° Даны прямая m и точки A и B вне ее (рис. 333). Постройте на прямой m точку, равноудаленную от точек A и B.

625.° Точки A и B принадлежат прямой m. Постройте точку, удаленную от прямой m на расстояние a и равноудаленную от точек A и B. Сколько решений имеет задача?

626.° Точки B и C принадлежат разным сторонам угла A. Постройте точку M, принадлежащую углу, равноудаленную от его сторон и такую, что $MB = MC$. Сколько решений может иметь задача?

627.° Точки B и C принадлежат разным сторонам угла A. Постройте точку D, принадлежащую углу, равноудаленную от его сторон и такую, что $DC = BC$. Сколько решений имеет задача?

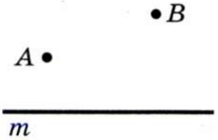


Рис. 333

628.° Постройте равнобедренный треугольник по основанию и боковой стороне.

629.• Для данной окружности постройте точку, являющуюся ее центром.

630.• Постройте окружность данного радиуса, проходящую через данную точку, центр которой принадлежит данной прямой.

631.• Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.

632.• Найдите все точки, принадлежащие данной окружности и равноудаленные от концов данного отрезка. Сколько решений может иметь задача?

633.• Даны две пересекающиеся прямые m и n и отрезок AB. Постройте на прямой m точку, удаленную от прямой n на расстояние AB. Сколько решений имеет задача?

634.• В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. На катете AC постройте точку D, удаленную от прямой AB на расстояние CD.

635.• Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности. Сколько решений может иметь задача?

636.• Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к одной из данных сторон.

637.• Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведенной к боковой стороне.

638.•• На данной окружности постройте точку, находящуюся на данном расстоянии от данной прямой. Сколько решений может иметь задача?

639.•• На данной окружности постройте точку, равноудаленную от двух данных пересекающихся прямых. Сколько решений может иметь задача?

640.•• Между двумя параллельными прямыми дана точка. Постройте окружность, проходящую через эту точку и касающуюся данных прямых. Сколько решений имеет задача?

641.•• Постройте окружность, проходящую через данную точку A и касающуюся данной прямой m в данной точке B.

642.•• Даны две параллельные прямые и секущая. Постройте окружность, касающуюся этих трех прямых.

643.** Постройте треугольник по двум сторонам и радиусу описанной окружности. Сколько решений имеет задача?

644.** Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и радиусу описанной окружности. Сколько решений может иметь задача?

645.** Постройте равносторонний треугольник по радиусу описанной окружности.

646.* Три прямые попарно пересекаются и не проходят через одну точку. Постройте точку, равноудаленную от всех трех прямых. Сколько решений имеет задача?

647.* Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме гипотенузы и другого катета.

648.* Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и сумме катетов.

649.* Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и разности катетов.

650.* Постройте прямоугольный треугольник по катету и разности гипотенузы и другого катета.

651.* Постройте равнобедренный треугольник по основанию и разности боковой стороны и высоты, опущенной на основание.

652.* Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и сумме двух других сторон.

653.* Постройте треугольник по стороне, прилежащему к ней углу и разности двух других сторон.

654.* Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и разности двух других сторон.

655.* Постройте треугольник по стороне, противолежащему ей углу и сумме двух других сторон.

656.* Постройте треугольник по стороне, разности углов, прилежащих к этой стороне, и сумме двух других сторон.

657.* Постройте треугольник по периметру и двум углам.

658.* Постройте остроугольный треугольник по периметру, одному из углов и высоте, проведенной из вершины другого угла.

659.* Постройте треугольник по высоте и медиане, проведенным из одной вершины, и радиусу описанной окружности.

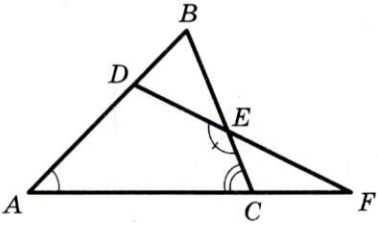


Рис. 334

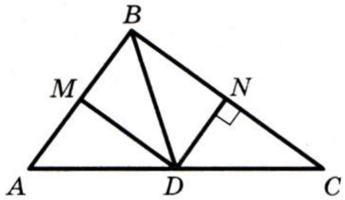


Рис. 335

660.* Постройте треугольник по двум сторонам и медиане, проведенной к третьей стороне.

661.* Постройте треугольник по стороне, высоте, проведенной к этой стороне, и медиане, проведенной к одной из двух других сторон.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ

662. На рисунке 334 $\angle A = 46^\circ$, $\angle ACB = 68^\circ$, $\angle DEC = 120^\circ$. Найдите углы треугольников EFC и DBE.

663. Через середину O стороны MK треугольника MKN провели прямую, перпендикулярную стороне MK и пересекающую сторону MN в точке C. Известно, что $MC = KN$, $\angle N = 50^\circ$. Найдите угол MCO.

664. В треугольнике ABC из вершины прямого угла C провели высоту CH и биссектрису CM. Длина отрезка HM в 2 раза меньше длины отрезка CM. Найдите острые углы треугольника ABC.

665. На рисунке 335 $BD = DC$, $DN \perp BC$, $\angle BDM = \angle MDA$. Найдите сумму углов MBN и BMD.

НАБЛЮДАЙТЕ, РИСУЙТЕ, КОНСТРУИРУЙТЕ, ФАНТАЗИРУЙТЕ

666. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке 336, на три части, не являющиеся квадратами, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат.

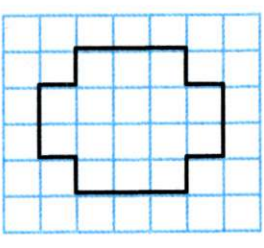


Рис. 336

ИТОГИ

В этом параграфе:

- были введены такие понятия:
  - геометрическое место точек;
  - окружность, круг;
  - радиус, хорда, диаметр окружности и круга;
  - касательная к окружности;
  - описанная и вписанная окружности треугольника;

- вы изучили:
  - основные ГМТ;
  - свойства и признак касательной;
  - теоремы о существовании описанной и вписанной окружностей треугольника;
  - свойства окружности и ее элементов;

- вы познакомились:
  - с ключевыми задачами на построение;
  - с методом ГМТ.

ЗАДАНИЯ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

1. Даны 3 точки, не лежащие на одной прямой. Сколько точек содержит геометрическое место точек, равноудаленных от данных?

А) Бесконечно много; Б) 2; В) 1; Г) ни одной.

2. Даны 3 точки, лежащие на одной прямой. Сколько точек содержит геометрическое место точек, равноудаленных от данных точек?

А) 1; Б) 2; В) бесконечно много; Г) ни одной.

3. Сколько точек содержит геометрическое место точек, принадлежащих углу и равноудаленных от его сторон и вершины?

А) 1; Б) 2; В) бесконечно много; Г) ни одной.

4. Точка X принадлежит окружности с центром O радиуса R. Какое из следующих утверждений неверно?

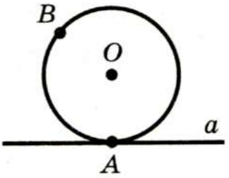
А) $OX \leqslant R$; Б) $OX \geqslant R$; В) $OX < R$; Г) $OX = R$.

5. Прямая имеет две общие точки с окружностью с центром O радиуса R. Какую фигуру образуют все точки X данной прямой такие, что $OX \geqslant R$?

А) Отрезок; В) луч;

Б) два луча; Г) прямую.

6. На рисунке изображена прямая a, касающаяся окружности с центром O в точке A. На окружности отметили точку B, X — произвольная точка прямой a. Какое из следующих утверждений неверно?



А) $OX > OB$; В) $OX \geqslant OB$;

Б) $OX \geqslant OA$; Г) $OA = OB$.

7. Какое утверждение верно?

А) Если две хорды перпендикулярны, то одна из них является диаметром.

Б) Если две хорды точкой пересечения делятся пополам, то они перпендикулярны.

В) Если касательная, проведенная через конец хорды, перпендикулярна ей, то эта хорда — диаметр.

Г) Если одна из хорд делит другую пополам, то эта хорда — диаметр.

8. Центр описанной окружности треугольника — это точка пересечения:

А) высот;

Б) медиан;

В) серединных перпендикуляров его сторон;

Г) биссектрис.

9. Центр вписанной окружности треугольника — это точка пересечения:

А) высот;

Б) медиан;

В) серединных перпендикуляров его сторон;

Г) биссектрис.

10. Центры вписанной и описанной окружностей треугольника совпадают в:

А) равнобедренном треугольнике;

Б) равностороннем треугольнике;

В) прямоугольном треугольнике;

Г) разностороннем треугольнике.

11. При решении задач на построение используют такие инструменты:

А) циркуль, транспортир, линейку;

Б) линейку, угольник;

В) линейку, угольник, циркуль, транспортир;

Г) циркуль, линейку.

УПРАЖНЕНИЯ ДЛЯ ПОВТОРЕНИЯ КУРСА 7 КЛАССА

1. Простейшие геометрические фигуры и их свойства

667. Отрезок, длина которого равна a, разделили на пять равных отрезков. Найдите расстояние между серединами крайних отрезков.

668. Точка C — середина отрезка AB, $AB = 10$ см. На прямой AB найдите все точки X такие, что $AX + BX + CX =$ $= 12$ см.

669. Точка D — середина отрезка MK, $MK = 16$ см. На прямой MK найдите все точки Y такие, что $MY + KY + DY =$ $= 30$ см.

670. На прямой отметили 10 точек: A, B, C, D, E, F, M, N, K, P. Сколько при этом образовалось отрезков, одним из концов которых является точка A? Сколько всего образовалось отрезков с концами в отмеченных точках? Зависит ли общее количество отрезков от того, лежат ли отмеченные точки на одной прямой?

671. На рисунке 337 $AN = 24$ см, $AB = BC$, $CD = DE$, $EF = FK$, $KM = MN$, $DF = 6$ см. Найдите длину отрезка BM.

672. Начертите угол MKE, равный $120°$. Проведите луч KC так, чтобы $\angle MKC = 60°$. Найдите угол CKE и укажите его вид. Сколько решений имеет задача?

673. Градусные меры смежных углов ABC и CBD относятся как $5:4$. Найдите угол между биссектрисами углов ABC и ABD. Сколько решений имеет задача?

674. Два угла имеют общую сторону и не имеют других общих точек. Являются ли эти углы смежными, если: 1) их

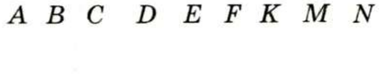


Рис. 337

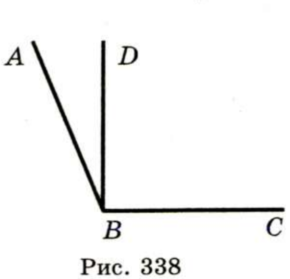


Рис. 338

величины относятся как 11 : 19 и один из углов на 32° больше другого; 2) их величины относятся как 7 : 3 и один из углов на 72° меньше другого?

675. На рисунке 338 $BD \perp BC$. Угол между биссектрисами углов ABD и DBC равен 55°. Найдите угол ABD.

2. Треугольники

676. Периметр треугольника равен 87 см, одна из сторон — a см, другая — b см. Составьте выражение для нахождения третьей стороны. Вычислите длину третьей стороны, если $a = 27$, $b = 21$.

677. Найдите периметр треугольника ABC, если $AB + BC = 27$ см, $AB + AC = 28$ см, $BC + AC = 29$ см.

678. На рисунке 339 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$, $AD = CF$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta DEF$.

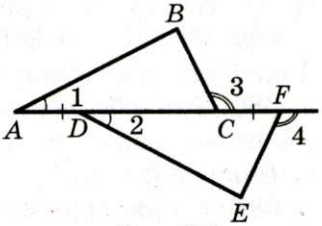


Рис. 339

679. В треугольниках ABC и DEF проведены медианы BM и EK соответственно. Известно, что $BC = EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle C = \angle F$. Докажите, что:

1) $\Delta BMC = \Delta EFK$; 2) $\Delta ABM = \Delta DEK$.

680. В остроугольных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ проведены высоты BD и B_1D_1 соответственно. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если $BD = B_1D_1$, $AD = A_1D_1$, $CD = C_1D_1$.

681. В треугольниках ABC и MKE $AB = MK$, $BC = KE$, $\angle B = \angle K$. На отрезке AB отметили точку F, а на отрезке MK — точку P так, что $\angle ACF = \angle MEP$. Какова длина отрезка CF, если $PE = 15$ см?

682. В треугольниках ABC и DEF $AC = DF$, $BC = EF$, $\angle C = \angle F$. Биссектрисы углов BAC и ABC пересекаются в точке O, а биссектрисы углов DEF и EDF — в точке M. Докажите, что $\Delta AOB = \Delta DME$.

683. На продолжении основания BC равнобедренного треугольника ABC за точку B отметили точку M такую, что $\angle MBA = 128°$. Найдите угол между боковой стороной AC и биссектрисой угла ACB.

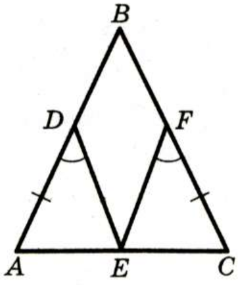


Рис. 340

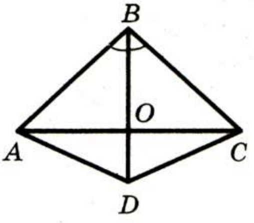


Рис. 341

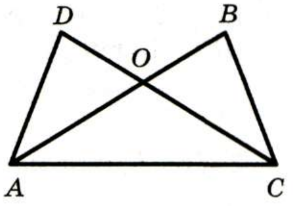


Рис. 342

684. Из точек A и B, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой m, опущены на эту прямую перпендикуляры AC и BD соответственно. Точки A и B равноудалены от прямой m, точка O — середина отрезка CD. Докажите, что ΔAOB — равнобедренный.

685. На рисунке 340 $AB = BC$, $AD = FC$, $\angle ADE = \angle CFE$. Докажите, что точка E — середина отрезка AC.

686. Равнобедренные треугольники ABC и ADC имеют общее основание AC. Докажите, что прямая BD — серединный перпендикуляр отрезка AC.

687. На рисунке 341 $AB = BC$, $\angle ABO = \angle CBO$. Докажите, что $\angle DAO = \angle DCO$.

688. На рисунке 342 $OA = OC$, $OD = OB$. Докажите, что $\angle DAC = \angle BCA$.

689. Точка O пересечения серединных перпендикуляров сторон AC и BC треугольника ABC принадлежит его стороне AB. Докажите, что: 1) точка O — середина отрезка AB; 2) $\angle ACB = \angle A + \angle B$.

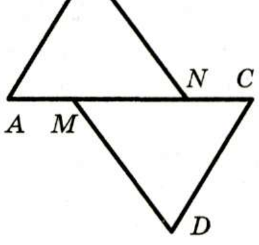


Рис. 343

690. Медиана треугольника ABC разбивает его на два треугольника, периметры которых равны. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

691. В треугольнике ABC $AB = BC$, BD — медиана. Периметр треугольника ABC равен 50 см, а треугольника ABD — 40 см. Найдите длину медианы BD.

692. На сторонах AC и BC треугольника ABC отметили точки F и K соответственно. Докажите, что если треугольники AFB и AKB равны с соответственными сторонами AK и BF, то треугольник ABC — равнобедренный.

693. На рисунке 343 $AM = CN$, $AB = CD$, $BN = DM$. Докажите, что $\angle ABN = \angle CDM$.

694. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ медианы AM и A_1M_1 равны, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

3. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

695. Через точку, не принадлежащую прямой a, провели три прямые. Докажите, что по крайней мере две из этих прямых пересекают прямую a.

696. На сторонах AB и AC треугольника ABC отметили соответственно точки M и K так, что $\angle AMK = \angle ABC$. Докажите, что $\angle AKM = \angle ACB$.

697. Докажите, что:

1) биссектрисы накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, параллельны;
2) биссектрисы односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей, перпендикулярны.

698. Как взаимно расположены биссектрисы соответственных углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей?

699. Прямая, проведенная через вершину треугольника параллельно его противолежащей стороне, образует с двумя другими сторонами равные углы. Докажите, что данный треугольник — равнобедренный.

700. На продолжении сторон AC и BC треугольника ABC ($AB = BC$) за вершину C отметили точки E и D соответственно так, что $DE \parallel AB$. Докажите, что ΔCDE — равнобедренный.

701. На стороне BC треугольника ABC отметили точки M и K (точка M лежит между точками B и K) так, что

$\angle KAC = \angle B$, $\angle BAM = \angle C$. Докажите, что ΔMAK — равнобедренный.

702. Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, в 2 раза меньше этого основания. Найдите углы данного треугольника.

703. На стороне AC треугольника ABC отметили точку O так, что $AB = AO$. Известно, что внешний угол при вершине A равен 160° и $\angle C = 40^\circ$. Докажите, что $BO = CO$.

704. На продолжениях стороны AC треугольника ABC за точки A и C отметили соответственно точки M и K так, что $AM = AB$, $CK = BC$. Найдите углы треугольника MBK, если $\angle BAC = 60^\circ$, $\angle ACB = 80^\circ$.

705. Прямая, параллельная стороне AC треугольника ABC, пересекает его стороны AB и BC в точках M и K соответственно так, что $AM = MK$. Известно, что $\angle B = 65^\circ$, $\angle C = 45^\circ$. Найдите угол KAC.

706. В треугольнике ABC $\angle A = 55^\circ$, $\angle B = 75^\circ$. Найдите угол между высотой и биссектрисой треугольника, проведенными из вершины C.

707. Высоты AD и BK равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке H, $\angle AHB = 128^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

708. Высоты AD и CM равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) пересекаются в точке H, $\angle AHC = 140^\circ$. Найдите углы треугольника ABC.

709. Один из острых углов прямоугольного треугольника равен 42°. Найдите меньший из углов, образованных биссектрисой прямого угла с гипотенузой.

710. Из точек C и D, лежащих в одной полуплоскости относительно прямой m, опущены перпендикуляры CE и DF на эту прямую, $CF = DE$. Докажите, что $CE = DF$.

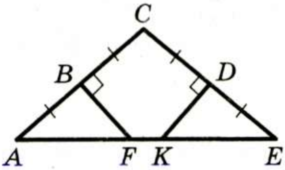


Рис. 344

711. На рисунке 344 $AB = BC = CD = DE$, $BF \perp AC$, $DK \perp CE$. Докажите, что $AF = EK$.

712. Высоты BM и CK треугольника ABC пересекаются в точке H, $\angle ABC = 35^\circ$, $\angle ACB = 83^\circ$. Найдите $\angle BHC$.

713. Угол между высотой и биссектрисой треугольника, проведенными из вершины его прямого угла, равен $12°$. Найдите острые углы данного треугольника.

714. На гипотенузе AB прямоугольного равнобедренного треугольника ABC отметили точки M и K (точка M лежит между точками B и K) так, что $AC = AM$ и $BC = BK$. Найдите $\angle MCK$.

715. Из вершины прямого угла треугольника опустили высоту на гипотенузу. Докажите, что два треугольника, образовавшиеся при этом, и данный треугольник имеют соответственно равные острые углы.

716. В треугольниках ABC и DEF $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, высоты BM и EK равны. Докажите, что $\Delta ABC = \Delta DEF$.

717. Высоты AM и CK треугольника ABC пересекаются в точке O, $OK = OM$, $\angle BAM = \angle ACK$. Докажите, что ΔABC — равносторонний.

718. Две высоты равнобедренного треугольника при пересечении образуют угол $100°$. Найдите углы данного треугольника.

719. В треугольнике ABC угол ACB — прямой, CH — высота данного треугольника, CD — биссектриса треугольника BCH. Докажите, что $AC = AD$.

720. Угол между высотой и биссектрисой равнобедренного треугольника, проведенными из одной вершины, равен $15°$. Найдите углы данного треугольника. Сколько решений имеет задача?

721. На продолжениях гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC за точки A и B отметили соответственно точки D и E так, что $AC = AD$, $BC = BE$. Найдите угол DCE.

722. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точки D и E так, что $AC = AE$ и $BC = BD$. Найдите угол DCE.

723. В равностороннем треугольнике ABC из середины M стороны AC опущен перпендикуляр MK на сторону BC. Найдите периметр треугольника ABC, если $KC = 3$ см.

724. Один из углов прямоугольного треугольника равен $60°$, а сумма гипотенузы и меньшего катета — 27 см. Найдите эти стороны треугольника.

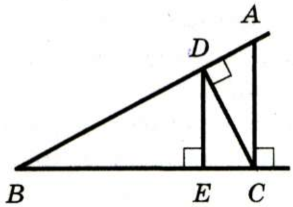


Рис. 345

725. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, $\angle A = 15^\circ$, $BC = 11$ см. На катете AC отметили точку M так, что $\angle BMC = 30^\circ$. Найдите отрезок AM.

726. На одной стороне угла B отметили точки D и A, а на другой — точки E и C (рис. 345) так, что $AC \perp BC$, $DE \perp BC$, $CD \perp AB$. Найдите отрезок DE, если $\angle B = 30^\circ$, $AC = 12$ см.

727. Найдите угол между прямыми, на которых лежат две медианы равностороннего треугольника.

4. Окружность и круг. Геометрические построения

728. Отрезки AC, AB и BC — соответственно диаметр и хорды окружности с центром O, причем $AB = BC$. Найдите $\angle AOB$.

729. Диаметры AB и CD окружности с центром O перпендикулярны. На диаметре AB по разные стороны от центра O отметили точки E и F так, что $CE = DF$. Докажите, что $OE = OF$.

730. Отрезки MK и NP — непараллельные хорды окружности с центром O, $MK = NP$, точки A и B — середины хорд MK и NP соответственно. Докажите, что $\angle OAB = \angle OBA$.

731. Каждая из хорд AB и BC равна радиусу окружности. Найдите $\angle ABC$.

732. Докажите, что касательные к окружности, проведенные через концы диаметра, параллельны.

733. Диаметр AB делит каждую из хорд MN и PK, отличных от диаметра, пополам. Докажите, что $MN \parallel PK$.

734. Докажите, что центр окружности равноудален от любой касательной к окружности.

735. Из точки A к окружности с центром O проведены касательные AM и AK, M и K — точки касания. Точка пересечения отрезка OA с окружностью является серединой этого отрезка. Найдите $\angle MAK$.

736. Прямая, параллельная хорде AC окружности, касается этой окружности в точке B. Докажите, что ΔABC — равнобедренный.

737. Радиус OC окружности с центром O делит пополам хорду AB, не являющуюся диаметром. Через точку C провели касательную к окружности. Докажите, что эта касательная параллельна хорде AB.

738. Окружность, центр которой принадлежит биссектрисе угла, пересекает его стороны. Докажите, что отрезки, которые отсекает окружность на сторонах угла, равны.

739. Через точку M проведены касательные MK и ME к окружности с центром в точке O, где K и E — точки касания, $\angle OMK = 30^\circ$, $MK = 6$ см. Найдите длину хорды KE.

740. Докажите, что хорда окружности, которая перпендикулярна другой хорде этой окружности и проходит через ее середину, является диаметром данной окружности.

741. Отрезки AB, AC и BD — соответственно диаметр и хорды окружности, причем $AC \parallel BD$. Докажите, что отрезок CD — диаметр окружности.

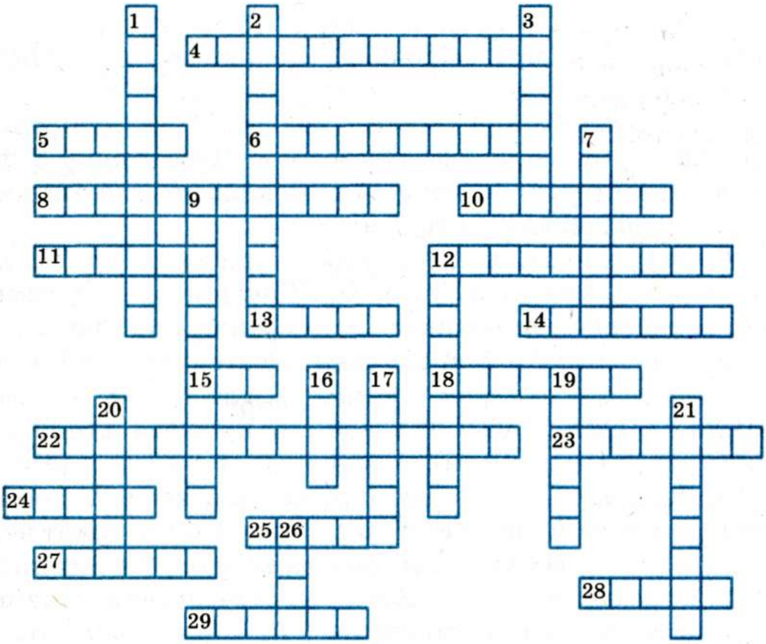
742. В треугольнике ABC $AB = BC$, точка O — центр вписанной окружности, точки D и E — точки касания вписанной окружности со сторонами AC и AB соответственно, $\angle ABC = 48^\circ$. Найдите $\angle DOE$.

743. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон AB, BC и AC в точках K, M и E соответственно, $AK = BM = CE$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

744. Биссектрисы AD и CE треугольника ABC пересекаются в точке O_1, биссектрисы EF и DK треугольника DEB пересекаются в точке O_2. Докажите, что точки B, O_1 и O_2 лежат на одной прямой.

745. Через вершину данного угла проведите вне его прямую так, чтобы она образовала со сторонами этого угла равные углы.

746. Через данную точку A, не принадлежащую данной прямой, проведите прямую, образующую с данной прямой данный угол.



747. Разгадайте кроссворд.

По горизонтали: 4. Прямые, которые не пересекаются. **5.** Древнегреческий математик. **6.** Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу. **8.** Два угла, стороны одного из которых являются дополнительными лучами сторон другого. **10.** Хорда, проходящая через центр окружности. **11.** Отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром. **12.** Геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки. **13.** Сторона прямоугольного треугольника, прилежащая к прямому углу. **14.** Угол, смежный с углом треугольника. **15.** Одна из частей, на которые произвольная точка разбивает прямую. **18.** Утверждение, правильность которого принимают без доказательства. **22.** Прямые, при пересечении которых образуются прямые углы. **23.** Утверждение, правильность которого устанавливают с помощью доказательства. **24.** Отрезок, соединяющий две точки окружности. **25.** Угол, градусная мера которого больше 90°, но меньше 180°. **27.** Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей его противолежащую сторону. **28.** Точка, равноудаленная от всех точек окружности. **29.** Автор книги «Начала».

По вертикали: 1. Луч с началом в вершине угла, который делит угол на два равных угла. **2.** Геометрическая фигура. **3.** Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащий стороны. **7.** Два угла, одна сторона которых общая, а две другие — дополнительные лучи. **9.** Прямая, имеющая с окружностью одну общую точку. **12.** Окружность, проходящая через все вершины треугольника. **16.** Геометрическое место точек, расстояние от которых до данной точки не больше данного числа. **17.** Угол, градусная мера которого равна 90°. **19.** Угол, градусная мера которого меньше 90°. **20.** Единица измерения углов. **21.** Сумма длин всех сторон треугольника. **26.** Геометрическая фигура.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

Рис. 346

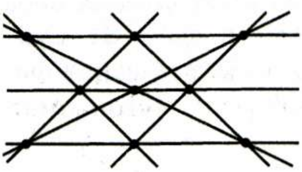


Рис. 347

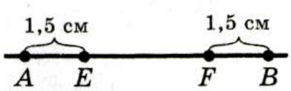


Рис. 348

14. 1 точка, или 4 точки, или 6 точек. **15.** Наименьшее возможное количество точек пересечения — 1, наибольшее — 10. **16.** Рис. 346. **17.** 12 точек. **18.** Рис. 347. **42.** 8 см или 56 см. **43.** *Указание.* Отметьте на прямой m произвольную точку X и сравните сумму $AX + BX$ с длиной отрезка AB. **45.** 1) Все точки отрезка EF; 2) точки A и B (рис. 348); 3) таких точек не существует. **46.** Таких точек две. Одна из них является такой внутренней точкой C отрезка AB, что $AC : BC = 1 : 2$, а вторая — такова, что точка A — середина отрезка BC. **47.** 4 см. **48.** *а*) 4 точки; *б*) 3 точки; *в*) 4 точки; *г*) 3 точки. **50.** *Указание.* Воспользуйтесь равенством: 1) $13 - 2 \cdot 5 = 3$; 2) $3 \cdot 5 - 13 = 2$; 3) $2 \cdot 13 - 5 \cdot 5 = 1$. **51.** *Указание.* Воспользуйтесь равенством: 1) $2 \cdot 11 - 2 \cdot 7 = 8$; 2) $3 \cdot 11 - 4 \cdot 7 = 5$. **73.** 60°. **74.** 108°. **77.** 68°. **78.** 153°. **79.** 1) 6°; 2) 0,5°. **81.** 50° или 110°. **82.** 77° или 163°. **86.** *Указание.* Отложите от произвольного луча данный угол последовательно 14 раз. Воспользуйтесь тем, что полученный таким образом угол на 2° больше развернутого угла. **87.** 1) *Указание.* Воспользуйтесь тем, что $19° \cdot 19 = 361°$. **88.** Да. *Указание.* Предположите, что такого угла не существует, и получите противоречие. **109.** 90°. **110.** 180°. **111.** 75°. **112.** 72°, 108°. **113.** 44°, 136°. **127.** 1) 124°; 2) 98°. **128.** 126°. **132.** 70°, 160°. **133.** 1) *Указание.* $90° = 17° \cdot 5 + 5°$. **157.** 48 см. **158.** 13 см. **159.** 3 см. **161.** 120°. **197.** 3 см. **198.** 10 см. **200.** 2) *Указание.* Докажите, что $\angle AOM = \angle BOK$. Угол AOB — развернутый. Тогда $\angle AOM + \angle MOB = 180°$. Отсюда $\angle MOB + \angle BOK = 180°$. **203.** 20°; 70°. **232.** 1) 4 см

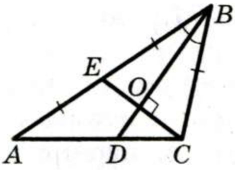


Рис. 349

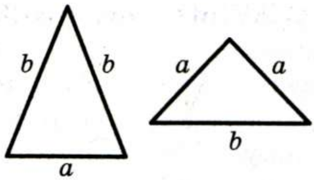


Рис. 350

или 7 см; 2) 7 см. **233.** 1) 8 см и 8 см; 2) 4 см и 6 см или 5 см и 5 см. **237.** 26 см или 14 см. **239.** 1) $\frac{5a}{7}$; 2) $\frac{9a}{14}$.
252. *Указание*. Воспользовавшись тем, что если биссектриса треугольника является его высотой, то треугольник — равнобедренный, докажите, что ΔMAD и ΔKBD — равнобедренные. **253.** 8 см. **254.** $AB:AC = 1:2$. **256.** 2 см, 3 см, 4 см. *Указание*. Отрезок BD — биссектриса треугольника ABC (рис. 349), отрезок CE — его медиана, $BD \perp CE$. Докажите, что ΔCBE — равнобедренный ($BC = BE$). Тогда $AB = 2BC$ и могут иметь место такие случаи: $AB - BC = 1$ см или $AB - BC = 2$ см, т. е. $BC = 1$ см или $BC = 2$ см.
257. 2 см. *Указание*. Докажите, что треугольники KMC и KDA — равнобедренные. **273.** Не обязательно. *Указание*. Рассмотрите треугольники, изображенные на рисунке 350.
274. *Указание*. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, отрезки AM и A_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ соответственно. На продолжениях отрезков AM и A_1M_1 за точки M и M_1 отложите соответственно отрезки MD и M_1D_1 такие, что $MD = AM$ и $M_1D_1 = A_1M_1$. Докажите, что $AC = BD$ и $A_1C_1 = B_1D_1$. Далее докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$, MBD и $M_1B_1D_1$ и, наконец, ABC и $A_1B_1C_1$. **290.** *Указание*. Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — данные треугольники, отрезки AM и A_1M_1 — соответственно их медианы, $AM = A_1M_1$, $\angle BAM = \angle B_1A_1M_1$, $\angle CAM = \angle C_1A_1M_1$. На продолжениях отрезков AM и A_1M_1 за точки M и M_1 отложите соответственно отрезки MD и M_1D_1 такие, что $MD = AM$ и $M_1D_1 = A_1M_1$. Докажите, что $AC = BD$ и $A_1C_1 = B_1D_1$. Далее докажите равенство треугольников ABD и $A_1B_1D_1$, откуда легко полу-

чить равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. **302.** Бесконечно много. **304.** *Указание*. Предположим, что прямые a и b пересекаются. Выберем произвольную точку, принадлежащую a, отличную от точки пересечения a и b. Через выбранную точку можно провести прямую, пересекающую прямую a и параллельную прямой b, что противоречит условию. **305.** 6 см. **306.** 35°. **307.** 90°. **326.** Нет. **329.** *Указание*. Пусть прямая OK пересекает прямую AB в точке N. Докажите, что ΔNBK — равнобедренный. Далее покажите, что $\angle BKO = \angle OKM$. **330.** *Указание*. Докажите, что $BF \parallel AC$ и $BD \parallel AC$, и воспользуйтесь аксиомой параллельности прямых. **331.** 111° или 69°. **349.** 40°. **352.** 40°, 70°, 70°. **353.** 106°. **357.** *Указание*. Проведите через точку C прямую, параллельную AB. **360.** *Указание*. Докажите, что треугольники AMO и CKO — равнобедренные. **362.** $AD : DB = 2 : 3$. **401.** 25°, 55°, 100°. **404.** 35°, 35°, 110°. **405.** 140°. **408.** *Указание*. Найдите углы треугольника ABC и докажите, что треугольники AMB и MAC — равнобедренные. **409.** 36°, 72°, 72°. **410.** *Указание*. Примените метод доказательства от противного. **412.** Остроугольный. *Указание*. Рассмотрите по очереди каждый угол треугольника. Так как сумма двух других углов больше 90°, то рассматриваемый угол меньше 90°. Так как все углы окажутся меньше 90°, то треугольник — остроугольный. **413.** *Указание*. В треугольнике DAC угол DAC — тупой. Значит, $DC > AC$. **415.** Нет. **417.** 36°, 72°, 72° или 90°, 45°, 45°. **418.** $90° - \frac{\alpha}{2}$. **419.** *Указание*. На продолжении медианы AM за точку M отложите отрезок MD, равный этой медиане, и рассмотрите ΔABD. **420.** $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{540}{7}\right)^\circ$, $\left(\frac{180}{7}\right)^\circ$. **421.** 90°, 40°, 50°. *Указание*. Рассмотрите треугольник DAK, где точка K — середина AB. **422.** 36 см. **451.** *Указание*. Докажите равенство треугольников AKH и CMH. **452.** *Указание*. Докажите, что $\Delta MEN = \Delta NFM$. Отсюда следует, что $MK = NK$. Кроме того, $KE = FM = NE$. Значит, $MK = MN$. **453.** Нет. **455.** 50°, 130°. **467.** 1 см, 30°. **468.** 9 см. **469.** 15 см. **472.** 8 см. **473.** 6 см.

Указание. Докажите, что треугольник ADB — равнобедренный. **475.** 21 см. **493.** 1,5 см. **494.** 60 см. **495.** Окружность данного радиуса с центром в данной точке. **496.** Серединный перпендикуляр отрезка, соединяющего данные точки. **497.** Две прямые, состоящие из биссектрис четырех углов, образованных при пересечении данных прямых. **498.** Все точки серединного перпендикуляра данного основания, кроме точки пересечения этого перпендикуляра с основанием. **499.** Прямая, являющаяся серединным перпендикуляром отрезка, который перпендикулярен данным прямым и концы которого принадлежат данным прямым. **500.** Пара параллельных прямых, каждая из которых удалена от данной прямой на данное расстояние. **501.** *Указание*. Соедините точку M и центр O окружности, рассмотрите треугольники AOM и BOM. **502.** Все точки полуплоскости, содержащей точку B, границей которой является серединный перпендикуляр отрезка AB, за исключением границы этой полуплоскости. **503.** Все точки плоскости, не принадлежащие кругу с центром A и радиусом AB. **505.** 55°, 85°, 40°. **507.** 20°. **523.** 1) 90°; 2) 120°. **524.** 12 см. **525.** 40°. **526.** 120°. **531.** Все точки прямой, проходящей через данную точку перпендикулярно данной прямой, кроме данной точки. **532.** Все точки биссектрисы угла, за исключением вершины угла. **533.** Все точки плоскости, за исключением данной прямой. **534.** *Указание*. Рассмотрев треугольник OAK, докажите, что $OK = 2AK$. **535.** *Указание*. Воспользуйтесь свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. **539.** 18°. **559.** 24 см, 24 см, 20 см. **560.** 20 см, 14 см, 18 см. **561.** 50°, 55°, 75°. **564.** *Указание*. Воспользуйтесь свойством отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки. **565.** *а*. **566.** 16 см. *Указание*. Докажите, что сумма периметров образовавшихся треугольников равна периметру данного треугольника. **567.** 0,5 см. *Указание*. Пусть M_1 и M_2 — точки касания окружностей, вписанных соответственно в треугольники ABD и DBC. Для отрезков DM_1 и DM_2 воспользуйтесь результатом задачи 564. **568.** *Указание*. Воспользуйтесь тем, что биссектрисы треугольника, в частности треугольника AMC, пересекаются в одной точке. **569.** *Указание* Отметьте на разных сторонах угла точки M и N. Проведи те биссектрисы углов BMN и BNM Далее отметьте на разных сторонах угла точки E и F. Проведите биссектрисы углов BEF и BFE **570.** 36°, 36°, 108° *Указание* Восполь зуйтесь тем, что треугольники FAO и BOA — равнобедрен ные. **572.** 52° 52°, 76° **573.** 3 см, 7 см. **597.** *Указание* Проведите через данную точку, лежащую на стороне угла, перпендикуляр к другой стороне угла **599.** 1) *Указание* Постройте прямоугольный треугольник, в котором гипоте нуза равна данной биссектрисе, а острый угол равен полови не данного угла **601.** *Указание*. Постройте прямоугольный треугольник, в котором один из катетов равен половине данного основания, а другой — радиусу окружности. **604.** *Указание* Постройте прямоугольный треугольник по катету, равному данной высоте, и противолежащему остро му углу, равному данному **606.** *Указание* Постройте пря моугольный треугольник, в котором гипотенуза равна дан- ной стороне, а катет данной высоте. **613.** *Указание* Постройте прямоугольный треугольник, один из катетов которого равен разности длины катета и радиуса, а дру гой — радиусу. Тогда угол, противолежащий другому ка тету, равен половине острого угла искомого треугольника **617.** *Указание*. Постройте окружность, проходящую через три заданные точки. **618.** Несложно построить угол равный 60°. Далее воспользуйтесь равенством 6° = 60° – 54°. **620.** 15°, 95°, 70° **621.** 25°, 65° **622.** Остроугольный **633.** *Указание*. Искомая точка принадлежит ГМТ, удален ных на расстояние AB от прямой n Это ГМТ пара пря мых, параллельных прямой n. Каждая из точек пересечения этих прямых с прямой m удовлетворяет условию Заметим, что задача всегда имеет два решения. **640.** *Указание*. Про ведите отрезок, перпендикулярный двум данным парал лельным прямым, концы A и B которого принадлежат этим прямым. Тогда центр искомой окружности принадлежит двум ГМТ: первому — равноудаленных от точек A и B и второму удаленных от данной в условии точки на рас стояние $\frac{1}{2}AB$ **641.** *Указание* Геометрическим местом центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке B, является прямая, перпендикулярная данной и про ходящая через эту точку (данная точка B не принадлежит ГМТ). Геометрическим местом центров окружностей про ходящих через точки A и B, является серединный перпен дикуляр отрезка AB. **647.** *Указание*. Постройте прямоуголь ный треугольник BCD, в котором катет BC равен данному катету, а катет DC — сумме гипотенузы и другого катета Тогда вершина A искомого треугольника ABC принадлежит серединному перпендикуляру отрезка BD **648.** *Указание*. Постройте треугольник ADB, в котором $\angle D = 45°$, сторо на DB равна сумме данных катетов, сторона AB — данной гипотенузе. **649.** *Указание* Постройте треугольник ADB, в котором $\angle D = 135°$ сторона DB равна разности данных катетов, сторона AB данной гипотенузе. **650.** *Указание*. Постройте треугольник DBC, в котором $\angle C = 90°$, катет CB равен данному катету катет CD — разности гипотенузы и другого катета. Тогда искомая вершина A лежит на серединном перпендикуляре отрезка DB **652.** *Указание* Постройте ΔADC, в котором сторона AC равна данной, сторона DC сумме двух других сторон, угол DCA данному углу. **653.** *Указание*. Постройте треугольник ADC по данной сто роне AC, данному углу C и стороне DC равной данной разности сторон Вершина B искомого треугольника ABC лежит на серединном перпендикуляре отрезка AD. Описанное построение применимо к случаю, когда заданный угол C прилежит к большей из двух неизвестных сторон **654.** *Указа ние*. Постройте треугольник ADC, в котором $\angle D = 90° + \frac{\beta}{2}$, где β — данный угол, сторона AC равна данной стороне, сторона AD — данной разности сторон Тогда искомая вершина D лежит на серединном перпендикуляре отрезка DC **655.** *Указание* Постройте треугольник ADC, в котором $\angle D = \frac{\beta}{2}$, где β данный угол, сторона AC равна данной стороне, сто рона AD данной сумме сторон. Тогда искомая вершина D лежит на серединном перпендикуляре отрезка DC. **656.** *Ука зание* Постройте треугольник ADC, в котором AC — данная сторона, длина DC равна сумме неизвестных сторон, $\angle DAC = 90^\circ + \alpha$, где α — полуразность углов, о которых говорится в условии. **658.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник по катету, равному высоте, и противолежащему углу, равному данному. Гипотенуза этого треугольника — одна из сторон искомого. Теперь задача свелась к задаче 652. **659.** *Указание.* Постройте прямоугольный треугольник BDM, в котором гипотенуза BM равна данной медиане, катет BD — данной высоте. Тогда центр описанной окружности искомого треугольника лежит на прямой, перпендикулярной отрезку DM, проходящей через точку M. **660.** *Указание.* Постройте треугольник ABD, в котором стороны AB и AD равны двум данным сторонам, а сторона BD в два раза больше данной медианы. **661.** *Указание.* Постройте треугольник ADC, в котором AC — данная сторона, сторона AD в два раза больше данной медианы, а высота, проведенная из вершины D, равна данной высоте. Покажите, что сторона DC равна одной из неизвестных сторон искомого треугольника. **663.** 65°. **664.** 15°, 75°. **665.** 180°. **667.** $\frac{4a}{5}$. **668.** Точки X_1 и X_2, изображенные на рисунке 351. **669.** Точки Y_1 и Y_2, изображенные на рисунке 352. **672.** 60° или 180°. **673.** 40° или 140°. **675.** 20°. **677.** 42 см. **691.** 15 см. **702.** 45°, 45°, 90°. **704.** 30°, 40°, 110°. **705.** 35°. **706.** 10°. **707.** 52°, 52°, 76°. **708.** 70°, 70°, 40°. **713.** 33°, 57°. **714.** 45°. **718.** 50°, 50°, 80° или 80°, 80°, 20°. **720.** 70°, 70°, 40° или 50°, 50°, 80°. **721.** 135°. **722.** 45°. **725.** 22 см. **726.** 9 см. **727.** 60°. **731.** 120°. **735.** 60°. **739.** 6 см. **741.** *Указание.* Пусть O — центр окружности. Докажите, что $\angle COD = 180^\circ$. **742.** 114°. **744.** *Указание.* Докажите, что точки O_1 и O_2 принадлежат биссектрисе угла B.

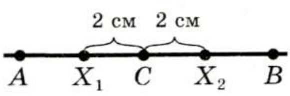


Рис. 351

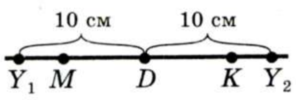


Рис. 352

ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ В ТЕСТОВОЙ ФОРМЕ «ПРОВЕРЬ СЕБЯ»

§ 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
В	Г	А	В	В	В	Б	Б	В	Б	В

§ 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Б	Б	Б	Г	Г	Б	В	Б	Б	А	В

§ 3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Г	В	В	А	А	Б	В	В	Б	В	Б

§ 4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
В	Г	А	В	Б	А	В	В	Г	Б	Г

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ПРОИСХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

Аксиома от греческого *axios* — достойный признания

Биссектриса от латинского *bis* — дважды и *sectrix* — секущая

Геометрия от греческого *geo* — земля и *metreo* — измеряю

Гипотенуза от греческого *gipotenusa* — стягивающая

Градус от латинского *gradus* — шаг, ступень

Диагональ от греческого *dia* — через и *gonium* — угол

Диаметр от греческого *diametros* — поперечник

Катет от греческого *katetos* — отвес

Квадрат от латинского *quadratus* — четырехугольный (от *quattuor* — четыре)

Куб от греческого *kybos* — игральная кость

Математика от греческого *mathematike* (от *matema* — знание, наука)

Медиана от латинского *medius* — средний

Метр от французского *mètre* — палка для измерения или греческого *metron* — мера

Параллельность от греческого *parallelos* — идущий рядом

Периметр от греческого *peri* — вокруг и *metreo* — измеряю

Перпендикуляр от латинского *perpendicularis* — отвесный

Планиметрия от греческого *planum* — плоскость

Пропорция от латинского *proportio* — соотношение

Радиус от латинского *radius* — спица в колесе, луч

Теорема от греческого *theoreo* — рассматриваю, обдумываю

Транспортир от латинского *transportaro* — переносить, перекладывать

Фигура от латинского *figura* — внешний вид, образ

Формула от латинского *formula* — форма, правило

Хорда от греческого *chorde* — струна, тетива

Центр от латинского *centrum* — острие ножки циркуля

Циркуль от латинского *circulus* — окружность

ПРИЛОЖЕНИЕ

Ориентировочное тематическое поурочное планирование

№	Содержание учебного материала	Количество часов
1	2	3
	I. Простейшие геометрические фигуры (9 ч)	
1	Точки и прямые	1
2	Отрезок и его длина	1
3	Луч. Угол. Измерение углов	2
4	Смежные и вертикальные углы	2
5	Перпендикулярные прямые	1
6	Аксиомы. Обобщение и систематизация учебного материала	1
7	Тематическое оценивание № 1	1
	II. Треугольники (14 ч)	
8	Равные треугольники. Высота, медиана, биссектриса треугольника	2
9	Первый и второй признаки равенства треугольников	4
10	Равнобедренный треугольник и его свойства	3
11	Признаки равнобедренного треугольника	1
12	Третий признак равенства треугольников	1
13	Теоремы	1
14	Обобщение и систематизация учебного материала	1
15	Тематическое оценивание № 2	1
	III. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника (13 ч)	
16	Параллельные прямые	1
17	Признаки параллельности двух прямых	2
18	Свойства параллельных прямых	2

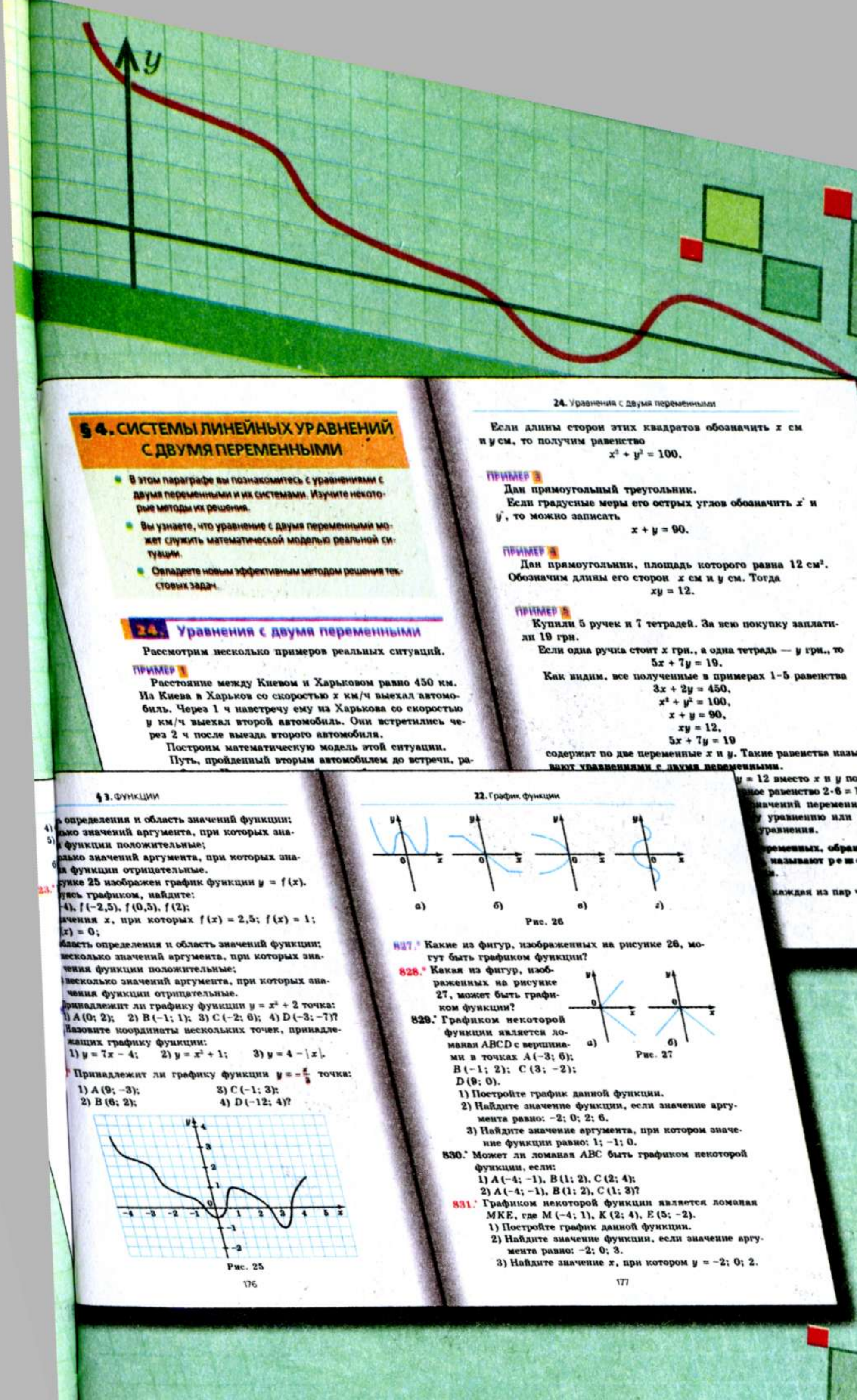
Продолж. табл.

1	2	3
19	Сумма углов треугольника	3
20	Прямоугольный треугольник	2
21	Свойства прямоугольного треугольника	1
22	Обобщение и систематизация учебного материала	1
23	Тематическое оценивание № 3	1
IV. Окружность и круг. Геометрические построения (14 ч)		
24	Геометрическое место точек. Окружность и круг	2
25	Некоторые свойства окружности. Касательная к окружности	2
26	Описанная и вписанная окружности треугольника	2
27	Задачи на построение	3
28	Метод геометрических мест точек в задачах на построение	3
29	Обобщение и систематизация учебного материала	1
30	Тематическое оценивание № 4	1
V. Систематизация и повторение учебного материала (4 ч)		

СОДЕРЖАНИЕ

§ 3. Параллельные прямые. Сумма углов треугольника

§ 4. Окружность и круг. Геометрические построения



§ 4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

- В этом параграфе вы познакомитесь с уравнениями с двумя переменными и их системами. Изучите некоторые методы их решения.
- Вы узнаете, что уравнение с двумя переменными может служить математической моделью реальной ситуации.
- Овладеете новым эффективным методом решения текстовых задач.

24. Уравнения с двумя переменными

Рассмотрим несколько примеров реальных ситуаций.

ПРИМЕР 1

Расстояние между Киевом и Харьковом равно 450 км. Из Киева в Харьков со скоростью x км/ч выехал автомобиль. Через 1 ч навстречу ему из Харькова со скоростью y км/ч выехал второй автомобиль. Они встретились через 2 ч после выезда второго автомобиля.

Построим математическую модель этой ситуации.

Путь, пройденный вторым автомобилем до встречи, ра-

24. Уравнения с двумя переменными

Если длины сторон этих квадратов обозначить x см и y см, то получим равенство

$$x^2 + y^2 = 100.$$

ПРИМЕР 3

Дан прямоугольный треугольник.

Если градусные меры его острых углов обозначить x° и y°, то можно записать

$$x + y = 90.$$

ПРИМЕР 4

Дан прямоугольник, площадь которого равна 12 см². Обозначим длины его сторон x см и y см. Тогда

$$xy = 12.$$

ПРИМЕР 5

Купили 5 ручек и 7 тетрадей. За всю покупку заплатили 19 грн.

Если одна ручка стоит x грн., а одна тетрадь — y грн., то

$$5x + 7y = 19.$$

Как видим, все полученные в примерах 1–5 равенства

$$3x + 2y = 450,$$
$$x^2 + y^2 = 100,$$
$$x + y = 90,$$
$$xy = 12,$$
$$5x + 7y = 19$$

содержат по две переменные x и y. Такие равенства называют уравнениями с двумя переменными.

$y = 12$ вместо x и y по

ное равенство $2 \cdot 6 = 1$

значений перемен

у уравнению или

уравнения.

еременных, обра

называют реше

каждая из пар

§ 3. ФУНКЦИИ

определения и область значений функции;

4) ько значений аргумента, при которых зна-

5) функции положительные;

лько значений аргумента, при которых зна-

6 я функции отрицательные.

23.° унке 25 изображен график функции $y = f(x)$.

уясь графиком, найдите:

-4), $f(-2,5)$, $f(0,5)$, $f(2)$;

ачения x, при которых $f(x) = 2,5$; $f(x) = 1$;

$x) = 0$;

бласть определения и область значений функции;

несколько значений аргумента, при которых значения функции положительные;

несколько значений аргумента, при которых значения функции отрицательные.

ринадлежит ли графику функции $y = x^2 + 2$ точка:

1) A (0; 2); 2) B (−1; 1); 3) C (−2; 6); 4) D (−3; −7)?

Назовите координаты нескольких точек, принадлежащих графику функции:

1) $y = 7x - 4$; 2) $y = x^2 + 1$; 3) $y = 4 - |x|$.

Принадлежит ли графику функции $y = -\frac{x}{3}$ точка:

1) A (9; −3);
2) B (6; 2);
3) C (−1; 3);
4) D (−12; 4)?

Рис. 25

176

22. График функции

а) б) в) г)

Рис. 26

827.° Какие из фигур, изображенных на рисунке 26, могут быть графиком функции?

828.° Какая из фигур, изображенных на рисунке 27, может быть графиком функции?

а) б)

Рис. 27

829.° Графиком некоторой функции является ломаная ABCD с вершинами в точках A (−3; 6); B (−1; 2); C (3; −2); D (9; 0).

1) Постройте график данной функции.
2) Найдите значение функции, если значение аргумента равно: −2; 0; 2; 6.
3) Найдите значение аргумента, при котором значение функции равно: 1; −1; 0.

830.° Может ли ломаная ABC быть графиком некоторой функции, если:

1) A (−4; −1), B (1; 2), C (2; 4);
2) A (−4; −1), B (1; 2), C (1; 3)?

831.° Графиком некоторой функции является ломаная MKE, где M (−4; 1), K (2; 4), E (5; −2).

1) Постройте график данной функции.
2) Найдите значение функции, если значение аргумента равно: −2; 0; 3.
3) Найдите значение x, при котором $y = -2$; 0; 2.

177

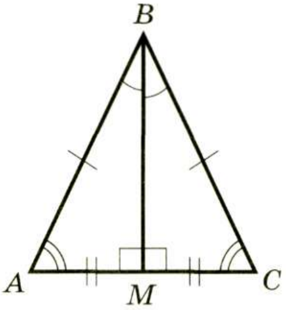
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

Мерзляк Аркадий Григорьевич, автор более 40 учебников и пособий по математике, отличник образования Украины, учитель-методист, работает учителем математики в Киево-Печерском лицее № 171 «Лидер»

Полонский Виталий Борисович, автор более 50 учебников, книг и статей по математике, Заслуженный учитель Украины, работает учителем математики в Киево-Печерском лицее № 171 «Лидер»

Якир Михаил Семенович, автор более 50 учебников, книг и статей по математике, Заслуженный учитель Украины, кавалер орденов «За заслуги» III и II степеней, работает учителем математики в Киево-Печерском лицее № 171 «Лидер»

СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



Если $AB = BC$, то $\angle A = \angle C$.

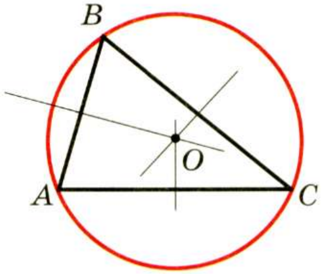
Если $AB = BC$ и $AM = MC$, то $BM \perp AC$ и $\angle ABM = \angle CBM$.

Если $AB = BC$ и $BM \perp AC$, то $AM = MC$ и $\angle ABM = \angle CBM$.

Если $AB = BC$ и $\angle ABM = \angle CBM$, то $BM \perp AC$ и $AM = MC$.

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

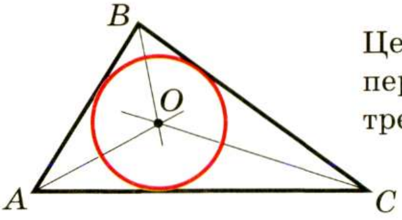
Треугольник, вписанный в окружность



Центр O окружности — точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника

ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Треугольник, описанный около окружности



Центр O окружности — точка пересечения биссектрис углов треугольника

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Печатные буквы		Названия букв
A	a	а
B	b	бэ
C	c	цэ
D	d	дэ
E	e	е
F	f	эф
G	g	гэ
H	h	аш
I	i	и
J	j	йот
K	k	ка
L	l	эль
M	m	эм
N	n	эн
O	o	о
P	p	пэ
Q	q	ку
R	r	эр
S	s	эс
T	t	тэ
U	u	у
V	v	вэ
W	w	дубль-вэ
X	x	икс
Y	y	игрек
Z	z	зет

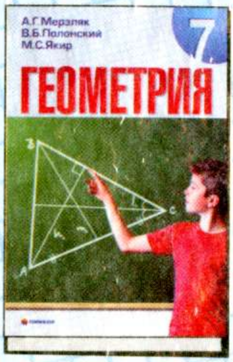
ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

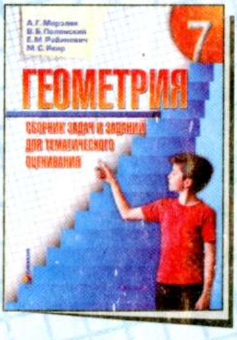
Печатные буквы		Названия букв
Α	α	альфа
Β	β	бета
Γ	γ	гамма
Δ	δ	дельта
Ε	ε	эпсилон
Ζ	ζ	дзета
Η	η	эта
Θ	θ, ϑ	тэта
Ι	ι	йота
Κ	κ	каппа
Λ	λ	ламбда
Μ	μ	мю
Ν	ν	ню
Ξ	ξ	кси
Ο	ο	омикрон
Π	π	пи
Ρ	ρ	ро
Σ	σ	сигма
Τ	τ	тау
Υ	υ	ипсилон
Φ	φ	фи
Χ	χ	хи
Ψ	ψ	пси
Ω	ω	омега

7

А.Г. Мерзляк
В.Б. Полонский
М.С. Якир

ГЕОМЕТРИЯ





9 789668 319822