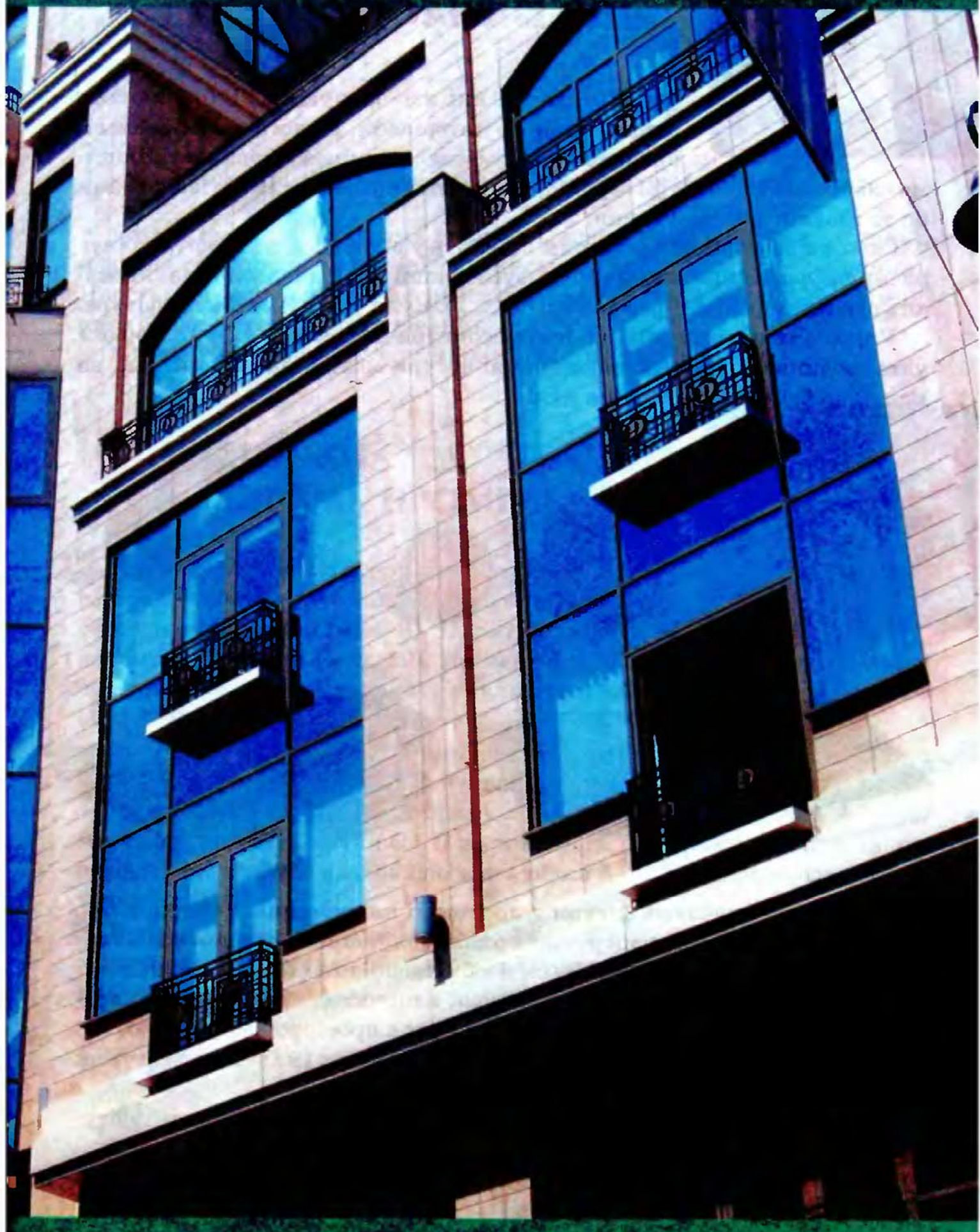


У розділі дізнаєтесь:

- ▶ що таке геометрична фігура і що вивчає геометрія;
- ▶ про пряму, відрізок, промінь, кут та їх властивості; як зображати ці фігури за допомогою креслярських інструментів;
- ▶ як знаходити довжину відрізка і градусну міру кута, використовуючи властивості вимірювання;
- ▶ як застосувати вивчені означення і властивості на практиці та при розв'язуванні задач



ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ





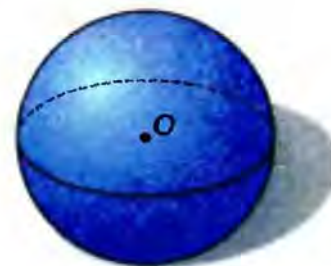
ЩО ВИВЧАЄ ГЕОМЕТРІЯ



Предмети, які нас оточують, відрізняються один від одного матеріалом, з якого вони зроблені, призначенням, масою, розміром, формою та іншими ознаками. У геометрії беруть до уваги лише форму предметів, їх розміри та взаємне розташування.

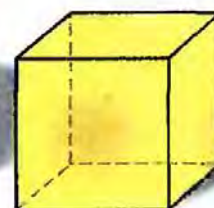
Схожим за формою предметам ставлять у відповідність певну *геометричну фігуру*. Наприклад, глобус, футбольний м'яч, апельсин (мал. 1) мають однакову форму – форму кулі (мал. 2). Куля – це геометрична фігура.

У навколишньому світі не існує геометричних фігур – їх «створює» уява людини. Зобразити геометричні фігури можна на папері. Так, на мал. 2 ви бачите зображення кулі.



Мал. 1

Мал. 2



Мал. 3

Мал. 4

У геометрії вивчають фігури у просторі і на площині. Уявлення про *площину* дають аркуш паперу, поверхня столу, шибка або поверхня озера у штиль. Площина вважається необмеженою та ідеально рівною.

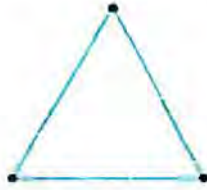
Вам знайомі деякі *просторові фігури*, наприклад прямокутний паралелепіпед (мал. 3) і куб (мал. 4). Куля також є просторовою фігурою.

Вам відомі деякі *фігури на площині*. Це відрізок (мал. 5), трикутник (мал. 6), прямокутник (мал. 7), коло (мал. 8).

Найпростіша геометрична фігура – *точка*. Кожну геометричну фігуру вважають складеною з точок.



Мал. 5




Мал. 6



Мал. 7



Мал. 8


 **Геометрія** – це наука про властивості геометричних фігур.

Розділ геометрії, в якому вивчають властивості фігур на площині, називають *планіметрією* (від латинського слова *planus* – площаина). Просторові фігури та їх властивості вивчають у *стереометрії* (від грецького слова *stereos* – просторовий).

Ми почнемо вивчати геометрію з планіметрії.


§ 1. ТОЧКИ, ПРЯМІ, ПРОМЕНІ



 Якщо на аркуш паперу натиснути добре загостреним олівцем, то залишиться слід, який дає уявлення про точку (мал. 9). *Прямі* проводять за допомогою лінійки (мал. 10). На малюнку звичайно зображають лише частину прямої, а всю пряму уявляють необмежено, продовженою в обидва боки.

Точки позначають великими латинськими буквами A, B, C, D, \dots , а прямі – малими латинськими буквами a, b, c, d, \dots .

На малюнку 11 ви бачите пряму a і точки A, B, C, D . Точки A і B лежать на прямій a , точки C і D не лежать на цій прямій. Можна також сказати, що пряма a проходить через точки A і B , але не проходить через точки C і D .

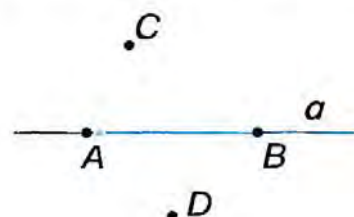
 Коротко це можна записати так: $A \in a, B \in a, C \notin a, D \notin a$. Знак « \in » заміняє слово «лежить на» (або «належить»), а знак « \notin » – «не лежить на» (або «не належить»).



Мал. 9



Мал. 10



Мал. 11



Властивість прямої

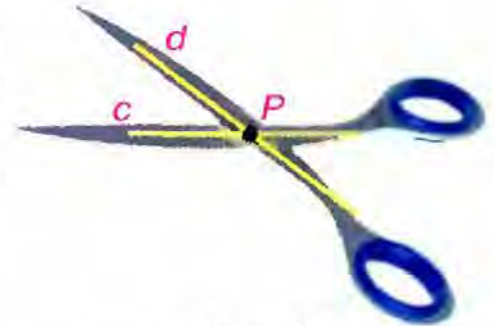
Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.

Завдяки цій властивості пряму можна позначати двома її точками. Наприклад, пряма AB на малюнку 11.

Якщо дві прямі мають спільну точку, то говорять, що вони *перетинаються* в цій точці. Прямі c і d перетинаються в точці P (мал. 12).

? Чи можуть дві прямі перетинатися у двох точках? Не можуть. Якби дві прямі перетиналися у двох точках, то кожна з прямих проходила б через ці точки. Але через дві точки можна провести тільки одну пряму.

Позначимо на прямій три точки A , B і C (мал. 13). Ви бачите, що точка B *лежить між* точками A і C .



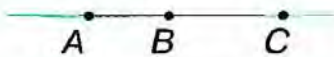
Мал. 12



Властивість розміщення точок на прямій

З трьох будь-яких точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими.

Точки A , B , C прямої лежать з *одного боку* від точки X (мал. 14). Це означає, що точка X не лежить між будь-якими двома з них.



Мал. 13



Мал. 14



Мал. 15



Задача. Відомо, що на прямій точки R і T лежать з одного боку від точки S , а точка T не лежить між точками S і R . Розмістіть ці точки на прямій.

Розв'язання. Якщо точки R і T лежать з одного боку від точки S , то це означає, що точка S не лежить між точками R і T . Тоді або точка R лежить між точками S і T , або T — між S і R .

За умовою, точка T не лежить між точками S і R . Отже, точка R лежить між точками S і T (мал. 15).

Проведемо пряму a і позначимо на ній будь-яку точку O (мал. 16). Отримали два промені, які виходять з точки O . На малюнку 16 один із променів виділено. Цей промінь складається з точки O — початку променя і всіх точок прямої, які лежать з одного боку від точки O .



Променем називається частина прямої, яка складається з точки на прямій та усіх її точок, що лежать з одного боку від даної точки. Ця точка називається *початком променя*.



Мал. 16



Мал. 17



Мал. 18

Так само, як і пряму, промінь позначають двома великими латинськими буквами, наприклад OA (мал. 17). Перша буква позначає початок променя, а друга – будь-яку точку на промені.

Два промені, які мають спільний початок і доповнюють один одного до прямої, називаються *доповняльними*. Це промені OA і OB на малюнку 18.

У підручнику вам уже траплялися речення, що містять слово «називають» або «називається». Це *означення понять*. В означенні розкривається зміст поняття. Наприклад, означення променя, доповняльних променів.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас може виникнути запитання: *Чому, з'ясовуючи, що таке точка і пряма, ми вживали слово «уявимо»?*

У геометрії абстрагуються не лише від усіх властивостей предметів, крім їх форми і розмірів, а й частково від самих розмірів. Тоді приходять до понять про точку і пряму. Евклід писав у своїх «Началах», що точка не має ніяких розмірів. Зобразити точку, яка не має ні довжини, ні ширини, не можна. Ми умовно позначаємо те місце, де розміщена точка. Для цього використовуємо загострений олівець. Зрозуміло, що й на такому малюнку точка має певні розміри. Проте якщо зафарбувати аркуш паперу трьома кольорами (мал. 19), тоді те місце, де стикаються три кольори, дає повніше уявлення про точку.

Абстрактним є також і поняття прямої. Кажуть: «Пряма не має ширини і товщини; вона нескінченна». Зрозуміло, що такої прямої у природі не існує. Але ми її уявляємо складеною з точок або як слід від руху точки.

2. *Якщо є прямі лінії, то мають бути і криві лінії?*

Їх безліч. За допомогою олівця можна зобразити різні криві лінії. У геометрії вивчають лише особливі криві лінії, тобто ті, які мають цікаві, лише їм притаманні властивості. Наприклад, відоме вам *коло* є кривою лінією. Ця лінія особлива тим, що всі її точки рівновіддалені від даної точки.

3. Слово «лінія» походить від латинського *linea* – льон, лляна нитка; іноді це слово розуміють як «пряма лінія», звідси походить назва пристрою для проведення прямих ліній – «лінійка». Слово «точка» – це переклад латинського слова *puncto*, що означає «тикаю», «дотикаюсь».



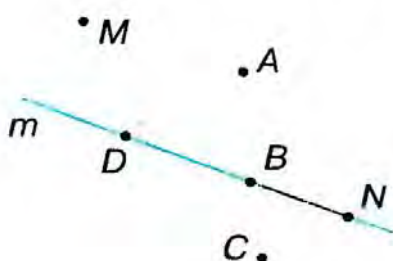
Мал. 19

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

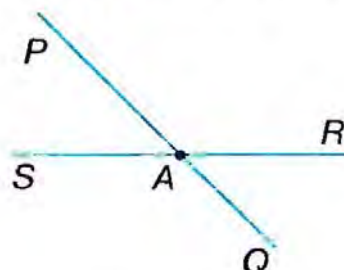
1. Що вивчає геометрія?
2. Наведіть приклади геометричних фігур.
3. Як позначають точки і прямі?
4. Сформулюйте властивість прямої.
5. Сформулюйте властивість розміщення точок на прямій.
6. Поясніть, що таке промінь. Як позначають промені?
7. Які промені називаються доповняльними?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

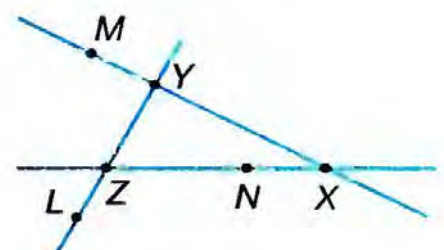
- 1°. На малюнку 20 назвіть точки, які: 1) лежать на прямій m ; 2) не лежать на прямій m . Запишіть відповідь.
- 2°. Проведіть пряму. Позначте точки A і B , що лежать на цій прямій, і точки C і D , що не лежать на ній. Запишіть позначення цієї прямої.
- 3°. Позначте три точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Проведіть прямі AB , BC і AC .
- 4°. Проведіть пряму і позначте на ній точки A і B . Позначте на цій прямій:
 - 1) точку C так, щоб точка B лежала між точками A і C ;
 - 2) точки D і E , що лежать з одного боку від точки B .
- 5°. На малюнку 21 назвіть промені, доповняльні промені.
- 6°. Проведіть прямі AB і CD , що перетинаються в точці O , яка лежить між точками A і B , C і D . Запишіть: 1) промені; 2) доповняльні промені.
- 7°. Позначте точку M . Проведіть через неї три прямі. Скільки прямих можна провести через точку M ?
- 8°. Чи завжди можна провести пряму через:
 - 1) три точки; 2) чотири точки? Зробіть малюнки.
- 9°. За малюнком 22 з'ясуйте, як розміщені точки відносно прямих. Накресліть у зошиті таблицю 1 і заповніть її за зразком, наведеним у другому стовпчику.
- 10°. Точки A , B , C лежать на прямій, а точка D не лежить на ній. Через кожні дві точки провели пряму. Скільки прямих утворилося? Запишіть їх.
- 11°. Проведіть дві прямі a і b , що перетинаються в точці A . Позначте:
 - 1) точку B на прямій a ; 2) точку D , яка не лежить на цих прямих;



Мал. 20



Мал. 21



Мал. 22

3) точку C на прямій b ; 4) точку E , через яку не проходить ні пряма a , ні пряма b .
Зробіть відповідні записи. Чи можна дані прямі позначити по-іншому? Як?

Таблиця 1

	Пряма XU	Пряма YZ	Пряма XZ	Пряма MX
Точка X	$X \in XU$			
Точка U	$U \in XU$			
Точка Z	$Z \notin XU$			
Точка L	$L \notin XU$			
Точка M	$M \in XU$			
Точка N	$N \notin XU$			

12. На прямій a позначили точки X, Y, Z . Відомо, що:
- 1) точки X і Y лежать з одного боку від точки Z , а точка Y не лежить між точками X і Z ;
 - 2) точки X і Z лежать з одного боку від точки Y , а точка X не лежить між точками Y і Z .
- Зробіть малюнки.
13. Позначте на прямій три точки. Скільки дістали променів?
14. Чи можуть бути доповняльними промені:
- 1) AB і BA ; 2) QP і QR ?
- Відповідь поясніть.
15. Дві точки визначають одну пряму. Скільки прямих можуть визначати:
- 1) три точки; 2) чотири точки?
- Зробіть малюнки.
16. Проведіть пряму a . Позначте точки A, B, C так, щоб прямі AB і a перетинались:
- 1) у точці C і точка B лежала між точками A і C ;
 - 2) у точці B і точка A лежала між точками A і C .
17. Чи правильно, що коли точка C не лежить між точками A і B , то ці точки не лежать на одній прямій? Зробіть малюнок.
18. Скільки променів зображено на малюнку 22?
19. Промені OA і OB – доповняльні. Чи лежать на одній прямій точки A, O, B ? Відповідь поясніть.
20. Через точку A проведіть три прямі. Скільки утворилося променів? Якщо через точку A провести n прямих, то скільки утвориться променів?
21. На малюнку 23 ви бачите, що чотири прямі перетинаються в чотирьох точках. Зробіть малюнки, на яких чотири прямі перетинаються:
- 1) у п'яти точках; 2) у шести точках.
- Чи можуть чотири прямі мати три точки перетину?

22*. Дано п'ять точок, з яких жодні три не лежать на одній прямій. У цих точках попарно перетинаються п'ять прямих так, що утворилася «зірка». Скільки прямих перетинають кожна з даних прямих? Скільки всього утворилося точок перетину? Чи є серед них точка, через яку не проходить жодна пряма?



Мал. 23

23*. Позначте на прямій точку. Скільки променів утворилося? Позначте ще одну точку і підрахуйте кількість утворених променів. Скільки отримаємо променів, якщо позначимо на прямій n точок?

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

24*. На карті України (мал. 24) знайдіть обласні центри, які розташовані:

- 1) на лівому березі Дніпра;
 - 2) на правому березі Дніпра;
 - 3) на умовній прямій «Луцьк – Рівне»;
 - 4) на умовній прямій між містами Чернігів і Вінниця.
- Запишіть відповідь.

25. Правильність виготовлення лінійки перевіряють у такий спосіб. Через дві точки за допомогою лінійки проводять лінію. Потім лінійку перевертають і через ті самі точки знову проводять лінію (мал. 25). Якщо лінії збігаються, тоді лінійка правильна. Поясніть, чому це так.



Мал. 24



Мал. 26



Мал. 25

26. Для проведення прямих ліній на землі користуються віхами (кілками, загостреними з одного боку). Поясніть, як проводять (провішують) пряму за допомогою віх (мал. 26).

27*. Щоб влучити в мішень у тирі, треба прицілитися. Поясніть, які умовні точки мають бути на одній прямій.

§2. ВІДРІЗКИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ

Позначимо на прямій дві довільні точки A і B (мал. 27). Виділимо частину прямої між цими точками. Дістанемо відрізок AB (або BA). Він складається з точок A і B і всіх точок прямої, що лежать між ними.



➡ **Відрізком** називається частина прямої, яка складається з двох точок на прямій та всіх її точок, що лежать між даними точками.

Ці дві точки називаються *кінцями відрізка*. Інші точки відрізка називаються його *внутрішніми точками*.

Щоб виміряти відрізок, спочатку обираємо *одиницю вимірювання* – *одичний відрізок*. Це може бути 1 мм, 1 см, 1 дм, 1 м, 1 км та ін. Потім визначаємо, скільки разів на відрізку вміщується одичний відрізок.

Подивіться на малюнок 28. Одичний відрізок «1 см» уміщується на відрізок AB рівно 3 рази. Це означає, що довжина цього відрізка дорівнює 3 см.

Коротко говоримо: «Відрізок AB дорівнює 3 см» і записуємо: $AB = 3$ см.

? Чи зміниться довжина відрізка AB , якщо за одиницю вимірювання візьмемо 1 мм? Ні, довжина відрізка не зміниться, але буде виражена інакше: $AB = 30$ мм.

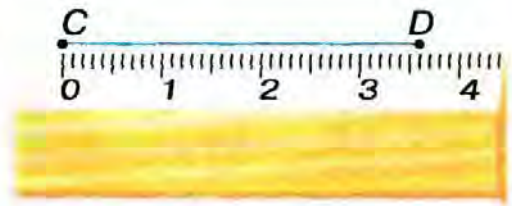


Мал. 27



Мал. 28

Якщо на відрізку CD (мал. 29) одиничний відрізок «1 см» уміщається 3 рази і його десята частина (1 мм) – 6 разів, то $CD = 3,6$ см. Зрозуміло, що довжина кожного відрізка виражається додатним числом.



Мал. 29

Відрізки порівнюватимемо за їх довжинами.



Два відрізки називаються **рівними**, якщо довжини їх рівні.

З двох нерівних відрізків більший той, довжина якого більша.

Наприклад, якщо $AB = 4$ см, $CD = 4$ см, $MN = 3,5$ см, то $AB = CD$, але $AB > MN$ і $CD > MN$.

На малюнку 30 точка M розбиває відрізок PQ на два відрізки: PM і MQ . Бачимо, що $PM = 2$ см, $MQ = 3$ см, а $PQ = 5$ см. Отже, довжина відрізка PQ дорівнює сумі довжин відрізків PM і MQ .



Властивості вимірювання відрізків

Довжина кожного відрізка більша за нуль.

Довжина кожного відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його точкою.



Задача. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Чи може точка C лежати між точками A і B , якщо $AB = 6$ см, $AC = 9$ см, $CB = 3$ см?

Розв'язання. Якщо точка C лежить між точками A і B , то $AB = AC + CB$. Але $6 \neq 9 + 3$. Отже, точка C не лежить між точками A і B .



Щоб встановити, чи лежить точка C між точками A і B , перевірте правильність рівності $AB = AC + CB$.

Якщо треба з'ясувати, чи лежать на одній прямій три точки A, B і C , переконайтесь у правильності однієї з рівностей:

або $AB = AC + CB$, або $AC = AB + BC$, або $BC = BA + AC$.

На малюнку 31 ви бачите, як за допомогою лінійки на промені AM від його початку A можна відкласти відрізок AB довжиною 4 см.



Мал. 30



Мал. 31



Властивість відкладання відрізків

На будь-якому промені від його початку можна відкласти тільки один відрізок даної довжини.

Точка, яка розбиває відрізок на два рівні відрізки, називається *серединою відрізка*. На малюнку 32 точка O – середина відрізка AB .



Мал. 32



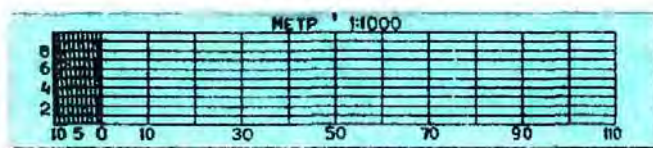
Можемо записати: $AO = OB$, $AB = 2AO = 2OB$.

Рівні відрізки позначаємо на малюнку однаковою кількістю рисок.



Довжину відрізка AB називають також **відстанню** між точками A і B .

Відстані вимірюють за допомогою різних приладів. У технічному кресленні використовують масштабну міліметрову лінійку (мал. 33). Діаметри циліндричних предметів вимірюють штангенциркулем (мал. 34) або мікрометром (мал. 35). Для вимірювання відстаней на місцевості користуються рулеткою (мал. 36) або польовим циркулем (мал. 37).



Мал. 33



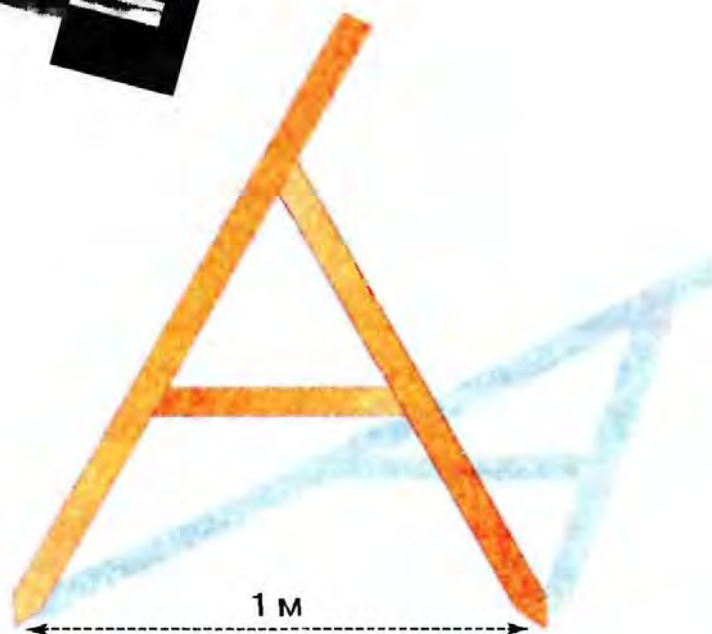
Мал. 34



Мал. 35



Мал. 36



1 м

Мал. 37

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. У вас може виникнути непросте запитання: *Як будуються означення?*

Визначаючи поняття «відрізок», ми використали поняття «точка», «пряма», «лежати між». Взагалі, визначаючи будь-яке поняття, користуються іншими, вже відомими поняттями. Але не можна визначити всі поняття. Тому деякі з них приймають без означень, їх називають *основними*. Усім іншим поняттям дають означення.

Так, для поняття «промінь» основними поняттями є «точка», «пряма», «лежати з одного боку».

2. У давнину вимірювальними інструментами слугували частини тіла людини: долоня (містила чотири пальці), лікоть (дорівнював шести долоням), фаланга великого пальця (дорівнювала семи зернинам ячменю, розміщеним по прямій) та ін. Використовувалися також крок, розмах рук. Поступово в кожній державі для потреб вимірювання встановилися спільні одиниці: в Англії — ярд, фут, дюйм та ін.; в Україні — верста, сажень, аршин, миля та ін.

З 1875 р. в Європі почала запроваджуватися *метрична система мір*, яка була розроблена французькими вченими ще в 1799 р.

У нас її прийнято в 1918 р. За одиницю довжини в цій системі взято *метр* (від

грецького *metron*, що означає «міра»). Метр наближено становить $\frac{1}{40\,000\,000}$ частину земного меридіана. Метрична система зручна тим, що побудована на десятковій основі: $10\text{ мм} = 1\text{ см}$; $10\text{ см} = 1\text{ дм}$; $10\text{ дм} = 1\text{ м}$; $1000\text{ м} = 1\text{ км}$.

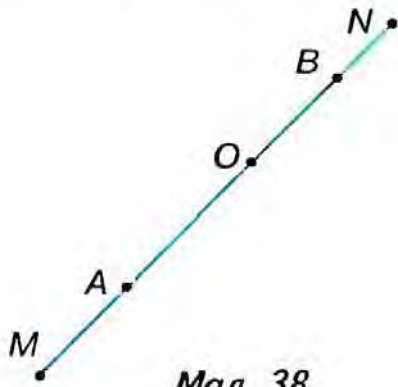
Використовуються й інші одиниці вимірювання відстаней: у мореплавстві — морська миля (1,852 км), в астрономії — світловий рік (шлях, який світло проходить за рік).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

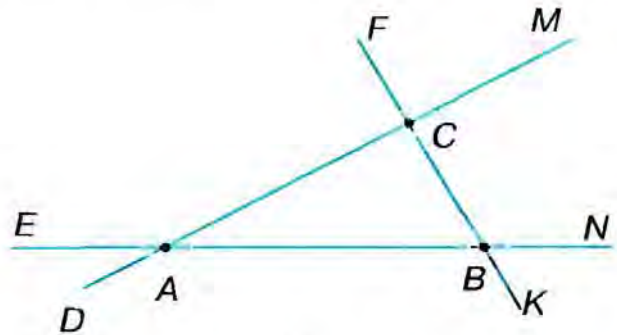
1. Поясніть, що таке відрізок.
2. Як позначають відрізки?
3. Які відрізки називаються рівними?
4. Сформулюйте властивості вимірювання відрізків.
5. Яка властивість відкладання відрізків?
6. Що таке відстань між двома точками?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

- 1'. Назвіть на малюнку 38 кінці й внутрішні точки відрізка: 1) MN ; 2) AN ; 3) AB .
- 2'. Накресліть відрізок AB і позначте на ньому точку C . Скільки відрізків утворилося?
- 3'. Накресліть два відрізки. Виміряйте відрізки і порівняйте їх довжини.
- 4'. Накресліть відрізки AB і CD так, щоб:
 - 1) $AB = 3,5\text{ см}$, $CD = 42\text{ мм}$; 2) $AB = 50\text{ мм}$, $CD = 0,5\text{ дм}$.
 Порівняйте дані відрізки.



Мал. 38



Мал. 39

5¹. Накресліть промінь OD і, скориставшись малюнком 39, від його початку відкладіть відрізок, що дорівнює відрізку:
1) AB ; 2) BC ; 3) AC .

6°. Проведіть пряму a і позначте на ній точки A і B . Позначте:
1) точки C і D , що лежать на відрізку AB ;
2) точки E і F , які лежать на прямій a , але не лежать на відрізку AB .
Запишіть відрізки, які при цьому утворилися. Назвіть внутрішні точки цих відрізків.

7°. Відрізки AC , BD і KL мають довжини:
1) 3 см, 20 мм, 0,3 дм; 2) 0,01 дм, 10 см, 1 мм; 3) 4,2 мм, 0,42 дм, 0,42 см.
Порівняйте дані відрізки.

8°. Яка довжина відрізка PQ на малюнку 40? Відповідь поясніть.



Мал. 40

9°. Точка C лежить на відрізку AB . Який з відрізків довший – AB чи AC ?

10°. Накресліть відрізок MN довжиною a см. Позначте на відрізку точку K так, щоб $MK = b$ см. Знайдіть довжину відрізка KN , якщо:

- 1) $a = 6$ см, $b = 4,5$ см;
- 2) $a = 0,3$ дм, $b = 20$ мм;
- 3) $a = 40$ мм, $b = 1,5$ см.

Таблиця 2

AC		6,7 см	2,2 дм
AB	5,5 см		16 см
BC	45 мм	2,4 см	

11°. Точка B ділить відрізок AC на два відрізки. Накресліть у зошиті таблицю 2 і заповніть її.

12°. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Чи лежить точка C між точками A і B , якщо:
1) $AB = 5$ см, $AC = 11$ см, $BC = 6$ см; 2) $AB = 12$ см, $AC = 3,5$ см, $BC = 8,5$ см?

13°. Точки A, B, C лежать на одній прямій. Чи лежить точка B на відрізку AC , якщо:
1) $AC = 10$ см, $BC = 14$ см;
2) $AB = 4$ см, $BC = 7$ см, $AC = 11$ см?

14°. Чи лежать точки A, B, C на одній прямій, якщо:
1) $AB = 17$ см, $AC = 6,5$ см, $BC = 10,5$ см;
2) $AB = 1,5$ дм, $AC = 0,6$ дм, $BC = 1$ дм?

- 15°. На прямій AC позначено точку B , яка лежить між точками A і C . Скільки відрізків даної довжини можна відкласти:
 1) на промені BA від його початку;
 2) на доповняльних променях BA і BC від їх спільного початку B ?
 Відповідь поясніть.

- 16°. Точка O – середина відрізка AB . Накресліть у зошиті таблицю 3 та заповніть її. Яка довжина відрізків у дециметрах? А в метрах?

- 17°. Точка C – середина відрізка AB , точка O – середина відрізка AC . Знайдіть довжину відрізків AO і OB , якщо $AB = 8$ см.

18. На прямій позначте точки A, B, C, D, E .
 Запишіть усі відрізки, на яких:

Таблиця 3

AB	9 см		
AO		43 мм	
OB			8,3 мм

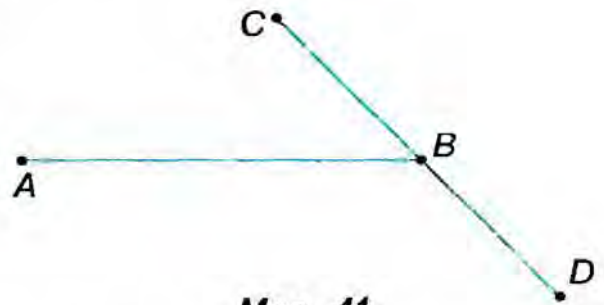
- 1) лежить точка D ;
 2) не лежить точка C .

19. Позначте точки A, B, C, D так, щоб жодні три з них не лежали на одній прямій. Скільки існує відрізків з кінцями в цих точках?
20. На відрізку AB довжиною 8 см позначте точку C так, щоб $AC = 3BC$. Знайдіть довжину відрізків AC і BC .

21. На малюнку 41 $AB = 2BC$. За якої умови $AB = CD$?

22. Яка з точок A, B, C лежить між двома іншими, якщо:

- 1) $AB = 16$ см, $BC = 2$ дм, $AC = 4$ см;
 2) $AB + BC = AC$;
 3) $BA + AC = BC$;
 4) $BA = BC - AC$?



Мал. 41

23. Як розміщені точки A, B, M , якщо $AM + MB = AB$ і $AM = MB$?
24. На промені AK відкладіть відрізки $AB = 12$ см, $BC = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка AC , якщо:
 1) точка B лежить між точками A і C ; 2) точка C лежить між точками A і B .
25. Точки M, N, K лежать на одній прямій. Відомо, що $MN = 14$ см, $NK = 16$ см. Якою може бути довжина відрізка MK ?
26. На промені AM відкладіть відрізки $AB = 30$ мм, $AC = 40$ мм. Знайдіть:
 1) довжину відрізка BC ; 2) відстань між серединами відрізків AB і AC .
27. Відрізок довжиною 18 см поділено на дві нерівні частини. Чому дорівнює відстань між серединами цих частин? Відповідь поясніть.
28. Відкладіть на промені AN відрізки $AB = 2$ см, $AC = 5$ см, $AD = 9$ см. Знайдіть відстань між серединами відрізків AB і CD .
- 29*. Накресліть відрізок і позначте на ньому чотири точки. Скільки утворилося відрізків, що мають не більше ніж одну спільну точку?

- 30*. Із чотирьох точок A, B, C, D точки A, B, C лежать на одній прямій і точки B, C, D також лежать на одній прямій. Обґрунтуйте, що всі чотири точки лежать на одній прямій.
- 31*. Дві точки відрізка AB лежать на відрізку CD . Чому ці відрізки лежать на одній прямій?
- 32*. Накресліть відрізок. Позначте на відрізку спочатку одну точку, потім дві точки, три точки і т. д. Кожного разу підраховуйте кількість утворених відрізків. Спробуйте встановити деяке правило підрахунку кількості утворених відрізків.
- 33*. На відрізку AD позначено точки B і C так, що $AB = CD$, $AC = 5$ см. Знайдіть довжину відрізка BD .
- 34*. На промені AM відкладіть відрізки $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, а на промені CA — відрізок $CD = 5$ см. Знайдіть довжину відрізків: 1) BD ; 2) AD .
- 35*. Відрізок довжиною m поділено на будь-які два відрізки. Знайдіть відстань між серединами цих відрізків.
- 36*. Відрізок поділено на дві нерівні частини. Знайдіть довжину цього відрізка, якщо відстань між серединами цих частин дорівнює n .
- 37*. Поділіть відрізок AB довжиною 16 см на три нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків дорівнює 14 см. Знайдіть довжину середнього відрізка.
- 38*. Відрізок $AM = 24$ см поділено трьома точками на чотири нерівні відрізки. Відстань між серединами крайніх відрізків становить 20 см. Знайдіть відстань між серединами середніх відрізків.
- 39*. Відстань між точками A і B дорівнює a см. Знайдіть на прямій AB усі точки, які задовольняють умову:
- 1) відстань від кожної з них до точки A вдвічі менша за відстань до точки B , якщо $a = 9$ см;
 - 2) сума відстаней від кожної з них до точок A і B дорівнює 8 см, якщо $a = 8$ см;
 - 3) різниця відстаней від кожної з них до точок A і B дорівнює 2 см, якщо $a = 14$ см.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 40*. Відстань між Сумами і Житомиром дорівнює 480 км. Житомир розташований на відстані 140 км від Києва. Визначте відстань від Києва до Сум, вважаючи, що всі три міста розташовані на одній прямій.
- 41*. Щоб дізнатися про довжину свого кроку, відміряйте рулеткою відстань 10 м і пройдіть цю відстань кілька разів. Запишіть, скільки кроків ви робили щоразу. Знайдіть середню кількість кроків. Розділіть 10 м на отриману середню кількість кроків — це і буде довжина вашого кроку. Виміряйте у кроках і переведіть у метри:

- 1) довжину класної кімнати; 2) довжину шкільного коридору;
- 3) відстань від вашого дому до найближчої зупинки транспорту.

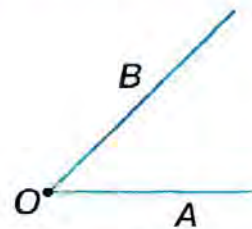
42. Неозброєним оком людина може бачити одноповерховий будинок на відстані 5 км, вікна в цьому будинку – за 4 км, а димар – за 3 км. На якій відстані від будинку (приблизно) перебуває людина, яка:

- 1) уже бачить будинок, але ще не бачить вікна в ньому;
- 2) уже бачить вікна у будинку, але ще не бачить димар?



§3. КУТИ ТА ЇХ ВИМІРЮВАННЯ

Проведемо з точки O два промені OA і OB (мал. 42). Дістали відому вам фігуру – кут.



Мал. 42



→ **Кутом** називається геометрична фігура, утворена двома променями зі спільним початком.

Промені називаються *сторонами кута*, а їх спільний початок – *вершиною кута*.

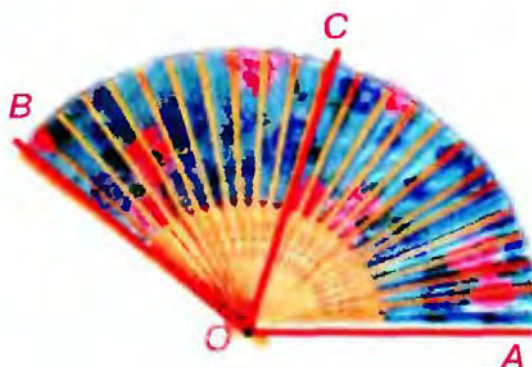
Кут позначають або назвою його вершини, або назвами трьох точок: вершини і двох точок, що лежать на сторонах кута.

✍ Записують: $\angle O$, $\angle AOB$ або $\angle BOA$ (мал. 42). Знак \angle заміняє слово «кут». Якщо кут позначено трьома буквами, то середня в запису буква відповідає вершині кута. Кут можна позначити і маленькою буквою грецького алфавіту: α , β , γ та ін. Тоді знак \angle не пишуть. Розглядаючи кілька кутів, їх можна позначити цифрами, наприклад $\angle 1$, $\angle 2$.

Сторони кута розбивають площину на дві області. Одна з них вважається *внутрішньою* областю кута, а інша – *зовнішньою*. Візьмемо дві довільні



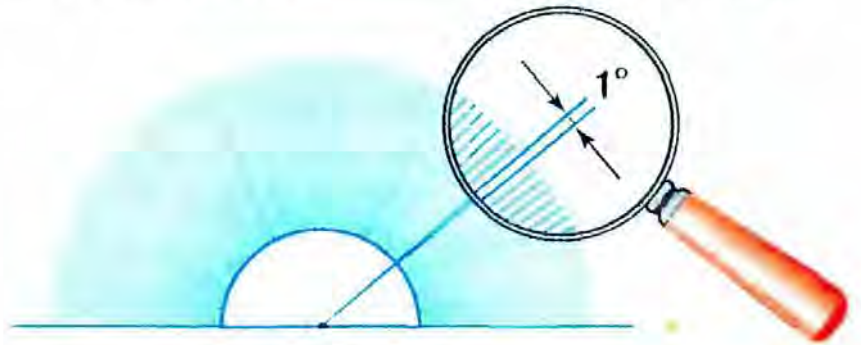
Мал. 43



Мал. 44



Мал. 45



Мал. 46

точки, наприклад M і N , на сторонах кута AOB (мал. 43) і сполучимо їх відрізком. Внутрішні точки відрізка MN лежатимуть у внутрішній області кута. Друга область кута – зовнішня.

Промінь *проходить між* сторонами кута, якщо він виходить з його вершини і лежить у внутрішній області. На малюнку 44 промінь OC проходить між сторонами кута AOB .

Кут, сторони якого є доповняльними променями, називається *розгорнутим* кутом. На малюнку 45 кут AOB – розгорнутий.

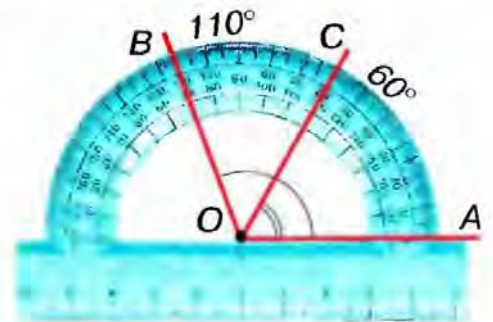
Якщо кут розгорнутий, то будь-який промінь, який виходить з вершини і відмінний від його сторін, проходить між сторонами кута.

Для вимірювання кутів потрібна *одиниця вимірювання* – *одичний кут*. Щоб утворити його, поділимо розгорнутий кут на 180 рівних частин (мал. 46). Кут, утворений двома сусідніми променями, обираємо за одиничний. Його називають *градусом* і записують 1° .

Зрозуміло, що градусна міра розгорнутого кута дорівнює 180° .

Кути вимірюють *транспортиром*.

На малюнку 47 градусна міра кута AOB дорівнює 110° .



Мал. 47

К Коротко говоримо: «Кут AOB дорівнює 110° » і записуємо: $\angle AOB = 110^\circ$.

Для точнішого вимірювання кутів градус поділяють на хвилини і секунди. *Хвилиною* називають $\frac{1}{60}$ частину градуса, а *секундою* – $\frac{1}{60}$ частину хвилини. Одну хвилину позначають $1'$, одну секунду – $1''$. Наприклад, кут у 50 градусів, 23 хвилини і 39 секунд записуємо так: $50^\circ 23' 39''$.

Градусна міра кожного кута виражається додатним числом.

Кути порівнюватимемо за їх градусними мірами.

З Два кути називаються *рівними*, якщо їх градусні міри рівні.

З двох нерівних кутів більший той, градусна міра якого більша.

Наприклад, якщо $\angle AOB = 45^\circ$, $\angle KLM = 45^\circ$, $\angle EFQ = 38^\circ$, то $\angle AOB = \angle KLM$, але $\angle AOB > \angle EFQ$ і $\angle KLM > \angle EFQ$.

На малюнку 47 промінь OC розбиває $\angle AOB$ на два кути: AOC і COB . Бачимо, що $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle COB = 50^\circ$, $\angle AOB = 110^\circ$. Отже, кут AOB дорівнює сумі кутів AOC і COB .



Властивості вимірювання кутів

Градусна міра кожного кута більша за нуль.

Градусна міра кута дорівнює сумі градусних мір кутів, на які він розбивається будь-яким променем, що проходить між його сторонами.



Задача. Чи може промінь OC проходити між сторонами $\angle AOB$, якщо $\angle AOB = 50^\circ$, $\angle AOC = 20^\circ$, $\angle COB = 70^\circ$?

Розв'язання. Якщо промінь OC проходить між сторонами кута AOB , то $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$. Але $50^\circ \neq 20^\circ + 70^\circ$. Отже, промінь OC не проходить між сторонами цього кута.



Якщо потрібно встановити, чи проходить промінь OC між сторонами кута AOB , перевірте правильність рівності $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$.

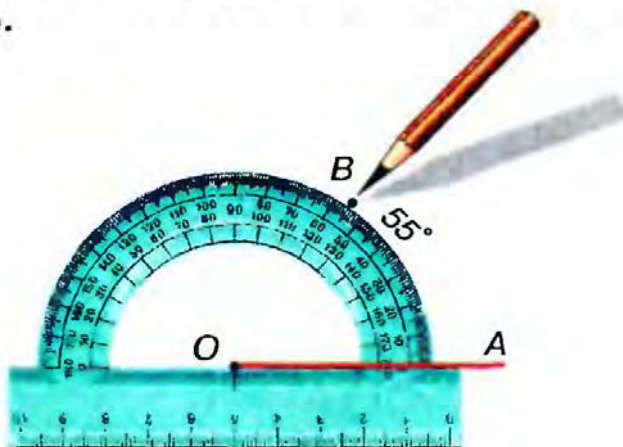
На малюнках 48, 49 ви бачите, як за допомогою транспортира і лінійки від променя OA в один бік від нього можна відкласти кут AOB , що дорівнює 55° .



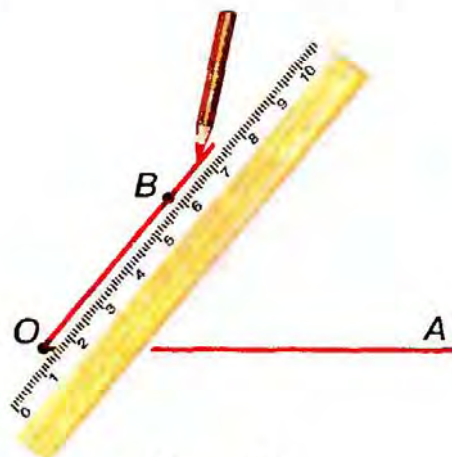
Властивість відкладання кутів

Від будь-якого променя в один бік від нього можна відкласти тільки один кут даної градусної міри.

Кут називають *прямим*, якщо він дорівнює 90° (мал. 50); *гострим*, якщо він менший від 90° (мал. 51); *тупим*, якщо він більший за 90° , але менший від 180° (мал. 52). Кути, більші за розгорнутий, не розглядати- мемо.



Мал. 48



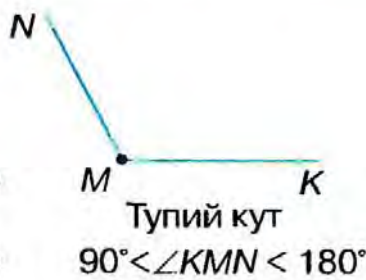
Мал. 49



Мал. 50



Мал. 51



Мал. 52



Знаком « \perp » на малюнку позначаємо прямий кут.



Бісектрисою кута називається промінь, який виходить з вершини кута і ділить його навпіл.

На малюнку 53 промінь OC – бісектриса кута AOB .



Можемо записати: $\angle AOC = \angle COB$,
 $\angle AOB = 2 \angle AOC = 2 \angle COB$.

Рівні кути позначаємо на малюнку однаковою кількістю дужок.

Кути на місцевості вимірюють *астролябією* (мал. 54) або *теодолітом* (мал. 55).



Мал. 54



Мал. 55



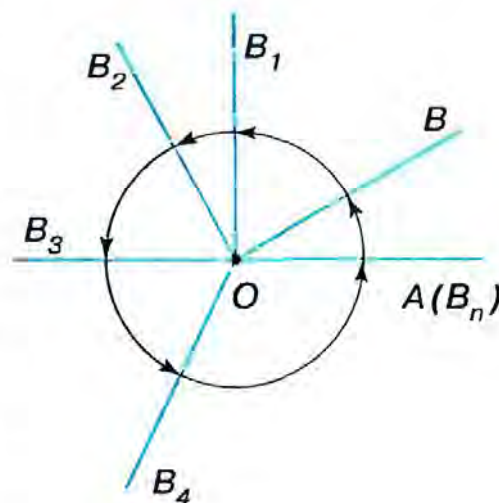
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Кут можна уявити як результат повороту променя, наприклад OA , навколо свого початку O (мал. 56). Внаслідок повороту променя початкове OA і кінцеве OB його положення утворять кут AOB . Обертаючи промінь у тому самому напрямі, діставатимемо нові кути: $\angle AOB_1$ – прямий, $\angle AOB_2$ – тупий, $\angle AOB_3$ – розгорнутий, $\angle AOB_4$ – більший за розгорнутий. Нарешті, повний оберт променя утворить кут, який називають повним кутом. Він дорівнює 360° .

2. Слово «*транспортир*» походить від латинського слова *transportare*, що означає «переносити». Мабуть, спочатку транспортир використовувався не стільки для вимірювання кутів, скільки для побудови кута, що дорівнює даному.

У перекладі з латинської *gradus* означає «крок», «ступінь».

Кути вимірюють не лише в градусах, а й у *радіанах* ($1 \text{ рад} = 57^\circ 18'$), *градах* ($1 \text{ град} = 0,9^\circ$), *румбах* ($1 \text{ румб} = 11,29^\circ$).



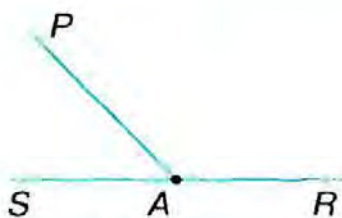
Мал. 56

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

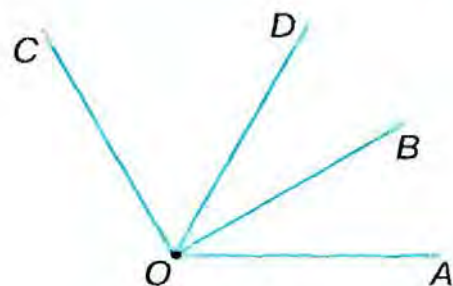
1. Яка фігура називається кутом? Як позначають кут?
2. Які кути називаються рівними?
3. В яких одиницях вимірюють кути і за допомогою якого приладу?
4. Сформулюйте властивості вимірювання кутів.
5. Який кут називають гострим? Прямим? Тупим? Розгорнутим?
6. Яка властивість відкладання кутів?
7. Що таке бісектриса кута?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1'. Запишіть кути, зображені на малюнку 57. Назвіть їх сторони і вершину. Чи є серед цих кутів розгорнутий кут?

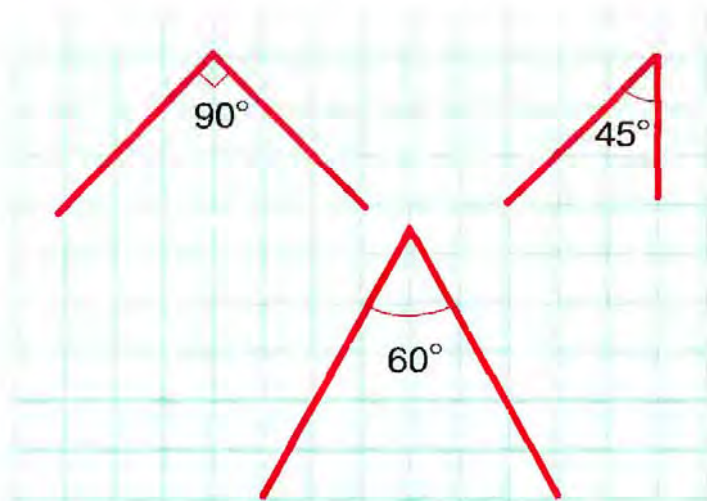


Мал. 57

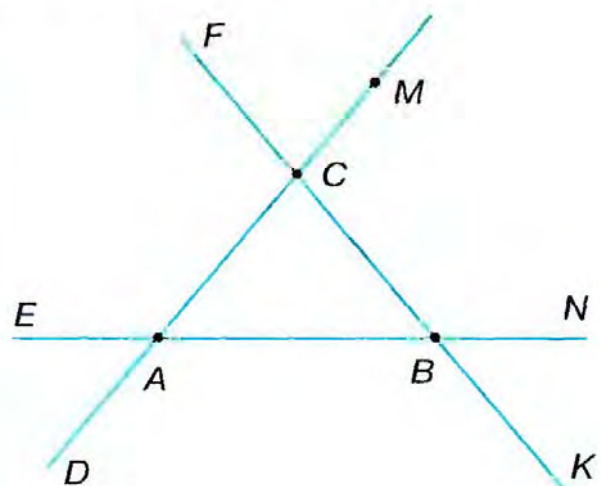


Мал. 58

- 2'. На малюнку 58 зображено промені зі спільним початком. Запишіть кути:
 - 1) зі стороною OD ;
 - 2) між сторонами яких проходить промінь OD ;
 - 3) зі стороною OB ;
 - 4) між сторонами яких проходить промінь OB .
- 3'. Побудуйте кут, градусна міра якого дорівнює:
 - 1) $40^\circ 30'$;
 - 2) 65° ;
 - 3) $150^\circ 20'$.
- 4'. Накресліть гострий і тупий кути. Знайдіть їх градусну міру.
- 5'. У зошиті побудуйте за клітинками кути, зображені на малюнку 59.



Мал. 59



Мал. 60

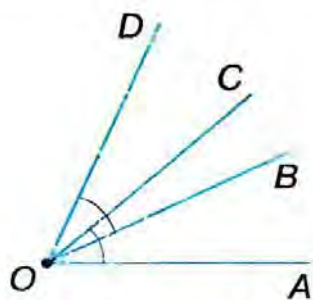
- 6°. Побудуйте кут, що дорівнює 80° . Користуючись транспортером і лінійкою, проведіть бісектрису цього кута.
- 7°. Накресліть гострий кут AOB . За допомогою транспортира і лінійки проведіть промінь OC так, щоб промінь OB був бісектрисою кута AOC .
- 8°. Скільки зображено кутів на малюнку 60:
 1) з вершиною A , що не є розгорнутими;
 2) з вершиною B , що є розгорнутими;
 3) з вершиною C ?
- 9°. Два кути мають спільну сторону. Чи спільна у них вершина? Відповідь поясніть.
- 10°. Два кути мають спільну вершину. Чи мають вони спільну сторону? Відповідь поясніть.
- 11°. Побудуйте кут ABC і два промені BM і BN , що проходять між його сторонами. Запишіть кути, які при цьому утворилися.
- 12°. Градусні міри кутів A , B , C відповідно дорівнюють:
 1) 40° , $39^\circ 59'$, $40^\circ 1'$; 2) $50'$, 50° , $500'$; 3) $0,5^\circ$, $30'$, 3° .
 Порівняйте дані кути.
- 13°. Промінь OC проходить між сторонами кута AOB . Знайдіть:
 1) кут AOB , якщо $\angle AOC = 23^\circ$, $\angle BOC = 47^\circ$;
 2) кут AOC , якщо $\angle AOB = 82^\circ$, $\angle BOC = 41^\circ$.
- 14°. З вершини розгорнутого кута MON проведено промінь OF . Знайдіть кут MOF , якщо $\angle NOF = 25^\circ$.
- 15°. Промінь, що проходить між сторонами кута α , розбиває його на два кути β і γ . За даними, наведеними в таблиці 4, складіть рівняння та знайдіть градусні міри даних кутів.

Таблиця 4

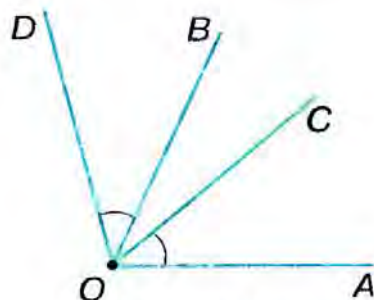
α	90°	n°	120°	n°
β	$2n^\circ$	50°	n°	$\frac{n^\circ}{3}$
γ	n°	$\frac{n^\circ}{2}$	$n^\circ + 40^\circ$	120°

- 16°. Чи проходить промінь OC між сторонами кута AOB , якщо:
 1) $\angle AOC = 45^\circ$, $\angle BOC = 35^\circ$, $\angle AOB = 10^\circ$;
 2) $\angle AOC = 23^\circ$, $\angle BOC = 56^\circ$, $\angle AOB = 79^\circ$;
 3) $\angle AOC = 92^\circ$, $\angle BOC = 43^\circ$, $\angle AOB = 49^\circ$?
- 17°. На прямій AB позначено точку C , яка лежить між точками A і B . Скільки кутів даної градусної міри можна відкласти:
 1) від променя CA в один бік від нього;
 2) від доповняльних променів з початком у точці C в один бік від них?
 Відповіді поясніть.

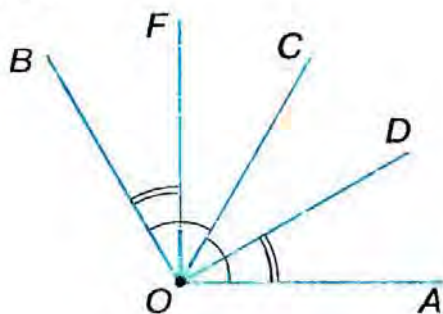
- 18.** OC — бісектриса кута AOB . Знайдіть:
 1) кут AOB , якщо $\angle AOC = 36^\circ$; 2) кут BOC , якщо $\angle AOB = 174^\circ$;
 3) кут AOB , якщо $\angle BOC = 65^\circ$; 4) кут AOC , якщо $\angle AOB = 82^\circ$.
 Який із даних кутів є гострим? Прямим? Тупим?
- 19.** Проведіть три прямі, що перетинаються в одній точці. Скільки розгорнутих кутів утворилося? Запишіть їх.
- 20.** Позначте точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Накресліть кут ABC . Чи може він бути розгорнутим?
- 21.** Промінь OC проходить між сторонами кута AOB . Знайдіть:
 1) кут BOC , якщо $\angle AOB = 62^\circ$, а $\angle AOC$ на 20° менший від $\angle BOC$;
 2) кути AOC і BOC , якщо $\angle AOB = 80^\circ$, а $\angle AOC$ на 50° більший за $\angle BOC$.
- 22.** З вершини розгорнутого кута AOB проведено в один бік два промені OC і OD . Знайдіть:
 1) кут COD , якщо $\angle AOC = 60^\circ$, $\angle BOD = 70^\circ$;
 2) кут AOC , якщо $\angle COD = 41^\circ$, $\angle BOD = 69^\circ$;
 3) кут COD , якщо $\angle AOD = 110^\circ$, $\angle BOC = 130^\circ$.
- 23.** Від променя OA в один бік відкладіть $\angle AOC = 31^\circ$, $\angle AOD = 46^\circ$, $\angle AOB = 85^\circ$. Знайдіть: 1) $\angle BOD$; 2) $\angle BOC$; 3) $\angle COD$.
- 24.** Два кути, градусна міра яких дорівнює 40° і 50° , мають спільну сторону. Який кут можуть утворювати інші їх сторони?
- 25.** Кути AOB і BOC мають спільну сторону OB . Знайдіть кут AOC , якщо $\angle AOB = 45^\circ$, $\angle BOC = 60^\circ$. Для кожного з можливих випадків зробіть малюнок.
- 26.** Накресліть кут AOB і промені OE і OF , що проходять між його сторонами, так, щоб $\angle AOB = 120^\circ$, $\angle AOE = 25^\circ$, $\angle BOF = 45^\circ$. Знайдіть $\angle EOF$.
- 27.** Промінь OK — бісектриса кута MON , що не є розгорнутим. Чи може кут $МОК$ бути: 1) прямим; 2) гострим; 3) тупим?
- 28.** На малюнках 61, 62 $\angle AOC = \angle BOD$. Обґрунтуйте, що $\angle AOB = \angle COD$.
- 29.** OC — бісектриса кута AOB (мал. 63), $\angle AOD = \angle FOB$. Обґрунтуйте, що промінь OC є бісектрисою кута DOF .
- 30.** $\angle DOB = \angle AOF$, $\angle DOC = \angle COF$ (мал. 64). Обґрунтуйте, що промінь OC є бісектрисою кута AOB .
- 31.** За допомогою транспортира поділіть на три рівні кути: 1) прямий кут; 2) розгорнутий кут. Знайдіть кут між бісектрисами крайніх кутів.
- 32.** Промінь OC проходить між сторонами прямого кута AOB , причому $\angle AOC = 30^\circ$. Знайдіть кути, що утворює бісектриса OK кута BOC із сторонами прямого кута AOB .
- 33.** Промінь OK проходить між сторонами кута MON , причому $\angle МОК = 46^\circ$, $\angle NOK = 100^\circ$. Знайдіть кут між бісектрисами кутів $МОК$ і NOK .
- 34.** Промінь OK проходить між сторонами кута NOM . Знайдіть кути NOK і $МОК$, якщо $\angle NOM = 60^\circ$, а градусні міри кутів NOK і $МОК$ відносяться, як 1 : 5.



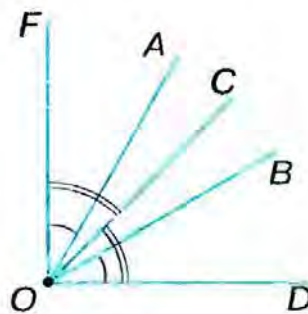
Мал. 61



Мал. 62



Мал. 63

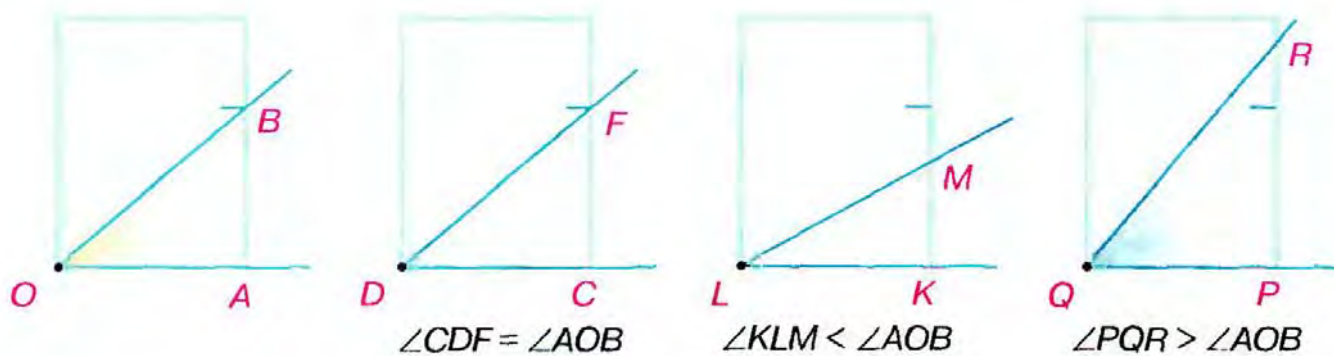


Мал. 64

- 35*. Між сторонами кута AOB проведено промені OC і OD . Знайдіть кут AOC , якщо $\angle COB = 55^\circ$, $\angle AOD = 80^\circ$, $\angle DOB = 33^\circ$.
- 36*. Кут AOB дорівнює 120° . Промінь OC проходить між сторонами цього кута і утворює зі стороною OA кут 80° . Знайдіть кут між променем OC і бісектрисою кута AOB .
- 37*. Промені, що проходять між сторонами кута α , розбивають його на 2; 4; 6; ...; $2n$ рівних кутів. Чому дорівнює кут між бісектрисами сусідніх кутів, якщо: 1) $\alpha = 180^\circ$; 2) $\alpha = 90^\circ$; 3) $\alpha = 120^\circ$; 4) $\alpha = 60^\circ$?
- 38*. Проведіть пряму AB і позначте на ній точку O . Відкладіть від променя OA в один бік $\angle AOC = 120^\circ$, а в другий бік — $\angle AOD = 140^\circ$.
- 1) Який із променів — OA чи OB — проходить між сторонами кута COD ?
 - 2) Знайдіть градусну міру кута COD .

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 39°. Північний вітер змінився на північно-східний. Який кут повороту вітру?
- 40°. Автомобільна дорога Київ — Одеса проходить через місто Умань. Вважати- мемо, що всі три міста розташовані на одній прямій. Поясніть, до яких міст можуть прямувати два автомобілі, якщо вони виїхали з Умані:
- 1) у протилежних напрямках; 2) в одному напрямку.
- Зробіть малюнок.
41. Туристи пройшли від базового табору в напрямку на північ 4 км і повернули на схід. Пройшовши за цим напрямком 1 км, вони пройшли на північ ще 2,5 км. Накресліть їхній шлях на плані в масштабі 1 км в 1 см. За допомогою лінійки з'ясуйте, на якій відстані від базового табору вони були, пройшовши: 1) 5 км, 2) 7,5 км.



Мал. 65

42. На малюнку 65 зображено, як порівнюють кути за допомогою аркуша паперу. Поясніть, як це роблять.
- 43*. Котра тепер година, якщо стрілки годинника утворюють кут 105° , а хвилинна стрілка показує на цифру 6?



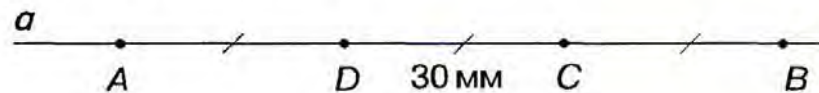
ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 1

✓ КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Поясніть, що таке відрізок; промінь; доповняльні промені.
2. Що таке кут? Бісектриса кута?
3. Який кут називається гострим? Прямим? Тупим? Розгорнутим?
4. В яких одиницях вимірюють відрізки? Кути?
5. Які відрізки (кути) називаються рівними?
6. Сформулюйте властивості: розміщення точок на прямій; вимірювання відрізків (кутів); відкладання відрізків (кутів).
7. Що називається відстанню між двома точками?

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

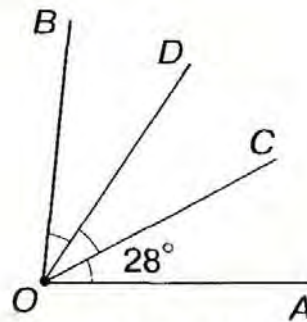
- 1° За даними на малюнку 66 знайдіть відстань між точками A і B .
Яке із співвідношень правильне?



Мал. 66

- А. $AB = 90$ см. Б. $AB < 10$ см. В. $AB > 30$ см. Г. $AB = 60$ мм.

- 2° За даними на малюнку 67 знайдіть градусну міру кута AOB .
Яке із співвідношень правильне?



Мал. 67

- А. $\angle AOB = 90^\circ$. Б. $\angle AOB = 56^\circ$. В. $\angle AOB > 90^\circ$. Г. $\angle AOB < 90^\circ$.

- 3° Бісектриса OC кута AOB утворює з його стороною OB кут 75° .
Чому дорівнює кут AOC ?

- А. $32^\circ 30'$. Б. 75° . В. 150° . Г. 25° .

- 4 Точка M – внутрішня точка відрізка AB , причому середина цього відрізка лежить між точками A і M . Яке із співвідношень правильне?

- А. $\frac{AM}{MB} = 1$. Б. $\frac{AM}{MB} = 0$. В. $\frac{AM}{MB} > 1$. Г. $\frac{AM}{MB} < 1$.

- 5* Знайдіть кути AOC і COB , якщо їх сторони OA і OB є доповняльними променями і $\angle AOC = 0,5 \angle COB$.

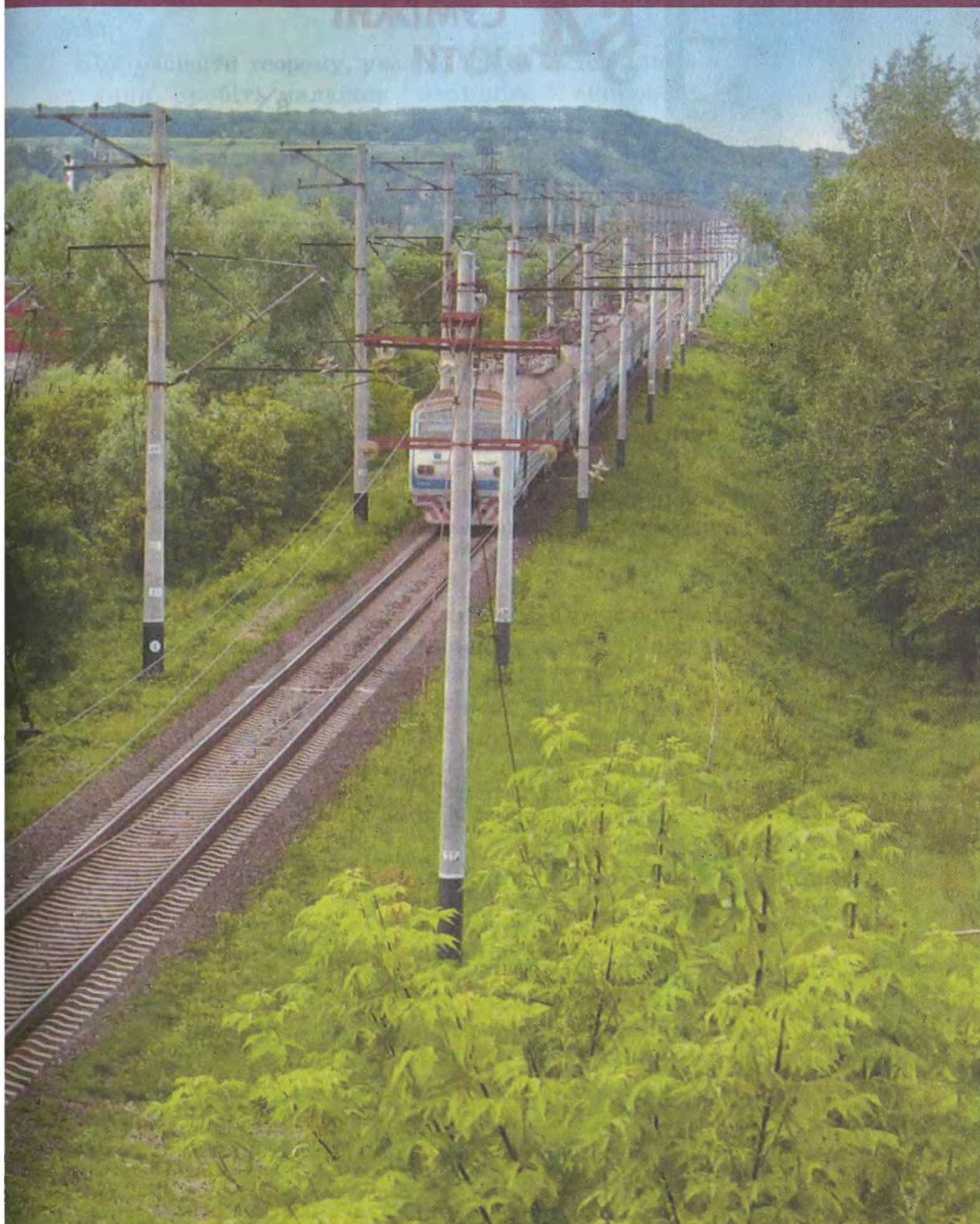
- А. 110° і 110° . Б. 180° і 90° . В. 48° і 96° . Г. 60° і 120° .

**У розділі
дізнаєтесь:**

- ▶ що таке аксіома, теорема, ознака;
- ▶ про суміжні та вертикальні кути, їх властивості;
- ▶ про взаємне розміщення прямих та як зобразити паралельні та перпендикулярні прямі за допомогою лінійки і косинця;
- ▶ як установити, чи паралельні дві прямі, і які властивості паралельних прямих




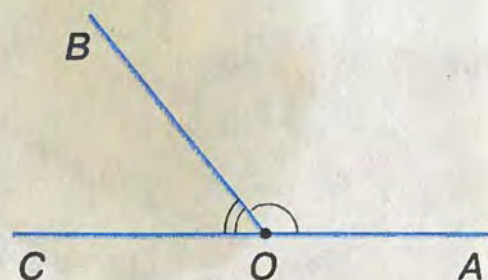
ОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ





§4. СУМІЖНІ КУТИ

 Побудуємо кут $\angle AOB$ і проведемо доповняльний промінь до однієї з його сторін, наприклад OC (мал. 68). Утворилося два кути – $\angle AOB$ і $\angle COB$. У них сторона OB – спільна, а сторони OA і OC – доповняльні промені. Такі кути є суміжними.



Мал. 68



Два кути називаються **суміжними**, якщо в них одна сторона спільна, а дві інші сторони є доповняльними променями.

? Чи можуть бути суміжними три кути? Не можуть, бо за означенням – це два кути.

Крім означень, у геометрії є твердження, істинність яких встановлюється міркуваннями – доведеннями. Такі твердження називаються *теоремами*.



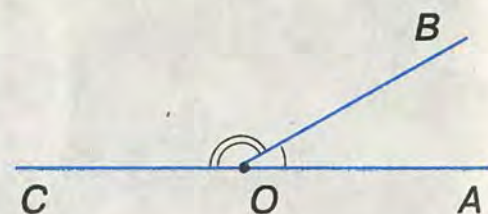
Теорема (про суму суміжних кутів)
Сума суміжних кутів дорівнює 180° .

Дано: $\angle AOB$ і $\angle COB$ – суміжні (мал. 69).

Довести: $\angle AOB + \angle COB = 180^\circ$.

Доведення. Сторони OA і OC суміжних кутів $\angle AOB$ і $\angle COB$ – доповняльні промені, тому кут $\angle AOC$ – розгорнутий. Отже, $\angle AOC = 180^\circ$.

Промінь OB проходить між сторонами розгорнутого кута $\angle AOC$, тому $\angle AOB + \angle COB = \angle AOC = 180^\circ$.



Мал. 69



Формулювання теореми містить *умову* (те, що відоме – дано) і *вимогу* (те, що треба довести). Формулюючи теореми, часто вживають слова «якщо» і «то». Наприклад, теорему про суму суміжних кутів можна сформулювати так: «Якщо два кути суміжні, то їх сума дорівнює 180° ». Умова цієї теореми міститься між словами «якщо» і «то» (два кути суміжні), а її вимога – після слова «то» (їх сума дорівнює 180°).

Під час доведення спираються на означення, аксіоми, а також уже доведені раніше теореми.

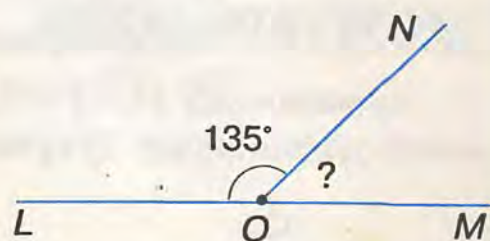
? Що таке аксіома? Найбільш очевидні властивості найпростіших гео-

метричних фігур вважають істинними твердженнями і не доводять їх. Такі твердження називають *аксіомами*. Наприклад, аксіомами є відомі вам властивості розміщення точок на прямій, вимірювання відрізків і кутів.

Д Щоб засвоїти теорему, уважно прочитайте і запам'ятайте її формулювання. Зробіть малюнок і запишіть її скорочено. Прочитайте за підручником доведення, а потім запишіть ланцюжок основних висновків. Спробуйте відтворити цей ланцюжок, не підглядаючи в записи. Якщо ви зробили це без помилок, то ви засвоїли теорему.

Задача. Один із суміжних кутів дорівнює 135° . Яка градусна міра іншого кута?

Розв'язання. Нехай $\angle LON$ і $\angle MON$ — дані суміжні кути (мал. 70) і $\angle LON = 135^\circ$. За теоремою про суму суміжних кутів, $\angle LON + \angle MON = 180^\circ$. Звідси $\angle MON = 180^\circ - \angle LON = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$.



Мал. 70

Д Щоб знайти кут, суміжний з даним кутом, відніміть від 180° градусну міру даного кута.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Зародження геометрії як науки датують VI ст. до н. е. і пов'язують із дослідженнями вчених Стародавньої Греції, зокрема наукової школи Піфагора. Найголовнішим здобутком того часу була розробка основ дедуктивного методу — методу доказових міркувань. Давньогрецькі вчені зрозуміли, що встановити правильність якоїсь властивості геометричної фігури можна лише шляхом доведення. Проте, якщо не мати вихідних істинних тверджень — аксіом, тоді доведення триватиме нескінченно довго. На це вказував ще давньогрецький учений Арістотель (IV ст. до н. е.). Таку систему аксіом, на якій можна було б побудувати дедуктивну геометричну теорію, шукали впродовж багатьох століть. Перший систематичний курс геометрії (він не дійшов до нас) був написаний Гіппократом Хіосським у другій половині V ст. до н. е.

2. Раніше градусну міру прямого кута позначали буквою d (від французького слова *droit* — «прямий»). Це позначення використовували для скороченого запису градусних мір будь-яких кутів. Так, вважалося, що розгорнутий кут дорівнює $2d$, а інші кути подавали у вигляді дробів від d .



Піфагор

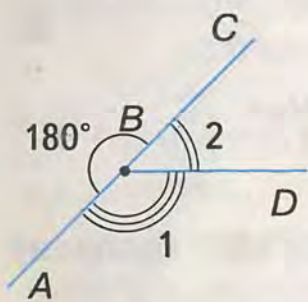
3. Слово «суміжний» означає «такий, що межує з чим-небудь; прилеглий до чогось; розміщений поруч». У побуті кажуть, наприклад, про суміжні кімнати. Вони мають спільну стіну. Спільну межу мають подвір'я в сільській місцевості або дачному селищі. Хоча тоді частіше скажуть «сусідні подвір'я».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

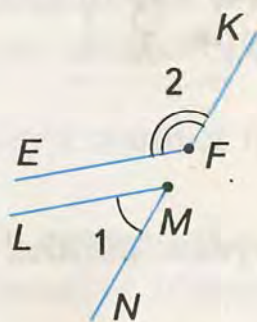
1. Які кути називаються суміжними?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про суму суміжних кутів.
3. Поясніть, що таке теорема, аксіома. Наведіть приклади.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

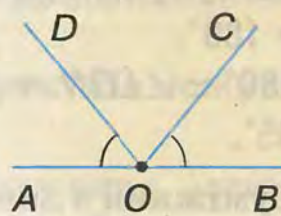
- 1'. На малюнках 71, 72 зображено кути 1 і 2. Запишіть:
1) суміжні кути; 2) кути, що не є суміжними.



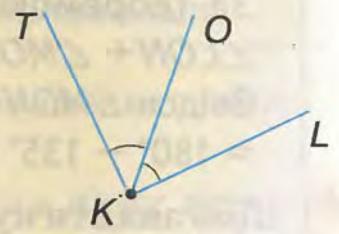
Мал. 71



Мал. 72

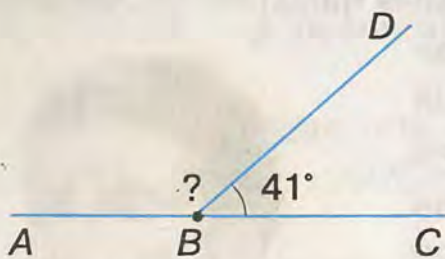


Мал. 73

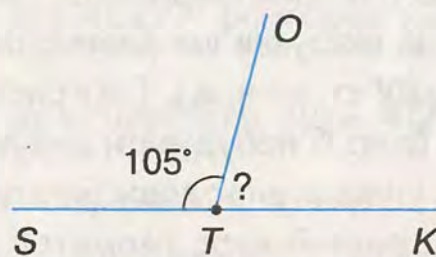


Мал. 74

- 2'. На малюнках 73, 74 позначені дужками кути не є суміжними. Чому?
- 3'. Побудуйте довільний кут і кут, суміжний з даним. Виміряйте побудовані кути.
- 4'. Накресліть за клітинками кут: 1) 45° ; 2) 90° .
Побудуйте два суміжні з ним кути і виміряйте їх.
- 5'. На малюнках 75, 76 зображено суміжні кути. Знайдіть невідомий кут.



Мал. 75



Мал. 76

- 6'. Проведіть пряму AB . Позначте на ній точку O , що лежить між точками A і B . Проведіть промінь OC так, щоб один із суміжних кутів дорівнював:
1) 35° ; 2) 145° ; 3) 130° ; 4) 50° .
- 7'. Знайдіть кут, суміжний із кутом:
1) 137° ; 2) 54° ; 3) 162° ; 4) 23° .

8°. Кути α і β – суміжні. Накресліть у зошиті таблицю 5 і заповніть її.

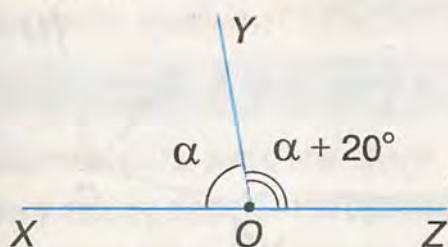
Таблиця 5

α	10°		30°		50°		70°	
β	170°	20°		40°		60°		80°

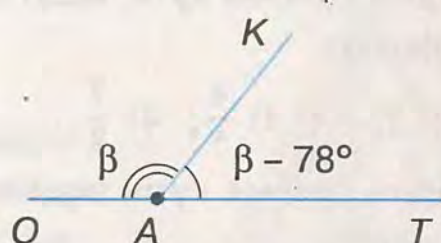
За даними таблиці 5 дайте відповіді на запитання:

- на скільки градусів кут α менший від кута β , якщо $\alpha < 90^\circ$;
- на скільки градусів кут α більший за кут β , якщо $\alpha > 90^\circ$;
- на скільки градусів кут α більший за кут β , якщо $\beta < 90^\circ$;
- на скільки градусів кут α менший від кута β , якщо $\beta > 90^\circ$?

9°. За даними, наведеними на малюнках 77, 78, знайдіть градусні міри суміжних кутів.



Мал. 77

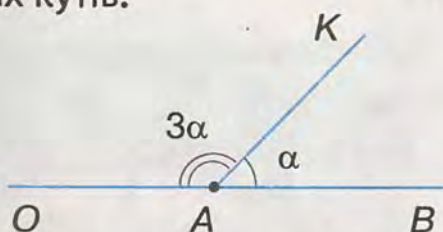


Мал. 78

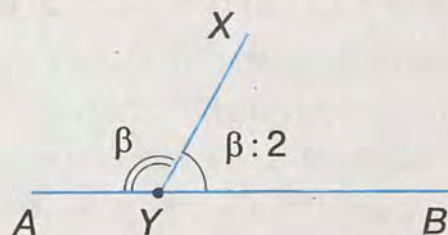
10°. Знайдіть суміжні кути, якщо:

- гострий кут на 30° менший від суміжного з ним тупого кута;
- тупий кут на 56° більший за суміжний з ним гострий кут;
- гострий кут на 42° менший від суміжного з ним тупого кута.

11°. За даними, наведеними на малюнках 79, 80, знайдіть градусні міри суміжних кутів.



Мал. 79



Мал. 80

12°. Знайдіть суміжні кути, якщо:

- гострий кут у 4 рази менший від суміжного з ним тупого кута;
- тупий кут удвічі більший за суміжний з ним гострий кут;
- тупий кут у 8 разів більший за суміжний з ним гострий кут.

13°. Чи можуть обидва суміжні кути бути:

- гострими; 2) прямими; 3) тупими?

Висновки обґрунтуйте.

14. Чи можна стверджувати, що два кути суміжні, якщо їх сума дорівнює 180° ?

15. Якщо один із суміжних кутів гострий, то другий кут тупий. Доведіть.

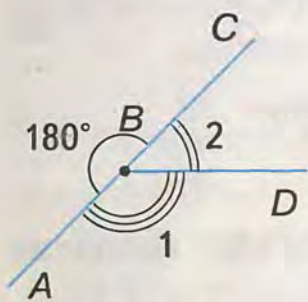
3. Слово «суміжний» означає «такий, що межує з чим-небудь; прилеглий до чогось; розміщений поруч». У побуті кажуть, наприклад, про суміжні кімнати. Вони мають спільну стіну. Спільну межу мають подвір'я в сільській місцевості або дачному селищі. Хоча тоді частіше скажуть «сусідні подвір'я».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

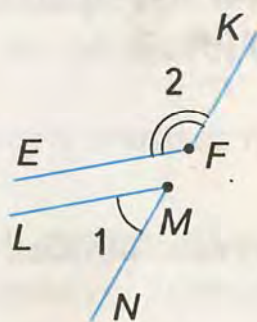
1. Які кути називаються суміжними?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про суму суміжних кутів.
3. Поясніть, що таке теорема, аксіома. Наведіть приклади.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

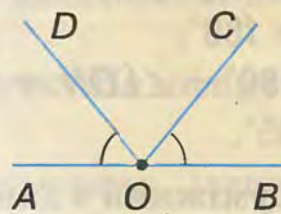
- 1'. На малюнках 71, 72 зображено кути 1 і 2. Запишіть:
1) суміжні кути; 2) кути, що не є суміжними.



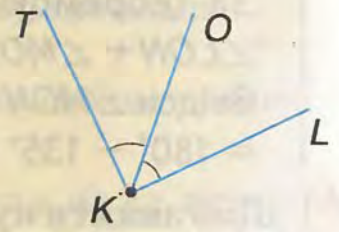
Мал. 71



Мал. 72

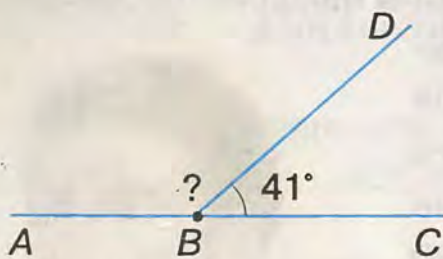


Мал. 73

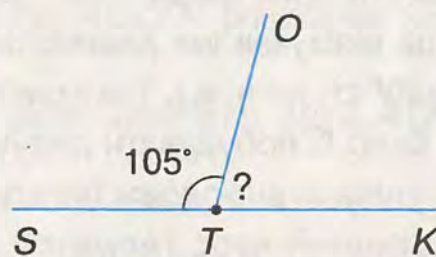


Мал. 74

- 2'. На малюнках 73, 74 позначені дужками кути не є суміжними. Чому?
- 3'. Побудуйте довільний кут і кут, суміжний з даним. Виміряйте побудовані кути.
- 4'. Накресліть за клітинками кут: 1) 45° ; 2) 90° .
Побудуйте два суміжні з ним кути і виміряйте їх.
- 5'. На малюнках 75, 76 зображено суміжні кути. Знайдіть невідомий кут.



Мал. 75



Мал. 76

- 6'. Проведіть пряму AB . Позначте на ній точку O , що лежить між точками A і B . Проведіть промінь OC так, щоб один із суміжних кутів дорівнював:
1) 35° ; 2) 145° ; 3) 130° ; 4) 50° .
- 7'. Знайдіть кут, суміжний із кутом:
1) 137° ; 2) 54° ; 3) 162° ; 4) 23° .

8°. Кути α і β – суміжні. Накресліть у зошиті таблицю 5 і заповніть її.

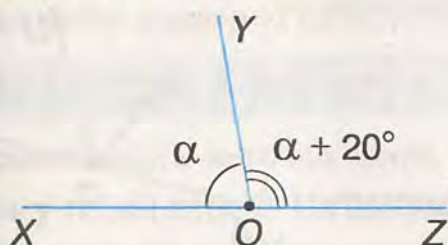
Таблиця 5

α	10°		30°		50°		70°	
β	170°	20°		40°		60°		80°

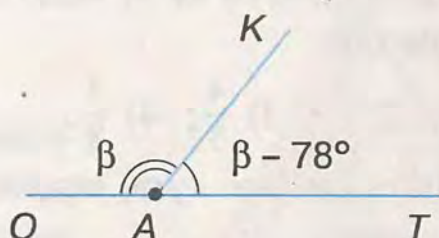
За даними таблиці 5 дайте відповіді на запитання:

- на скільки градусів кут α менший від кута β , якщо $\alpha < 90^\circ$;
- на скільки градусів кут α більший за кут β , якщо $\alpha > 90^\circ$;
- на скільки градусів кут α більший за кут β , якщо $\beta < 90^\circ$;
- на скільки градусів кут α менший від кута β , якщо $\beta > 90^\circ$?

9°. За даними, наведеними на малюнках 77, 78, знайдіть градусні міри суміжних кутів.



Мал. 77

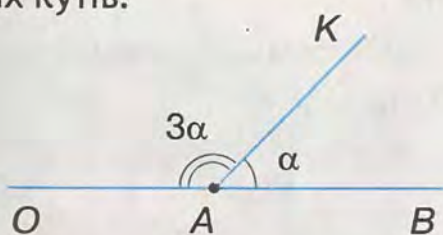


Мал. 78

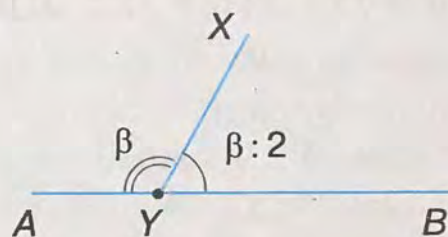
10°. Знайдіть суміжні кути, якщо:

- гострий кут на 30° менший від суміжного з ним тупого кута;
- тупий кут на 56° більший за суміжний з ним гострий кут;
- гострий кут на 42° менший від суміжного з ним тупого кута.

11°. За даними, наведеними на малюнках 79, 80, знайдіть градусні міри суміжних кутів.



Мал. 79



Мал. 80

12°. Знайдіть суміжні кути, якщо:

- гострий кут у 4 рази менший від суміжного з ним тупого кута;
- тупий кут удвічі більший за суміжний з ним гострий кут;
- тупий кут у 8 разів більший за суміжний з ним гострий кут.

13°. Чи можуть обидва суміжні кути бути:

- гострими; 2) прямими; 3) тупими?

Висновки обґрунтуйте.

14. Чи можна стверджувати, що два кути суміжні, якщо їх сума дорівнює 180° ?

15. Якщо один із суміжних кутів гострий, то другий кут тупий. Доведіть.

16. Якщо один із суміжних кутів тупий, то другий кут гострий. Доведіть.
17. Якщо два суміжні кути рівні, то вони прямі. Доведіть.
18. Побудуйте суміжні кути так, щоб один із них мав градусну міру:
- 1) меншу від 45° , але більшу за 40° ;
 - 2) більшу за 90° , але меншу від 100° ;
 - 3) яка дорівнює двом третинам розгорнутого кута.

19. Знайдіть суміжні кути, якщо їх різниця дорівнює:
- 1) 30° ; 2) 105° ; 3) 67° ; 4) 0° .

20. Знайдіть суміжні кути, якщо їх частка дорівнює:
- 1) 9; 2) 11; 3) 1; 4) 17.

21. Знайдіть суміжні кути, якщо вони відносяться, як:
- 1) 1 : 9; 2) 11 : 1; 3) 1 : 1; 4) 1 : 17.

22. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них становить від другого:

- 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{3}{2}$; 3) $\frac{4}{5}$; 4) $\frac{7}{8}$.

23. Знайдіть суміжні кути, якщо один із них становить від іншого:

- 1) 20%; 2) 60%; 3) 80%; 4) 25%.

24. На малюнку 81 точки A , B і C лежать на одній прямій. Запишіть суміжні кути.

25. Якщо два кути рівні, то суміжні з ними кути також рівні. Доведіть.

26. Бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут. Доведіть.

27. Бісектриса одного із суміжних кутів утворює з їх спільною стороною кут α . Знайдіть суміжні кути, якщо:

- 1) $\alpha = 15^\circ$; 2) $\alpha = 75^\circ$; 3) $\alpha = 60^\circ$; 4) $\alpha = 45^\circ$.

- 28*. Позначте точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Побудуйте суміжні кути, сторони яких проходять через ці точки, причому:

- 1) точка A є їх вершиною, а точка C лежить на спільній стороні;
- 2) промінь BC є їх спільною стороною;
- 3) відрізок AC не лежить на спільній стороні, але вершина міститься в його середині.

- 29*. Який із суміжних кутів — α чи β — є гострим, якщо:

- 1) $\frac{\alpha}{\beta} < 1$; 2) $\frac{\alpha}{\beta} > 1$; 3) $\frac{\beta}{\alpha} < 1$; 4) $\frac{\beta}{\alpha} > 1$?

- 30*. В яких межах може бути кут α , суміжний з кутом β , якщо:

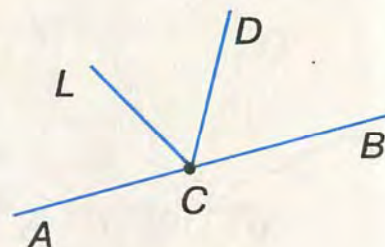
- 1) $20^\circ \leq \beta \leq 30^\circ$; 2) $120^\circ \leq \beta \leq 130^\circ$; 3) $38^\circ \leq \beta \leq 45^\circ$; 4) $175^\circ \leq \beta \leq 179^\circ$?

- 31*. Знайдіть суміжні кути, якщо їх різниця менша від їх суми на:

- 1) 20° ; 2) 105° ; 3) 49° ; 4) 123° .

- 32*. Знайдіть суміжні кути, якщо їх різниця відноситься до їх суми, як:

- 1) 2 : 3; 2) 3 : 4; 3) 4 : 5; 4) 5 : 6.

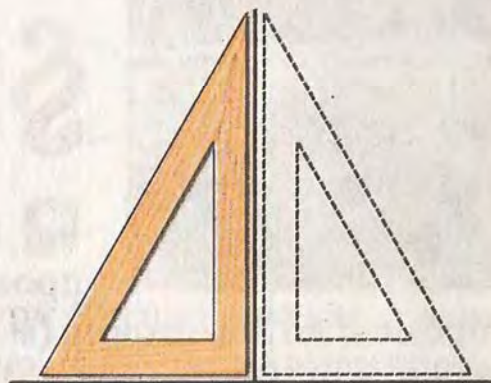


Мал. 81

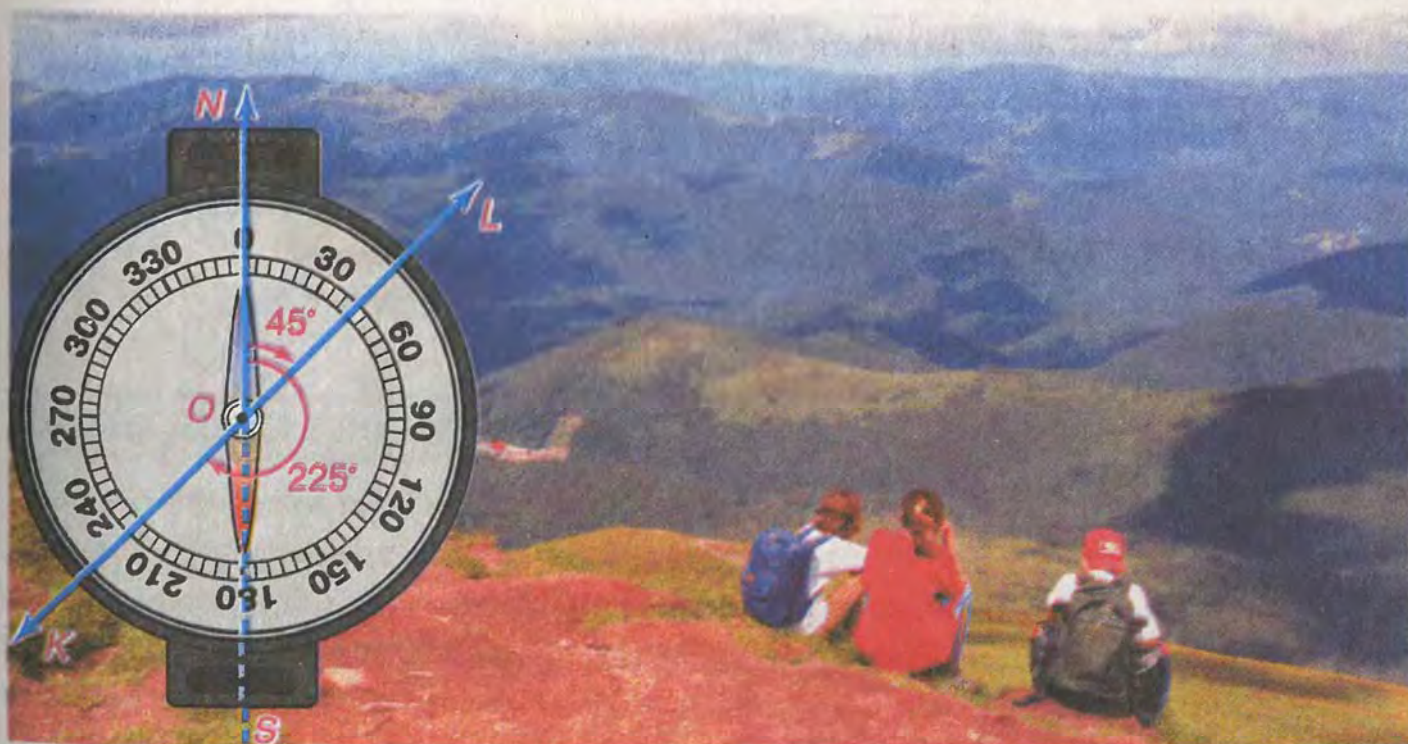
- 33*. Знайдіть суміжні кути, якщо один із суміжних кутів на 30° більший від:
- 1) різниці цих кутів;
 - 2) середнього арифметичного цих кутів;
 - 3) 25% суми цих кутів;
 - 4) потроєної піврізниці цих кутів.
- 34*. Чому дорівнює кут, якщо два суміжні з ним кути становлять в сумі:
- 1) 80° ; 2) 220° ; 3) 120° ; 4) 300° ?
- 35*. Кути AOB і BOC – суміжні. Промінь ON – бісектриса кута BOC , а промінь OM проходить між сторонами кута AOC . Доведіть, що промінь OM є бісектрисою $\angle AOC$, якщо $\angle MON$ – прямий.
- 36*. Якщо сума двох кутів зі спільною вершиною і спільною стороною дорівнює 180° , то ці кути суміжні. Чи правильне дане твердження?
- 37*. Бісектриси двох кутів утворюють прямий кут. Чи можна стверджувати, що дані кути суміжні? Поясніть відповідь.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

38. Правильність виготовлення косинця перевіряють у такий спосіб. На аркуші паперу під лінійку проводять пряму. Косинець прикладають до прямої і будують другу сторону прямого кута (мал. 82). Потім косинець перевертають і прикладають до прямої так, як показано на малюнку. Якщо побудована сторона прямого кута не відхиляється від ребра косинця, то косинець правильний. Поясніть, чому це так.
39. У туристичному поході користуються *компасом* (мал. 83) – приладом,



Мал. 82



Мал. 83

стрілка якого показує напрямок на північ, а нанесені поділки допомагають визначати кут між цим напрямком і напрямком руху. Такий кут, якщо його відкласти від напрямку на північ за стрілкою годинника, називають *азимутом*. Азимут напрямку визначають у межах від 0° до 360° .


На малюнку 83 ви бачите: ON — напрямок на північ; OL і OK — напрямки руху; азимут напрямку OL становить 45° ; азимут напрямку OK дорівнює 225° . Як визначити азимут, більший за 180° , наприклад азимут напрямку OK ?

За картою України (див. мал. 24) визначте азимут напрямку:

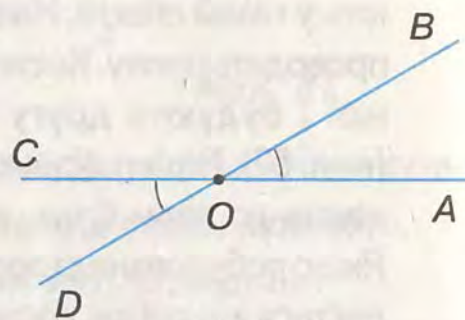
- 1) Київ — Чернігів; 2) Київ — Полтава; 3) Київ — Сімферополь; 4) Київ — Одеса;
- 5) Київ — Вінниця; 6) Київ — Житомир; 7) Київ — Тернопіль; 8) Київ — Луцьк.




§5. ВЕРТИКАЛЬНІ КУТИ

 Побудуємо кут AOB і проведемо доповняльні


промені до його сторін (мал. 84). Дістанемо два кути — AOB і COD зі спільною вершиною O . У них сторони OA і OC доповнюють одна одну до прямої AC , а сторони OB і OD — до прямої BD . Такі кути є вертикальними.

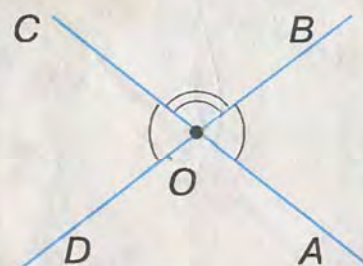


Мал. 84

 Два кути називаються **вертикальними**, якщо сторони одного кута є доповняльними променями сторін іншого.

? Чи можуть бути вертикальними три кути? Не можуть, бо за означенням — це два кути.

 **Теорема (про вертикальні кути).**
Вертикальні кути рівні.



Мал. 85

Дано: $\angle AOB$ і $\angle COD$ — вертикальні (мал. 85).

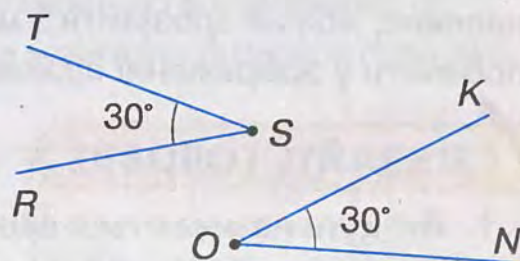
Довести: $\angle AOB = \angle COD$.

Доведення. Кожний з кутів AOB і COD

суміжний з кутом COB . За теоремою про суміжні кути, $\angle AOB + \angle COB = 180^\circ$ і $\angle COD + \angle COB = 180^\circ$.

Звідси дістанемо: $\angle AOB = \angle COD$.

? Якщо два кути рівні, то чи вертикальні вони? Не обов'язково. Наприклад, на малюнку 86 кути NOK і RST рівні, але вони не вертикальні.

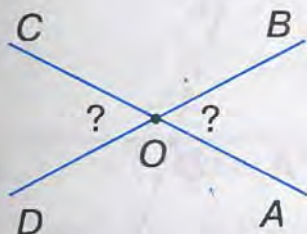


Мал. 86

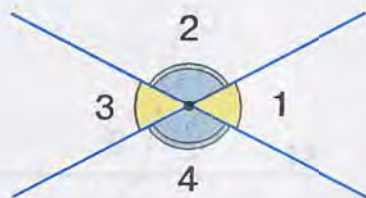
! Щоб спростувати деяке твердження, достатньо навести хоча б один приклад, який задовольняє умову твердження, але суперечить його вимозі.

Задача. Знайдіть вертикальні кути, якщо їх сума дорівнює 110° .

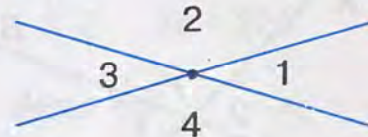
Розв'язання. Нехай $\angle AOB$ і $\angle COD$ — дані вертикальні кути (мал. 87) і $\angle AOB + \angle COD = 110^\circ$. Оскільки вертикальні кути рівні, то $\angle AOB = \angle COD = 110^\circ : 2 = 55^\circ$.



Мал. 87



Мал. 88



Мал. 89

Дві прямі, перетинаючись, утворюють чотири кути зі спільною вершиною (мал. 88). Якщо кути розглядати попарно, можна виділити шість пар відомих вам кутів. Це дві пари вертикальних кутів ($\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$) і чотири пари суміжних кутів ($\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 2$ і $\angle 3$, $\angle 3$ і $\angle 4$, $\angle 4$ і $\angle 1$).

Менший з утворених кутів вважається кутом між прямими, що перетинаються. Якщо це кут α , то кажуть, що дані прямі *перетинаються під кутом α* . Можна також сказати, що α — це *кут між прямими a і b* .

Задача. Дві прямі перетинаються під кутом 30° . Знайдіть три інші кути.

Розв'язання. Нехай $\angle 1 = 30^\circ$ (мал. 89). Тоді $\angle 3 = \angle 1$ як вертикальні, тому $\angle 3 = 30^\circ$. $\angle 2$ і $\angle 1$ — суміжні, тому їх сума дорівнює 180° . Отже, $\angle 2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. $\angle 4 = \angle 2$ як вертикальні, тому $\angle 4 = 150^\circ$.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Слово «вертикальний» (*verticalis*) у перекладі з латинської мови означає «прямовисний», тобто той, що має напрямок виска. Висок — це невеликий предмет на нитці. Його використовують, щоб визначати вертикальний напрямок. Будівельники користуються виском, коли кладуть стіни. Щодо кутів назву «вертикальні»,



Мал. 90



Мал. 91

напевне, можна зрозуміти з малюнків 90, 91. Форму вертикальних кутів можна побачити у зображенні піщого годинника.

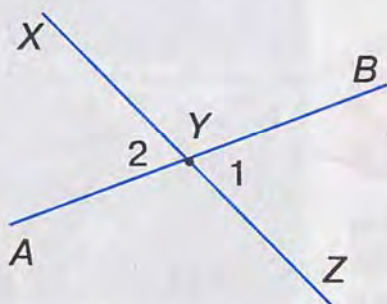
ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Які кути називаються вертикальними?
2. Сформулюйте і доведіть теорему про вертикальні кути.
3. Що таке кут між двома прямими?
4. Які пари кутів утворюються при перетині двох прямих?

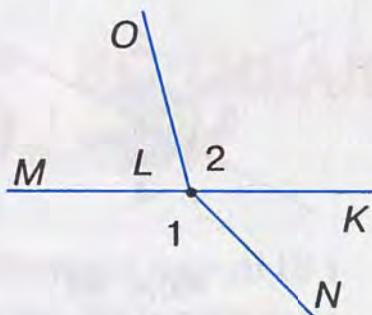
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1'. На малюнках 92, 93 зображено кути 1 і 2. Запишіть:

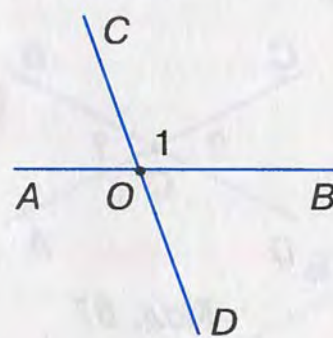
- 1) вертикальні кути;
- 2) кути, що не є вертикальними.



Мал. 92

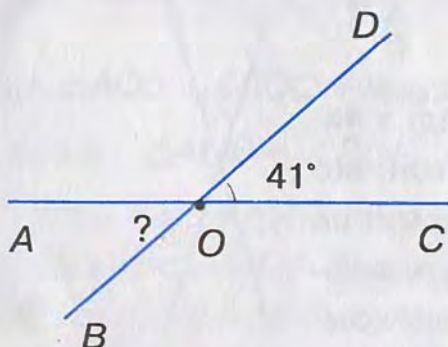


Мал. 93

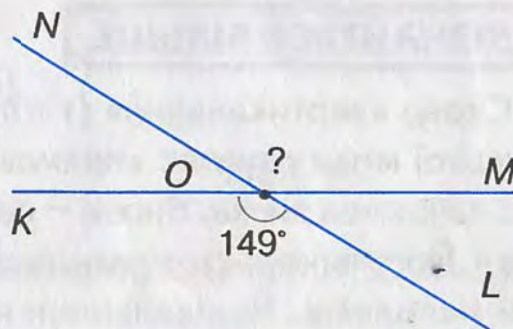


Мал. 94

- 2'. На малюнку 94 прямі AB і CD перетинаються в точці O . Запишіть:
 - 1) кут, вертикальний з кутом 1;
 - 2) кути, суміжні з кутом 1.
- 3'. Побудуйте довільний кут і кут, вертикальний з ним. Виміряйте побудовані кути.
- 4'. Накресліть за клітинками кут, що дорівнює:
 - 1) 45° ; 2) 90° .
 Побудуйте вертикальний з ним кут. Яка його градусна міра?
- 5'. На малюнках 95, 96 зображено вертикальні кути. Знайдіть невідомий кут.
- 6'. Побудуйте дві прямі, що перетинаються під кутом:
 - 1) 75° ; 2) 60° ; 3) 45° ; 4) 30° .



Мал. 95



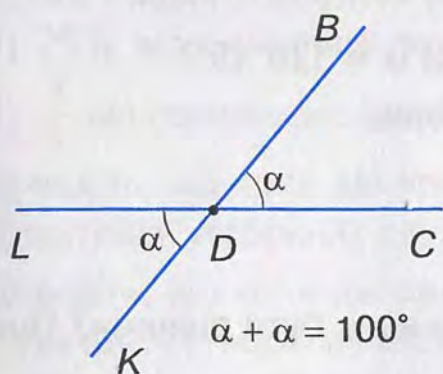
Мал. 96

- 7°. Кути 1 і 2 — вертикальні. Накресліть у зошиті таблицю 6 і заповніть її.
За даними таблиці з'ясуйте, який з кутів можна вважати кутом між прямими.

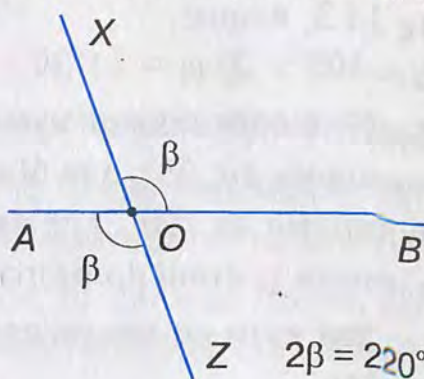
Таблиця 6

$\angle 1$	12°		34°		156°		178°	
$\angle 2$		121°		143°		65°		87°

- 8°. За даними, наведеними на малюнках 97, 98, знайдіть вертикальні кути.

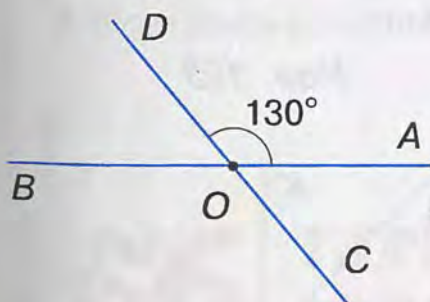


Мал. 97

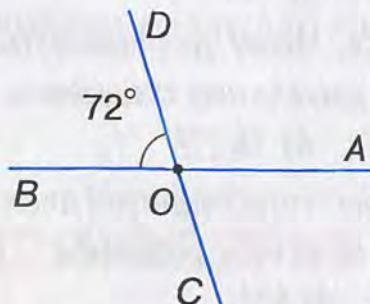


Мал. 98

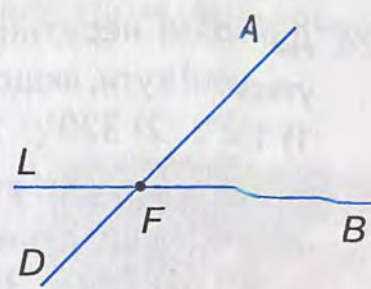
- 9°. Знайдіть вертикальні кути, якщо їх сума дорівнює:
1) 30° ; 2) 211° ; 3) 67° ; 4) 190° .
- 10°. Чи можуть вертикальні кути бути:
1) гострими; 2) тупими; 3) прямими?
- 11°. За даними, наведеними на малюнках 99, 100, знайдіть градусні міри кутів, які утворилися при перетині прямих AB і CD .



Мал. 99



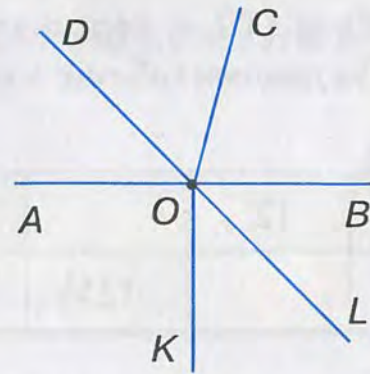
Мал. 100



Мал. 101

- 12°. Дві прямі перетинаються під кутом α . Знайдіть інші три кути, що утворюють дані прямі, якщо: 1) $\alpha = 40^\circ$; 2) $\alpha = 12^\circ$; 3) $\alpha = 25^\circ$; 4) $\alpha = 17^\circ$.
- 13°. При перетині двох прямих утворилися суміжні кути, один з яких більший за інший на: 1) 14° ; 2) 56° ; 3) 38° ; 4) 70° .
Знайдіть чотири кути, що утворюють дані прямі.
- 14°. Запишіть вертикальні і суміжні кути, що утворилися при перетині двох прямих на малюнку 101.
15. Точки A , O , B лежать на одній прямій. Запишіть вертикальні кути, якщо

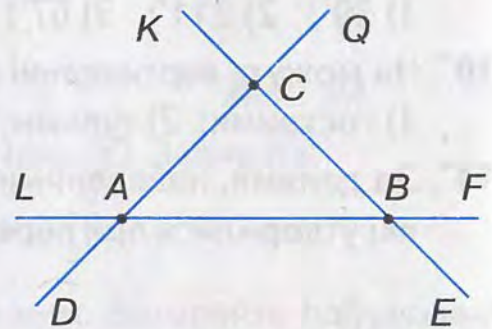
промені OD і OL — доповняльні, а промені OC і OK не доповнюють один одного до прямої (мал. 102).



Мал. 102

16. Чому дорівнюють вертикальні кути, якщо їх сума більша за один із них на:
1) 45° ; 2) 90° ; 3) 109° ; 4) 130° ?
17. Кут 1, суміжний з кутом 2, дорівнює α . Кути 2 і 3 — вертикальні. Чому дорівнює сума кутів 2 і 3, якщо:
1) $\alpha = 105^\circ$; 2) $\alpha = 71^\circ 30'$; 3) $\alpha = 93^\circ 35'$; 4) $\alpha = 120^\circ 45'$?
18. Побудуйте вертикальні кути так, щоб вони були:
1) меншими від 85° , але більшими за 75° ;
2) більшими за 100° , але меншими від 110° ;
3) рівними третині прямого кута.
19. Якщо два кути не вертикальні, то чи можуть вони бути рівними? Поясніть відповідь.

20. Чи можна стверджувати, що два нерівні кути не вертикальні? Поясніть відповідь.
21. Прямі LF , DQ , KE перетинаються в точках A , B і C відповідно (мал. 103). Запишіть вертикальні кути.



Мал. 103

22. Якщо два кути рівні, то вертикальні з ними кути також рівні. Доведіть.

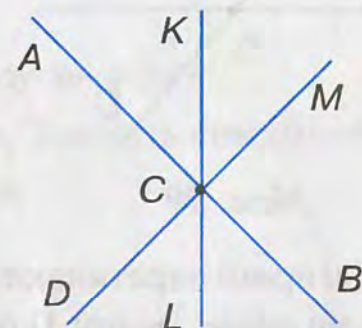
23. На малюнку 104 три прямі перетинаються в точці C . Скільки при цьому утворилося вертикальних кутів і суміжних кутів?

24. Дві прямі перетинаються. Чому дорівнюють утворені кути, якщо сума двох із них становить:
1) 102° ; 2) 320° ; 3) 238° ; 4) 182° ?

25. Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо різниця двох із них дорівнює:
1) 29° ; 2) 115° ; 3) 107° ; 4) 53° .

26. Знайдіть кути, які утворилися при перетині двох прямих, якщо частка двох із них дорівнює:
1) 9; 2) 11; 3) 5; 4) 17.

27. Побудуйте дві прямі, які перетинаються під кутом α так, що суміжний з ним кут дорівнює:
1) 100° ; 2) 92° ; 3) 136° ; 4) 108° .



Мал. 104

- 28*. Знайдіть вертикальні кути, якщо їх сума кратна 9 і лежить у межах:
1) від 55° до 70° ; 2) від 111° до 120° ; 3) від 241° до 249° .

- 29*. Доведіть, що бісектриси вертикальних кутів утворюють розгорнутий кут.

- 30*. Проведіть дві прямі, що перетинаються в точці O . Через цю точку проведіть ще одну пряму. Чи змінилася при цьому кількість вертикальних кутів? А суміжних кутів? Як саме? Як зміниться ця кількість, якщо через точку O провести четверту, п'яту пряму?
- 31*. Під яким кутом перетинаються дві прямі, якщо сума трьох із чотирьох утворених кутів становить:
- 1) сім шостих розгорнутого кута;
 - 2) шістнадцять дев'ятих розгорнутого кута;
 - 3) 25% від суми п'яти розгорнутих кутів;
 - 4) $\frac{8}{3}$ від середнього арифметичного двох із цих кутів, що не є рівними?
- 32*. Доведіть, що коли дві прямі перетинаються, то дві інші прямі, які містять бісектриси утворених суміжних кутів, перетинаються під прямим кутом.
- 33*. Доведіть, що коли дві прямі перетинаються, то дві інші прямі, які містять бісектриси утворених вертикальних кутів, перетинаються під прямим кутом.

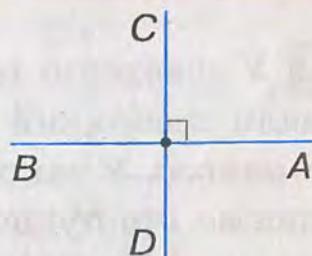
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 34°. Як треба зігнути аркуш паперу, щоб на згинах отримати дві прямі, що перетинаються під прямим кутом? А під кутом 45° ?
35. Який кут утворюють напрямки компаса (*румби*) (див. мал. 83):
- 1) північ і північ-схід;
 - 2) південь і південь-схід;
 - 3) північ-схід і південь-захід?
36. Доведіть, що на компасі бісектриса кута між напрямками «північ» і «схід» та бісектриса кута між напрямками «південь» і «захід» лежать на одній прямій.

§6. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНІ ПРЯМІ

Ви знаєте, що внаслідок перетину двох прямих утворюються чотири кути. Нехай один з кутів прямий (мал. 105). Тоді інші три кути також прямі, оскільки будь-який із них або суміжний з прямим кутом, або вертикальний з ним. У цьому разі говорять, що прямі перетинаються під прямим кутом.

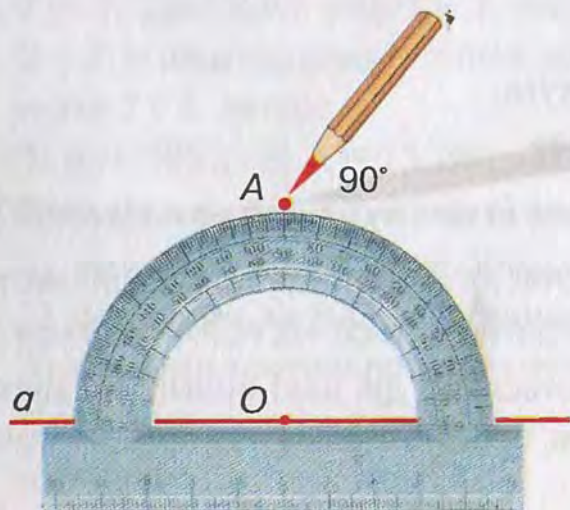
Дві прямі називаються **перпендикулярними**, якщо вони перетинаються під прямим кутом.



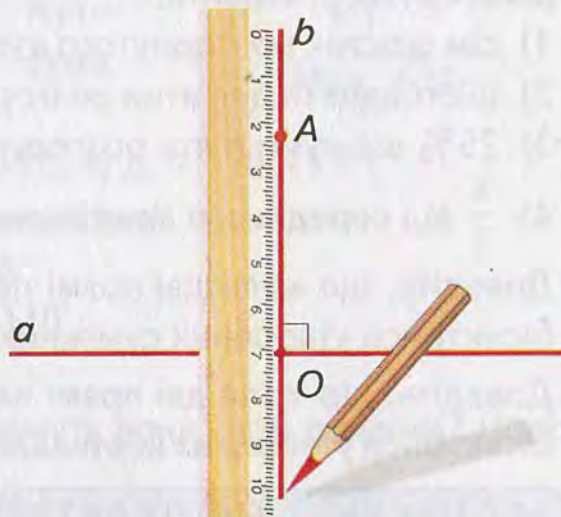
Мал. 105

► Перпендикулярність прямих AB і CD позначають знаком \perp . Записують: $AB \perp CD$ (або $CD \perp AB$) і говорять: «Пряма AB перпендикулярна до прямої CD ».

На малюнках 106, 107 показано, як за допомогою транспортира і лінійки побудувати пряму b , перпендикулярну до прямої a .



Мал. 106



Мал. 107

Теорема (про єдиність перпендикулярної прямої).

Через будь-яку точку на прямій проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

Дано: пряма AB (мал. 108),

$O \in AB$,

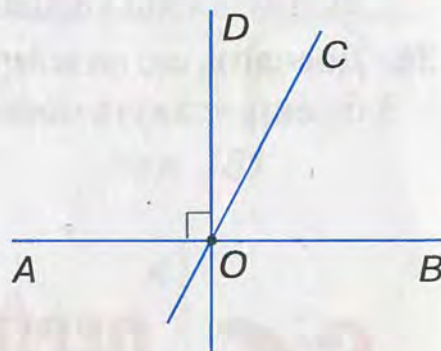
$OD \perp AB$.

Довести: пряма $OD \perp AB$ тільки одна.

Доведення. За умовою, прямі AB і OD перпендикулярні, тому $\angle BOD = 90^\circ$.

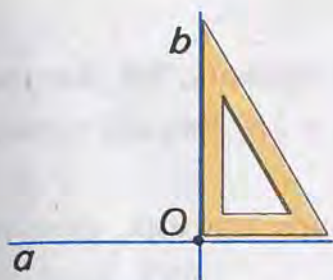
Припустимо, що існує інша пряма, наприклад OC , яка проходить через точку O і перпендикулярна до AB . Тоді дістанемо два кути BOD і BOC , кожний із яких дорівнює 90° .

Але, за аксіомою про відкладання кутів, від променя OB в один бік від нього можна відкласти тільки один кут, що дорівнює 90° . Тому не може бути іншої прямої, крім OD , яка проходить через точку O і перпендикулярна до прямої AB .

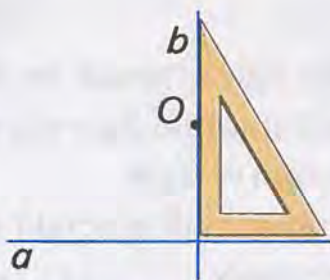


Мал. 108

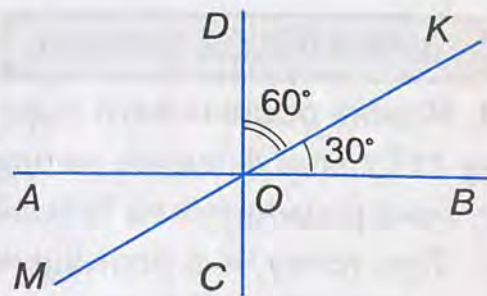
У доведенні теореми про єдиність перпендикулярної прямої застосували особливий хід міркувань. Його називають *доведенням від супротивного*. У такому доведенні є три етапи. На першому етапі формулюємо припущення, протилежне висновку теореми (нехай існує інша пряма, наприклад OC , яка проходить через точку O і перпендикулярна



Мал. 109



Мал. 110



Мал. 111

до AB). На другому етапі доходимо висновку, що суперечить або умові теореми, або одній з аксіом, або доведеній раніше теоремі (отримали суперечність з аксіомою: «Від променя в один бік від нього можна відкласти тільки один кут даної градусної міри»). На третьому етапі доведення робимо висновок, що зроблене припущення неправильне, а правильним є твердження теореми (пряма $OD \perp AB$ тільки одна).

На малюнку 109 показано, як, користуючись кутинцем, через точку на прямій можна провести перпендикулярну до неї пряму.

Виконуючи побудову, показану на малюнку 110, можна наочно переконатися у справедливості такого твердження: **через будь-яку точку, яка не лежить на прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.** Це твердження доведемо у § 8.

Задача. Прямі AB , CD і MK перетинаються в точці O (мал. 111). Кут між прямими AB і MK дорівнює 30° , а між прямими CD і MK — 60° . Чи перпендикулярні прямі AB і CD ?

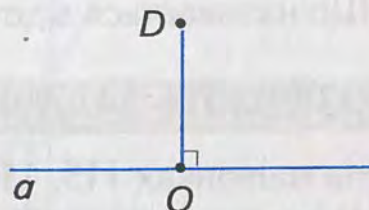
Розв'язання. За умовою, $\angle BOK = 30^\circ$, $\angle DOK = 60^\circ$. $\angle BOD = \angle BOK + \angle DOK = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ$. Отже, прямі AB і CD перетинаються під кутом 90° , тобто $AB \perp CD$.

Промені або відрізки, що лежать на перпендикулярних прямих, також вважають перпендикулярними.

Перпендикуляром до даної прямої називається відрізок прямої, перпендикулярної до даної прямої, який має одним зі своїх кінців точку їх перетину. Ця точка називається *основою перпендикуляра*.

Відрізок DO (мал. 112) — перпендикуляр до прямої a , точка O — основа перпендикуляра. Цей відрізок найменший з усіх відрізків, що сполучають точку D з точками прямої a .

Тому довжину перпендикуляра DO називають *відстанню* від точки D до прямої a .

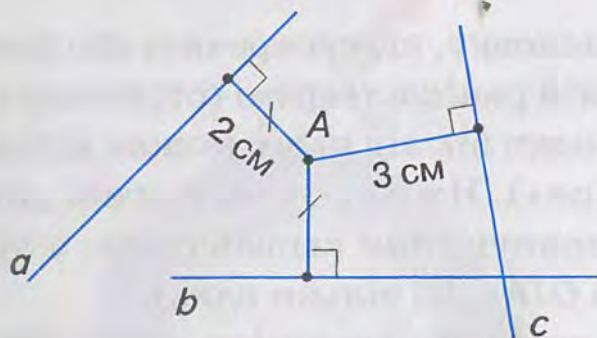


Мал. 112

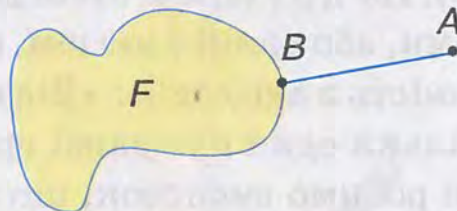
ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Можна порівнювати відстані від даної точки до кількох прямих. На малюнку 113 точка A лежить на однаковій відстані 2 см від прямих a і b . Але від прямої c вона розміщена на більшій відстані — 3 см.

Про точку, яка розміщена на однаковій відстані від кількох прямих, кажуть, що вона *рівновіддалена* від цих прямих.



Мал. 113



Мал. 114

Може виникнути запитання: *Що таке Відстань від точки до будь-якої фігури?*

Відстанню від точки A до фігури F називають відстань від точки A до найближчої до неї точки B фігури F (мал. 114).

2. Назва «перпендикулярний» походить від латинського слова *perpendicularis*, яке означає «прямовисний». Подібне значення має термін «вертикальний», проте ці два поняття розрізняють. Якщо пряма a розміщена горизонтально, то перпендикулярну до неї пряму b можна вважати вертикальною або, коротше, вертикаллю. Наприклад, лінії у зошиті в клітинку мають два напрямки — горизонтальний і вертикальний. Якщо ж пряма a розміщена інакше, то перпендикулярні до неї прямі не називають вертикальними.

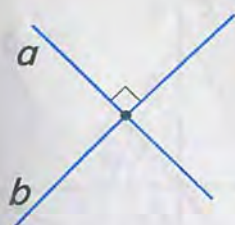
Знак \perp увів у 1634 р. французький математик П. Ерігон.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

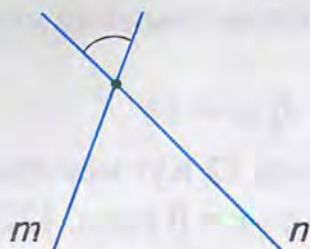
1. Які прямі називаються перпендикулярними?
2. Як побудувати пряму, перпендикулярну до даної прямої за допомогою: 1) транспортира і лінійки; 2) косинця?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність перпендикулярної прямої.
4. Поясніть, як доводять від супротивного.
5. Що таке перпендикуляр до прямої; основа перпендикуляра?
6. Що називається відстанню від точки до прямої?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

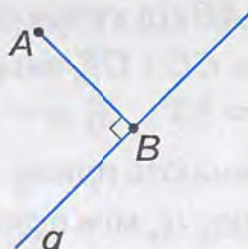
- 1'. На малюнках 115, 116 зображено пари прямих. Запишіть:
 - 1) перпендикулярні прямі;
 - 2) не перпендикулярні прямі.



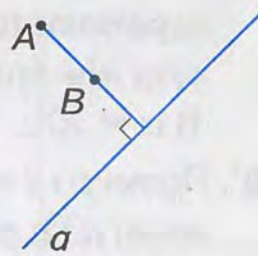
Мал. 115



Мал. 116



Мал. 117



Мал. 118

2'. На якому з малюнків 117, 118:

- 1) відрізок AB перпендикулярний до прямої a ;
- 2) відрізок AB є перпендикуляром до прямої a ;
- 3) довжина відрізка AB є відстанню від точки A до прямої a ?

Відповідь поясніть.

3'. Чи може перпендикуляр бути променем?

4'. Проведіть пряму a . За допомогою косинця побудуйте пряму b , перпендикулярну до прямої a .

5'. Побудуйте в зошиті прямі a і b так, як показано на малюнку 119. Через точку їх перетину проведіть за клітинками пряму c , перпендикулярну:

- 1) до прямої a ;
- 2) до прямої b .

6'. Позначте три точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Проведіть відрізок, довжина якого є відстанню:

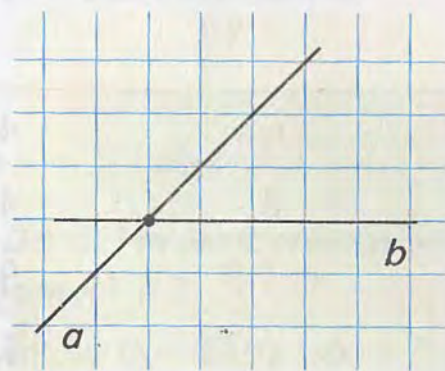
- 1) від точки A до прямої BC ;
- 2) від точки B до прямої AC ;
- 3) від точки C до прямої AB .

7'. Проведіть пряму a . Позначте точку A на відстані 3 см від даної прямої. З того самого боку від прямої позначте точку B так, щоб вона була:

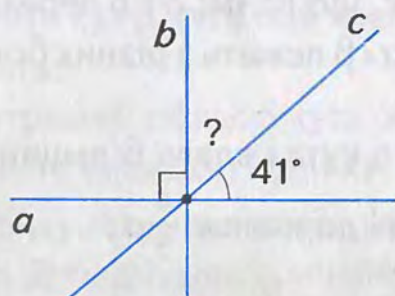
- 1) на 2 см далі від прямої a , ніж точка A ;
- 2) втричі ближче до прямої a , ніж точка A ;
- 3) на 0,25 дм далі від прямої a , ніж точка A .

8°. На малюнках 120, 121 зображено перпендикулярні прямі a і b . Знайдіть кути, позначені знаком «?».

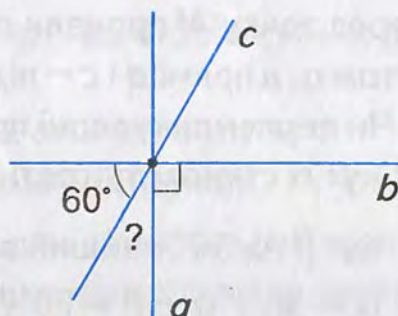
9°. Перпендикулярні прямі AB і CD перетинаються в точці O . Пряма OT



Мал. 119



Мал. 120

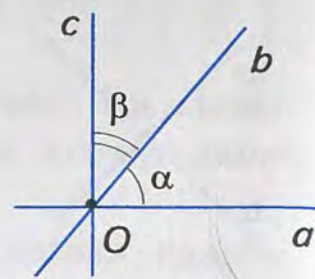


Мал. 121

перетинає пряму AB під кутом α . Знайдіть градусну міру кута між прямими CD і OT , якщо:

- 1) $\alpha = 30^\circ$; 2) $\alpha = 53^\circ$; 3) $\alpha = 44^\circ$; 4) $\alpha = 79^\circ$.

- 10°. Прямі b і c перетинають пряму a в точці O . Кут між прямими a і b дорівнює α , між прямими b і c — β (мал. 122). Накресліть у зошиті таблицю 7 і заповніть її за зразком, наведеним у другому стовпчику.



Мал. 122

Таблиця 7

α	45°	57°	25°	38°	13°
β	45°	$43^\circ +$	$65^\circ +$	$32^\circ +$	77°
$\alpha + \beta$	90°				90°
$a \perp c - ?$	Так				Так

- 11°. За даними, наведеними на малюнку 123, запишіть відстань:

- 1) від точки P до прямої AB ;
2) від точки B до прямої AP .

- 12°. На малюнку 124 точки A , B і C лежать на промені OA , перпендикулярному до прямої a . Заповніть таблицю 8.

Таблиця 8

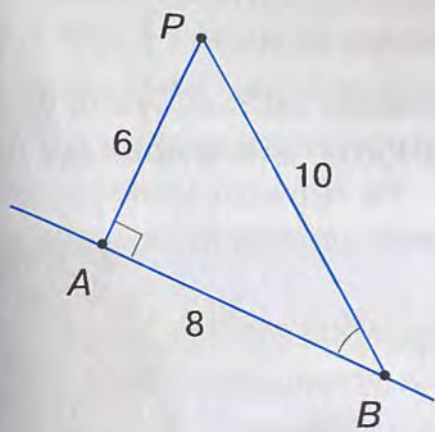
№	Довжина відрізка, см						Відстань до прямої a від точки		
	AB	AC	BC	OA	OB	OC	A	B	C
1	6	3	3	2	8	3	2	8	
2	3	1	2			4			
3	5	1			8				

13. За малюнком 125 запишіть:

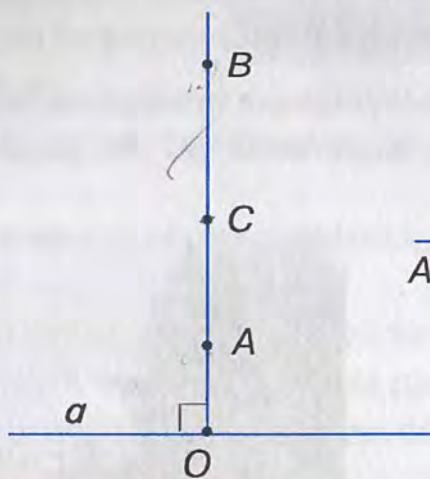
- 1) дві пари перпендикулярних променів;
2) чотири пари перпендикулярних відрізків;
3) три пари, до кожної з яких входять перпендикулярні промінь і відрізок.

14. Через точку M провели прямі a , b і c так, що прямі a і b перетинаються під кутом α , а прямі a і c — під кутом β . Кути α і β лежать з різних боків від прямої a . Чи перпендикулярні прямі b і c , якщо:

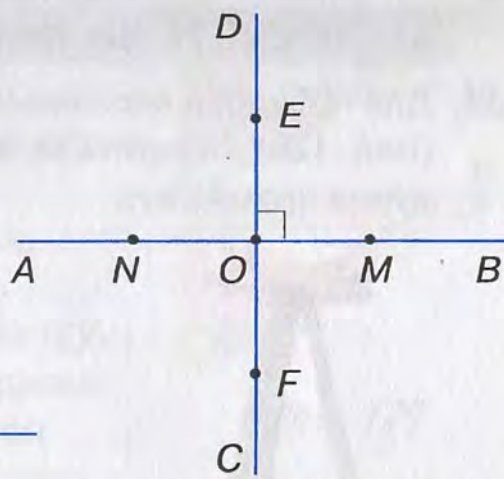
- 1) кут α становить третину розгорнутого кута і вдвічі більший за β ;
2) кут β на 50° менший від прямого кута і дорівнює $\frac{4}{5}\alpha$;
3) $\alpha = 5\beta$ і $\alpha - \beta = 60^\circ$?



Мал. 123



Мал. 124



Мал. 125

15. Пряма a перетинає сторони кута A в точках B і C . Чи можуть обидві прямі AB і AC бути перпендикулярними до прямої a ?
16. Точки O , P і T лежать на прямій, перпендикулярній до прямої c . Точка P є серединою відрізка OT і лежить на відстані 2 см від прямої c ; $OT = 7$ см. Знайдіть відстань від точок O і T до прямої c , якщо точки P і T лежать:
- 1) з одного боку від прямої c ;
 - 2) з різних боків від прямої c .
17. Прямі MN і a — перпендикулярні. Відстані від точок M і N до прямої a відповідно дорівнюють 6 і 9 см. Знайдіть:
- 1) довжину відрізка MN ;
 - 2) відстань від середини відрізка MN до прямої a .
- Скільки випадків треба розглянути?
18. Побудуйте довільний кут, менший від розгорнутого. Проведіть його бісектрису. Позначте на ній довільні точки A , B і C . Із цих точок проведіть перпендикуляри до сторін кута і виміряйте їх. Яка закономірність спостерігається?
- 19*. З вершини розгорнутого кута AOB проведено в один бік промені OC і OD так, що $\angle AOC = \angle BOD$. Доведіть, що бісектриса OK кута COD перпендикулярна до прямої AB . Скільки випадків треба розглянути?
- 20*. Через точку K прямої a провели прямі c і d відповідно під кутами 60° і 30° до даної прямої. Доведіть, що прямі c і d можуть бути перпендикулярними.
- 21*. Доведіть, що коли бісектриси кутів ABC і CBD перпендикулярні, то точки A , B і D лежать на одній прямій.
- 22*. Побудуйте кут β , сторони якого перпендикулярні до сторін кута α , а вершина лежить:
- 1) у внутрішній області кута α ;
 - 2) у зовнішній області кута α .
- Розгляньте випадки, коли кут α гострий, прямий або тупий.
- 23*. Через точку A , що не лежить на прямій a , проведені три прямі, які перетинають пряму a . Доведіть, що принаймні дві з них не перпендикулярні до прямої a .

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

24. Для побудови перпендикулярних прямих на місцевості застосовують екер (мал. 126). Поясніть за малюнком 127, як за допомогою цього приладу будують прямий кут.



Мал. 126



Мал. 127



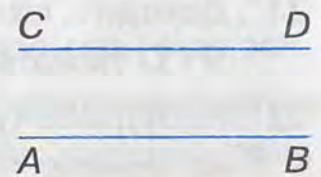
§7. ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

Дві прямі на площині або мають спільну точку, тобто перетинаються, або не мають спільної точки, тобто не перетинаються.

Дві прямі на площині називаються **паралельними**, якщо вони не перетинаються.

На малюнку 128 прямі AB і CD – паралельні.

Паралельність прямих позначають знаком \parallel . Записують: $AB \parallel CD$ (або $CD \parallel AB$) і говорять: «Пряма AB паралельна прямій CD ».



Промені або відрізки, що лежать на паралельних прямих, також вважають паралельними.

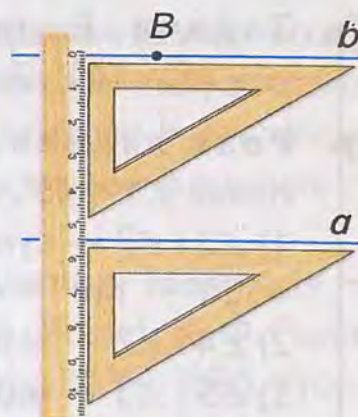
Мал. 128

Навколо нас багато прикладів паралельних прямих. У зошиті в клітинку горизонтальні лінії паралельні. Те саме можна сказати і про вертикальні лінії. Краї парти, рейки залізничної колії, тролейбусні штанги також паралельні.

На малюнку 129 показано, як за допомогою лінійки і косинця провести через точку B пряму b , паралельну даній прямій a .

? Чи можна через точку B провести ще одну пряму, паралельну прямій a ?

Відповідь дає аксіома паралельних прямих.



Мал. 129

Аксіома паралельних прямих. Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести тільки одну пряму, паралельну даній.

Наслідок. Якщо пряма перетинає одну з двох паралельних прямих, то вона перетинає і другу.

Справді, нехай a і b – паралельні прямі і пряма c перетинає пряму a в точці A (мал. 130). Якби пряма c не перетинала пряму b , то через точку A проходили б дві прямі (a і c), паралельні прямій b . Це суперечить аксіомі паралельних прямих. Отже, пряма c перетинає пряму b .

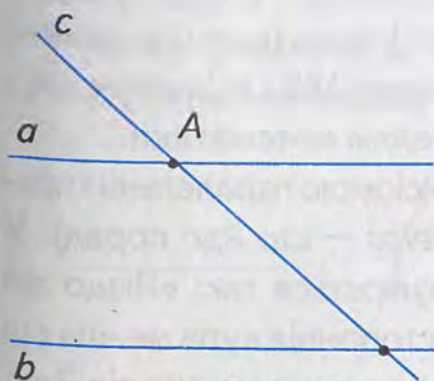
Твердження, яке безпосередньо випливає з доведеної теореми або з аксіоми, називають *наслідком*.

Пряму, що перетинає дві дані прямі, називають *їх січною*.

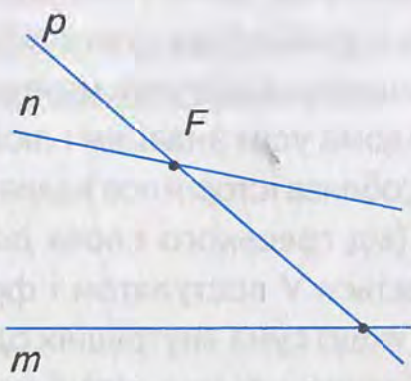
На малюнку 130 пряма c є січною паралельних прямих a і b . А на малюнку 131 пряма p – січна прямих m і n , що не паралельні.

У результаті перетину двох прямих січною утворюється вісім кутів (мал. 132). Їх можна об'єднати в пари і дати такі назви:

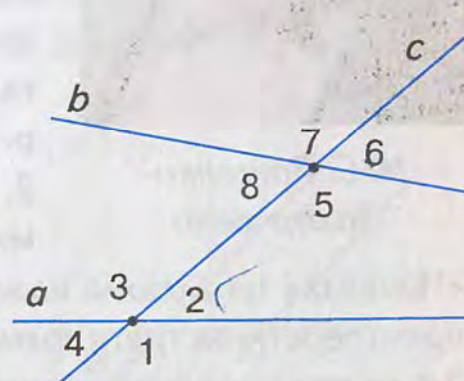
- внутрішні односторонні кути – $\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$;
- внутрішні різносторонні кути – $\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$;
- відповідні кути – $\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$;
- зовнішні односторонні кути – $\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$;
- зовнішні різносторонні кути – $\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$.



Мал. 130



Мал. 131

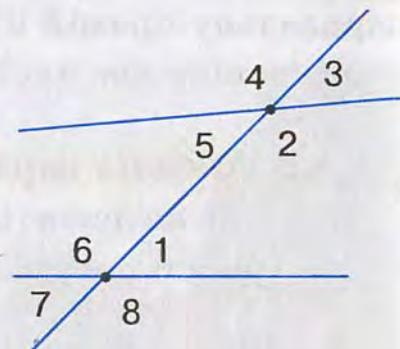


Мал. 132

Задача. Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній дорівнюють 45° і 140° . Знайдіть решту кутів.

Розв'язання. Позначимо кути при двох прямих і січній цифрами (мал. 133). Нехай $\angle 1 = 45^\circ$, а $\angle 2 = 140^\circ$. Тоді дістанемо:

- 1) $\angle 3$ і $\angle 2$ — суміжні, тому $\angle 3 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$;
- 2) $\angle 4$ і $\angle 2$ — вертикальні, тому $\angle 4 = \angle 2 = 140^\circ$;
- 3) $\angle 5$ і $\angle 3$ — вертикальні, тому $\angle 5 = \angle 3 = 40^\circ$;
- 4) $\angle 6$ і $\angle 1$ — суміжні, тому $\angle 6 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$;
- 5) $\angle 7$ і $\angle 1$ — вертикальні, тому $\angle 7 = \angle 1 = 45^\circ$;
- 6) $\angle 8$ і $\angle 6$ — вертикальні, тому $\angle 8 = \angle 6 = 135^\circ$.



Мал. 133

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Близько 300 р. до н. е. побачила світ фундаментальна праця «Начала» давньогрецького вченого Евкліда. Саме її упродовж 2 тис. років вважали взірцем математичної строгості. Хоча із сучасного погляду не всі положення, сформульовані Евклідом, є бездоганними. Зокрема в «Началах» дано означення всіх геометричних понять, навіть точки й прямої. За Евклідом, «точка — це та, що не має розмірів», «пряма лінія — така, що однаково розміщена відносно всіх своїх точок» тощо. Зрозуміло, що такі формулювання не можна вважати означеннями.



М. Є. Ващенко-Захарченко

Проте безсумнівним здобутком Евкліда була і залишається побудова відносно стрункої дедуктивної геометричної теорії. У «Началах» чітко виділено систему аксіом, з якої виводяться всі інші твердження. Упродовж тривалого часу в різних країнах світу геометрію вивчали за «Началами» Евкліда.

Вітчизняний переклад «Начал» (1880 р.) належить видатному українському математику Михайлу Єгоровичу Ващенко-Захарченку (1825 — 1912), який народився у с. Маліївка Золотоніського повіту на Полтавщині (нині — район Черкаської області). Інша його фундаментальна праця «Історія математики» (1883 р.) також добре відома усім знавцям і любителям математики.

2. Особлива історія пов'язана з аксіомою паралельних прямих (від грецького слова *paralelos* — що йде поряд). У

«Началах» ця аксіома називається V постулатом і формулюється так: «Якщо дві прямі перетинає третя пряма і якщо сума внутрішніх односторонніх кутів менша від $2d$, то при продовженні прямі перетнуться з того боку, де ця сума менша від $2d$ ». Протягом багатьох століть таке формулювання здавалося математикам складним і неочевидним. Вони намагалися довести це твердження, виходячи з інших аксіом



М. І. Лобачевський

Евкліда. Проте усі спроби були марними. Кожного разу виявлялося, що доведення містило помилку, зокрема спиралося на твердження, рівносильне V постулату Евкліда. Одне із таких тверджень ви щойно вивчили — це сучасна аксіома паралельних.

На початку XIX ст. троє видатних геометрів — М. І. Лобачевський (1792 — 1856, Росія), К. Ф. Гаусс (1777 — 1855, Німеччина), Я. Бояї (1802 — 1860, Угорщина) — незалежно один від одного дійшли висновку, що довести V постулат Евкліда неможливо. За аксіому взяли твердження, протилежне аксіомі паралельних: «Через точку поза прямою можна провести принаймні дві прямі, паралельні даній». Виводячи наслідки з цього твердження та інших аксіом Евкліда, кожний учений

побудував нову, незвичну, але не менш струнку геометричну теорію.

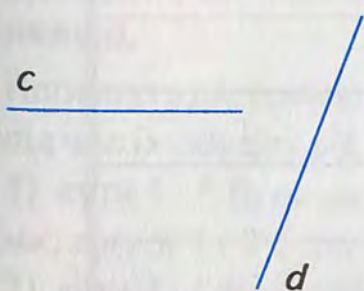
3. Знак \parallel для позначення паралельності прямих уперше ввів у своїх працях англійський математик В. Оутред (1574 — 1660).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

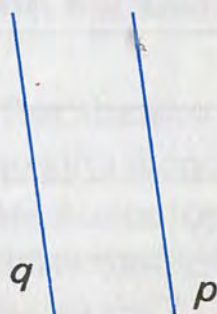
1. Які прямі називаються паралельними?
2. Сформулюйте аксіому паралельних.
3. Сформулюйте наслідок з аксіоми паралельних.
4. Що таке січна?
5. Як називаються пари кутів при двох прямих і січній?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

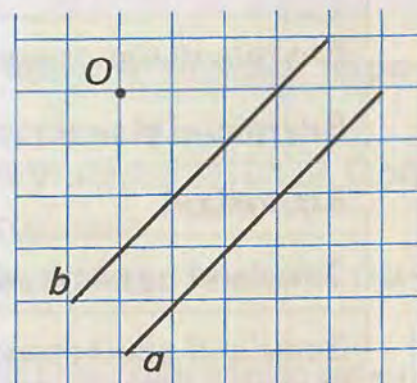
- 1'. На малюнках 134, 135 зображено пари прямих. Запишіть прямі, які:
 - 1) перетинаються; 2) паралельні.
- 2'. Проведіть пряму a . Позначте точку A , що не лежить на цій прямій. За допомогою лінійки і косинця проведіть пряму b , паралельну прямій a .
- 3'. Проведіть паралельні прямі a і b так, як показано на малюнку 136. Через точку O проведіть пряму c , паралельну прямій b . За допомогою лінійки і косинця перевірте, чи паралельні прямі a і c .



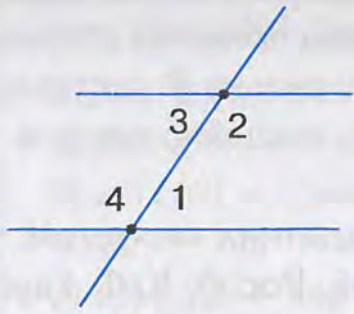
Мал. 134



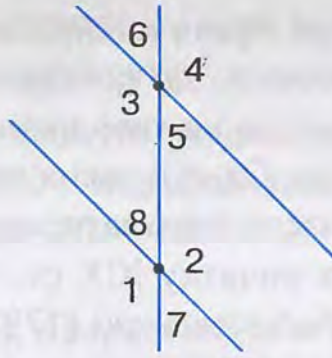
Мал. 135



Мал. 136



Мал. 137



Мал. 138

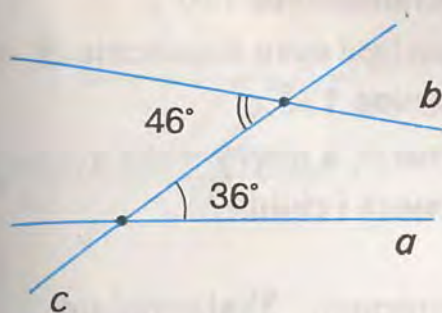


Мал. 139

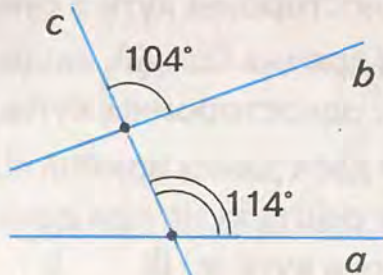
- 4'. Запишіть назви пар кутів при двох прямих і січній (мал. 137):
 1) $\angle 1$ і $\angle 2$; 2) $\angle 1$ і $\angle 3$; 3) $\angle 3$ і $\angle 4$; 4) $\angle 2$ і $\angle 4$.
- 5°. Прямі a і b не перетинаються. На прямій a позначено точки A , B і C , а на прямій b – точки M і N . Зробіть малюнок і назвіть:
 1) промені, паралельні відрізку AB ;
 2) відрізки, паралельні променю MN .
- 6°. Проведіть пряму a і позначте точку O , що не лежить на цій прямій. Через точку O проведіть пряму b , паралельну прямій a , і пряму c .
 Яка з побудованих прямих не перетинає пряму a , а яка – перетинає її?
 Висновок поясніть.
- 7°. Послідовно занумеруйте кути при двох прямих і січній так, щоб їх обхід від кута 1 до кута 8 здійснювався:
 1) за стрілкою годинника;
 2) проти стрілки годинника;
 3) за стрілкою годинника, і $\angle 1$ був внутрішнім;
 4) проти стрілки годинника, і $\angle 1$ був зовнішнім.
 Зробіть малюнки.
- 8°. Заповніть таблицю 9, скориставшись позначеннями на:
 1) мал. 138; 2) мал. 139.

Таблиця 9

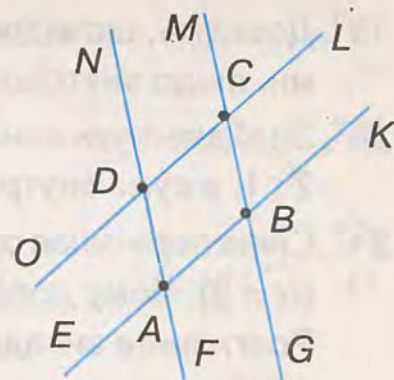
Назви кутів	Номери кутів при двох прямих і січній	
	мал. 138	мал. 139
Внутрішні односторонні		
Внутрішні різносторонні		
Відповідні		
Зовнішні односторонні		
Зовнішні різносторонні		



Мал. 140



Мал. 141



Мал. 142

- 9°. За даними, наведеними на малюнках 140, 141, знайдіть внутрішні односторонні кути з обох боків від січної c .
- 10°. Знайдіть внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній, якщо:
- 1) внутрішні різносторонні кути дорівнюють 50° і 45° ;
 - 2) відповідні кути рівні і дорівнюють по 60° ;
 - 3) внутрішні різносторонні кути дорівнюють по 110° .
11. На малюнку 142 $AB \parallel DC$ і $AD \parallel BC$. Запишіть:
- 1) паралельні відрізки;
 - 2) три пари паралельних променів;
 - 3) дві пари, кожна з яких утворюють паралельні промінь і відрізок.
12. Дано прями a , b і c . Як розміщені прями a і c , якщо $a \parallel b$ і пряма b перетинає пряму c ? Зробіть малюнок.
13. Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній дорівнюють:
- 1) 127° і 43° ;
 - 2) 15° і 165° ;
 - 3) 95° і 95° .
- Знайдіть решту кутів.
14. Дві прями утворюють із січною рівні внутрішні різносторонні кути, які позначили α . Знайдіть решту кутів, якщо:
- 1) $\alpha = 30^\circ$;
 - 2) $\alpha = 150^\circ$;
 - 3) $\alpha = 80^\circ 30'$;
 - 4) $\alpha = 99^\circ 30'$.
15. Доведіть, що коли внутрішні різносторонні кути рівні, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° .
16. Доведіть, що коли сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , то внутрішні різносторонні кути рівні.
17. Доведіть, що коли дві прями паралельні третій прямій, то вони паралельні.
- 18*. Проведіть дві прями та січну. Послідовно занумеруйте утворені кути так, щоб під час їх обходу від кута 1 до кута 8 проти стрілки годинника:
- 1) кути 1 і 5 були внутрішніми різносторонніми, кути 4 і 6 були відповідними, а кути 1 і 8 були внутрішніми односторонніми;
 - 2) кути 2 і 4 були відповідними, а кути 7 і 8 були внутрішніми односторонніми.
- Скількома способами можна занумерувати кути?


- 19*. Доведіть, що відповідні кути при двох прямих і січній не можуть бути рівними, якщо внутрішні односторонні кути в сумі не становлять 180° .
- 20*. Знайдіть кути при двох прямих і січній, якщо відповідні кути відносяться, як $2 : 1$, а сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 135° .
- 21*. Січна перетинає одну з двох даних прямих під кутом α , а другу — під кутом β ($\alpha \neq \beta$). Чому дорівнює решта кутів при даних прямих і січній?
Розгляньте випадки, коли кути α і β :
1) внутрішні односторонні; 2) внутрішні різносторонні; 3) відповідні;
4) зовнішні односторонні; 5) зовнішні різносторонні.
- 22*. Доведіть, що січна перпендикулярна до двох прямих, якщо кожний з двох відповідних кутів дорівнює середньому арифметичному внутрішніх односторонніх кутів.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

23. Вулиця проходить з північного сходу на південний захід. В якому напрямку проходить паралельна їй вулиця? А перпендикулярна? Зробіть малюнки, вважаючи вертикальний край зошита напрямком на північ.

§8. ОЗНАКИ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ

Щоб установити, користуючись означенням, паралельність двох прямих, треба їх продовжувати до нескінченності. Це неможливо. Тому доводять теорему, що дає змогу виявляти паралельність прямих, не продовжуючи їх. Таку теорему називають *ознакою*.

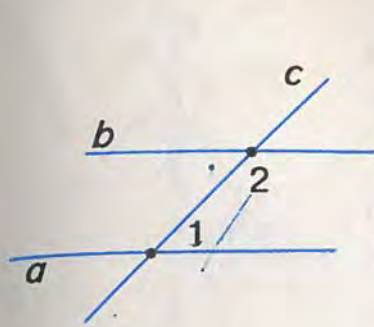
 **Теорема (ознака паралельності прямих).** Якщо при перетині двох прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° , то прямі паралельні.

Дано: прямі a і b (мал. 143), січна c , $\angle 1$ і $\angle 2$ — внутрішні односторонні, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

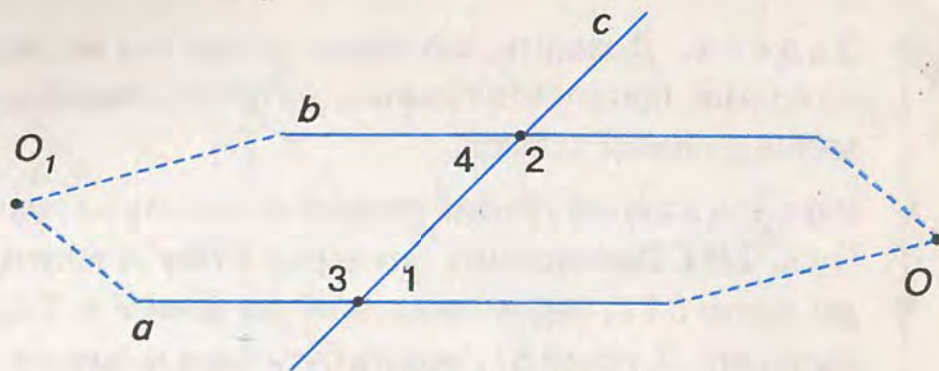
Довести: $a \parallel b$.

Доведення. Припустимо, що коли $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, то прямі a і b перетинаються в точці O (мал. 144).

Позначимо кути, суміжні з кутами 1 і 2, цифрами 3 і 4 та знайдемо їх суму.



Мал. 143



Мал. 144

Оскільки кути 1 і 3, 2 і 4 суміжні, то $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$, $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$.

Додавши ліві й праві частини цих рівностей, дістанемо:

$$\angle 1 + \angle 3 + \angle 2 + \angle 4 = 180^\circ + 180^\circ.$$

За умовою, $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Тому $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$.

Тоді прямі a і b перетнуться і в точці O_1 , яка лежить з іншого боку від прямої c , бо $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$.

Дістали, що прямі a і b перетинаються у двох точках — O і O_1 . А це суперечить аксіомі: через дві точки можна провести тільки одну пряму.

Отже, наше припущення, що прямі a і b перетинаються, неправильне, тому $a \parallel b$.

Наслідок 1. Дві прямі паралельні, якщо внутрішні різносторонні кути рівні.

Справді, за умовою, $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (мал. 145), бо ці кути суміжні. Тому $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Отже, за ознакою паралельності прямих, дані прямі — паралельні.

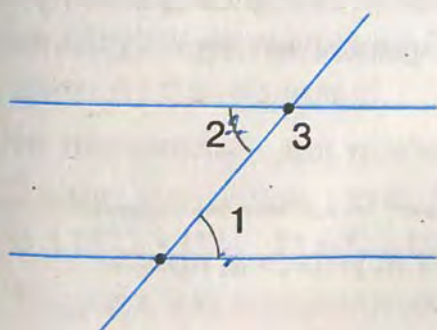
Наслідок 2. Дві прямі паралельні, якщо відповідні кути рівні.

Справді, за умовою, $\angle 1 = \angle 2$, а $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$ (мал. 146), бо ці кути суміжні. Тому $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$. Отже, за ознакою паралельності прямих, дані прямі — паралельні.

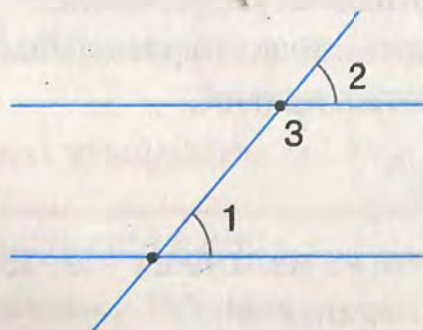
Наслідок 3. Дві прямі паралельні, якщо вони перпендикулярні до третьої прямої.

Справді, $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$ (мал. 147). Тому $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ і, за ознакою паралельності прямих, дані прямі — паралельні.

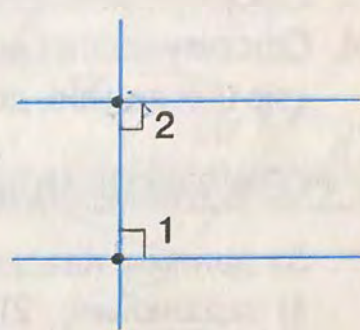
Кожен наслідок є ознакою паралельності прямих.



Мал. 145



Мал. 146

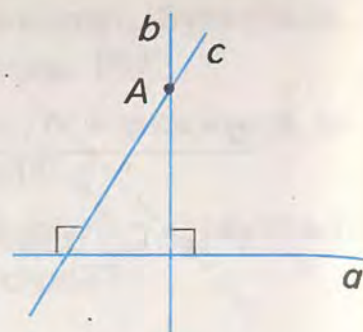


Мал. 147

Задача. Доведіть, що через точку, яка не лежить на прямій, проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до даної прямої.

Розв'язання. Нехай точка A не лежить на прямій a (мал. 148). Припустимо, що через точку A проходять дві прямі b і c , перпендикулярні до прямої a . Тоді, за наслідком 3, прямі b і c мають бути паралельними, тобто не можуть мати спільної точки A .

Отже, наше припущення неправильне. Тому через точку A проходить тільки одна пряма, перпендикулярна до прямої a .



Мал. 148

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Починаючи з XVIII ст., багато вчених намагалися створити більш досконалий підручник з геометрії, ніж «Начала» Евкліда. Одним з них був Михайло Васильович Остроградський (1801 – 1862), який народився у с. Пашенне Кобеляцького повіту Полтавської губернії. Його підручник з елементарної геометрії вважається однією з перлин творчого доробку вченого. Ця книжка побачила світ у середині XIX ст.

У XX ст. більше уваги стали приділяти наочності й доступності в навчанні геометрії школярів. Одним із головних провідників цієї ідеї був український освітянин, професор Олександр Матвійович Астряб (1879 – 1962), який народився у м. Лубни на Полтавщині. Його підручник «Наочна геометрія» (1909 р.) та інші праці – яскраве тому підтвердження.



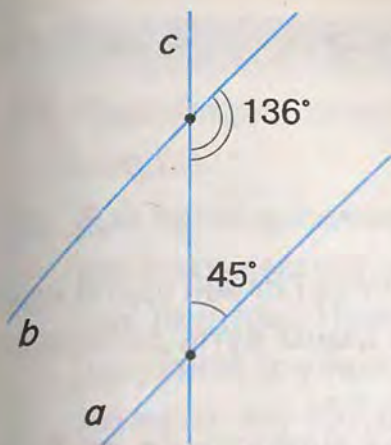
О. М. Астряб

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

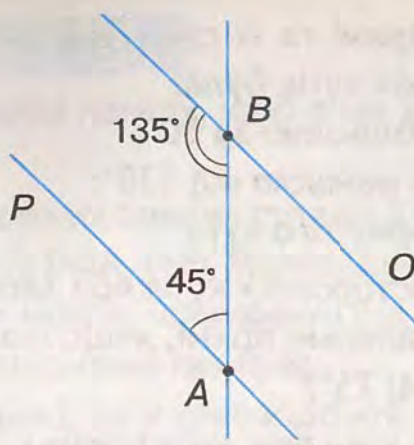
1. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих за внутрішніми односторонніми кутами.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих за внутрішніми різносторонніми кутами.
3. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих за відповідними кутами.
4. Сформулюйте і доведіть ознаку паралельності прямих за перпендикулярністю цих прямих до третьої прямої.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

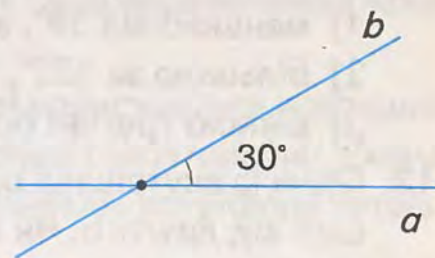
1. За даними, наведеними на малюнках 149, 150, з'ясуйте, які прямі: 1) паралельні; 2) не паралельні. Запишіть їх.



Мал. 149



Мал. 150



Мал. 151

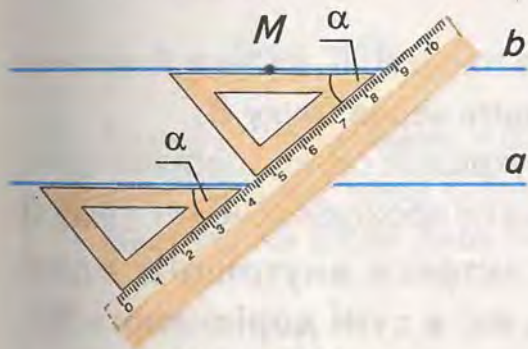
2'. Побудуйте прямі a і b так, як показано на малюнку 151. Скориставшись транспортиром і лінійкою, побудуйте пряму c , паралельну:

1) прямій a ; 2) прямій b .

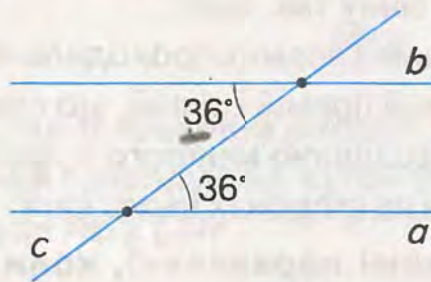
Яка пряма є січною для двох паралельних прямих?

3'. Чи паралельні дві прямі, які із січною утворюють внутрішні односторонні кути:
1) 25° і 125° ; 2) 38° і 142° ; 3) 61° і 117° ; 4) 56° і 124° ?

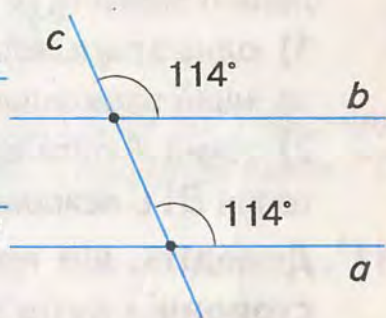
4'. На малюнку 152 показано, як провести паралельні прямі за допомогою лінійки і косинця. Поясніть побудову.



Мал. 152



Мал. 153



Мал. 154

5'. Обґрунтуйте, що дві прямі не паралельні, якщо вони із січною утворюють внутрішні односторонні кути:

1) 18° і 118° ; 2) 130° і 102° ; 3) 37° і 87° .

6'. За даними на малюнку 153 обґрунтуйте, що прямі a і b паралельні.

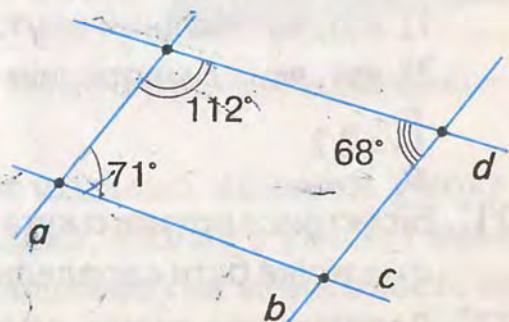
7'. Чи паралельні дві прямі, які утворюють із січною внутрішні різносторонні кути:
1) 45° і 55° ; 2) 168° і 168° ; 3) 91° і 91° ?

8'. За даними на малюнку 154 обґрунтуйте, що прямі a і b паралельні.

9'. Чи паралельні дві прямі, які утворюють із січною відповідні кути:

1) 117° і 117° ; 2) 63° і 163° ; 3) 48° і 84° ?

10. З'ясуйте, які з прямих на малюнку 155 паралельні.



Мал. 155

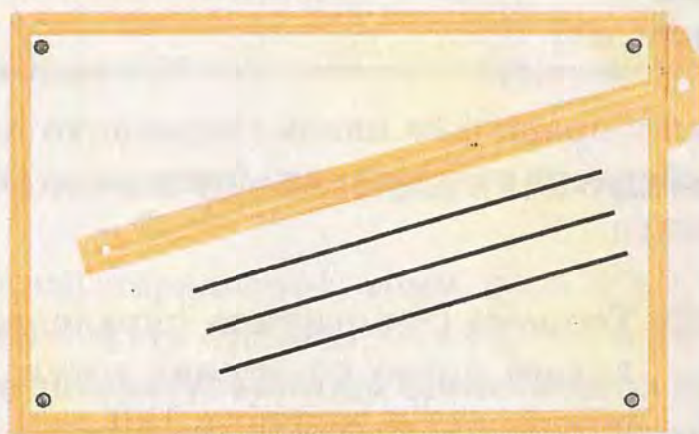
- 11.** Побудуйте паралельні прямі та їх січну так, щоб градусна міра одного із внутрішніх односторонніх кутів була:
- 1) меншою від 59° , але більшою за 50° ;
 - 2) більшою за 122° , але меншою від 130° ;
 - 3) рівною третині розгорнутого кута.
- 12.** Один із внутрішніх односторонніх кутів при двох прямих і січній удвічі менший від другого. Чи паралельні прямі, якщо різниця даних кутів дорівнює:
- 1) 30° ; 2) 45° ; 3) 60° ; 4) 75° ?
- 13.** Внутрішні односторонні кути при двох прямих і січній відносяться, як $1 : 3$. Чи паралельні прямі, якщо різниця даних кутів дорівнює:
- 1) 40° ; 2) 80° ; 3) 100° ; 4) 90° ?
- 14.** Кути α і β – внутрішні різносторонні при двох прямих і січній. Чи можуть бути паралельними прямі, якщо:
- 1) $\alpha - \beta > 0^\circ$; 3) $\alpha + \beta = 180^\circ$;
 - 2) $\beta - \alpha = 0^\circ$; 4) $\alpha + \beta = 90^\circ$?
- 15.** Кути α і β – відповідні при двох прямих і січній. Чи паралельні прямі, якщо:
- 1) $\alpha : \beta = 1 : 1$; 2) $\frac{\alpha}{\beta} < 1$; 3) $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{3}{2}$; 4) $\alpha - \beta = 90^\circ$?
- 16*.** Позначте точки A , B і C , що не лежать на одній прямій. Побудуйте паралельні прямі та їх січну так, щоб:
- 1) одна з паралельних прямих проходила через точки B і C , а точка A належала іншій паралельній прямій і січній, що проходить через точку B ;
 - 2) точка A була вершиною меншого з двох внутрішніх односторонніх кутів, точки B і C лежали на сторонах цього кута і січна не проходила через точку B .
- 17*.** Доведіть, що прямі паралельні, коли бісектриси внутрішніх односторонніх кутів утворюють із січною кути, які в сумі дорівнюють 90° .
- 18*.** Сума меншого із внутрішніх односторонніх кутів і половини більшого кута дорівнює: 1) 100° ; 2) 135° .
Якою має бути градусна міра меншого кута, щоб прямі були паралельними?
- 19*.** Дві прямі утворюють із січною рівні внутрішні різносторонні кути. Доведіть, що бісектриси цих кутів не перетинаються.
- 20*.** Прямі a і b перетинають січні c і d , що проходять через точку A ($A \in a$). Січні утворюють з прямою a кути α і β . Чи паралельні прямі a і b , якщо:
- 1) кут, відповідний з кутом β , становить третину кута α , причому $\beta : \alpha = 2 : 1$;
 - 2) кут, який є внутрішнім різностороннім із кутом α , вдвічі менший від кута β і $\frac{\beta}{\alpha} = 2$?
- 21*.** Бісектриса прямого кута перпендикулярна до прямої a . Доведіть, що пряма a не може бути паралельною жодній зі сторін кута, вертикального з даним.
- 22*.** Доведіть, що пряма, перпендикулярна до однієї сторони гострого кута, перетинає другу його сторону.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

23. Поясніть, як зігнути аркуш паперу, щоб лінія згину була паралельною краю аркуша.
24. Для проведення паралельних прямих столярі й теслі користуються приладом, який називається *малкою* (мал. 156). Малка складається з двох пластин, з'єднаних гвинтом. Пластини можна встановити під будь-яким потрібним кутом і закріпити їх у такому положенні гвинтом. На малюнку 157 показано, як у креслярській практиці будують паралельні прямі за допомогою *рейсшини*. Поясніть, як користуватися цими приладами.



Мал. 156



Мал. 157

25. Учень ішов вулицею AB , у точці B повернув ліворуч під кутом 60° і пройшов шлях BC , а у точці C повернув праворуч під кутом 60° і пройшов шлях CD . Накресліть шлях учня. Чи буде $AB \parallel CD$?

§9. ВЛАСТИВОСТІ ПАРАЛЕЛЬНИХ ПРЯМИХ

За ознакою паралельності прямих, дві прямі паралельні, якщо при їх перетині третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° .

Обернене твердження також справедливе. Воно виражає властивість паралельних прямих.

Обернене твердження отримаємо, коли поміняємо місцями умову і вимогу доведеної теореми. У таблиці 10 показано, якими є умова і вимога ознаки паралельності прямих (це *пряма теорема*) та властивості паралельних прямих (це *обернена теорема*).



	Ознака паралельності прямих (пряма теорема)	Властивість паралельних прямих (обернена теорема)
Умова (відомо, що)	При перетині двох паралельних прямих третьою сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°	Дві паралельні прямі перетинає третя
Вимога (треба довести, що)	Прямі паралельні	Сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°

Якщо правильна якась теорема, то це не означає, що буде правильним обернене твердження. Істинність оберненого твердження потрібно доводити.

Теорема (властивість паралельних прямих). Якщо дві паралельні прямі перетинає третя, то сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180° .

Дано: $a \parallel b$ (мал. 158), c – січна, $\angle 1$ і $\angle 2$ – внутрішні односторонні.

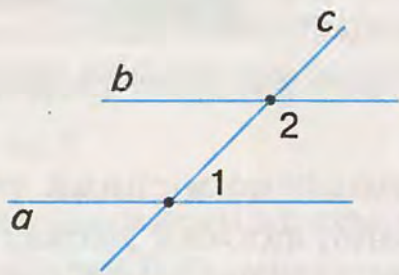
Довести: $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

Доведення. Припустимо, що $\angle 1 + \angle 2 \neq 180^\circ$. Тоді можна побудувати $\angle AVK \neq \angle 2$ так, щоб він у сумі з $\angle 1$ дорівнював 180° (мал. 159).

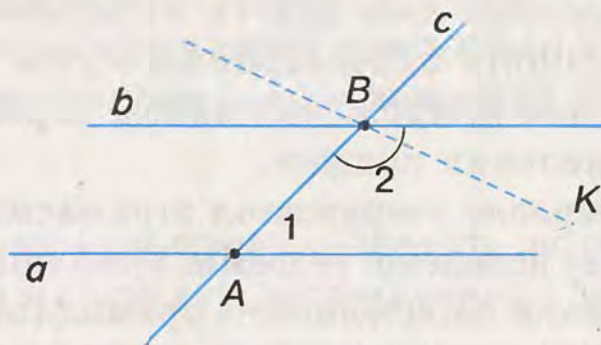
Оскільки $\angle 1 + \angle AVK = 180^\circ$, то, за ознакою паралельності прямих, $a \parallel VK$. Але, за умовою, $a \parallel b$. Дістали, що через точку B проходять дві прямі – b і VK , паралельні прямій a . Це суперечить аксіомі паралельних. Отже, наше припущення неправильне, тому $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$.

Наслідок 1. Якщо дві паралельні прямі перетинає третя, то внутрішні різносторонні кути рівні.

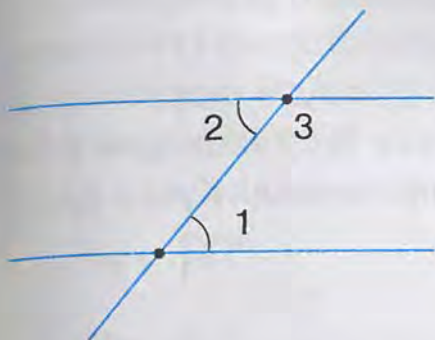
Справді, за умовою, дані прямі паралельні, тому $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (мал. 160). Але $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, бо ці кути суміжні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.



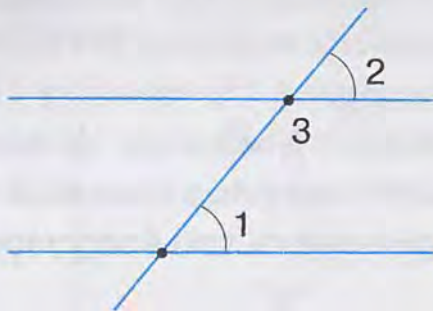
Мал. 158



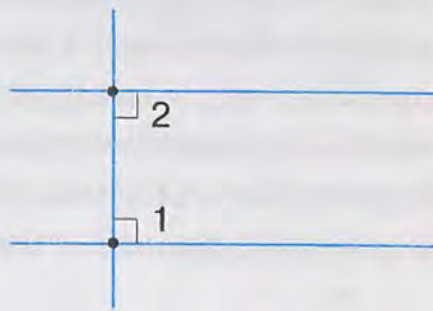
Мал. 159



Мал. 160



Мал. 161



Мал. 162

✓ **Наслідок 2.** Якщо дві паралельні прямі перетинає третя, то відповідні кути рівні.

Справді, за умовою, дані прямі паралельні, тому $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$ (мал. 161). Але $\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, бо ці кути суміжні. Отже, $\angle 1 = \angle 2$.

✓ **Наслідок 3.** Якщо пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.

Справді, за умовою, дані прямі паралельні, тому $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (мал. 162). Але $\angle 1 = 90^\circ$. Тому і $\angle 2 = 90^\circ$. Отже, січна перпендикулярна і до другої з двох даних паралельних прямих.

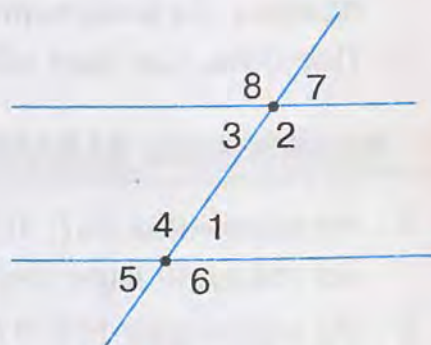
Кожен наслідок є властивістю паралельних прямих.



Задача. Один із внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній дорівнює 56° . Знайдіть решту кутів.

Розв'язання. Позначимо менший з двох внутрішніх односторонніх кутів цифрою 1, а інші кути так, як на малюнку 163. Тоді $\angle 1 = 56^\circ$. За властивостями паралельних прямих дістанемо:

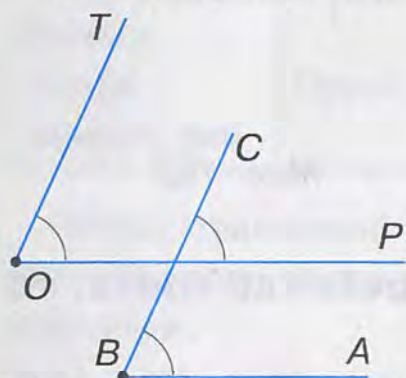
- 1) $\angle 2$ і $\angle 1$ – внутрішні односторонні, тому $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1 = 180^\circ - 56^\circ = 124^\circ$.
- 2) $\angle 3$ і $\angle 1$ – внутрішні різносторонні, тому $\angle 3 = \angle 1 = 56^\circ$.
- 3) $\angle 4$ і $\angle 2$ – внутрішні різносторонні, тому $\angle 4 = \angle 2 = 124^\circ$.
- 4) $\angle 5$ і $\angle 3$ – відповідні, тому $\angle 5 = \angle 3 = 56^\circ$.
- 5) $\angle 6$ і $\angle 2$ – відповідні, тому $\angle 6 = \angle 2 = 124^\circ$.
- 6) $\angle 7$ і $\angle 1$ – відповідні, тому $\angle 7 = \angle 1 = 56^\circ$.
- 7) $\angle 8$ і $\angle 4$ – відповідні, тому $\angle 8 = \angle 4 = 124^\circ$.



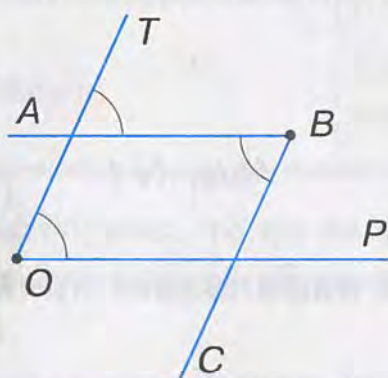
Мал. 163

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

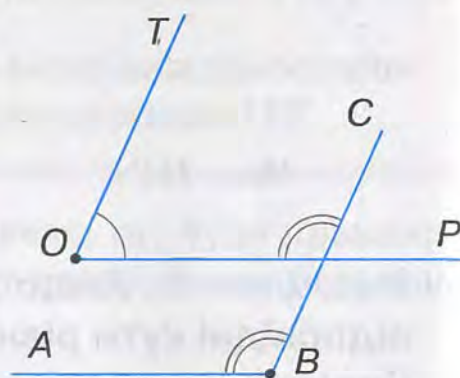
Знаючи властивості паралельних прямих, можна з'ясувати властивості кутів з відповідно паралельними сторонами. Три випадки взаємного розміщення таких кутів показано на малюнках. На малюнку 164 відповідні сторони кутів мають однакові напрями відносно вершини. На малюнку 165 відповідні сторони кутів мають протилежні напрями відносно вершини. На малюнку 166 у кутів одна пара відповідних сторін має однакові напрями, а інша пара — протилежні. Кути з відповідно паралельними сторонами мають такі властивості.



Мал. 164



Мал. 165



Мал. 166

Властивість 1. Кути з відповідно паралельними сторонами рівні, якщо їх сторони мають однакові або протилежні напрями відносно вершини.

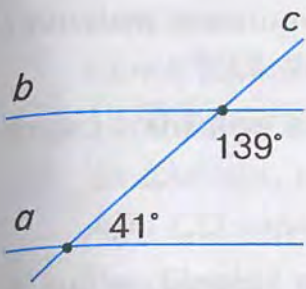
Властивість 2. Кути з відповідно паралельними сторонами в сумі дорівнюють 180° , якщо сторони однієї пари мають однакові напрями, а іншої пари — протилежні.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

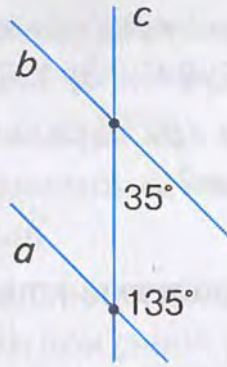
- Сформулюйте і доведіть теорему про властивість паралельних прямих.
- Доведіть, що коли дві паралельні прямі перетинає третя пряма, то внутрішні різносторонні кути рівні.
- Доведіть, що коли дві паралельні прямі перетинає третя пряма, то відповідні кути рівні.
- Доведіть, що коли пряма перпендикулярна до однієї з двох паралельних прямих, то вона перпендикулярна і до другої прямої.
- Поясніть, що таке обернена теорема. Наведіть приклади.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

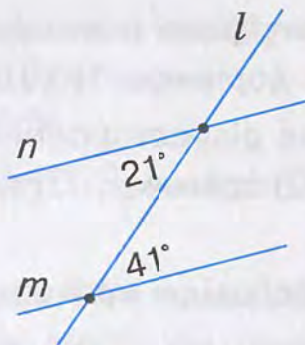
- На малюнках 167, 168 прямі a і b паралельні, c — січна. Чи правильно вказано градусні міри внутрішніх односторонніх кутів?
- На малюнках 169, 170 паралельні прямі m і n перетинає пряма l . Чи можуть внутрішні різносторонні кути мати наведену градусну міру?
- Паралельні прямі x і y перетинає пряма z (мал. 171, 172). Чи правильно вказано на малюнках градусні міри відповідних кутів?



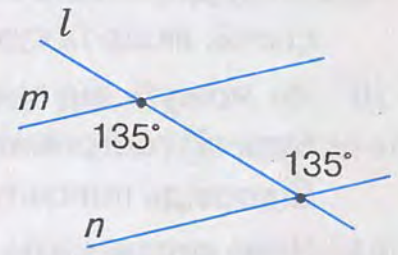
Мал. 167



Мал. 168

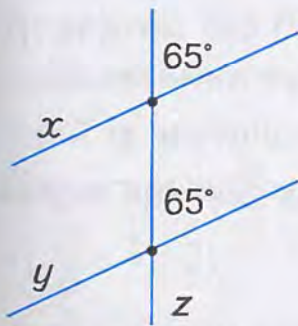


Мал. 169

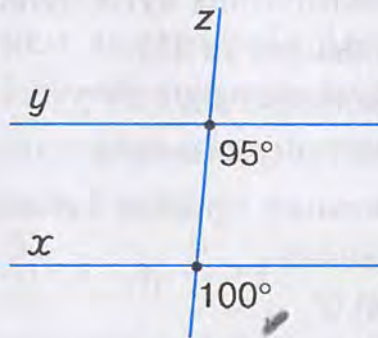


Мал. 170

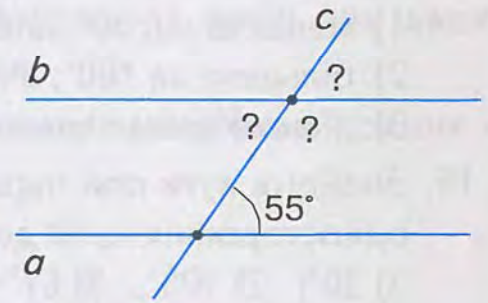
- 4'. Проведіть паралельні прямі та їх січну так, щоб один із внутрішніх односторонніх кутів дорівнював:
 1) 30° ; 2) 135° ; 3) 150° ; 4) 60° .
- 5°. На малюнку 173 прямі a і b – паралельні, c – січна. Знайдіть невідомі кути.



Мал. 171

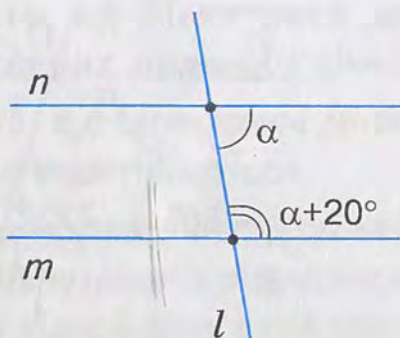


Мал. 172

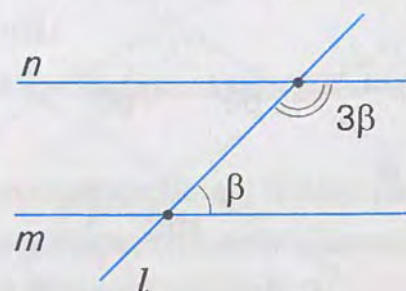


Мал. 173

- 6°. Чому дорівнює один із внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній, якщо другий кут дорівнює:
 1) 137° ; 2) 54° ; 3) 162° ; 4) 23° ?
- 7°. За даними на малюнках 174, 175 знайдіть внутрішні односторонні кути при паралельних прямих m і n та січній l .
- 8°. Знайдіть внутрішні односторонні кути при паралельних прямих і січній, якщо:
 1) гострий кут на 30° менший від тупого кута;
 2) тупий кут у 5 разів більший за гострий кут;
 3) гострий кут становить половину тупого кута.

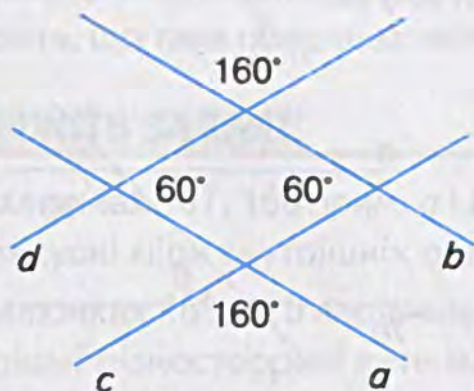


Мал. 174

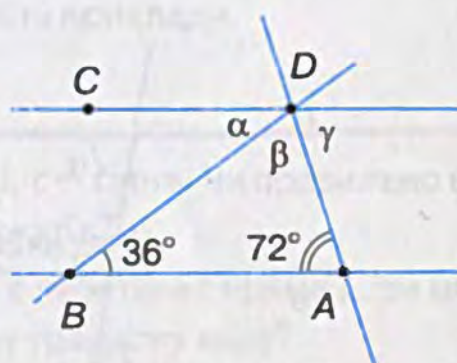


Мал. 175

- 9°. Чому дорівнюють внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній, якщо їх сума дорівнює: 1) 107° ; 2) 94° ; 3) 132° ; 4) 43° ?
- 10°. Чи можуть внутрішні різносторонні кути при паралельних прямих і січній бути: 1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?
Відповідь поясніть.
- 11°. Чому дорівнюють відповідні кути при паралельних прямих і січній, якщо їх сума становить:
1) 137° ; 2) 54° ; 3) 162° ; 4) 23° ?
- 12°. Чи можуть відповідні кути при паралельних прямих і січній бути:
1) гострими; 2) прямими; 3) тупими?
Відповідь поясніть.
13. На малюнку 176 $a \parallel b$ і $c \parallel d$. Чи правильно вказано градусні міри кутів?
14. Накресліть дві паралельні прямі. Побудуйте їх січну так, щоб градусна міра одного із внутрішніх односторонніх кутів була:
1) меншою від 50° , але більшою за 45° ;
2) більшою за 100° , але меншою від 105° ;
3) рівною двом п'ятим розгорнутого кута.
15. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів дорівнює:
1) 30° ; 2) 105° ; 3) 67° ; 4) 0° .
16. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо частка градусних мір внутрішніх односторонніх кутів дорівнює:
1) 9; 2) 11; 3) 1; 4) 17.
17. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо внутрішні односторонні кути відносяться, як:
1) 1 : 9; 2) 11 : 1; 3) 1 : 1; 4) 1 : 17.
18. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо один із внутрішніх односторонніх кутів становить від другого:



Мал. 176



Мал. 177

19. Знайдіть кути при паралельних прямих і січній, якщо один із внутрішніх односторонніх кутів становить від другого:
1) 20 %; 2) 60 %; 3) 80 %; 4) 25 %.
20. За даними, наведеними на малюнку 177, знайдіть кути α , β і γ , якщо прямі AB і CD паралельні.
21. Паралельні прямі a і b перетинають січні c і d . Доведіть, що два внутрішні односторонні кути при січній c і два внутрішні односторонні кути при січній d становлять в сумі 360° .
- 22*. Накресліть дві паралельні прямі. Позначте на них точки A , B і C так, щоб:
1) той внутрішній односторонній кут при даних прямих і січній AC , що має вершину C , був удвічі більшим за внутрішній односторонній кут при січній AB , вершина якого лежить на тій самій прямій, що й точка C ;
2) січна AC була бісектрисою більшого із внутрішніх односторонніх кутів при даних прямих і січній AB .
- 23*. Доведіть, що бісектриси внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній перетинаються.
- 24*. Який із внутрішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній — α чи β — є гострим, якщо:
1) $\frac{\alpha}{\beta} < 1$; 2) $\frac{\alpha}{\beta} > 1$; 3) $\frac{\beta}{\alpha} < 1$; 4) $\frac{\beta}{\alpha} > 1$?
- 25*. Знайдіть кути при двох паралельних прямих і січній, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів менша від їх суми на:
1) 20° ; 2) 105° ; 3) 49° ; 4) 123° .
- 26*. Знайдіть кути при двох паралельних прямих і січній, якщо різниця внутрішніх односторонніх кутів відноситься до їх суми, як:
1) $2 : 3$; 2) $3 : 4$; 3) $4 : 5$; 4) $5 : 6$.
- 27*. Знайдіть кути при двох паралельних прямих і січній, якщо один із внутрішніх односторонніх кутів на 30° більший від:
1) різниці цих кутів;
2) середнього арифметичного цих кутів;
3) 25% суми цих кутів;
4) потроєної піврізниці цих кутів.
- 28*. Доведіть, що бісектриси двох внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній паралельні.
- 29*. Доведіть, що бісектриси двох відповідних кутів при паралельних прямих і січній не перетинаються.
- 30*. Доведіть паралельність прямих, що перпендикулярні до бісектрис:
1) двох внутрішніх різносторонніх кутів при паралельних прямих і січній;
2) двох відповідних кутів при паралельних прямих і січній.
- 31*. Чотири прямі попарно перпендикулярні. Доведіть, що довільна пряма, яка

Уважно прочитайте задачі і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

- 1° Один із суміжних кутів на 100° менший від другого. Знайдіть ці кути.
А. 100° і 110° . Б. 90° і 90° . В. 140° і 40° . Г. 80° і 180° .
- 2° Один із кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 55° . Чому дорівнюють інші кути?
А. 125° , 55° . Б. 155° , 25° , 55° . В. 125° , 55° , 55° . Г. 125° , 55° , 125° .
- 3° Знайдіть кут, якщо сума суміжного з ним кута і кута, суміжного з прямим кутом, дорівнює 120° .
А. 150° . Б. 60° . В. 90° . Г. 180° .
- 4 Сума трьох кутів, утворених при перетині двох прямих, дорівнює 200° . Чому дорівнюють ці кути?
А. 50° , 60° , 70° . Б. 155° , 45° . В. 90° , 90° , 20° . Г. 20° , 20° , 160° .
- 5* Тупий кут утричі більший за гострий кут. Знайдіть ці кути, якщо кут, суміжний з одним із даних кутів, дорівнює 30° .
А. 120° і 40° . Б. 90° і 30° . В. 150° і 50° . Г. 180° і 60° .

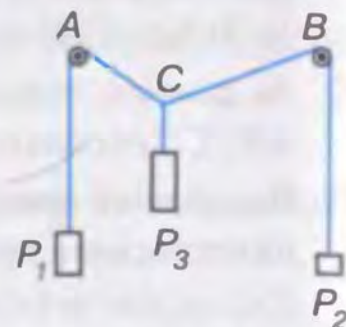
№ 2

- 1° Дві прямі при перетині січною утворюють внутрішні односторонні кути вказаної градусної міри. У якому з випадків дані прямі паралельні?
А. 101° і 89° . Б. 2° і 178° . В. 60° і 160° . Г. 83° і 87° .
- 2° Які внутрішні односторонні кути можуть утворювати дві паралельні прямі із січною?
А. 1° і 189° . Б. 112° і 68° . В. 53° і 53° . Г. 19° і 161° .
- 3° У якому з випадків дві прямі паралельні, якщо із січною вони утворюють:
А. Внутрішні односторонні кути 130° і 90° .
Б. Зовнішні односторонні кути 40° і 40° .
В. Внутрішні різносторонні кути 80° і 80° .
Г. Відповідні кути 53° і 127° ?
- 4 Паралельні прямі із січною утворюють внутрішні різносторонні кути α і β . Яке із співвідношень правильне?
А. $\frac{\alpha}{\beta} = 1$. Б. $\frac{\alpha}{\beta} = 0$. В. $\frac{\alpha}{\beta} > 1$. Г. $\frac{\alpha}{\beta} < 1$.
- 5* Один із зовнішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих і січній на 60° більший від їх середнього арифметичного. Знайдіть ці кути.
А. 60° і 120° . Б. 30° і 150° . В. 25° і 85° . Г. 90° і 110° .

проходить через точку перетину будь-яких двох даних прямих, не може бути паралельною жодній із двох інших даних прямих.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

32. Два предмети P_1 і P_2 масою 10 кг і 5 кг підвішено на кінцях нитки (мал. 178), яку перекинута через ролики A і B . Предмет P_3 масою 15 кг підвішений на тій самій нитці. Він урівноважує предмети P_1 і P_2 . Доведіть, що $\angle ACB = \angle CAP_1 + \angle CBP_2$.



Мал. 178



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 2

✓ КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які кути називаються суміжними? Вертикальними?
2. Поясніть, що таке аксіома; теорема; доведення.
3. Доведіть теорему про суму суміжних кутів; про вертикальні кути.
4. Які прямі називаються перпендикулярними? Паралельними?
5. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність перпендикулярної прямої.
6. Що таке «відстань від точки до прямої»?
7. Сформулюйте аксіому паралельних прямих.
8. Як називаються пари кутів при двох прямих і січній?
9. Сформулюйте і доведіть ознаки паралельності прямих; властивості паралельних прямих.

**У розділі
дізнаєтесь:**

про елементи трикутника та класифікацію трикутників за сторонами і кутами;

які властивості сторін і кутів мають різні види трикутників;

як установити вид трикутника та рівність двох трикутників;

як правильно міркувати, спираючись на властивості та ознаки трикутників

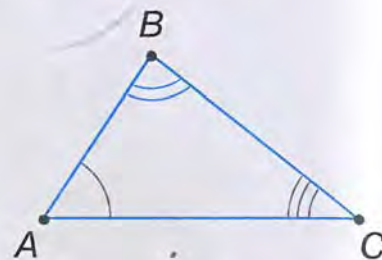




§ 10. ТРИКУТНИК І ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ



Позначимо три точки, наприклад A, B, C , що не лежать на одній прямій, і сполучимо їх відрізками (мал. 179). Дістанемо геометричну фігуру – трикутник. Точки A, B, C – це *вершини трикутника*, а відрізки AB, BC, AC – його *сторони*.



Мал. 179



Трикутником називається геометрична фігура, яка складається з трьох точок, що не лежать на одній прямій, і трьох відрізків, які сполучають ці точки.



Записуємо: $\triangle ABC$ і говоримо: «трикутник ABC ». У назві трикутника букви можна записати і в іншому порядку: $\triangle BCA, \triangle CBA, \triangle CAB$.

Кути ABC, BCA, CAB – це *кути трикутника ABC* . Їх позначають і однією буквою: $\angle A, \angle B, \angle C$.

Сторони трикутника ABC можна позначити маленькими буквами a, b, c . При цьому дотримуються правила: проти кута A лежить сторона a , проти кута B – сторона b , проти кута C – сторона c .

Подивіться на малюнок 179. Точка B не лежить на відрізку AC , тому довжина відрізка AC менша від суми довжин відрізків AB і BC : $AC < AB + BC$. Так само $AB < AC + BC, BC < AB + AC$.



Нерівність трикутника

Будь-яка сторона трикутника менша від суми двох інших його сторін.

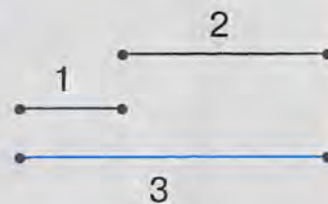
? Чи можуть відрізки, зображені на малюнку 180, бути сторонами трикутника? Не можуть, бо найбільший з відрізків дорівнює сумі двох інших.

Щоб установити, чи можна з трьох відрізків a, b і c утворити трикутник, перевірте, чи є найдовший з трьох відрізків меншим від суми двох інших.

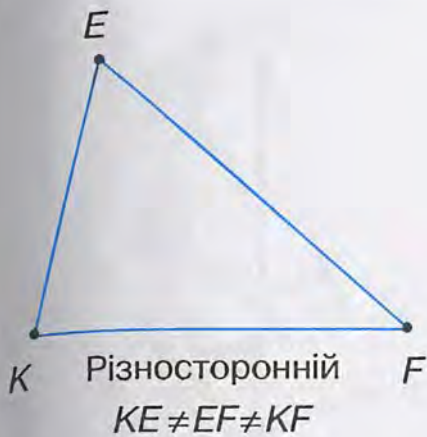
Трикутники класифікують (розрізняють між собою) за довжинами сторін та мірами кутів.

Залежно від довжин сторін трикутники поділяють на такі види:

- *різносторонні*, якщо всі сторони мають різну довжину (мал. 181);



Мал. 180



Мал. 181



Мал. 182



Мал. 183

- рівносторонні, якщо всі сторони рівні (мал. 182);
- рівнобедрені, якщо дві сторони рівні (мал. 183).

Рівні сторони рівнобедреного трикутника називають *бічними сторонами*, а третю його сторону – *основою*.

Суму довжин усіх сторін трикутника називають його *периметром*. Периметр позначають буквою P .

Те, що периметр трикутника ABC дорівнює 50 см, коротко можна записати так: $P_{\triangle ABC} = 50$ см.

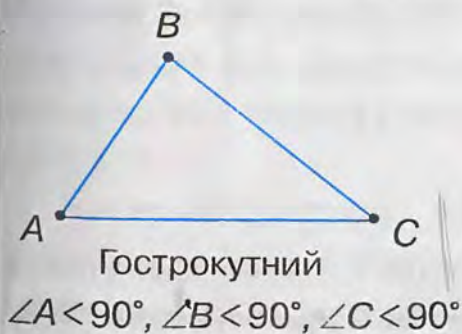
Задача. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 23 см. Знайдіть бічну сторону, якщо основа трикутника становить 5 см.

Розв'язання. Позначимо через x довжину бічної сторони трикутника. Врахувавши, що бічні сторони рівнобедреного трикутника рівні, матимемо: $x + x + 5 = 23$. Звідси $x = 9$ см.

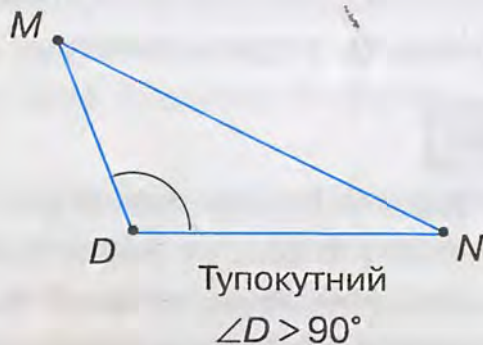
Залежно від міри кутів трикутники поділяють на такі види:

- *гострокутні*, якщо всі кути гострі (мал. 184);
- *тупокутні*, якщо один з кутів тупий (мал. 185);
- *прямокутні*, якщо один з кутів прямий (мал. 186).

Сторону прямокутного трикутника, що лежить проти прямого кута, називають *гіпотенузою*, а дві інші його сторони – *катетами*.



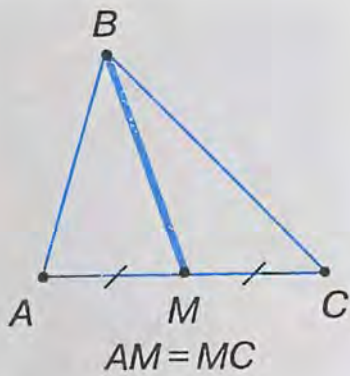
Мал. 184



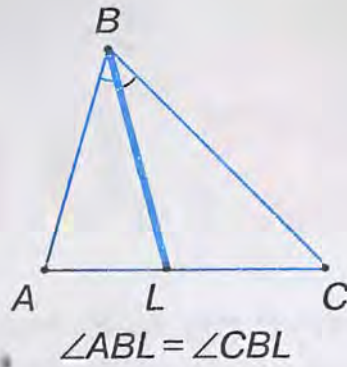
Мал. 185



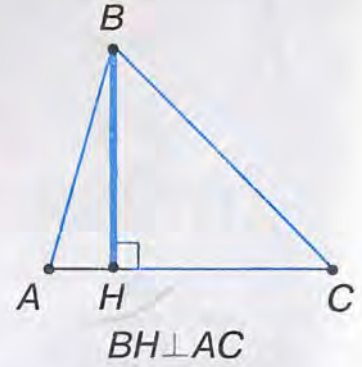
Мал. 186



Мал. 187



Мал. 188



Мал. 189

У будь-якому трикутнику можна провести відрізки, які мають спеціальні назви: *медіана*, *бісектриса* і *висота*.

На малюнках зображено медіану BM (мал. 187), бісектрису BL (мал. 188) і висоту BH (мал. 189) трикутника ABC . Дайте означення цим відрізкам. Порівняйте ваші означення з наведеними в підручнику.

Медіаною трикутника називається відрізок, що сполучає вершину трикутника із серединою протилежної сторони.

Бісектрисою трикутника називається відрізок бісектриси кута трикутника, що сполучає його вершину з точкою на протилежній стороні трикутника.

Висотою трикутника називається перпендикуляр, проведений з вершини трикутника до прямої, що містить його протилежну сторону.

Кожний трикутник має три медіани, три бісектриси і три висоти. Їх позначають і маленькими буквами: медіану – m , бісектрису – l , висоту – h .

Те, що медіану, бісектрису чи висоту проведено, наприклад, до сторони a трикутника, можна записати так: m_a , l_a , h_a .

Вершини, сторони і кути трикутника називають його *елементами*. Слово «елемент» означає «складова частина». Медіани, бісектриси і висоти — це *важливі відрізки* у трикутнику.

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Що знали про трикутники в далеку давнину?

Уже кілька тисяч років тому єгиптяни знали, що коли сторони трикутника дорівнюють 3, 4 і 5 одиничним відрізкам, то такий трикутник прямокутний. Землеміри Стародавнього Єгипту для побудови прямого кута ділили мотузку вузлами на 12 рівних частин і кінці зав'язували. Потім мотузку розтягували на землі



Мал. 190



Мал. 191

так, щоб утворився трикутник зі сторонами по 3, 4 і 5 поділок. Більший з кутів утвореного трикутника — прямий (мал. 190). Ребра бічних граней єгипетських пірамід утворюють майже рівносторонні трикутники (мал. 191).

У Стародавній Греції трикутник вважали однією з основних геометричних фігур.

2. Які ще властивості мають медіана, бісектриса і висота трикутника?

Накресліть довільний трикутник і за допомогою лінійки і транспортира проведіть з однієї вершини медіану, бісектрису і висоту. Яку властивість ви помітили?

Бісектриса трикутника завжди лежить між медіаною і висотою (мал. 192).

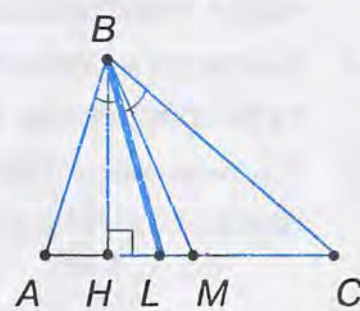
Проведіть у довільному трикутнику три його медіани. Вони перетнуться в одній точці. Таку саму властивість мають бісектриси і висоти.

Точка перетину медіан і бісектрис завжди лежить усередині трикутника. А точка перетину висот? Не завжди. У тупокутному трикутнику точка перетину висот лежить зовні трикутника (мал. 193). Накресліть прямокутний трикутник і позначте точку перетину його висот. Тепер сформулюйте загальну властивість щодо розташування точки перетину висот трикутника.

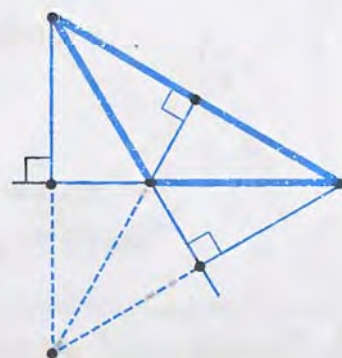
Три точки у трикутнику — точки перетину його медіан, бісектрис і висот — відносять до так званих *визначених точок* трикутника.

3. Слово «трикутник» античного походження. Знак ∇ для позначення трикутника застосовував ще в I ст. давньогрецький учений Герон. Знак Δ почали застосовувати в IV ст.

Назва «бісектриса» походить від латинських слів *bis* — дві та *seco* — січу, що означає «та, що розтинає надвоє». Слово «медіана» походить від латинського *medius* — середній, слово «катет» — від грецького *kathetos*, що означає «висок», «перпендикуляр». Цей



Мал. 192



Мал. 193

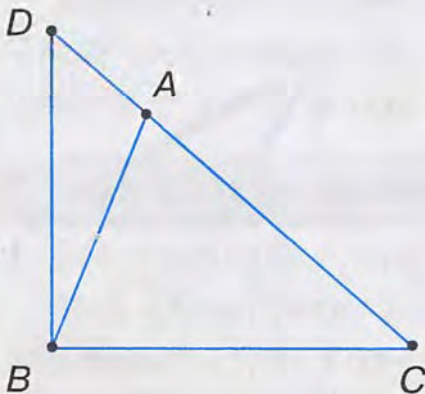
термін поширився лише у XVIII ст. Термін «гіпотенуза» походить від грецького слова, яке означає «та, що тягнеться під чимось», «та, що стягує». У «Началах» Евкліда вона так і називається: «сторона, яка прямиий кут стягує».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

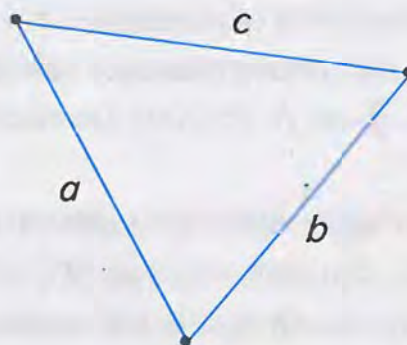
1. Що таке трикутник?
2. Сформулюйте нерівність трикутника.
3. Як називають трикутники залежно від довжин їх сторін?
4. Які сторони рівнобедреного трикутника називаються бічними сторонами? Яку сторону називають основою?
5. Що таке периметр трикутника?
6. Як називають трикутники залежно від міри їх кутів?
7. Як називають сторони прямокутного трикутника?
8. Що таке медіана трикутника? Бісектриса? Висота?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

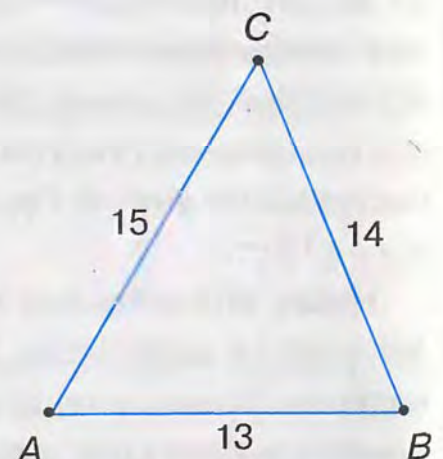
- 1'. Назвіть трикутники, зображені на малюнку 194. Яка сторона лежить проти кута C ? Назвіть сторони, прилеглі до кута C .
- 2'. Накресліть трикутник ABC . Назвіть:
 - 1) сторони, які лежать проти кутів A і B ;
 - 2) кути, які лежать проти сторін AB і BC ;
 - 3) кути, прилеглі до сторони AB ;
 - 4) кут, що лежить між сторонами AC і BC .
- 3'. На малюнку 195 сторони трикутника позначено маленькими буквами. Які назви мають вершини трикутника?
- 4'. Накресліть трикутник і позначте його вершини D, E, F . Назвіть сторони і кути трикутника. Позначте сторони трикутника маленькими буквами.
- 5'. На малюнку 196 указано довжини сторін трикутника. Чи виконується нерівність трикутника?



Мал. 194



Мал. 195



Мал. 196

6°. Проведіть необхідні вимірювання і назвіть на малюнку 197 трикутник:

- 1) рівносторонній;
- 2) рівнобедрений;
- 3) різносторонній;
- 4) гострокутний;
- 5) прямокутний;
- 6) тупокутний.

7°. Побудуйте за клітинками трикутник:

- 1) рівносторонній;
- 2) рівнобедрений;
- 3) різносторонній;
- 4) гострокутний;
- 5) прямокутний;
- 6) тупокутний.

8°. За даними на малюнку 198 назвіть медіану, бісектрису, висоту трикутника.

9°. Побудуйте довільний трикутник. За допомогою лінійки позначте середини сторін і проведіть медіани трикутника. Позначте точку перетину медіан.

10°. Побудуйте довільний трикутник. За допомогою транспортира і лінійки проведіть його бісектриси. Позначте точку перетину бісектрис трикутника.

11°. Побудуйте гострокутний трикутник. За допомогою косинця проведіть висоти трикутника. Позначте точку їх перетину.

12°. Чи правильно, що у трикутнику PQR :

- 1) сторона PQ лежить проти кута Q ;
- 2) кут P прилеглий до сторони r ;
- 3) кут Q лежить між сторонами PR і QR ;
- 4) сторона p лежить проти кута P ?

13°. Чи можна із відрізків, зображених на малюнках 199, 200, утворити трикутник? Відповідь обґрунтуйте.

14°. Чи може трикутник мати такі сторони:

- 1) 2 см, 3 см, 4 см;
- 2) 6 см, 7 см, 13 см;
- 3) 7 см, 8 см, 9 см?

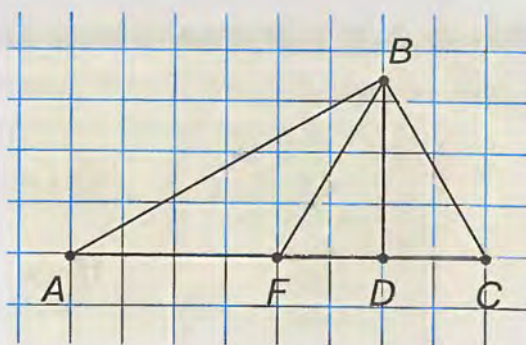
15°. Визначте вид трикутника, якщо його сторони дорівнюють:

- 1) 3 см, 5 см, 7 см;
- 2) 0,3 дм, 30 мм, 3 см;
- 3) 0,06 дм, 0,1 см, 6 мм.

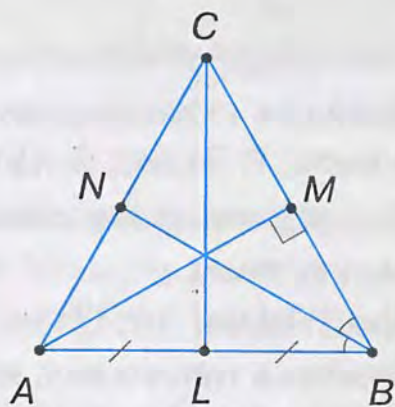
16°. Назвіть основу і бічні сторони рівнобедреного $\triangle ABC$, якщо:

- 1) $a = 7$ см, $b = 6$ см, $c = 7$ см;
- 2) $a = 0,6$ дм, $b = 4$ см, $c = 40$ мм;
- 3) $a = 50$ мм, $b = 0,5$ дм, $c = 0,6$ дм.

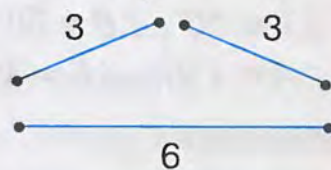
17°. Чи можна накреслити рівносторонній трикутник, який не буде рівнобедреним?



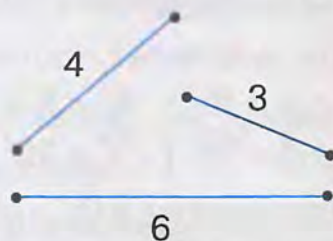
Мал. 197



Мал. 198



Мал. 199



Мал. 200

18°. a, b, c — сторони трикутника, P — його периметр. Заповніть таблицю 11.

Таблиця 11

a	12 см	20 см	8 см	
b	16 см	21 см		8 см
c	18 см		17 см	14 см
P		70 см	40 см	31 см

19°. Знайдіть сторони рівностороннього трикутника, якщо його периметр дорівнює: 1) 36 см; 2) 45 см; 3) 72 см.

20°. Знайдіть периметр рівнобедреного трикутника з основою a і бічною стороною b , якщо:

1) $a = 14$ см, $b = 12$ см; 2) $a = 16$ см, $b = 17$ см; 3) $a = 8$ см, $b = 5$ см.

21°. Який вид трикутника, якщо один з його кутів дорівнює:

1) 90° ; 2) 141° ; 3) 91° ?

22°. Визначте вид трикутника ABC , якщо:

1) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 90^\circ$; 2) $\angle A = 89^\circ$, $\angle B = 50^\circ$, $\angle C = 41^\circ$;

3) $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 35^\circ$, $\angle C = 25^\circ$.

23°. Накресліть:

1) рівнобедрений прямокутний трикутник;

2) рівнобедрений тупокутний трикутник;

3) рівнобедрений гострокутний трикутник.

24°. Назвіть катети і гіпотенузу прямокутного $\triangle ABC$, якщо:

1) $\angle A = 90^\circ$; 2) $\angle B = 90^\circ$; 3) $\angle C \neq 90^\circ$ і $\angle A \neq 90^\circ$;

4) $\angle B \neq 90^\circ$ і $\angle C \neq 90^\circ$.

25°. У трикутнику ABC проведено медіани AK , BM і CN . Яка довжина відрізків AN , BN , AM , CM , BK , CK , якщо:

1) $AB = 5$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см;

2) $AB = 20$ см, $BC = AC = 22$ см;

3) $AB = BC = 10$ см, $AC = 16$ см;

4) $AB = BC = AC = 27$ см?

26°. Чим відрізняється бісектриса трикутника від бісектриси кута?

27°. У трикутнику ABC проведено бісектриси AK , BM і CN . Знайдіть кути BAK , CAK , ACN , BCN , ABM , CBM , якщо:

1) $\angle A = 130^\circ$, $\angle B = 20^\circ$, $\angle C = 30^\circ$;

2) $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = \angle C = 55^\circ$;

3) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 90^\circ$, $\angle C = 50^\circ$;

4) $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$.

- 28°. Побудуйте довільні прямокутний і тупокутний трикутники. За допомогою косинця проведіть висоти в кожному трикутнику. Знайдіть і позначте точку перетину висот трикутника або їх продовжень.
29. Чи можуть сторони трикутника бути пропорційними числам:
1) 1, 2, 3; 2) 3, 4, 5; 3) 3, 5, 9?
30. Який вид трикутника, якщо його сторони відносяться, як:
1) 1 : 1 : 1; 2) 5 : 12 : 13; 3) 5 : 5 : 8?
31. Назвіть основу і бічні сторони рівнобедреного $\triangle ABC$, якщо:
1) $a > c$ і $b > c$; 2) $a < b$ і $c < b$; 3) $a \neq b$ і $a \neq c$.
32. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 23 см. Знайдіть:
1) основу трикутника, якщо бічна сторона дорівнює 6 см;
2) бічні сторони, якщо основа трикутника дорівнює 3 см;
3) сторони трикутника, якщо основа більша від бічної сторони на 2 см.
33. Периметр рівнобедреного трикутника дорівнює 36 см. На його основі побудовано рівносторонній трикутник з периметром 30 см. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника.
34. Дві сторони трикутника дорівнюють 4 і 7 см. Чи може периметр трикутника дорівнювати:
1) 14 см; 2) 21 см; 3) 31 см?
35. Чи існує трикутник із стороною 36 мм і периметром 70 мм?
36. Одна сторона трикутника дорівнює 10 см, друга — 14 см, а третя більша за другу на 2 см. Знайдіть периметр трикутника.
37. Одна сторона трикутника удвічі більша за другу, а третя сторона дорівнює 15 см. Знайдіть невідомі сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 45 см.
38. Трикутник, периметр якого дорівнює 15 см, поділяється медіаною на два трикутники з периметрами 11 і 14 см. Знайдіть медіану.
39. **Доведіть, що медіана, проведена до основи рівнобедреного трикутника, поділяє його на два трикутники, периметри яких рівні.**
40. Основа і бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнюють відповідно 10 і 13 см. Знайдіть медіану, проведену до основи трикутника, якщо периметр одного з утворених трикутників дорівнює 30 см.
41. Який вид трикутника, якщо його кути дорівнюють таким частинам розгорнутого кута:
1) $\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$; 2) $\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{5}{9}$; 3) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{4}{9}$?
42. Який вид трикутника, якщо бісектриса його кута утворює зі стороною цього кута кут, що дорівнює:
1) 0,25 розгорнутого кута; 2) 50% прямого кута;
3) 30% розгорнутого кута; 4) 0,6 прямого кута?

43. Чи може трикутник бути тупокутним, якщо основа однієї з його висот лежить:
 1) на стороні трикутника; 2) на продовженні сторони трикутника;
 3) у кінці сторони трикутника?
 Зробіть малюнки.
- 44*. У рівнобедреному трикутнику дві сторони дорівнюють a і b . Яка третя сторона, якщо:
 1) $a = 12$ см, $b = 5$ см; 2) $a = 6$ см, $b = 15$ см; 3) $a = 7$ см, $b = 14$ см?
- 45*. У рівнобедреному трикутнику основа в n раз менша від бічної сторони, а периметр дорівнює P . Знайдіть сторони трикутника, якщо:
 1) $n = 2$, $P = 50$ см; 2) $n = 3$, $P = 35$ см; 3) $n = 4$, $P = 63$ см.
- 46*. Одна сторона трикутника дорівнює 7 см, друга сторона у 2 рази більша за першу, а третя — на 4 см менша за другу. Знайдіть периметр трикутника.
- 47*. Сума першої і другої сторін трикутника — 20 см, сума другої і третьої сторін — 22 см, а сума першої і третьої сторін — 28 см. Знайдіть периметр трикутника.
- 48*. Медіана ділить трикутник на два трикутники, периметри яких рівні. Який вид трикутника?
- 49*. Накресліть довільний трикутник. Перетніть його двома дряними так, щоб на малюнку утворилося:
 1) 3 трикутники; 2) 5 трикутників.
- 50*. У прямокутному трикутнику з катетами a і b проведено висоту до гіпотенузи c . Основа висоти ділить гіпотенузу на відрізки, що відносяться, як $a^2 : b^2$, починаючи від вершини B . З'ясуйте, на скільки сантиметрів периметр одного з утворених прямокутних трикутників більший за периметр другого, якщо:
 1) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 10$ см;
 2) $a = 7$ см, $b = 24$ см, $c = 25$ см;
 3) $a = 5$ см, $b = 12$ см, $c = 13$ см.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 51°. Чи вистачить 12 см дроту, щоб зігнути з нього трикутник, одна зі сторін якого дорівнює:
 1) 7 см; 2) 6 см; 3) 5 см?



52. Які промені накладатимуться, якщо трикутник перегнути вздовж його бісектриси? А вздовж висоти? Проведіть експеримент. Висновки обґрунтуйте.

§11. ВЛАСТИВОСТІ КУТІВ ТРИКУТНИКА



Накресліть довільний трикутник і виміряйте транспортиром його кути. Чому дорівнює їх сума?

Теорема (про суму кутів трикутника).
Сума кутів трикутника дорівнює 180° .

Дано: $\triangle ABC$ (мал. 201).

Довести: $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$.

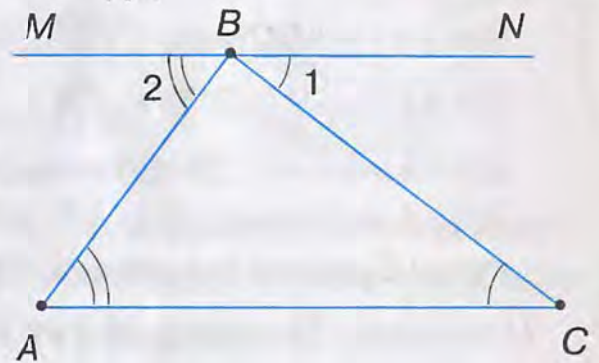
Доведення. Проведемо через вершину B трикутника пряму MN , паралельну AC (мал. 201). Утворені кути позначимо цифрами: $\angle 1$ і $\angle 2$.

$\angle 1 = \angle C$, $\angle 2 = \angle A$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих MN і AC та січних BC і AB відповідно.

Кути $1, 2, B$ утворюють розгорнутий кут, тому $\angle 1 + \angle B + \angle 2 = 180^\circ$.

Замінивши в цій рівності кути 1 і 2 рівними їм кутами C і A , дістанемо:

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ.$$



Мал. 201

? Чи може трикутник мати два прямих або два тупих кути? Не може. Якби трикутник мав два прямих або два тупих кути, то сума цих двох кутів дорівнювала б 180° або була б більшою за 180° . Тоді сума всіх кутів трикутника перевищувала б 180° .

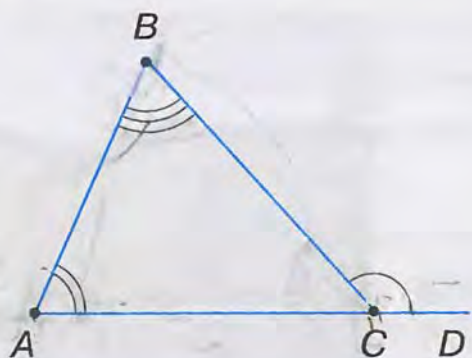
? Якщо в трикутнику один з кутів прямий або тупий, то якого виду інші два його кути? Сума двох інших кутів не може бути більшою за 90° . Отже, кожний з них є гострим.

Наслідок 1. Трикутник може мати лише один прямий або тупий кут. Якщо один із кутів трикутника прямий або тупий, то два інші кути – гострі.

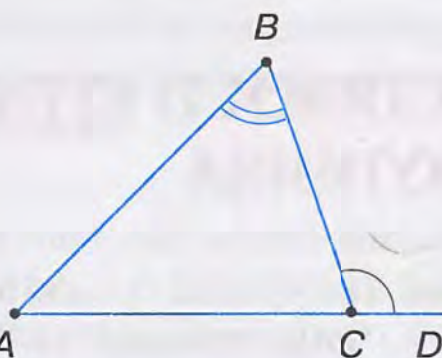
Наслідок 2. Сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° .

Справді, у прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 90° . Тоді сума двох інших кутів дорівнює $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

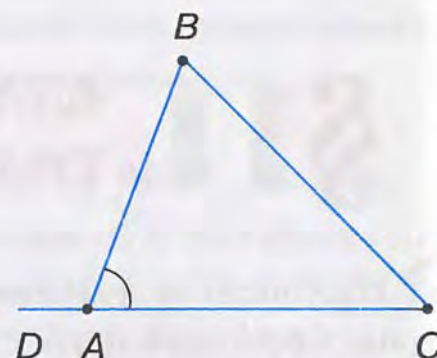
Якщо продовжимо яку-небудь сторону трикутника, то дістанемо кут, суміжний з кутом трикутника. Такий кут називають *зовнішнім кутом* трикутника.



Мал. 202



Мал. 203



Мал. 204

На малюнку 202 $\angle BCD$ – зовнішній кут $\triangle ABC$.



Теорема (властивість зовнішнього кута трикутника).

Зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

Дано: $\triangle ABC$ (мал. 202), $\angle BCD$ – зовнішній кут $\triangle ABC$.

Довести: $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

Доведення. За теоремою про суму кутів трикутника, $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$. Звідси випливає, що $\angle A + \angle B = 180^\circ - \angle C$. Зовнішній кут BCD суміжний з кутом C даного трикутника, тому $\angle BCD = 180^\circ - \angle C$. Отже, $\angle BCD = \angle A + \angle B$.

Наслідок. Зовнішній кут трикутника більший за кожний кут трикутника, не суміжний з ним.

Справді, за теоремою про зовнішній кут трикутника, $\angle BCD = \angle A + \angle B$ (мал. 202). Сума додатних чисел більша за кожний із доданків, тому $\angle BCD > \angle A$, $\angle BCD > \angle B$.



Задача. Зовнішній кут трикутника дорівнює 100° , а не суміжний з ним кут – 55° . Знайдіть кути трикутника.

Розв'язання. З теореми про суму суміжних кутів випливає: $\angle C = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ (мал. 203). За теоремою про зовнішній кут трикутника, $\angle BCD = \angle A + \angle B$. Звідси $\angle A = \angle BCD - \angle B = 100^\circ - 55^\circ = 45^\circ$.



Щоб знайти кут трикутника, наприклад, $\angle A$ трикутника ABC (мал. 204), обчисліть:

- 1) $180^\circ - (\angle B + \angle C)$, якщо відомі $\angle B$ і $\angle C$;
- 2) $180^\circ - \angle BAD$, якщо відомий зовнішній кут при вершині A ;
- 3) $90^\circ - \angle B$, якщо $\triangle ABC$ – прямокутний з прямим $\angle C$.



ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Чи можна знайти інше доведення теореми про суму кутів трикутника, ніж те, що наведено в підручнику?

Пригадайте, як доводили цю теорему. Два кути трикутника замінили рівними їм кутами. Ці кути, разом з третім кутом трикутника, утворюють розгорнутий кут, який дорівнює 180° . Користуючись цим способом, доведіть теорему про суму кутів трикутника за малюнком 205.

Більшість теорем підручника можна довести по-іншому. Пам'ятайте, знаходити різні способи доведення теореми, різні способи розв'язування задачі, порівнювати їх, вибирати найпростіше чи красиве — цікава і корисна робота. Адже при цьому ви берете участь у невеликих математичних дослідженнях.

2. Чи може сума кутів трикутника не дорівнювати 180° ?

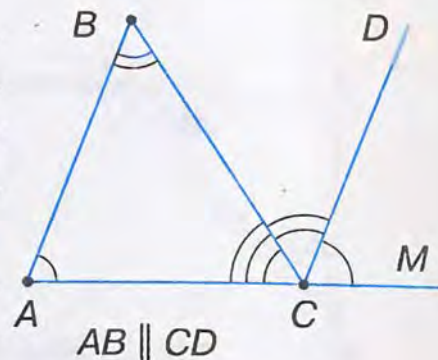
Трикутники, у яких сума кутів більша за 180° , існують не на площині, а на сфері (мал. 206). Їх називають *сферичними трикутниками*, а геометрію — *сферичною геометрією*.

Поміркуємо. Земна поверхня має форму сфери (подивіться на глобус). Найкоротша лінія між двома точками на площині — пряма, а на сфері вона крива. Якщо із кривих ліній утворити трикутники, то сума їх кутів буде більшою за 180° . Звичайно, це стосується великих за розмірами трикутників.

Наприклад, розглянемо трикутник, у якого вершина A — на північному полюсі, а вершини B і F — на екваторі (мал. 206). Тоді кожний з кутів при вершинах B і F дорівнюватиме 90° . А сума кутів $\triangle ABF$ ($180^\circ +$ кут при вершині A) більша за 180° .

Подивіться на глобус і знайдіть ще які-небудь сферичні трикутники.

Науку, яка займається вимірюванням Землі та способами зображення її поверхні, називають *геодезією*.



Мал. 205



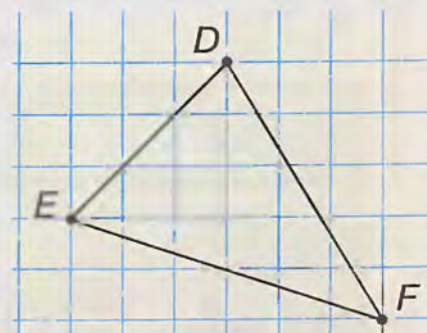
Мал. 206

✓ ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

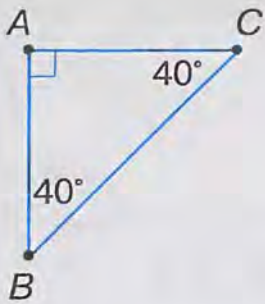
1. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів трикутника.
2. Доведіть, що трикутник може мати лише один прямий або тупий кут.
3. Доведіть, що сума гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 90° .
4. Що таке зовнішній кут трикутника?
5. Доведіть, що зовнішній кут трикутника дорівнює сумі двох кутів трикутника, не суміжних з ним.

🕒 РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

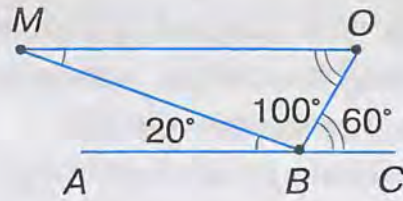
1. Побудуйте за клітинками трикутник, зображений на малюнку 207. Виміряйте кути трикутника. Чому дорівнює їх сума?



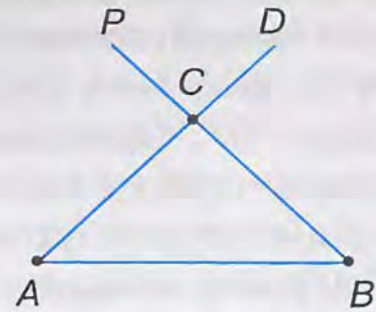
Мал. 207



Мал. 208

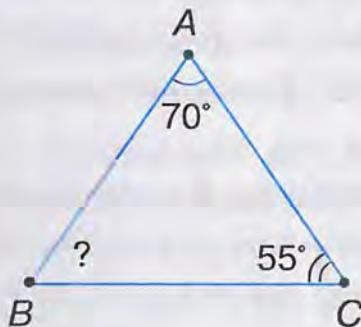


Мал. 209

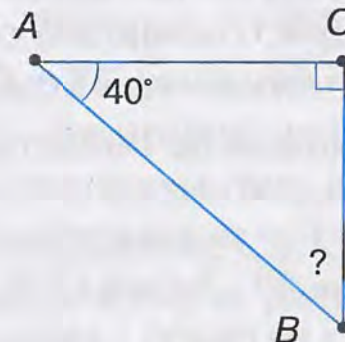


Мал. 210

- 2°. Чи правильно вказано на малюнку 208 градусну міру кутів $\triangle ABC$? Відповідь поясніть.
- 3°. За даними на малюнку 209 назвіть кути, які утворюють розгорнутий кут ABC . Назвіть рівні кути. Чому дорівнює сума кутів MBO , BOM , OMB ?
- 4°. Назвіть зображені на малюнку 210 зовнішні кути $\triangle ABC$.
- 5°. Накресліть $\triangle KLM$: 1) гострокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний. Побудуйте по одному зовнішньому куту при кожній вершині трикутника.
- 6°. За даними, наведеними на малюнках 211, 212, визначте невідомий кут $\triangle ABC$.



Мал. 211



Мал. 212

- 7°. Знайдіть невідомий кут трикутника, якщо два його кути дорівнюють:
1) 20° і 40° ; 2) 100° і 30° ; 3) 80° і 60° .
- 8°. Чи можуть кути трикутника дорівнювати:
1) 70° , 51° , 58° ; 2) 42° , 89° , 49° ; 3) 65° , 75° , 41° ?
- 9°. За даними таблиці 12 знайдіть невідомі кути $\triangle ABC$.

Таблиця 12

$\angle A$	30°	n°	120°
$\angle B$	n°	$2n^\circ$	$n^\circ + 30^\circ$
$\angle C$	$n^\circ + 30^\circ$	72°	n°

10°. Чи може у трикутнику бути:
1) два прямих кути; 2) два тупих кути; 3) тупий і прямий кути?
Поясніть відповідь.

11°. Чи може у трикутнику кожний кут бути:
1) меншим від 60° ; 2) більшим за 60° ?
Поясніть відповідь.

12°. Чи буде гострокутним трикутник, два кути якого дорівнюють:
1) 30° і 60° ; 2) 25° і 55° ; 3) 43° і 52° ?

13°. Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює:
1) 52° ; 2) 24° ; 3) 65° .
Знайдіть другий гострий кут.

14°. Якого виду трикутник, якщо один з його кутів:
1) дорівнює сумі двох інших кутів;
2) більший за суму двох інших кутів?

15°. Якого виду трикутник, якщо два кути його дорівнюють:
1) 40° і 50° ; 2) 25° і 35° ; 3) 80° і 40° ?

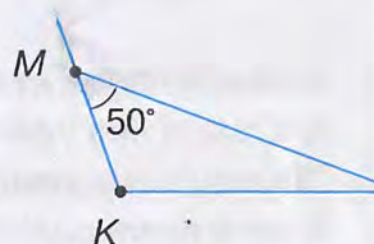
16°. Якщо два трикутники мають по два рівних кути, то і треті їх кути рівні між собою. Доведіть.

17°. За даними, наведеними на малюнку 213, знайдіть зовнішній кут при вершині M трикутника KLM .

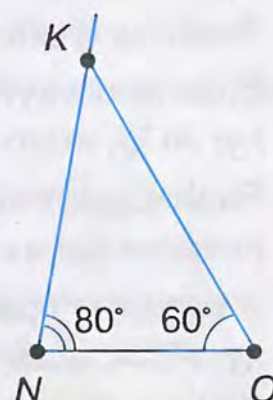
18°. Знайдіть зовнішній кут трикутника ABC при вершині даного кута, якщо:
1) $\angle A = 57^\circ$; 2) $\angle B = 34^\circ$; 3) $\angle C = 76^\circ$.

19°. За даними, наведеними на малюнку 214, знайдіть зовнішній кут при вершині K трикутника NOK .

20°. $\angle BCD$ – зовнішній кут $\triangle ABC$. Заповніть таблицю 13.



Мал. 213



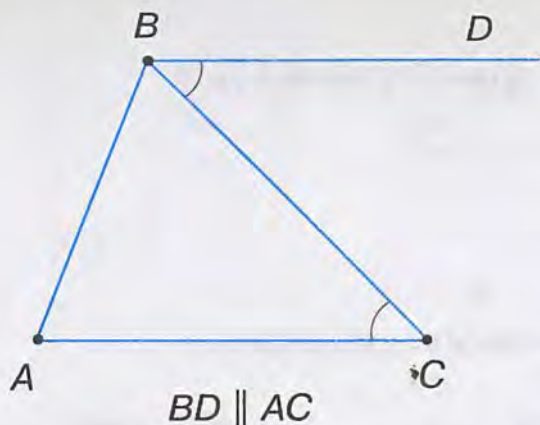
Мал. 214

Таблиця 13

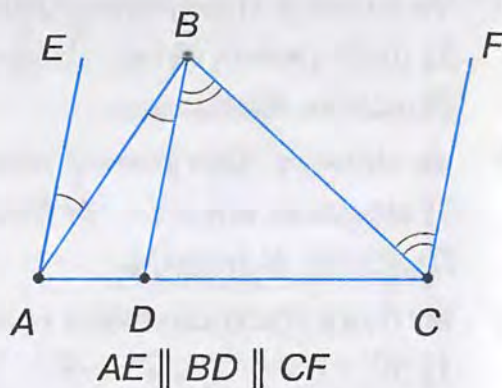
$\angle A$	35°	90°	20°	30°
$\angle B$	55°	45°	95°	30°
$\angle C$	90	45°	65°	120°
$\angle BCD$	90	135	115°	60°

21°. Скільки зовнішніх кутів у трикутника?

22°. Знайдіть кути трикутника, якщо вони пропорційні числам:
1) 1, 2, 3; 2) 4, 5, 6; 3) 5, 5, 8.

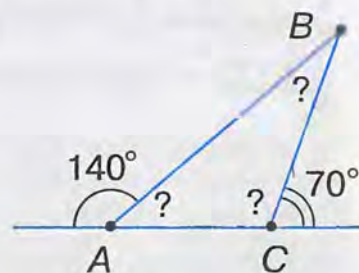


Мал. 215

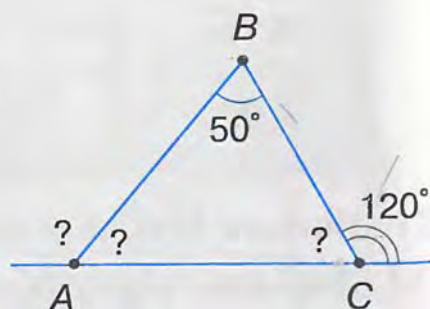


Мал. 216

23. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо:
- 1) один із них удвічі більший за інший;
 - 2) один із них менший від іншого на 20° ;
 - 3) кути пропорційні числам 2 і 3.
24. Доведіть теорему про суму кутів трикутника, скориставшись малюнками 215 та 216.
25. Знайдіть тупий кут між бісектрисами гострих кутів прямокутного трикутника.
26. Бісектриси кутів A і B трикутника ABC перетинаються в точці O . Знайдіть кут AOB , якщо $\angle A = 64^\circ$, $\angle B = 106^\circ$.
27. Знайдіть кут між бісектрисами внутрішніх односторонніх кутів при паралельних прямих і січній.
28. З вершини прямого кута трикутника ABC проведено висоту BD . Знайдіть кут ABD , якщо $\angle C = 40^\circ$.
29. BD — висота, проведена з вершини прямого кута трикутника ABC . $\angle ABD = \angle CBD$. Доведіть, що $\angle ABD = \angle BCD$.
30. Висота трикутника ділить кут, з вершини якого вона проведена, на кути 30° і 40° . Знайдіть кути трикутника.
31. BD — висота трикутника ABC . Знайдіть кути ABD і CBD , якщо $\angle A = 75^\circ$, $\angle C = 35^\circ$.
32. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює 80° . Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута.
33. У прямокутному трикутнику кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює 30° . Знайдіть гострі кути трикутника.
34. За даними, наведеними на малюнках 217, 218, знайдіть кути, позначені знаком «?».



Мал. 217

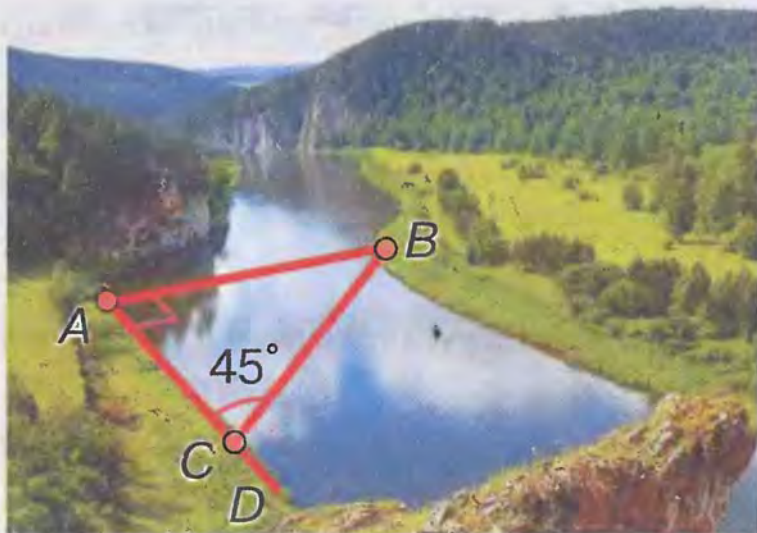


Мал. 218

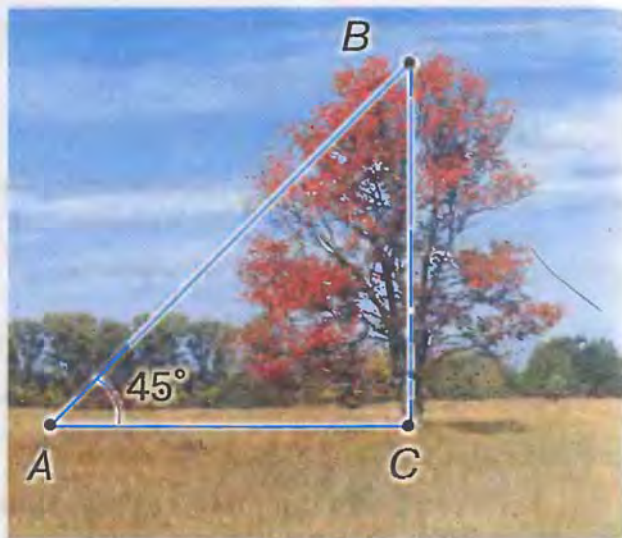
35. Зовнішній кут трикутника дорівнює 100° . Знайдіть кути трикутника, якщо один із них дорівнює:
1) 40° ; 2) 55° ; 3) 30° .
36. Знайдіть гострі кути прямокутного трикутника, якщо його зовнішній кут дорівнює:
1) 120° ; 2) 132° ; 3) 144° .
37. Зовнішній кут трикутника дорівнює 80° . Знайдіть кути трикутника, не суміжні з ним, якщо вони пропорційні числам 3 і 5.
38. Якщо один із зовнішніх кутів трикутника гострий, то якими будуть інші зовнішні його кути? Поясніть відповідь.
39. Який вид трикутника, якщо один із його зовнішніх кутів дорівнює:
1) 90° ; 2) 32° ; 3) 89° ?
40. Зовнішній кут трикутника дорівнює 70° . Чи може кут трикутника, не суміжний з ним, дорівнювати:
1) 85° ; 2) 55° ; 3) 69° ?
41. Зовнішній кут прямокутного трикутника дорівнює 128° . Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута.
- 42*. Знайдіть гострий кут між бісектрисами двох кутів трикутника, якщо третій кут дорівнює 60° .
- 43*. У трикутнику ABC бісектриси кутів B і C перетинаються під кутом 128° . Знайдіть кут A .
- 44*. У трикутнику ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle C = 60^\circ$. Бісектриса BD ділить трикутник на два трикутники ABD і BCD . Знайдіть кути цих трикутників.
- 45*. У трикутнику ABC $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 50^\circ$, AD – висота. Доведіть, що $\angle CAD = 2\angle BAD$.
- 46*. У трикутнику ABC з вершини B проведені висота і бісектриса. Знайдіть кут між висотою і бісектрисою, якщо:
1) $\angle A = 80^\circ$, $\angle C = 56^\circ$; 2) $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$; 3) $\angle B = 80^\circ$, $\angle C = 70^\circ$.
- 47*. У трикутнику ABC $\angle A = 35^\circ$, $\angle B = 62^\circ$. Через його вершини проведено прямі, паралельні протилежним сторонам. Знайдіть кути трикутника, утвореного цими прямими.
- 48*. Чи існують трикутники, в яких один із кутів дорівнює різниці двох інших кутів?
- 49*. Доведіть, що сума кутів трикутника в чотири рази менша від суми зовнішніх його кутів.
- 50*. Чи може бісектриса кута трикутника бути паралельною бісектрисі його зовнішнього кута? Обґрунтуйте відповідь.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

51. За допомогою однієї лінійки побудуйте суму двох кутів даного трикутника.



Мал. 219




Мал. 220

52. Щоб виміряти на місцевості відстань між двома пунктами A та B , з яких один (пункт B) неприступний, провішують пряму AD , перпендикулярну до AB (мал. 219). На прямій AD знаходять таку точку C , щоб $\angle ACB = 45^\circ$. Шукана відстань AB дорівнює AC . Чому?
53. Поясніть за малюнком 220, як можна знайти висоту дерева.



§12. РІВНІСТЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ФІГУР

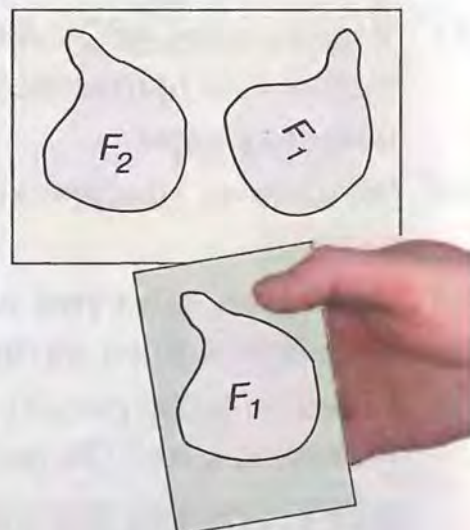
 Вам доводилося з'ясовувати, чи рівні які-небудь два предмети, наприклад аркуші паперу, блокноти,

олівці, тенісні ракетки. Як ви діяли? Прикладали один предмет до другого. Наприклад, коли купували взуття, аби переконатися, що воно однакове, продавець прикладав підшвами туфлі або черевики відібраної пари.

Так можна порівняти два відрізки або два кути і взагалі будь-які дві геометричні фігури.

На малюнку 221 зображено геометричні фігури F_1 і F_2 . Як порівняти ці фігури – установити, рівні вони чи ні? Для цього застосуємо спосіб накладання.

Скопіюємо фігуру F_1 на кальку. Переміщаючи кальку, накладемо копію фігури F_1 на фігуру F_2 . Якщо вони сумістяться, то фігури



Мал. 221

F_1 і F_2 рівні. Можна уявити, що на фігуру F_2 накладаємо не копію фігури F_1 , а саму фігуру F_1 . Надалі будемо говорити про накладання самої фігури, а не її копії, на іншу фігуру.



Дві геометричні фігури називаються **рівними**, якщо при накладанні вони суміщаються.



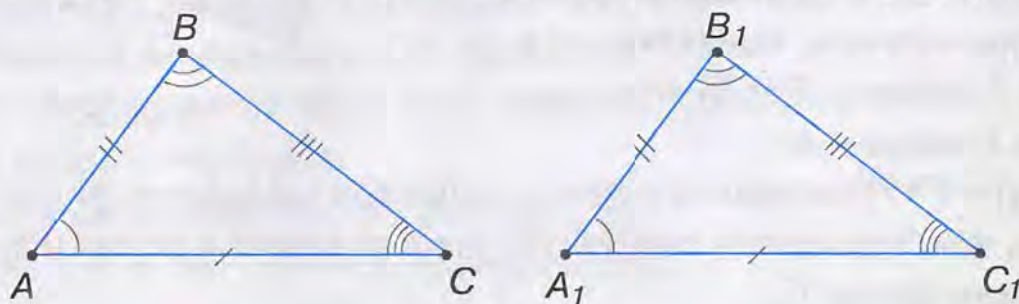
Рівність фігур F_1 і F_2 записують так: $F_1 = F_2$.

Виходячи із загального означення рівності фігур, сформулюйте означення рівних трикутників і порівняйте з наведеним.



Два **трикутники** називаються **рівними**, якщо при накладанні вони суміщаються.

На малюнку 222 ви бачите рівні трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.



Мал. 222

Записуємо: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ і говоримо: «Трикутник ABC дорівнює трикутнику $A_1B_1C_1$ ».

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ при накладанні сумістяться, тобто сумістяться відповідні сторони: AB з A_1B_1 , BC з B_1C_1 , AC з A_1C_1 та кути: $\angle A$ з $\angle A_1$, $\angle B$ з $\angle B_1$, $\angle C$ з $\angle C_1$. Тому має значення порядок запису вершин рівних трикутників. Для зображених на малюнку 222 трикутників запис « $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ » — неправильний.

У рівних трикутників рівні *відповідні сторони* і *відповідні кути*; проти рівних сторін лежать рівні кути, і навпаки — проти рівних кутів лежать рівні сторони. Наприклад, на малюнку 222 проти рівних сторін AB і A_1B_1 лежать рівні кути C і C_1 .

Проте накладання не завжди можна здійснити на практиці. Наприклад, не можна накласти одну земельну ділянку на другу, або шибки великих вітрин, або два краї столу.

Тому в геометрії застосовують інші способи встановлення рівності фігур.

Ви вже знаєте, щоб порівняти два відрізки, їх вимірюють, бо відрізки, які мають рівні довжини, рівні. Так само порівнюють кути, оскільки кути, які мають рівні градусні міри, рівні.

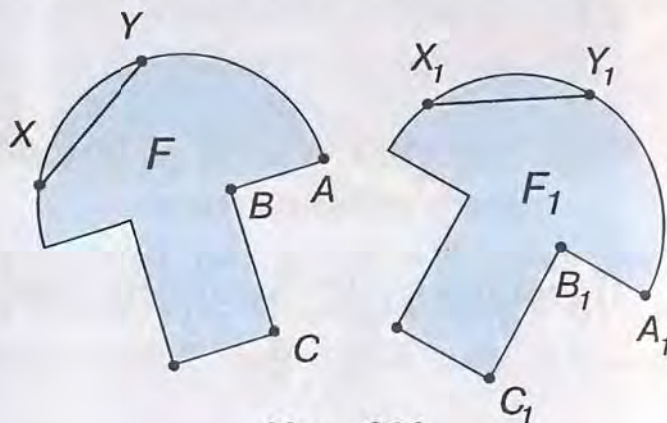
Рівність трикутників також можна встановити, не накладаючи їх. Для цього порівнюють довжини їх сторін і градусні міри кутів.

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Ви знаєте, що коли відрізки при накладанні суміщаються, то відстані між їх кінцями рівні. Але в загальному означенні рівності фігур поняття «відстань між точками» не використовувалось. Чи не можна визначити рівність фігур, користуючись цим поняттям? Поміркуємо.

Нехай фігури F і F_1 рівні, тобто суміщаються накладанням (мал. 223). Фігури складаються з точок. Тоді точка A фігури F суміститься з відповідною точкою A_1 фігури F_1 , точка B — з точкою B_1 , C — з C_1 . При такому накладанні, які б дві точки X і Y фігури F ми не взяли, відстань між ними дорівнює відстані між відповідними їм точками X_1 і Y_1 фігури F_1 . На малюнку 223 $XY = X_1Y_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Спробуйте дати означення рівних фігур, користуючись поняттям «відстань між точками». Порівняйте ваше означення з наведеним.



Мал. 223

Дві фігури F і F_1 називають рівними, якщо при накладанні фігури F на фігуру F_1 відстань між будь-якими точками фігури F дорівнює відстані між відповідними їм точками фігури F_1 .

2. У 1899 р. видатний німецький математик Д. Гільберт (1862 — 1943) опублікував фундаментальну працю «Основи геометрії». У цій роботі замість терміна «рівні фігури» введено термін «конгруентні фігури». Назва «конгруентний» походить від латинського слова *congruentis* — той, що збігається. Автора змусило використовувати цей термін те, що розуміння рівності в геометрії за змістом відрізняється від його розуміння в арифметиці й алгебрі. Наприклад, $\frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}$. Тут знак рівності означає, що праворуч і ліворуч від нього стоїть те саме число, але по-різному записане. Про фігури F і F_1 на малюнку 223 не можна сказати, що це одна фігура. Навпаки, тут дві різні фігури. Тому і названо їх не рівними, а конгруентними.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

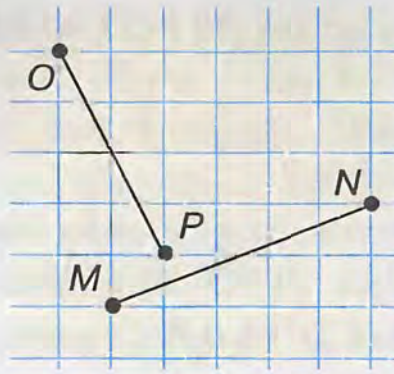
1. Які дві геометричні фігури називаються рівними?
2. Які трикутники називаються рівними?
3. Назвіть рівні елементи у рівних трикутників.
4. Яка залежність між сторонами і кутами у рівних трикутників?
5. Як порівняти два відрізки, два кути, не накладаючи їх один на одного?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

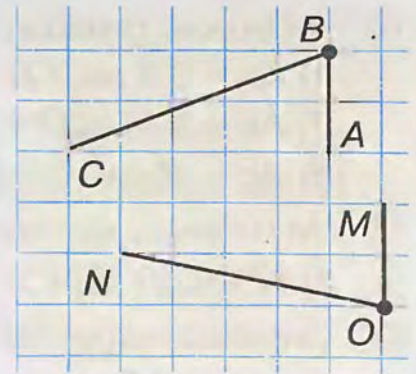
1. На малюнку 224 зображено рівні фігури F і F_1 . Поясніть, як їх можна сумістити накладанням.



Мал. 224

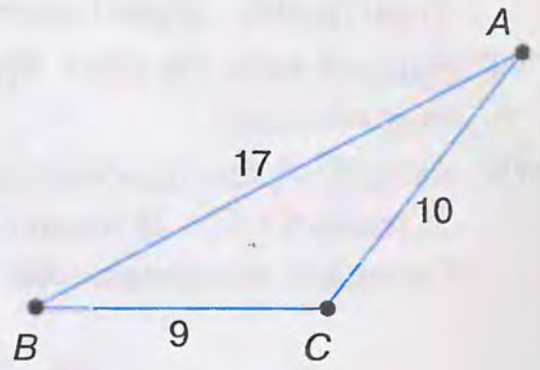


Мал. 225

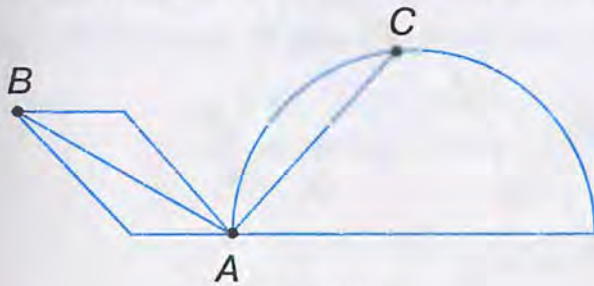


Мал. 226

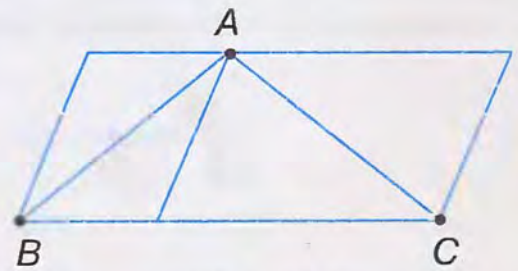
- 2'. Чи можна сумістити накладанням відрізки OP і MN (мал. 225)? Відповідь поясніть.
- 3'. Чи можна сумістити накладанням кути ABC і MON (мал. 226)? Відповідь поясніть.
- 4'. Трикутник XYZ дорівнює трикутнику ABC , зображеному на малюнку 227. Визначте довжини сторін трикутника XYZ . Назвіть рівні кути цих трикутників.
- 5'. Порівняйте на око відрізки AB і AC (мал. 228 і 229). Перевірте свій висновок вимірюванням.



Мал. 227

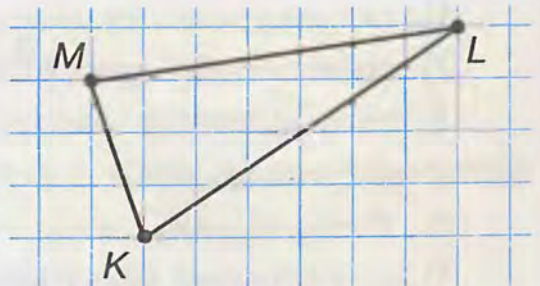


Мал. 228

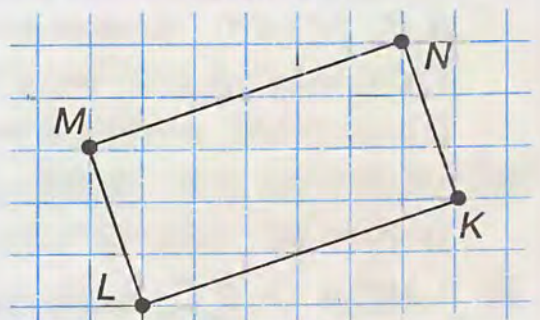


Мал. 229

- 6'. Побудуйте за клітинками спочатку $\triangle KLM$ (мал. 230), а потім $\triangle AKL$, що дорівнює $\triangle KLM$.
- 7'. Побудуйте за клітинками прямокутник $ABCD$, що дорівнює прямокутнику $KLMN$ (мал. 231).
- 8°. Точка O — середина відрізка AB . Чи можна сумістити відрізки:
1) AO і OB ; 2) AO і AB ; 3) AB і OB ?
- 9°. Промінь OC — бісектриса кута AOB . Чи можна сумістити кути:
1) $\angle AOC$ і $\angle COB$; 2) $\angle AOC$ і $\angle AOB$;
3) $\angle AOB$ і $\angle COB$?

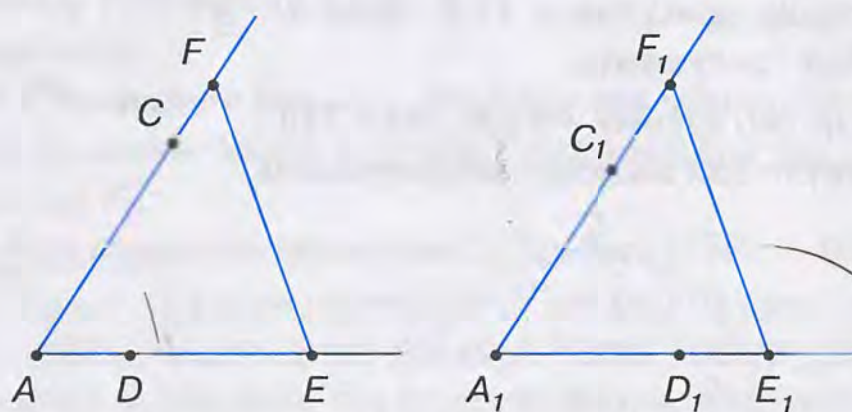


Мал. 230



Мал. 231

- 10°. Чи можна сумістити відрізки AB і CD , якщо:
- 1) $AB = 3,4$ см, $CD = 3,4$ см;
 - 2) $AB = 5$ см, $CD = 6$ см;
 - 3) $AB = 15$ см, $CD = 15$ мм?
- 11°. Чи можна сумістити кути, градусні міри яких:
- 1) 60° і 61° ; 2) 73° і 73° ; 3) $107^\circ 58'$ і $107^\circ 59'$?
- 12°. Сторони квадратів $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ рівні. Чи сумістяться при накладанні квадрати? Поясніть відповідь.
- 13°. Чи можна сумістити:
- 1) дві прямі; 2) два промені; 3) вертикальні кути; 4) суміжні кути?
- 14°. Радіуси двох кіл рівні. При накладанні кіл центри їх сумістилися. Чи сумістяться кола?
- 15°. Кути A і A_1 суміщаються при накладанні (мал. 232). Чи сумістяться:
- 1) точки C і C_1 ; 2) точки D і D_1 ; 3) відрізки EF і E_1F_1 ?
- Перевірте вимірюванням.

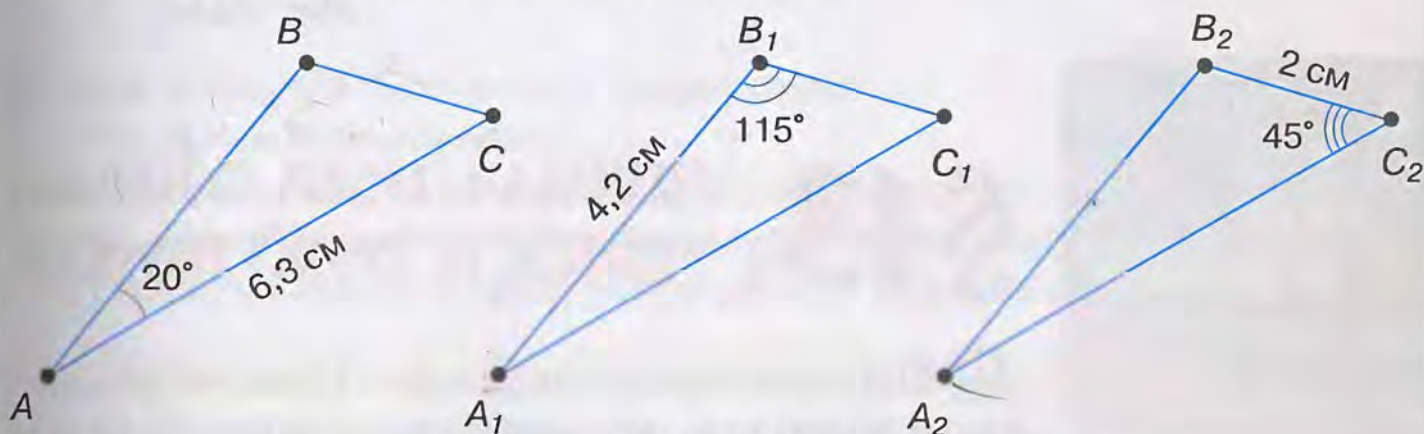


Мал. 232

- 16°. Чи можуть бути рівними трикутники:
- 1) гострокутний і тупокутний;
 - 2) прямокутний і тупокутний;
 - 3) рівнобедрений і рівносторонній?
- 17°. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ при накладанні сумістилися вершини: A з A_1 , B з B_1 , C з C_1 . Назвіть:
- 1) рівні сторони трикутників; 2) рівні кути трикутників.
18. Запишіть назви рівних трикутників, у яких відповідні сторони AB і A_1B_1 , BC і B_1C_1 , AC і A_1C_1 . Знайдіть:
- 1) сторони $\triangle A_1B_1C_1$, якщо $AB = 6$ см, $BC = 7$ см, $AC = 8$ см;
 - 2) кути $\triangle ABC$, якщо $\angle A_1 = 65^\circ$, $\angle B_1 = 80^\circ$, $\angle C_1 = 35^\circ$.
19. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть кути трикутника $A_1B_1C_1$, якщо:
- 1) $\angle A = 42^\circ$, $\angle B = 80^\circ$; 2) $\angle B = 65^\circ$, $\angle C = 45^\circ$.
20. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Знайдіть периметр трикутника $A_1B_1C_1$, якщо:
- 1) $AB = 7$ см, $BC = 9$ см, $AC = 11$ см;

- 2) $AB = 14$ см, $BC = 15$ см, $AC = 17$ см;
 3) $AB = 1,3$ дм, $BC = 2,1$ дм, $AC = 20$ см.

21. Периметри двох трикутників рівні. Чи будуть рівними трикутники?
 22. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ при накладанні сумістилися сторони AB і A_1B_1 , BC і B_1C_1 , AC і A_1C_1 . Знайдіть:
 1) невідомі сторони трикутників, якщо $AB = 11$ см, $A_1C_1 = 16$ см, $BC = 14$ см;
 2) невідомі кути трикутників, якщо $\angle B = 60^\circ$, $\angle A_1 = 60^\circ$, $\angle C_1 = 70^\circ$.
 23. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ (мал. 233). Знайдіть за даними на малюнку невідомі сторони і кути кожного трикутника.



Мал. 233

24. Викладіть сірники так, як показано на малюнку 234. Маємо три рівні трикутники. Перекладіть два сірники так, щоб дістати чотири рівні трикутники.

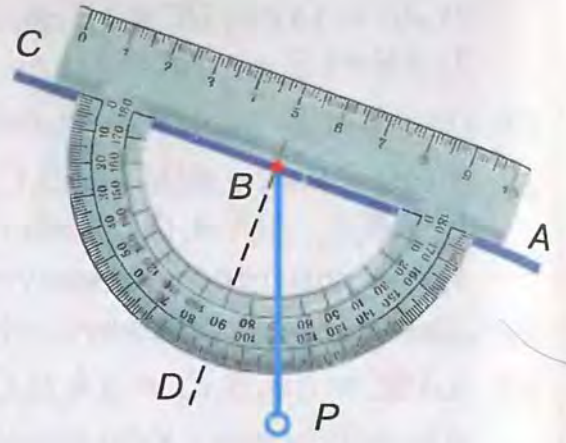


Мал. 234

- 25*. На аркуші зображено рівнобедрений прямокутний $\triangle ABC$ і рівний йому трикутник. Трикутники сумістилися після того, як аркуш зігнули двічі:
 1) спочатку за катетом AC , а потім за катетом BC ;
 2) спочатку за катетом BC , а потім за катетом AC ;
 3) спочатку за гіпотенузою AB , а потім за катетом AC ;
 4) спочатку за гіпотенузою AB , а потім за катетом BC .
 Накресліть початкове розміщення даних трикутників.
 26*. У трикутнику ABC : $AC = BC$, $\angle A = \angle B = 45^\circ$. Рівний йому трикутник KLM суміщається з ним, якщо аркуш послідовно зігнути вздовж прямих:
 1) AC , BC , AB ; 2) AC , AB , BC ; 3) AB , AC , BC .
 Накресліть початкове розміщення трикутників ABC і KLM .

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

27. На малюнку 235 показано, як можна знайти кут нахилу лінії зору до горизонтального напрямку. Для цього дивляться на предмет уздовж лінійки транспортира AC і відмічають, на яку поділку показує висок BP . Поясніть, чому так можна знаходити шуканий кут.



Мал. 235



§ 13. ПЕРША І ДРУГА ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

Щоб установити рівність двох трикутників, треба переконатися, що трикутники суміщаються при накладанні, або що всі відповідні сторони і відповідні кути у них рівні. На практиці це незручно. Тому користуються *ознаками рівності трикутників*, за якими можна встановити рівність трикутників, знаючи рівність деяких їх відповідних елементів.



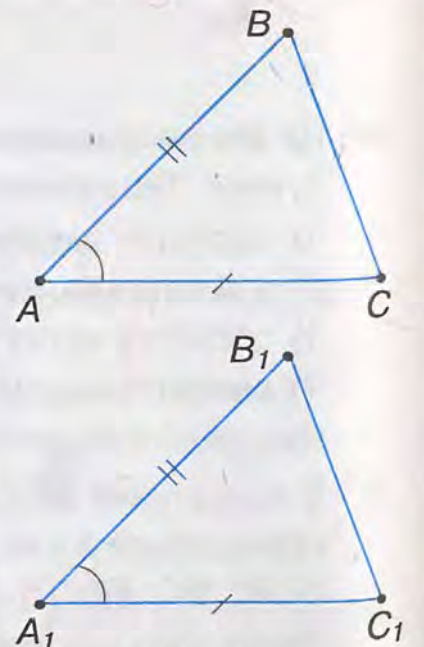
Теорема (ознака рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними). Якщо дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Дано: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ (мал. 236), $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

Довести: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доведення. Накладемо $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з A_1 , а сторони AC і AB лежали на променях A_1C_1 і A_1B_1 відповідно. Це можна зробити, тому що $\angle A = \angle A_1$. Оскільки $AC = A_1C_1$ і $AB = A_1B_1$, то вершина C суміститься з вершиною C_1 , а вершина B — з B_1 . Якщо вершини C і C_1 , B і B_1 сумістилися, то сумістяться і сторони BC і B_1C_1 .

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ сумістилися, отже, вони рівні.



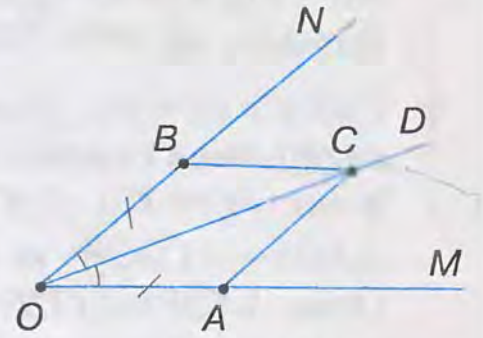
Мал. 236

Задача. На сторонах кута MON відкладено рівні відрізки OA і OB . Довільну точку C бісектриси OD цього кута сполучено з точками A і B . Доведіть, що $\triangle AOC = \triangle BOC$.

Розв'язання. Розглянемо утворені на малюнку 237 трикутники AOC і BOC .

У них: $OA = OB$ за умовою, OC – спільна сторона, $\angle AOC = \angle BOC$, оскільки OD – бісектриса $\angle O$.

Отже, $\triangle AOC = \triangle BOC$ за двома сторонами і кутом між ними.



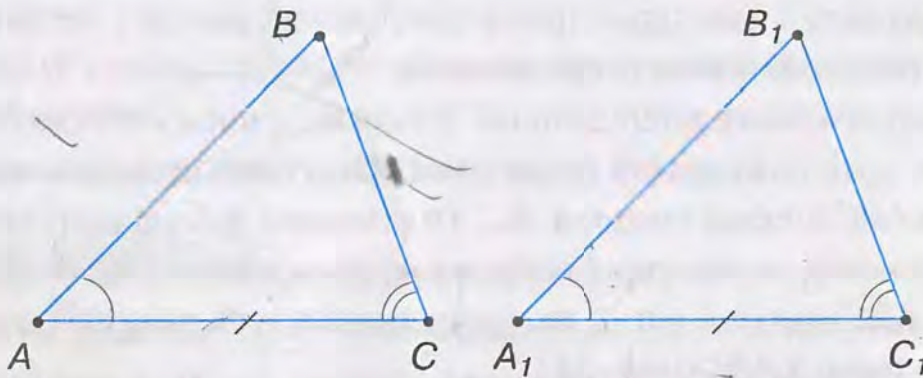
Мал. 237

Щоб довести рівність двох трикутників:

- 1) виділіть їх на малюнку;
- 2) доведіть, що дві сторони і кут між ними одного трикутника дорівнюють відповідно двом сторонам і куту між ними другого трикутника;
- 3) зробіть висновок: трикутники рівні за першою ознакою.

Теорема (ознака рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами). Якщо сторона і прилеглі до неї кути одного трикутника дорівнюють відповідно стороні й прилеглим до неї кутам другого трикутника, то такі трикутники рівні.

Дано: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ (мал. 238), $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.



Мал. 238

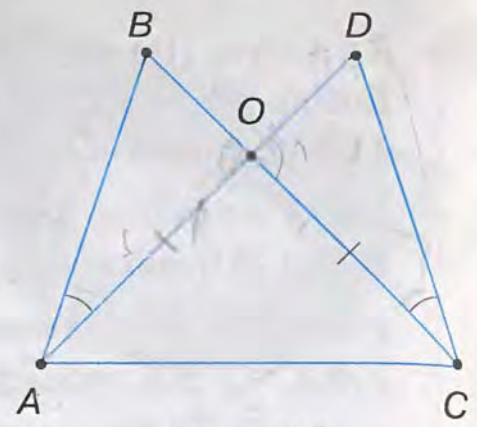
Довести: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доведення. Накладемо $\triangle ABC$ на $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина A сумістилася з A_1 , сторона AC сумістилася з рівною їй стороною A_1C_1 . Тоді вершина C суміститься з C_1 . Вершини B і B_1 розмістимо з одного боку від прямої A_1C_1 . Оскільки $\angle A = \angle A_1$ і $\angle C = \angle C_1$, то сторона AB лежатиме на промені A_1B_1 , а сторона CB – на промені C_1B_1 . Вершина B лежатиме як на промені A_1B_1 , так і на промені C_1B_1 . Дві прямі можуть перетинатися тільки в одній точці, тому вершина B суміститься з вершиною B_1 .

Трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ сумістилися, отже, вони рівні.



Задача. Трикутники ABC і CDA розміщені так, як показано на малюнку 239. Причому $AO = CO$, $\angle OCD = \angle OAB$.
Доведіть, що $AB = CD$ і $\angle B = \angle D$.



Мал. 239

Розв'язання. Відрізки AB і CD , кути B і D є сторонами і кутами трикутників AOB і COD . У них: $AO = CO$, $\angle OCD = \angle OAB$ за умовою, а $\angle AOB = \angle COD$ – як вертикальні.
Отже, $\triangle AOB = \triangle COD$ за стороною і прилеглими до неї кутами.
Тоді $AB = CD$ і $\angle B = \angle D$ як відповідні сторони і кути рівних трикутників AOB і COD .



Щоб довести рівність двох відрізків (кутів):

- 1) виділіть на малюнку два трикутники, сторонами яких є ці відрізки (кути);
- 2) доведіть, що трикутники рівні;
- 3) зробіть висновок: відрізки (кути) рівні як відповідні сторони (кути) рівних трикутників.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

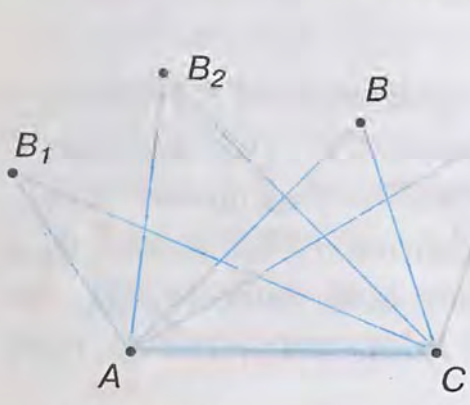
Виникає запитання: *Як відшукати ознаки рівності трикутників?* Побудувавши трикутник, рівний даному. Якщо за деякими елементами даного трикутника можна побудувати лише один трикутник, рівний даному, то рівність цих елементів буде ознакою рівності трикутників.

Проведемо невелике дослідження. З'ясуємо, скільки сторін і кутів $\triangle ABC$ потрібно знати, щоб побудувати лише один трикутник, що дорівнює $\triangle ABC$.

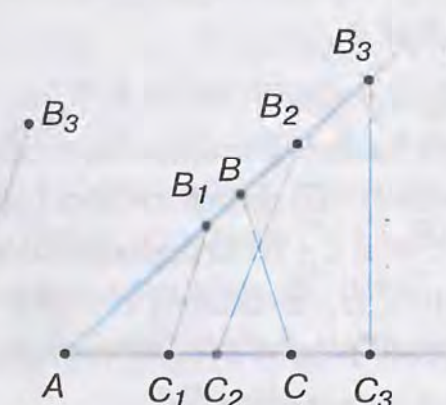
Нехай у $\triangle ABC$ відома сторона AC . Тоді можна побудувати скільки завгодно різних трикутників, у яких одна сторона дорівнюватиме AC (мал. 240).

Якщо у $\triangle ABC$ відомий кут A , то також можна побудувати безліч трикутників, які не дорівнюють $\triangle ABC$ (мал. 241).

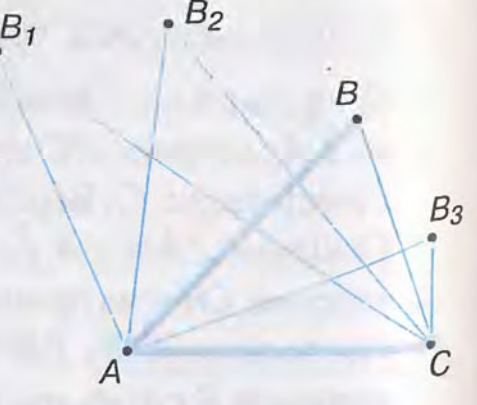
Так само можна побудувати безліч різних трикутників за двома елементами



Мал. 240



Мал. 241



Мал. 242

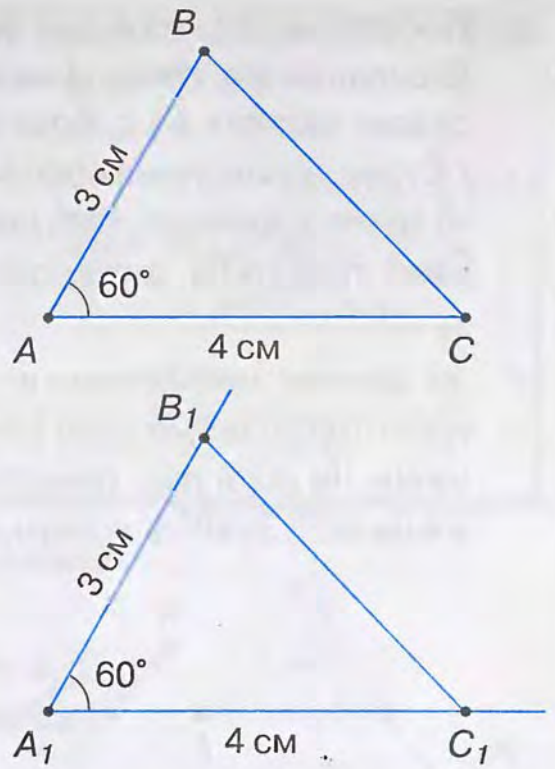
$\triangle ABC$: двома сторонами, двома кутами або стороною і кутом. Так, на малюнку 242 побудовано різні трикутники за сторонами AC і AB $\triangle ABC$.

Таким чином, за одним або двома елементами $\triangle ABC$ можна побудувати безліч різних трикутників, що не дорівнюють $\triangle ABC$.

Нехай тепер у $\triangle ABC$ відомі три елементи: $AB = 3$ см, $AC = 4$ см, $\angle A = 60^\circ$. Побудуємо за допомогою транспортира та лінійки $\angle A_1 = 60^\circ$ і на його сторонах відкладемо відрізки $A_1B_1 = 3$ см, $A_1C_1 = 4$ см (мал. 243). Сполучивши точки B_1 і C_1 , дістанемо $\triangle A_1B_1C_1$.

Вибираючи різні положення $\angle A_1$, дістанемо різні трикутники. Порівнюючи ці трикутники, можна припустити, що всі вони дорівнюють $\triangle ABC$. Отже, є підстава сформулювати ознаку рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними. Довівши цю ознаку, переконуємося в її істинності.

Так само можна дійти і до другої ознаки рівності трикутників. Дослідження продовжимо у § 15.



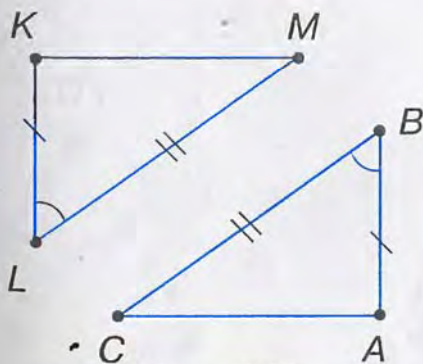
Мал. 243

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

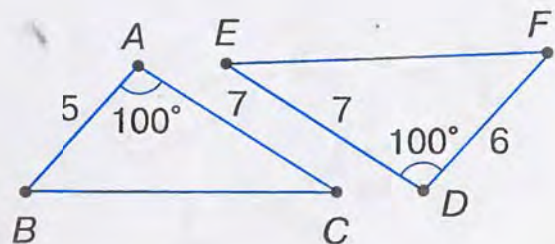
1. Сформулюйте і доведіть ознаку рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними.
2. Сформулюйте і доведіть ознаку рівності трикутників за стороною і прилеглими до неї кутами.
3. Поясніть, як довести рівність двох відрізків; кутів.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

- 1'. За даними на малюнку 244 назвіть відповідно рівні елементи трикутників. Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.
- 2'. На малюнку 245 задано елементи трикутників ABC і DEF . Чи рівні дані трикутники?

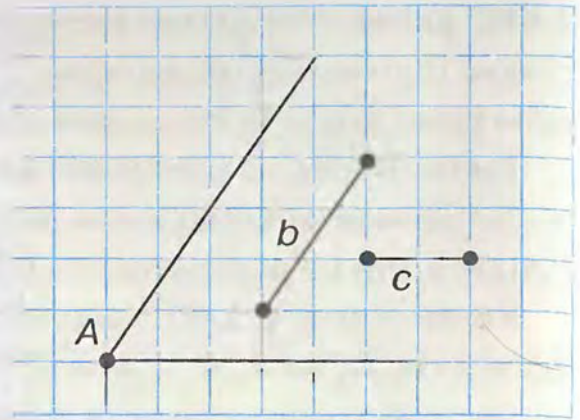


Мал. 244



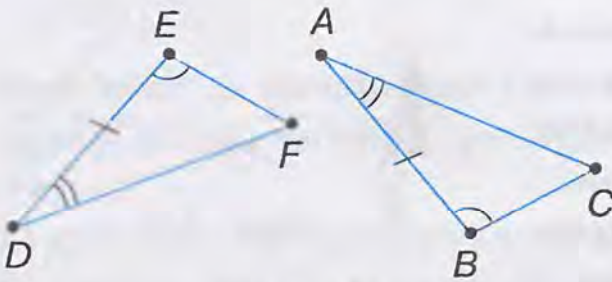
Мал. 245

- 3'. Побудуйте за клітинками кут A (мал. 246). Відкладіть від точки A на його сторонах задані відрізки b і c . Позначте буквами B і C кінці відкладених відрізків та сполучіть ці точки відрізком. Побудуйте за клітинками трикутник, що дорівнює трикутнику ABC .

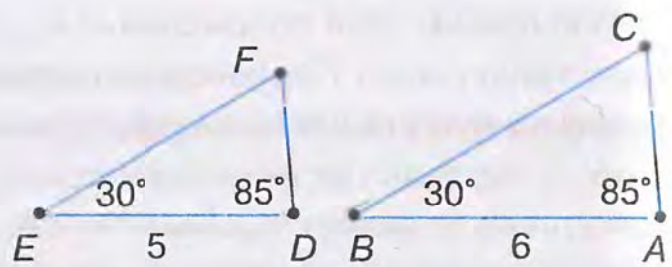


Мал. 246

- 4'. За даними, наведеними на малюнку 247, назвіть відповідно рівні елементи трикутників. Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.



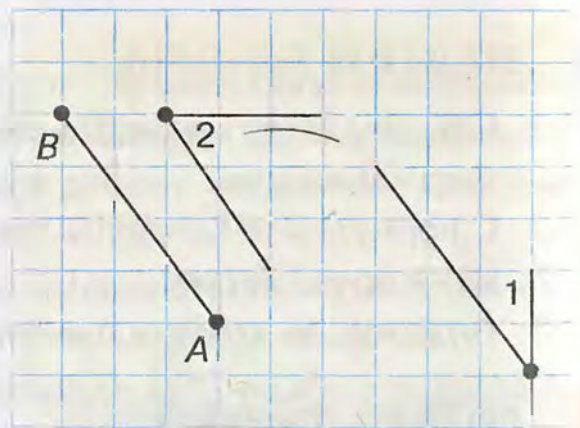
Мал. 247



Мал. 248

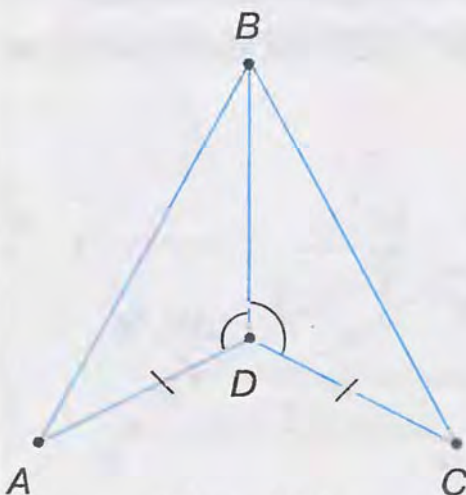
- 5'. На малюнку 248 задано елементи трикутників DEF і ABC . Чи рівні дані трикутники?

- 6'. Побудуйте за клітинками відрізок AB (мал. 249). Відкладіть від променя AB кут 1 , а від променя BA — кут 2 так, щоб утворився трикутник ABC . Побудуйте за клітинками трикутник, що дорівнює трикутнику ABC .



Мал. 249

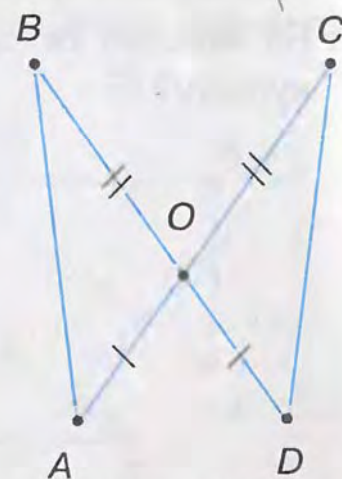
- 7'. Знайдіть на малюнках 250 — 252 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.



Мал. 250



Мал. 251



Мал. 252

- 8°. У трикутників ABC і DEF : $\angle A = \angle E$, $AB = 20$ см, $AC = 18$ см, $DE = 18$ см, $EF = 20$ см. Який кут трикутника DEF дорівнює куту B ?
- 9°. $\triangle ABC = \triangle KLM = \triangle DEF$. Заповніть таблицю 14.

Таблиця 14

$\triangle ABC$	$AB = 5$ см, $BC = 16$ см, $\angle B = 120^\circ$	$AB = 16$ см, $AC = 19$ см, $\angle A = 13^\circ$
$\triangle KLM$		
$\triangle DEF$		

10°. За даними, наведеними на малюнку 253, визначте невідомий елемент x трикутника.

11°. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. На сторонах AB і A_1B_1 позначено точки D і D_1 так, що $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1$.

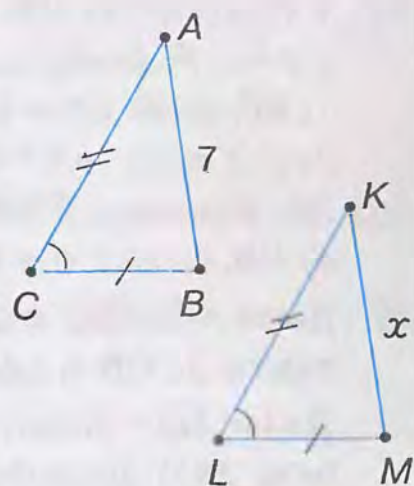
12°. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O , яка є серединою кожного з них. Доведіть:
1) $\triangle AOC = \triangle BOD$; 2) $\triangle AOD = \triangle BOC$.

13°. На малюнку 254 $AB = BC$, BD — бісектриса $\angle ABC$.
1) Доведіть, що $AD = CD$.
2) Знайдіть кут BCD , якщо $\angle BAD = 130^\circ$.

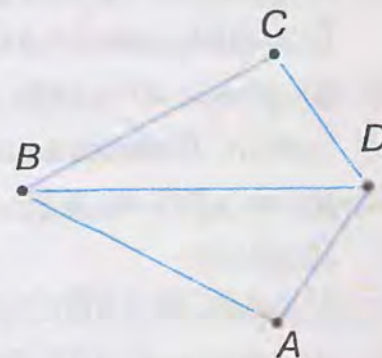
14°. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OB$, $CO = OD$. Знайдіть: 1) відрізок BC , якщо $AD = 5$ см; 2) кут ABC , якщо $\angle BAD = 65^\circ$.

15°. Знайдіть на малюнках 255–257 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.

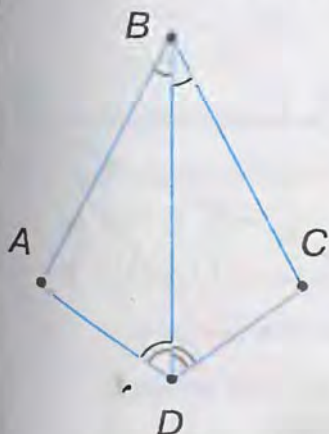
16°. У трикутників ABC і DEF $AB = EF$, $\angle A = \angle E$, $\angle B = \angle F$. Порівняйте ці трикутники. Який кут трикутника ABC дорівнює куту D ?



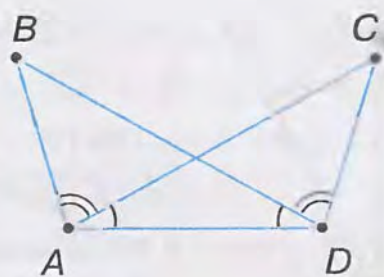
Мал. 253



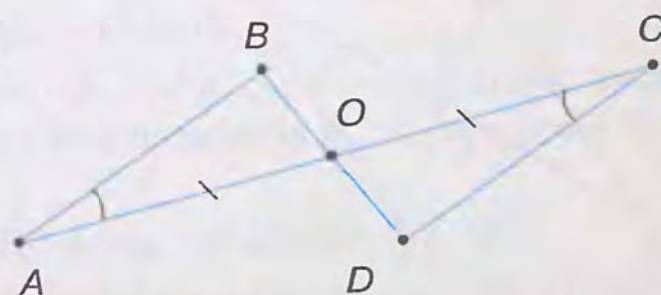
Мал. 254



Мал. 255



Мал. 256



Мал. 257

17°. $\triangle ABC = \triangle DEF = \triangle PMN$. Заповніть таблицю 15.

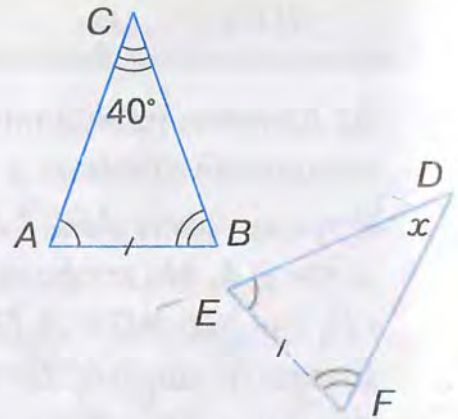
Таблиця 15

$\triangle ABC$	$AB = 7$ см, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 41^\circ$	$AC = 13$ см, $\angle A = 27^\circ 48'$, $\angle C = 92^\circ$
$\triangle DEF$		
$\triangle PMN$		

18°. За даними, наведеними на малюнках 258, 259, визначте невідомий елемент x трикутника.

19°. У трикутниках ABC і DPM : $AB = DP$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$. Знайдіть:

- 1) AB , якщо $DP = 6,2$ см;
- 2) $\angle D$, якщо $\angle A = 54^\circ$;
- 3) $\angle B$, якщо $\angle P = 46^\circ 39'$;
- 4) PM , якщо $CB = 85$ мм.



Мал. 258

20°. Дано: $AO = OC$, $\angle OCB = \angle OAD$ (мал. 260). Доведіть: $\triangle COB = \triangle AOD$.

21°. Дано: AD – бісектриса $\angle CAB$, $\angle ADB = \angle ADC$ (мал. 261). Доведіть: $\triangle ABD = \triangle ACD$.

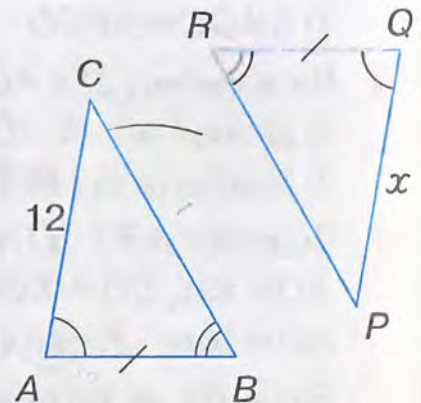
22°. На бісектрисі кута A позначено точку D , а на його сторонах – точки B і C так, що $\angle ADB = \angle ADC$. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle ACD$.

23. Відрізки AC і BD діляться точкою перетину O навпіл. Доведіть, що $AB \parallel CD$.

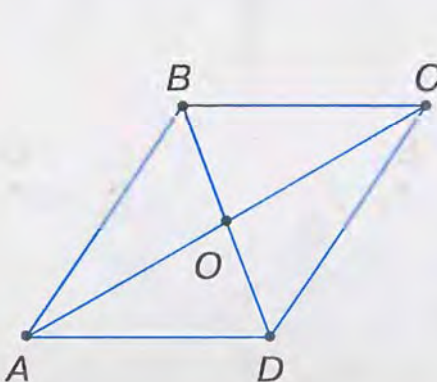
24. Дано: $BC = AD$, $\angle DAC = \angle ACB$ (мал. 262). Доведіть:

- 1) $\triangle ABC = \triangle ADC$; 2) $AB = DC$; 3) $AB \parallel DC$.

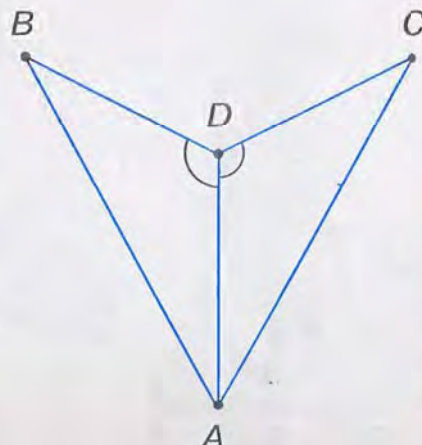
25. На малюнку 262 $BC \parallel AD$, $BC = AD$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle ADC$.



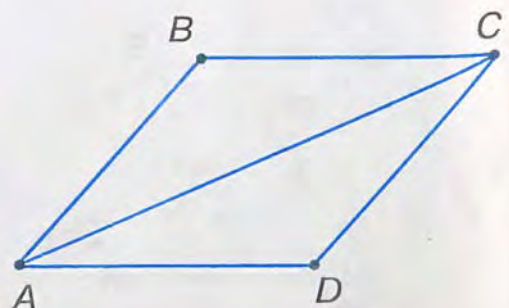
Мал. 259



Мал. 260



Мал. 261



Мал. 262

26. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $AO = OC$. Доведіть:
1) $\triangle BOC = \triangle DOA$; 2) $\angle ABC = \angle ADC$.

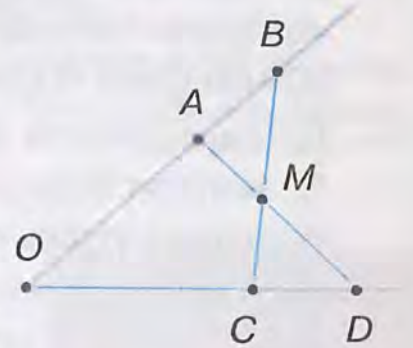
27. На сторонах кута AOB відкладено рівні відрізки OM і ON . Довільну точку D бісектриси OC цього кута сполучено з точками M і N . Доведіть, що $DM = DN$.

28. Від вершини B рівнобедреного трикутника ABC з основою AC відкладено рівні відрізки: BD – на стороні BA , BE – на стороні BC .

Доведіть: 1) $AE = CD$; 2) $\angle AEC = \angle ADC$.

29. Дано: $OA = OC$, $OB = OD$ (мал. 263).

Доведіть: 1) $AD = BC$; 2) $\angle BCD = \angle DAB$.



Мал. 263

30. Доведіть, що рівнобедрені трикутники рівні, якщо бічна сторона і кут, протилежний основі, одного трикутника дорівнюють бічній стороні і куту, протилежному основі, другого трикутника.

31. BD – бісектриса рівнобедреного трикутника ABC з основою AC . Доведіть, що BD є медіаною цього трикутника.

32. Дано: $BO = OD$, $AB \parallel DC$ (мал. 260). Доведіть: $\triangle AOB = \triangle COD$.

33. На малюнку 260 $AO = OC$, $\angle OCD = \angle OAB$. Знайдіть:

1) AB , якщо $CD = 10$ см;

2) BD , якщо $OD = 3$ см.

34. На сторонах кута позначено дві точки, однаково віддалені від його вершини, і з кожної з них опущено перпендикуляр на другу сторону. Доведіть, що перпендикуляри рівні. (Розгляньте гострий, прямий і тупий кути.)

35. Пряма, перпендикулярна до бісектриси кута A , перетинає сторони кута в точках B і C . Доведіть, що трикутник ABC – рівнобедрений.

36. Доведіть, що пряма, перпендикулярна до бісектриси кута, відтинає на його сторонах рівні відрізки.

У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$. На сторонах AC і A_1C_1 позначено точки D і D_1 так, що $\angle CBD = \angle C_1B_1D_1$.

Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$.

У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: AD і A_1D_1 – медіани, $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Доведіть: 1) $\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1$; 2) $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$.

37. У трикутників ABC і $A_1B_1C_1$: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$. Бісектриси кутів B і C перетинаються в точці O , а бісектриси кутів B_1 і C_1 – в точці O_1 . Доведіть, що $\triangle OBC = \triangle O_1B_1C_1$.

38. Дано: $OA = OC$, $OB \neq OD$ (мал. 263). Доведіть, що $\triangle ABM = \triangle CDM$.

39. Доведіть, що в рівних трикутників медіани, проведені до рівних сторін, рівні.

42*. Медіану BD трикутника ABC продовжено за осно-
ву AC на відрізок $DE = BD$, і точку E сполучено з
точкою A . Знайдіть кут BAE , якщо $\angle BAD = 56^\circ$,
 $\angle BCD = 40^\circ$.

43*. Доведіть рівність двох трикутників за стороною,
медіаною, проведеною до неї, і кутом між ме-
діаною і цією стороною.

44*. Доведіть рівність двох трикутників:
1) за кутом, бісектрисою цього кута і кутом, який
бісектриса утворює з протилежною стороною;
2) за двома кутами і бісектрисою третього кута;
3) за висотою і кутами, прилеглими до сторо-
ни, на яку опущена висота.

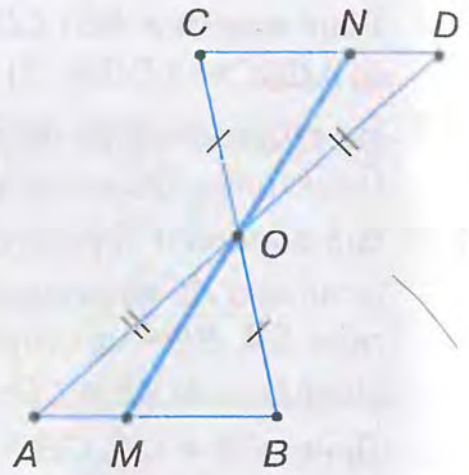
45*. Відрізки AB і CD перетинаються в точці O так,
що $AO = OB$, $\angle CBO = \angle DAO$. Доведіть, що
 $\triangle AOC = \triangle BOD$.

46*. На малюнку 264 $AO = OD$, $BO = OC$. Доведіть,
що $MO = ON$.

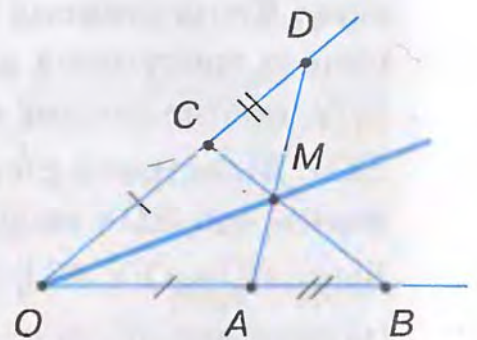
47*. BD – висота $\triangle ABC$, $\angle ABD = \angle CBD$. Довільну
точку M відрізка BD сполучено з точками A і C .
Доведіть, що $AM = MC$.

48*. На малюнку 265 $OC = OA$, $CD = AB$. Відрізки AD і BC перетинаються в точ-
ці M . Доведіть, що OM – бісектриса кута O .

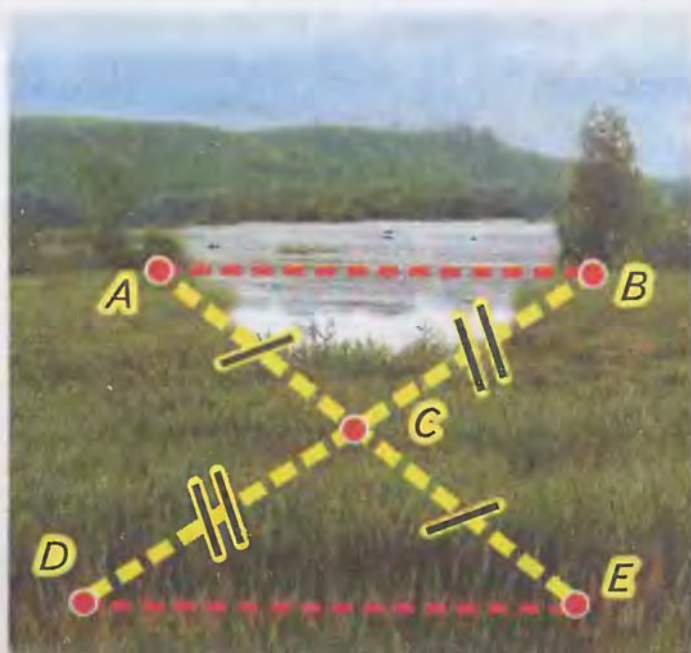
49*. Доведіть рівність трикутників за кутом, бісектрисою цього кута і стороною,
прилеглою до нього.



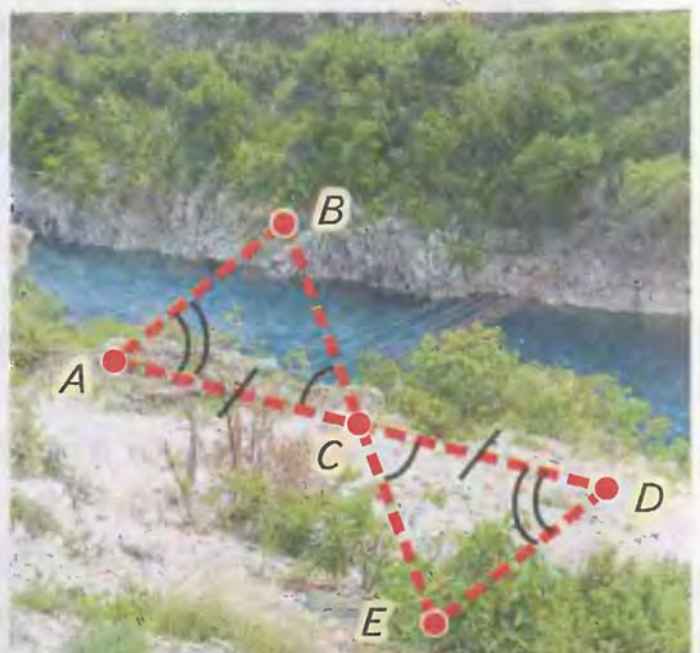
Мал. 264



Мал. 265



Мал. 266



Мал. 267

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

50. Накресліть довільний кут. Поділіть його на два рівні кути за допомогою лінійки з поділками. Поясніть, як поділити кут на два рівні кути на місцевості.
51. На малюнку 266 показано, як виміряти відстань між пунктами A і B , між якими не можна пройти по прямій. Поясніть вимірювання.
52. На малюнку 267 показано, як виміряти відстань між пунктами A і B , якщо до пункту B підійти не можна (наприклад, ширину річки). Поясніть вимірювання.

§ 14. ВЛАСТИВОСТІ Й ОЗНАКА РІВНОБЕДРЕНОГО ТРИКУТНИКА



Ви знаєте, що в рівнобедреному трикутнику дві сторони рівні. Вони називаються бічними сторонами. Третю сторону називають основою.

Теорема (властивості рівнобедреного трикутника).

У рівнобедреному трикутнику:

- 1) бісектриса, проведена до основи, є медіаною й висотою;
- 2) кути при основі рівні.

Дано: $\triangle ABC$ – рівнобедрений (мал. 268),
 $AB = BC$, BD – бісектриса.

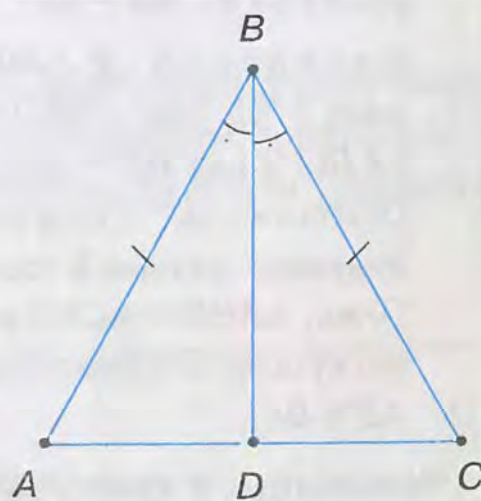
Довести: 1) $AD = DC$, $BD \perp AC$; 2) $\angle A = \angle C$.

Доведення. Нехай $\triangle ABC$ – рівнобедрений, у якому проведено бісектрису BD . Розглянемо $\triangle ABD$ і $\triangle CBD$. У них: $AB = BC$ за умовою, BD – спільна сторона, $\angle ABD = \angle CBD$, оскільки BD – бісектриса $\triangle ABC$.

Отже, $\triangle ABD = \triangle CBD$ за двома сторонами і кутом між ними.

З рівності трикутників ABD і CBD випливає рівність їх відповідних сторін і кутів:

- 1) $AD = DC$, тобто BD – медіана $\triangle ABC$. $\angle ADB = \angle CDB$. Оскільки ці кути суміжні й рівні, то вони прямі. Отже, $BD \perp AC$, тому BD – висота $\triangle ABC$.
- 2) $\angle A = \angle C$.



Мал. 268

Ми довели, що в рівнобедреному трикутнику бісектриса, медіана і висота, проведені до основи, збігаються. Тому справедливі також твердження:

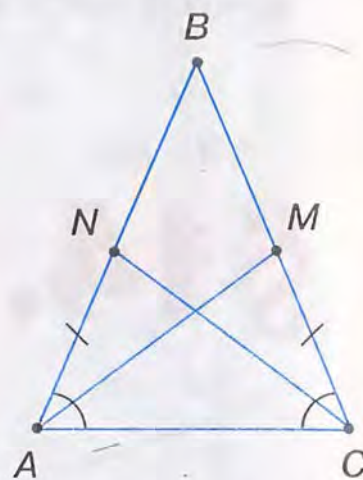
- висота рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є медіаною і бісектрисою;
- медіана рівнобедреного трикутника, проведена до основи, є висотою і бісектрисою.

Задача. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику медіани, проведені до бічних сторін, рівні.

Розв'язання. Нехай у $\triangle ABC$ $AB = BC$, AM і CN — медіани, проведені до цих сторін (мал. 269). У трикутників ACM і CAN сторона AC — спільна, $AN = CM$, бо N і M — середини рівних сторін, $\angle A = \angle C$ за властивістю рівнобедреного трикутника.

Отже, $\triangle ACM = \triangle CAN$ за двома сторонами і кутом між ними. З рівності трикутників випливає, що $AM = CN$.

Розв'яжіть задачу іншим способом, розглянувши трикутники ABM і CBN .



Мал. 269

Теорема (ознака рівнобедреного трикутника).

Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.

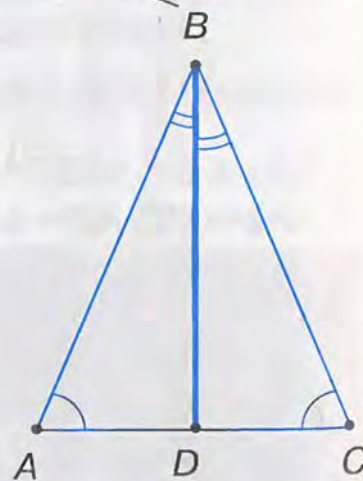
Дано: $\triangle ABC$ (мал. 270), $\angle A = \angle C$.

Довести: $AB = BC$.

Доведення. У $\triangle ABC$ проведемо бісектрису BD (мал. 270). Тоді $\angle ABD = \angle CBD$. Розглянемо $\triangle ABD$ і $\triangle CBD$. У них BD — спільна сторона.

Оскільки $\angle A = \angle C$ за умовою, $\angle ABD = \angle CBD$ за побудовою, то рівні й треті кути: $\angle ADB = \angle CDB$.

Отже, $\triangle ABD = \triangle CBD$ за стороною і прилеглими до неї кутами. З рівності цих трикутників випливає, що $AB = BC$.



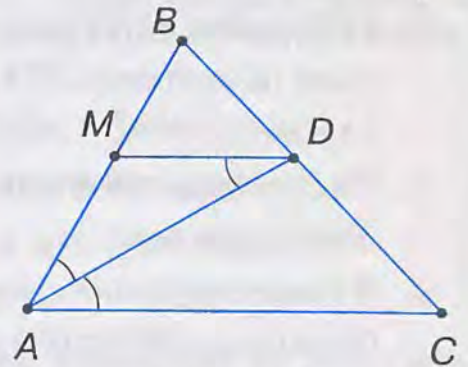
Мал. 270

Наслідок. У трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути і, навпаки, проти рівних кутів — рівні сторони.

Твердження випливає з доведених властивостей й ознаки рівнобедреного трикутника.

Задача. AD — бісектриса $\triangle ABC$, $MD \parallel AC$ (мал. 271). Доведіть, що $\triangle ADM$ — рівнобедрений.

Розв'язання. $\angle ADM = \angle DAC$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих AC і MD та січній AD , а $\angle DAC = \angle DAM$, бо AD — бісектриса. Отже, $\angle ADM = \angle DAM$. За ознакою рівнобедреного трикутника, $\triangle ADM$ — рівнобедрений.



Мал. 271

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Як застосовують означення? Розглянемо, наприклад, означення рівнобедреного трикутника:

«Трикутник називається рівнобедреним, якщо дві його сторони рівні». Це означення розуміють так: «Якщо дві сторони трикутника рівні, то він рівнобедрений, і навпаки: якщо трикутник рівнобедрений, то дві сторони його рівні». Тобто, скориставшись означенням, можна встановити:

1) за яких умов деякий трикутник є рівнобедреним (а це — ознака рівнобедреного трикутника);

2) рівність двох сторін трикутника, якщо він рівнобедрений (а це — властивість рівнобедреного трикутника).

Отже, означення містить і ознаку рівнобедреного трикутника, і його властивість. Це стосується будь-якого означення.

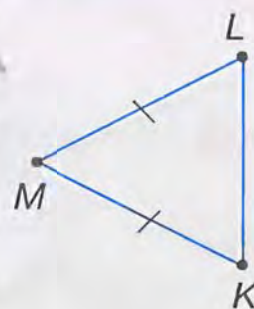
2. Якщо правильні пряма теорема і обернена до неї теорема, то для стислості обидві формулюють у вигляді одного твердження. При цьому умову і висновок поєднують словами «тоді і тільки тоді». Наприклад, доведену ознаку рівнобедреного трикутника і одну з його властивостей разом можна сформулювати так: «Трикутник рівнобедрений тоді і тільки тоді, коли два його кути рівні».

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

- Сформулюйте і доведіть теорему про властивості рівнобедреного трикутника.
- Сформулюйте і доведіть теорему про ознаку рівнобедреного трикутника.
- Доведіть, що у трикутнику проти рівних сторін лежать рівні кути і, навпаки, проти рівних кутів — рівні сторони.

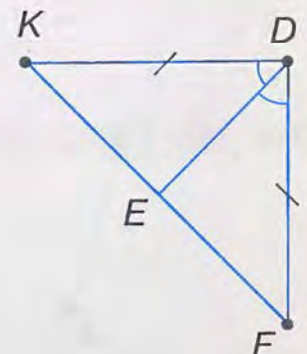
РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1'. На малюнку 272 зображено рівнобедрений трикутник. Назвіть його основу та бічні сторони. Які кути рівні в цьому трикутнику?



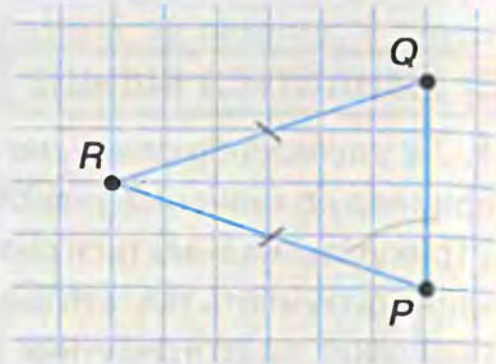
Мал. 272

2'. У рівнобедреному трикутнику (мал. 273) проведено бісектрису до основи. Назвіть рівні відрізки та рівні кути на малюнку.

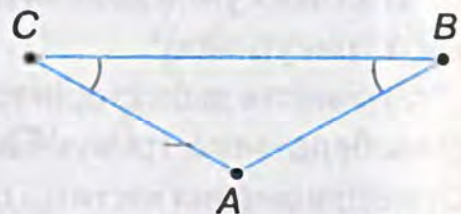


Мал. 273

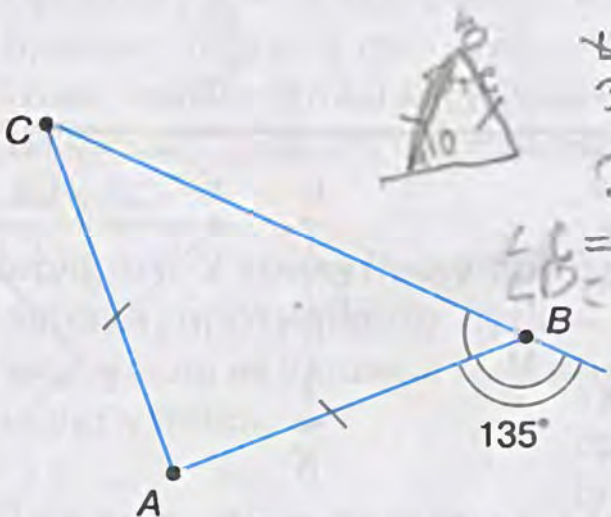
- 3'. Побудуйте за клітинками рівнобедрений трикутник, що дорівнює зображеному на малюнку 274. Як за клітинками провести бісектрису до основи цього трикутника? А медіану? А висоту? Виконайте відповідні побудови.
- 4'. Чи рівнобедрений трикутник ABC на малюнку 275? Назвіть його основу та бічні сторони.
- 5'. У рівнобедреному трикутнику KLM проведено бісектрису MN до основи KL . Знайдіть довжину відрізків KN і NL , якщо KL дорівнює:
1) 6 см; 2) 7 см; 3) 8 см.
- 6'. У $\triangle ABC$ ($AC = BC$) проведено бісектрису CO . Чому дорівнює AB , якщо:
1) $AO = 0,7$ дм; 2) $BO = 25$ мм?
- 7'. У $\triangle DEF$ відрізок сполучає вершину F з точкою A на протилежній стороні, причому $\angle DFA = \angle EFA$. Чи є FA медіаною $\triangle DEF$, якщо:
1) $DF = DE \neq FE$; 2) $EF = ED \neq DF$;
3) $FD = FE \neq DE$?
- 8'. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено бісектрису до основи. Назвіть прямі кути, які при цьому утворилися, якщо основою трикутника є сторона: 1) AB ; 2) BC ; 3) AC .
- 9'. Пряма a проходить через вершину, протилежну основі рівнобедреного трикутника MON , і ділить кут при цій вершині навпіл. До якої прямої перпендикулярна пряма a , що проходить через вершину: 1) M ; 2) O ; 3) N ?
- 10'. За даними, наведеними на малюнках 276, 277, визначте кути рівнобедреного трикутника ABC .
- 11'. Знайдіть кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника, якщо кут при основі дорівнює: 1) 40° ; 2) 65° ; 3) 80° .



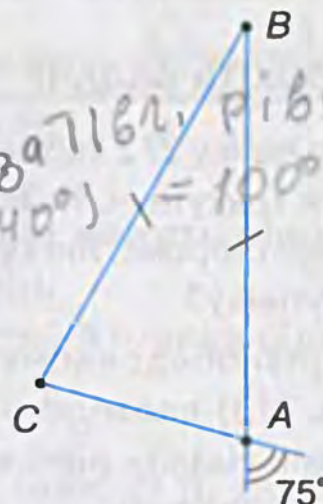
Мал. 274



Мал. 275



Мал. 276



Мал. 277

$\sphericalangle B$
 $3 \sphericalangle B$
 $\sphericalangle C = \sphericalangle A = 40^\circ$
 $\sphericalangle B = 180^\circ - (40^\circ + 40^\circ) = 100^\circ$

$$\angle A = \angle C = \frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$$

- 307 сум кутів B та C

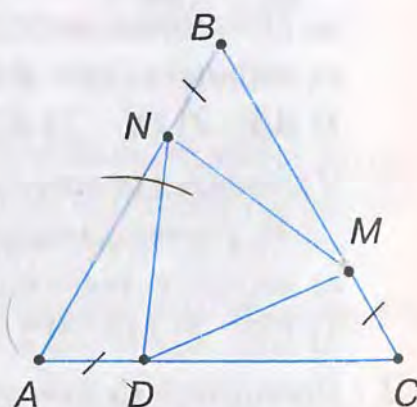
- 12°. Знайдіть кути при основі рівнобедреного трикутника, якщо кут між бічними сторонами дорівнює:
1) 72° ; 2) 90° ; 3) 120° .
- 13°. Знайдіть кути прямокутного рівнобедреного трикутника.
- 14°. Доведіть, що в рівносторонньому трикутнику всі кути рівні.
- 15°. Знайдіть кути рівностороннього трикутника.
- 16°. Якщо один з кутів рівнобедреного трикутника дорівнює 60° , то трикутник рівносторонній. Доведіть.
- 17°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
1) зовнішній кут, прилеглий до кута при основі, дорівнює 110° ;
2) зовнішній кут, прилеглий до кута при вершині, дорівнює 60° .
- 18°. Чи може кут при основі рівнобедреного трикутника бути: прямим; гострим; тупим?
- 19°. Чи може зовнішній кут при основі рівнобедреного трикутника бути: прямим; гострим; тупим?
- 20°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює:
1) 90° ; 2) 120° ; 3) 140° .
- 21°. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено висоту до його основи. Точка H — кінець висоти, який лежить на основі трикутника. Зробіть малюнок та запишіть рівні відрізки і рівні кути, коли основою трикутника є сторона:
1) AB ; 2) BC ; 3) AC .
- 22°. У рівнобедреному трикутнику DEF проведено медіану до його основи. Точка M — кінець медіани, який лежить на основі трикутника. Зробіть малюнок та запишіть рівні відрізки й рівні кути, коли основою трикутника є сторона:
1) DE ; 2) EF ; 3) DF .
- 23°. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо:
1) $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$; 2) $\angle B = 36^\circ$, $\angle C = 72^\circ$; 3) $\angle A = 80^\circ$, $\angle C = 50^\circ$.
- 24°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з його кутів дорівнює:
1) 20° ; 2) 40° ; 3) 80° .
Скільки розв'язків має задача?
- 25°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо кут при його вершині:
1) утричі більший за кут при основі;
2) удвічі менший від кута при основі.
- 26°. Кут при основі рівнобедреного трикутника на n° більший за кут при вершині. Знайдіть кути трикутника, якщо:
1) $n^\circ = 30^\circ$; 2) $n^\circ = 60^\circ$.
- 27°. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
1) один із них на 15° більший за інший;
2) один із них удвічі більший за інший.
Розгляньте два випадки.

28. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо:
- 1) зовнішній кут дорівнює 110° ;
 - 2) зовнішній кут в три рази більший за суміжний з ним кут.
- Скільки розв'язків має задача?
29. У рівнобедреному трикутнику кут при вершині дорівнює α . Знайдіть кут між основою і висотою, проведеною до бічної сторони, якщо:
- 1) $\alpha = 40^\circ$;
 - 2) $\alpha = 50^\circ$;
 - 3) $\alpha = 120^\circ$.
30. У рівнобедреному трикутнику кут між основою і висотою, проведеною до бічної сторони, дорівнює β . Знайдіть кути трикутника, якщо:
- 1) $\beta = 25^\circ$;
 - 2) $\beta = 30^\circ$;
 - 3) $\beta = 60^\circ$.
31. Доведіть, що коли в трикутнику ABC медіана BD дорівнює половині сторони AC , то кут B дорівнює сумі кутів A і C .
32. Накресліть рівнобедрений трикутник ABC з основою AC . Проведіть висоту BD і позначте на ній довільну точку O . Доведіть, що $AO = CO$.
33. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику бісектриси, проведені до бічних сторін, рівні.
34. Доведіть, що зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника вдвічі більший за кут при основі.

35. Доведіть, що середини сторін рівнобедреного трикутника є вершинами також рівнобедреного трикутника.

36. Доведіть, що пряма, яка перетинає рівнобедрений трикутник і паралельна одній з його сторін, відтинає від нього рівнобедрений трикутник.

37. На сторонах рівностороннього трикутника ABC відкладено рівні відрізки AD , CM , BN (мал. 278). Точки D , M і N сполучено. Доведіть, що $\triangle DMN$ – рівносторонній.

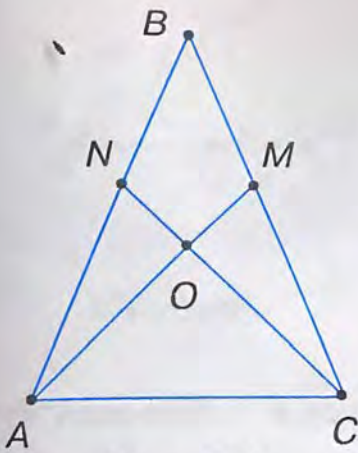


Мал. 278

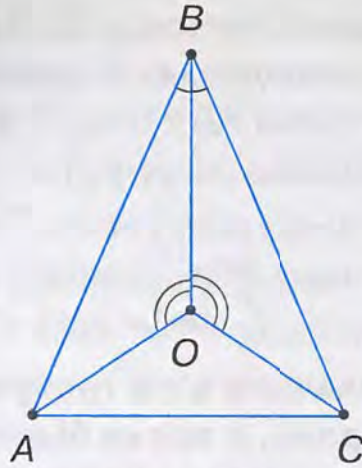
38. Доведіть твердження, наведені у таблиці 16.

Таблиця 16

Відомо, що у $\triangle ABC$:		Доведіть:
1	мал. 279 $AB = BC, BN = BM$	1) $AM = CN$; 2) $\triangle AON = \triangle COM$
2	мал. 279 $AM = CN, \angle ACO = \angle CAO$	1) $\triangle AOC$ – рівнобедрений; 2) $\triangle ABC$ – рівнобедрений
3	мал. 280 $\angle ABO = \angle CBO, \angle AOB = \angle COB$	1) $\triangle AOC$ – рівнобедрений; 2) $\angle CAO = \angle ACO$
4	мал. 281 $AB = BC, AD = CE$	$\angle ABD = \angle CBE$
5	мал. 281 $AB = BC, \angle ABD = \angle CBE$	$\angle BDE = \angle BED$
6	мал. 281 $AB = BC, \angle ABE = \angle CBD$	$AD = CE$



Мал. 279



Мал. 280



Мал. 281

39. Доведіть, що рівнобедрені трикутники рівні, якщо основа і прилеглий до неї кут одного трикутника дорівнюють основі й прилеглому до неї куту другого трикутника.

40. Доведіть, що трикутник ABC рівнобедрений, якщо у нього:

- 1) медіана BD є висотою;
- 2) висота BD є бісектрисою;
- 3) бісектриса BD є медіаною.

41. Два зовнішніх кути трикутника при різних його вершинах рівні. Який вид трикутника? Поясніть відповідь.

42. Пряма, проведена через вершину трикутника паралельно його протилежній стороні, утворює з іншими двома сторонами рівні кути. Який вид цього трикутника? Поясніть відповідь.

43. Пряма, проведена через вершину кута C трикутника ABC паралельно стороні AB , утворює зі стороною BC кут, що дорівнює куту C . Доведіть, що $\triangle ABC$ – рівнобедрений.

44*. У рівнобедреному трикутнику висота, проведена до основи, вдвічі менша від основи. Знайдіть кути трикутника.

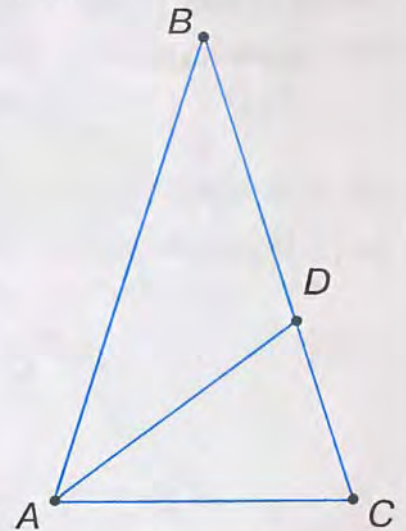
45*. Доведіть, що бісектриса зовнішнього кута при вершині рівнобедреного трикутника паралельна його основі.

46*. У рівнобедреному трикутнику з кутом при вершині 36° проведено бісектрису кута при основі.

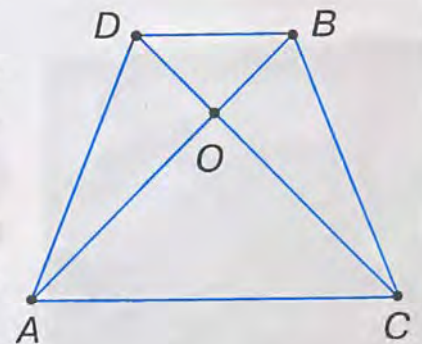
Скільки нових рівнобедрених трикутників утворилося? Які вони мають кути?

47*. У трикутнику ABC $AB = BC$, $\angle BAC = 2\angle ABC$, AD – бісектриса (мал. 282). Доведіть, що $BD = AC$.

48*. На малюнку 283 $AB = CD$, $\triangle AOC$ – рівнобедрений. Доведіть, що $\triangle ABD = \triangle CDB$.

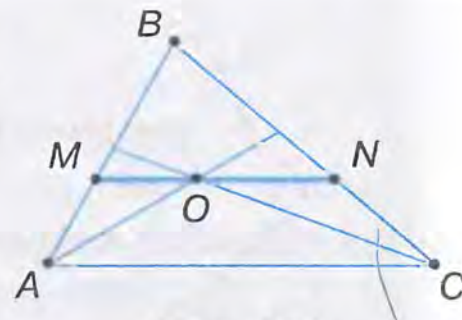


Мал. 282



Мал. 283

49*. У трикутнику ABC проведено бісектрису BD . З вершини C проведено пряму паралельно BD до перетину з продовженням сторони AB у точці E . Який вид трикутника BCE ? Відповідь обґрунтуйте.



Мал. 284

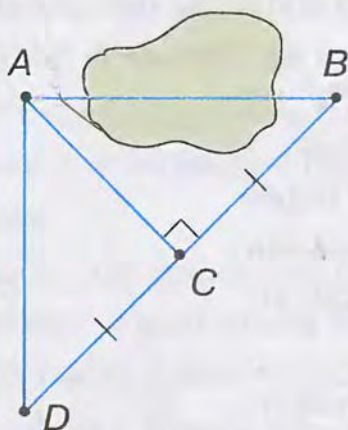
50*. Через точку O перетину бісектрис кутів A і C трикутника ABC проведено пряму MN , паралельну стороні AC (мал. 284). Доведіть, що $MN = AM + CN$.

51*. Доведіть, що проти більшого кута трикутника лежить більша сторона, а проти більшої сторони – більший кут.

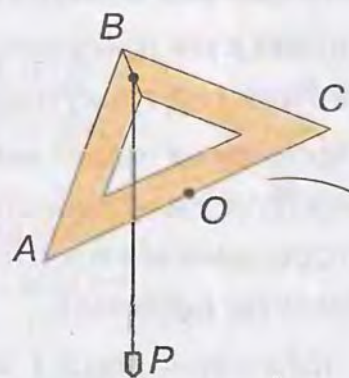
ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

52. Щоб виміряти на місцевості відстань між пунктами A і B , між якими не можна пройти, виконали таку побудову: $AC \perp BD$, $CD = BC$ (мал. 285). Тоді шукана відстань AB дорівнюватиме AD . Чому?

53. На малюнку 286 зображено найпростіший прилад для проведення горизонтальних ліній. У $\triangle ABC$ $AB = BC$, O – середина сторони AC , BP – висок. Як користуватися цим приладом? Поясніть.



Мал. 285



Мал. 286



§ 15. ТРЕТЯ ОЗНАКА РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

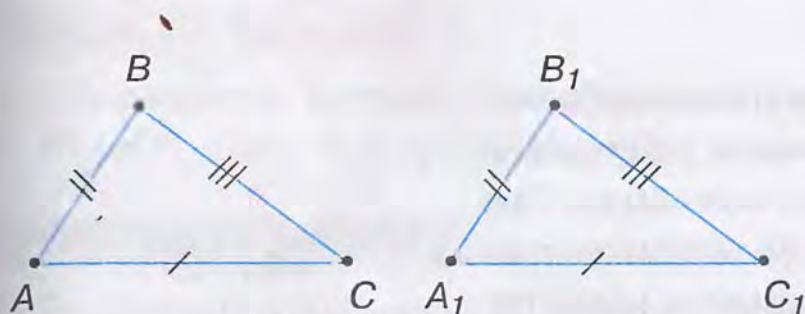


Ви вже знаєте дві ознаки рівності трикутників:

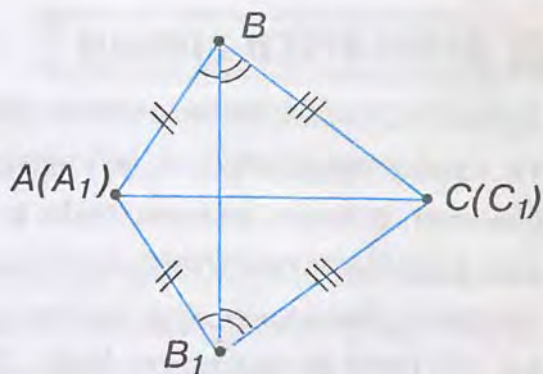
1) за двома сторонами і кутом між ними; 2) за стороною і прилеглими до неї кутами. В обох ознаках використовуються три пари відповідних елементів даних трикутників.



Теорема (ознака рівності трикутників за трьома сторонами). Якщо три сторони одного трикутника дорівнюють відповідно трьом сторонам другого трикутника, то такі трикутники рівні.



Мал. 287



Мал. 288

Дано: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ (мал. 287), $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

Довести: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доведення. Прикладемо $\triangle A_1B_1C_1$ до $\triangle ABC$ так, щоб їх рівні сторони A_1C_1 і AC сумістилися, причому вершина A_1 сумістилася з вершиною A , вершина C_1 — з C , а вершини B і B_1 лежали з різних боків від прямої AC (мал. 288). Проведемо відрізок BB_1 . Утворилися трикутники ABB_1 і CB_1C_1 . Вони рівнобедрені, оскільки, за умовою теореми, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$. Тоді у цих трикутників кути при основах рівні: $\angle ABB_1 = \angle AB_1B$, $\angle CBB_1 = \angle CB_1B$. Суми рівних кутів також рівні, тому $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

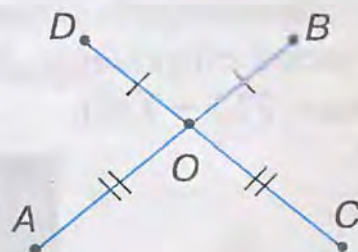
Ми довели, що у $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ між рівними сторонами ($AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$) лежать рівні кути ($\angle ABC$ і $\angle A_1B_1C_1$). Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за двома сторонами і кутом між ними.

Доведіть теорему самостійно для випадків, коли трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — прямокутні; тупокутні.

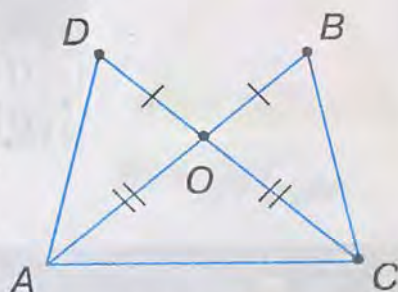
Задача. Рівні відрізки AB і CD перетинаються в точці O так, що $DO = OB$ (мал. 289).

Доведіть, що $\triangle ADC = \triangle CBA$.

Розв'язання. Щоб утворити на малюнку потрібні трикутники, проведемо відрізки AD , BC і AC (мал. 290). Розглянемо трикутники AOD і COB . У них: $DO = OB$ за умовою, $AO = OC$ як різниці рівних відрізків, $\angle AOD = \angle COB$ як вертикальні. Отже, $\triangle AOD = \triangle COB$ за двома сторонами і кутом між ними. З рівності трикутників AOD і COB випливає, що $AD = BC$. Тоді $\triangle ADC = \triangle CBA$ за трьома сторонами. У них: AC — спільна сторона, $AB = CD$ за умовою, $AD = BC$ за доведеним.



Мал. 289



Мал. 290

Розв'язуючи задачі, пам'ятайте:

- 1) якщо на малюнку немає потрібної пари трикутників, то проведіть допоміжні відрізки, щоб їх утворити;
- 2) інколи потрібно довести рівність кількох пар трикутників.

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Ви з'ясували, які елементи трикутника треба знати, щоб стверджувати: усі трикутники з відповідно рівними даними елементами рівні між собою. Про такі елементи говорять, що вони *визначають трикутник*. Ви знаєте три трійки елементів трикутника, які його визначають (мал. 291):

$AB, AC, \angle A$ (перша ознака рівності),

$AC, \angle A, \angle C$ (друга ознака рівності),

AB, AC, BC (третья ознака рівності).

З другої ознаки рівності трикутників випливає ознака їх рівності за такими елементами: $AC, \angle A, \angle B$. Спробуйте її довести самостійно.

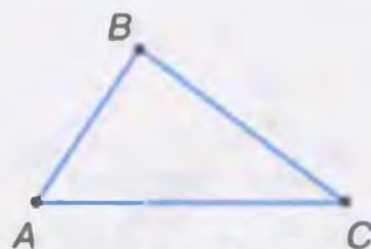
За трьома кутами можна побудувати безліч трикутників, але вони не дорівнюють даному (мал. 292). Тому така трійка елементів не визначає трикутник.

Трійку елементів $AC, AB, \angle B$ розглянемо пізніше, коли здобудемо необхідні знання.

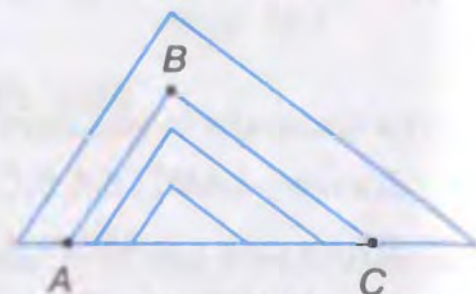
Висновок: трикутник визначають три його елементи, серед яких має бути принаймні одна з його сторін.

2. Візьмемо три дерев'яні планки і закріпимо їх кінці шпильками або цвяхами так, щоб утворився трикутник (мал. 293). Його форму змінити не можна.

Трикутник – фігура жорстка. Це випливає з ознаки рівності трикутників за трьома сторонами. Жорсткість трикутника часто використовують на практиці (мал. 294 – 296).



Мал. 291



Мал. 292



Мал. 293



Мал. 294



Мал. 296



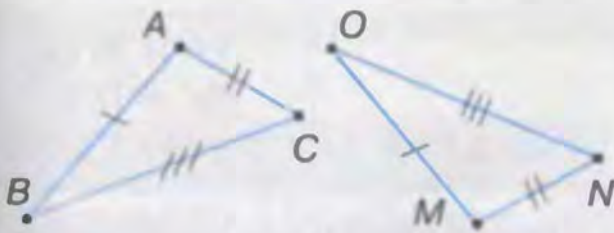
Мал. 295

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

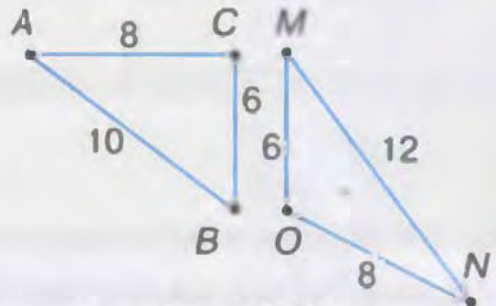
1. Сформулюйте і доведіть ознаку рівності трикутників за трьома сторонами.
2. Поясніть, чому не існує ознаки рівності трикутників за трьома кутами.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

1. За даними на малюнку 297 назвіть відповідно рівні елементи трикутників. Чи рівні ці трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.
2. На малюнку 298 задано елементи трикутників ABC і MON . Чи рівні ці трикутники?

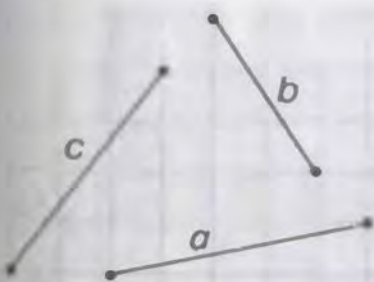


Мал. 297

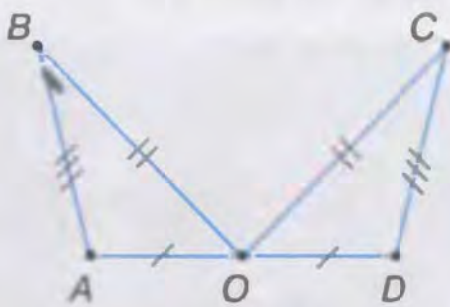


Мал. 298

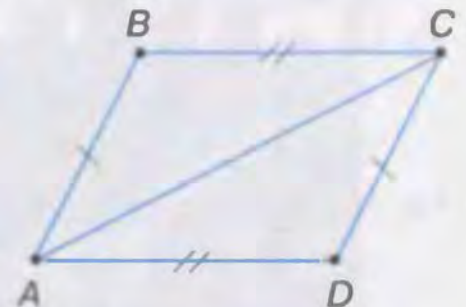
3. Дані відрізки a, b, c (мал. 299) розмістіть у зошиті так, щоб утворився трикутник ABC . Побудуйте за клітинками трикутник DBC , що дорівнює трикутнику ABC .
4. Знайдіть рівні трикутники на малюнках 300 – 302. Поясніть відповідь.
5. Знайдіть на малюнках 303, 304 рівні трикутники. Поясніть, чому вони рівні.
6. Доведіть, що рівні трикутники мають рівні периметри.



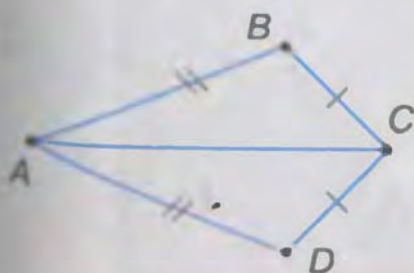
Мал. 299



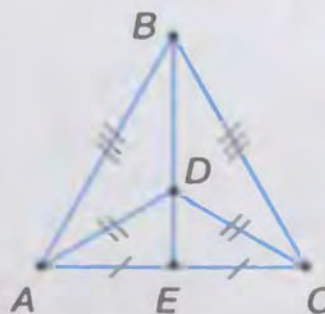
Мал. 300



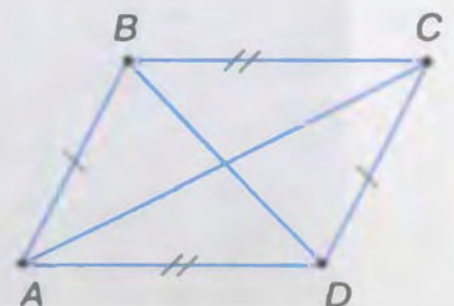
Мал. 301



Мал. 302



Мал. 303



Мал. 304

7°. У трикутнику ABC : $AB = 10$ см, $BC = 9$ см, $AC = 7$ см; у трикутнику DEF : $DE = 7$ см, $EF = 10$ см, $DF = 9$ см. Назвіть рівні кути у цих трикутників.

8°. $\triangle ABC = \triangle KPM = \triangle DEF$. Заповніть таблицю 17.

Таблиця 17

$\triangle ABC$	$AB = 7$ см, $AC = 12$ см, $BC = 15$ см		
$\triangle KPM$		$MK = 8$ см, $KP = 3$ см, $PM = 6$ см	
$\triangle DEF$			$EF = 15$ см, $DF = 18$ см, $DE = 15$ см

9°. Доведіть, що коли сторона одного рівностороннього трикутника дорівнює стороні другого рівностороннього трикутника, то такі трикутники рівні.

10. На малюнку 305 $AD = AB$, $DC = CB$.

Доведіть: 1) $\triangle ADC = \triangle ABC$; 2) AC — бісектриса $\angle BAD$.

11. На малюнку 306 $AN = CM$, $AM = CN$. Доведіть, що $AB = BC$.

12. Рівнобедрені трикутники ABC і ADC (мал. 307) мають спільну основу AC . Пряма BD перетинає відрізок AC в точці O .

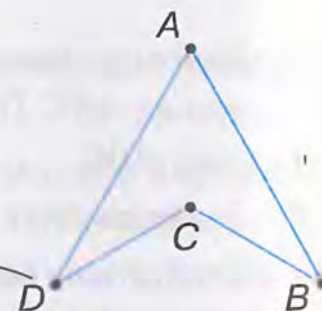
Доведіть: 1) $\angle BAD = \angle BCD$; 2) $AO = OC$.

13. На малюнку 308: $AB = CD$, $AC = BD$.

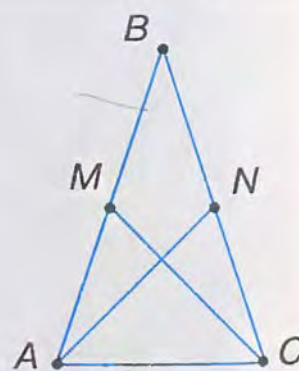
1) Знайдіть кут ABD , якщо $\angle ACD = 85^\circ$.
2) Доведіть, що $AO = OD$.

14. На малюнку 309: $AB = CD$, $AD = BC$, BE і DF — бісектриси кутів B і D .

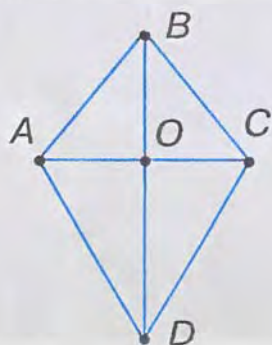
1) Знайдіть кут BAC , якщо $\angle ACD = 35^\circ$.
2) Знайдіть AE , якщо $CF = 3$ см.
3) Доведіть, що $\triangle BCE = \triangle DAF$.



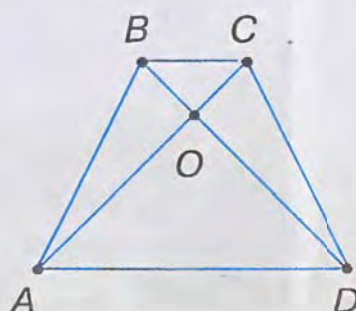
Мал. 305



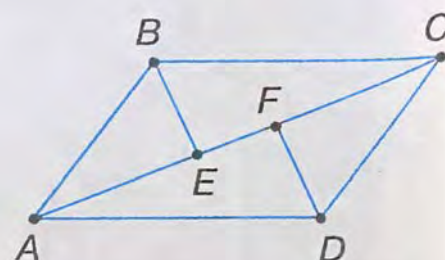
Мал. 306




Мал. 307



Мал. 308

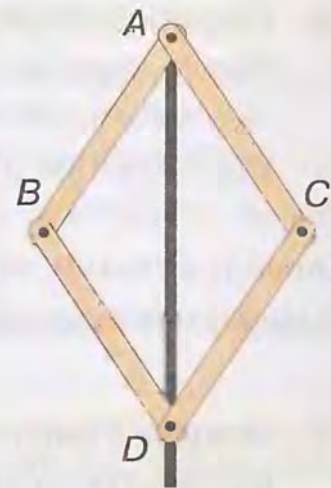


Мал. 309

15. У трикутниках ABC і $A_1B_1C_1$: AD і A_1D_1 – бісектриси, $AB = A_1B_1$, $BD = B_1D_1$ і $AD = A_1D_1$. Доведіть, що $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.
- 16*. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.
-  Якщо в умові задачі дано медіану, то іноді доцільно продовжити медіану на відрізок, що дорівнює їй, сполучити його кінець з кінцем сторони трикутника, до якого проведено медіану, та розглянути утворені трикутники.
- 17*. Доведіть рівність трикутників за двома сторонами і медіаною, що виходять з однієї вершини.
- 18*. Доведіть, що медіана $\triangle ABC$, проведена з вершини A , менша за півсуму сторін AB і AC .

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

19. На малюнку 310 зображено найпростіший шарнірний прилад для поділу кута навпіл. У ньому всі ланки однакової довжини: $AB = BD = DC = AC$. Як користуватися цим приладом? Поясніть.
20. На малюнку 311 зображено садову хвіртку, яку скоро перекосить. Як прибити планку (дошку), щоб надати міцності хвіртці? Поясніть.



Мал. 310



Мал. 311



§ 16. ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ



У прямокутних трикутників один кут прямий, а прямі кути рівні. Тому для прямокутних трикутників можна сформулювати свої ознаки рівності. Із першої і другої ознак рівності трикутників випливають наступні три ознаки рівності прямокутних трикутників.



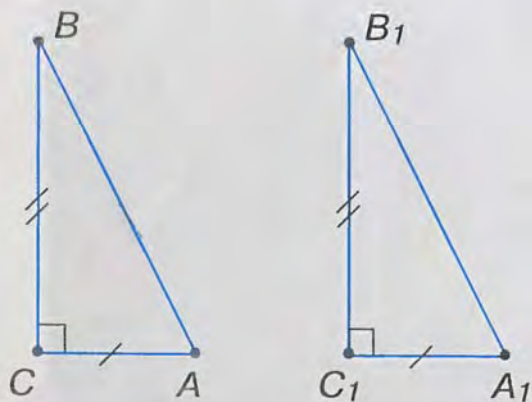
Ознака рівності прямокутних трикутників за двома катетами. Якщо катети одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катетам другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Справді, кути між катетами рівні як прямі кути, тому такі трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників (мал. 312).

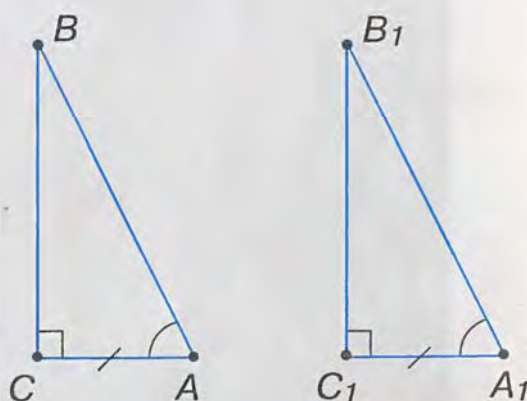


Ознака рівності прямокутних трикутників за катетом і гострим кутом. Якщо катет і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно катету і гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

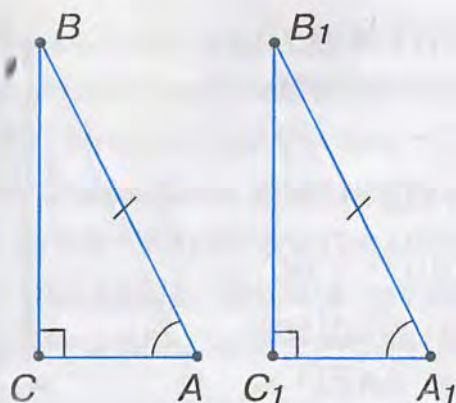
Такі трикутники рівні за другою ознакою рівності трикутників (мал. 313). Якщо ж у двох прямокутних трикутників рівні гострі кути лежать проти даних катетів, то другі їх гострі кути будуть також рівними між собою.



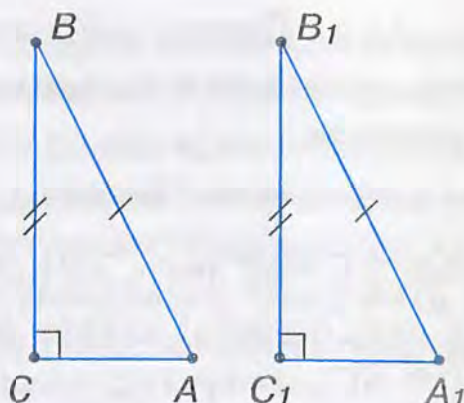
Мал. 312



Мал. 313



Мал. 314



Мал. 315

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом. Якщо гіпотенуза і гострий кут одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й гострому куту другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Якщо два прямокутні трикутники мають по рівному гострому куту, то рівні між собою й другі їх гострі кути (мал. 314). Тому прямокутні трикутники рівні за другою ознакою рівності трикутників.

Четверта ознака рівності прямокутних трикутників потребує доведення.

Ознака рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і катетом. Якщо гіпотенуза і катет одного прямокутного трикутника дорівнюють відповідно гіпотенузі й катету другого прямокутного трикутника, то такі трикутники рівні.

Дано: $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ (мал. 315), $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

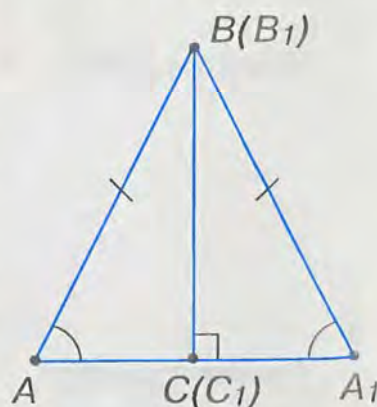
Довести: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Доведення. Прикладемо $\triangle ABC$ до $\triangle A_1B_1C_1$ так, щоб вершина C сумістилася з C_1 , вершина B — з B_1 , а вершини A і A_1 лежали з різних боків від прямої BC (мал. 316).

Оскільки $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$, то сторони AC і A_1C_1 лежатимуть на одній прямій. Утворився трикутник ABA_1 . Він рівнобедрений, бо за умовою $AB = A_1B_1$. За властивістю рівнобедреного трикутника $\angle A = \angle A_1$.

Повернемося до $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ (мал. 315). Ми довели, що у них рівні гострі кути ($\angle A = \angle A_1$). За умовою вони мають рівні гіпотенузи ($AB = A_1B_1$).

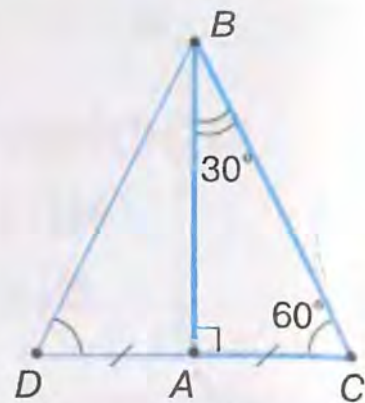
Отже, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за гіпотенузою і гострим кутом.



Мал. 316

Задача. Доведіть, що катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи.

Розв'язання. Нехай у $\triangle ABC$ $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 30^\circ$ і, отже, $\angle C = 60^\circ$ (мал. 317). Доведемо, що $AC = \frac{1}{2} BC$. На продовженні катета AC відкладемо відрізок $AD = AC$ і сполучимо точки B і D . $\triangle ABC = \triangle ABD$ за двома катетами ($AC = AD$ за побудовою, AB — спільний катет). З рівності трикутників випливає $\angle C = \angle D = \angle CBD = 60^\circ$. Тобто $\triangle BCD$ — рівносторонній. Оскільки $AC = \frac{1}{2} CD$, а $CD = BC$, то $AC = \frac{1}{2} BC$.



Мал. 317

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Розгляньте таблицю 18 класифікації трикутників.

Подивіться на горизонтальні рядки таблиці. У першому рядку є всі види рівносторонніх трикутників: гострокутні, прямокутні, тупокутні; у другому — рівнобедрених (також трьох видів стосовно кутів). З третього рядка видно, що рівносторонніми можуть бути лише гострокутні трикутники.

Таблиця 18

ТРИКУТНИКИ	Гострокутні	Прямокутні	Тупокутні
Рівносторонні			
Рівнобедрені			
Рівносторонні		—	—

Розглядаючи стовпці таблиці, бачимо, що гострокутні трикутники можуть бути трьох видів стосовно сторін: різносторонні, рівнобедрені й рівносторонні, а прямокутні й тупокутні трикутники — лише двох видів: різносторонні й рівнобедрені.

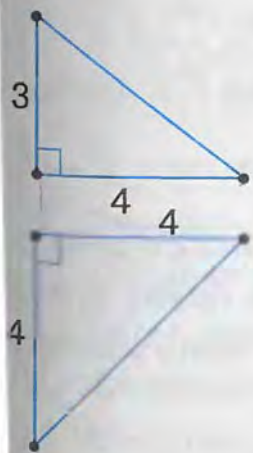
У рівнобедреному прямокутному трикутнику кожний гострий кут дорівнює 45° . Такі два рівні трикутники дістанемо, якщо сполучимо відрізком протилежні вершини квадрата. Висота рівнобедреного прямокутного трикутника також ділить його на два рівні рівнобедрені прямокутні трикутники (поясніть, чому).

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

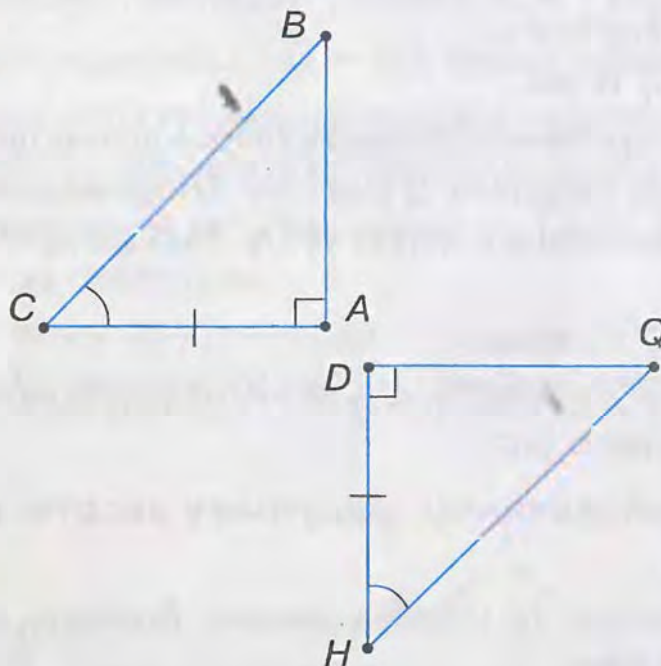
- Сформулюйте і доведіть ознаку рівності прямокутних трикутників:
 - за двома катетами;
 - за катетом і гострим кутом;
 - за гіпотенузою і гострим кутом;
 - за гіпотенузою і катетом.
- Доведіть, що катет прямокутного трикутника, який лежить проти кута 30° , дорівнює половині гіпотенузи.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

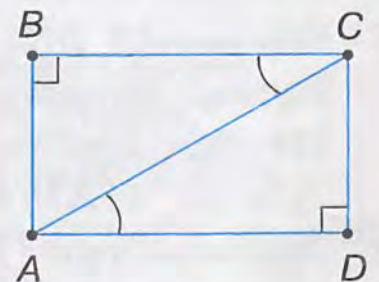
- На малюнку 318 задано елементи двох трикутників. Чи рівні ці трикутники?
- За даними, зображеними на малюнках 319 — 321, назвіть рівні елементи трикутників. Чи рівні дані трикутники? За якою ознакою? Зробіть відповідні записи.



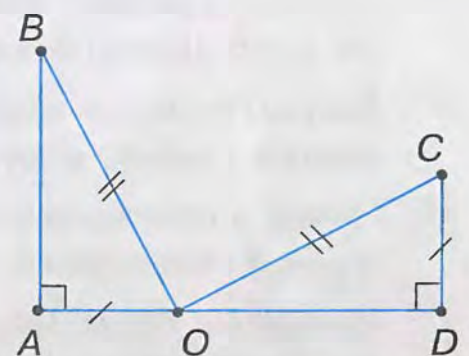
Мал. 318



Мал. 319



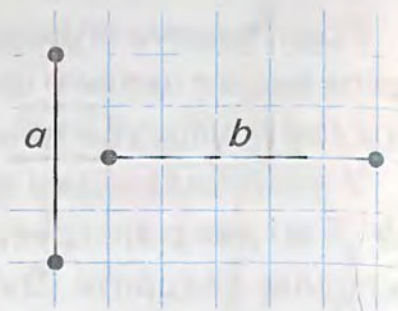
Мал. 320



Мал. 321

3'. Даний відрізок a (мал. 322) розмістіть у зошиті на горизонтальній прямій, а відрізок b — так, щоб утворився прямокутний трикутник ABC з катетами a, b .

Побудуйте за клітинками трикутник DOC , що дорівнює трикутнику ABC .



Мал. 322

4°. Знайдіть відповідно рівні елементи прямокутних трикутників ABC і DEF , якщо:

- 1) $\angle A = \angle E = 90^\circ, AB = DE, AC = EF$;
- 2) $\angle A = \angle D = 90^\circ, AB = DE, AC = DF$;
- 3) $\angle C = \angle F = 90^\circ, \angle A = \angle D, AC = DF$;
- 4) $\angle C = \angle D = 90^\circ, \angle A = \angle F, AC = DF$;
- 5) $\angle B = \angle E = 90^\circ, \angle C = \angle F, AC = DF$;
- 6) $\angle B = \angle F = 90^\circ, \angle C = \angle E, AC = DE$;
- 7) $\angle C = \angle D = 90^\circ, AC = DF, AB = EF$;
- 8) $\angle C = \angle F = 90^\circ, AC = DF, AB = DE$.

5°. Точки A і B розміщені на однаковій відстані від прямої CD по різні боки від неї, причому $AC \perp CD, BD \perp CD$. Знайдіть відрізок AD , якщо відстань між точками B і C дорівнює:

- 1) 5 см; 2) 0,15 дм; 3) 100 мм.

6°. Два рівні перпендикуляри AB і CD проведено до прямої BD з одного боку від неї. Знайдіть відстань між точками A і D , якщо відрізок BC дорівнює:

- 1) 2,5 см; 2) 50 мм; 3) 0,4 дм.

7°. Відрізки AB, KO і BO розміщені так, що $AB \perp BO, OK \perp BO$ і $AB = KO$. Відрізок AK перетинає BO в точці P . Знайдіть відстань від точки P до прямої OK , якщо відрізок BP дорівнює:

- 1) 12 мм; 2) 2,25 см; 3) 10 дм.

8°. Паралельні прямі a і b перетинає перпендикулярна до них пряма c відповідно в точках A і B . Через середину O відрізка AB проведено пряму d , яка перетинає прямі a і b відповідно в точках M і N . Знайдіть OM , якщо відрізок ON дорівнює:

- 1) 9,12 см; 2) 0,112 дм; 3) 39 мм.

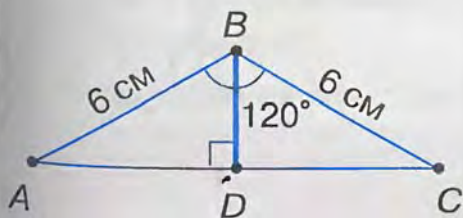
9°. У рівнобедреному трикутнику ABC точка M — середина основи $AC, MF \perp BC, ME \perp AB$. Доведіть, що $ME = MF$.

10°. Доведіть, що в рівнобедреному трикутнику висоти, проведені до бічних сторін, рівні.

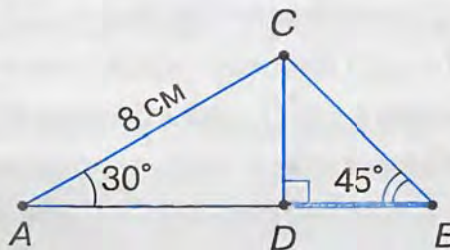
11°. Пряма a перетинає відрізок AB у його середині. Доведіть, що відстані від точок A і B до прямої a рівні.

12°. Доведіть, що точка, яка лежить на бісектрисі кута, рівновіддалена від його сторін.

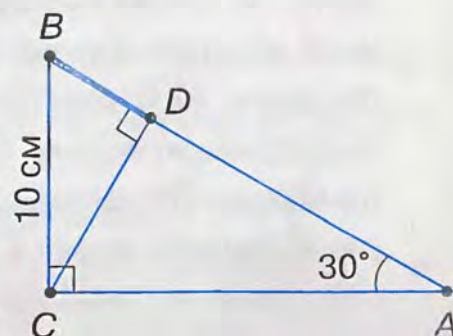
- 13°. Доведіть, що будь-яка точка внутрішньої області кута, яка рівновіддалена від його сторін, лежить на бісектрисі цього кута.
- 14°. Перпендикулярні відрізки AB і CD перетинаються в точці K , що є серединою відрізка AB . $AC = BD$. Знайдіть $\angle KAC$, якщо $\angle KBD$ дорівнює:
1) 30° ; 2) 60° ; 3) 27° .
- 15°. З точки A проведено перпендикуляр AB до прямої a . Два промені з початком A перетинають пряму a у точках C і D , причому $AC = AD$. Знайдіть $\angle CAB$, $\angle ACB$ і $\angle ADB$, якщо $\angle DAB$ дорівнює:
1) 10° ; 2) 20° ; 3) 30° .
16. З кінців відрізка AB проведіть з різних боків від нього два рівні перпендикуляри AA_1 і BB_1 . Проведіть відрізок A_1B_1 . Чи правильно, що він проходить через середину відрізка AB ? Поясніть відповідь.
17. Доведіть рівність прямокутних трикутників:
1) за катетом і медіаною, проведеною до нього;
2) за катетом і медіаною, проведеною до другого катета;
3) за катетом і висотою, проведеною до гіпотенузи;
4) за гострим кутом і бісектрисою цього кута.
18. Доведіть рівність рівнобедрених трикутників за основою та висотою, проведеною до неї.
19. Доведіть рівність трикутників:
1) за висотою і кутами, які вона утворює з прилеглими сторонами;
2)* за стороною, висотою і медіаною, проведеними до цієї сторони.
20. Доведіть рівність гострокутних трикутників:
1) за двома сторонами і висотою, проведеною до третьої сторони;
2)* за стороною і висотами, проведеними з кінців цієї сторони.
21. За даними на малюнках 323 – 325 знайдіть довжину відрізка BD .
22. Доведіть, що коли кут між гіпотенузою і катетом прямокутного трикутника дорівнює 60° , то гіпотенуза вдвічі більша за цей катет.
23. Катет, протилежний куту 60° , дорівнює 14 см. Знайдіть висоту трикутника, проведenu до гіпотенузи.
24. У прямокутному трикутнику до гіпотенузи AB проведено висоту CD ; кут B дорівнює 60° , відрізок $BD = 1$ см. Знайдіть гіпотенузу AB .



Мал. 323

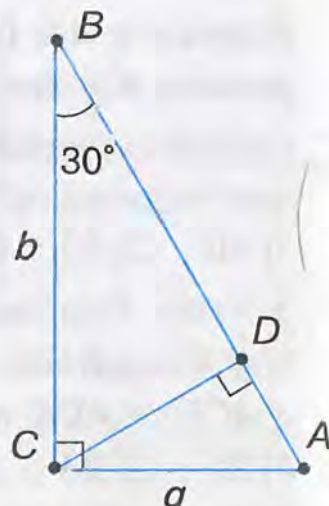


Мал. 324



Мал. 325

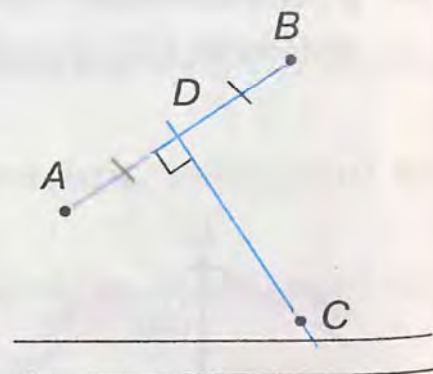
25. Кут B прямокутного трикутника ABC дорівнює 60° , катет BC — 6 см. Знайдіть відрізки, на які висота, проведена з вершини прямого кута, ділить гіпотенузу.
26. Знайдіть AB , AD , CD і BD , якщо $AC = a$, $BC = b$, $\angle ABC = 30^\circ$ (мал. 326).
27. Якщо катет прямокутного трикутника дорівнює половині гіпотенузи, то кут, який лежить проти цього катета, дорівнює 30° . Доведіть.
28. У прямокутному трикутнику висота, проведена до гіпотенузи, дорівнює 4 см, а один з катетів — 8 см. Знайдіть кути трикутника.
29. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона дорівнює 6 см, кінець її віддалений від другої бічної сторони на 3 см. Знайдіть кути трикутника.
30. Із середини D сторони BC рівностороннього трикутника ABC проведено перпендикуляр DM до сторони AC . Знайдіть AM , якщо $AB = 12$ см.
- 31*. Доведіть, що коли медіана трикутника дорівнює половині сторони, до якої вона проведена, то трикутник прямокутний.
- 32*. Кут, протилежний основі рівнобедреного трикутника, дорівнює 120° . Висота, проведена до бічної сторони, дорівнює 9 см. Знайдіть основу трикутника.
- 33*. У прямокутному трикутнику проведено бісектрису кута, що дорівнює 60° . Знайдіть бісектрису, якщо вона менша від більшого катета на 1 см.
- 34*. У прямокутному трикутнику один із кутів дорівнює 60° , сума гіпотенузи і меншого катета становить 45 см. Знайдіть гіпотенузу.
- 35*. Один із кутів прямокутного трикутника дорівнює 15° . Знайдіть висоту, проведenu з вершини прямого кута, якщо медіана, проведена з цієї вершини, дорівнює 8 см.
- 36*. Один з кутів прямокутного трикутника дорівнює 30° . Знайдіть відстань між основами медіани і висоти, проведеними з вершини прямого кута, якщо медіана дорівнює 10 см.



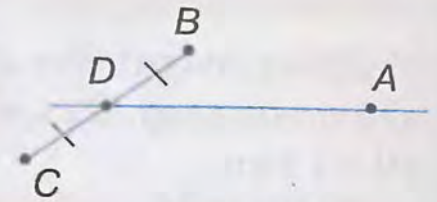
Мал. 326

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

37. Недалеко від населених пунктів A і B проходить шосе. Потрібно побудувати автобусну зупинку так, щоб відстані від неї до населених пунктів були однакові. Місце зупинки визначили так (мал. 327): знайшли середину D відстані між населеними пунктами. Провісили пряму $DC \perp AB$ і позначили на цій прямій точку C біля шосе — місце зупинки. Чи правильно визначили місце для автобусної зу-



38. Через місто A має проходити автомагістраль так, щоб два населених пункти B і C розташовувались із різних боків від неї на однаковій відстані. На малюнку 328 показано план будівництва магістралі. Поясніть, чому населені пункти будуть рівновіддаленими від автомагістралі.



Мал. 328

39. Як скористатися властивістю катета, що лежить проти кута 30° , для вимірювання відстаней між двома пунктами на місцевості, якщо між ними є перешкода, але до кожного з них можна підійти?



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 3



КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які є види трикутників залежно від довжини їх сторін та міри їх кутів?
2. Як називають сторони рівнобедреного трикутника? Прямокутного трикутника?
3. Що таке медіана трикутника? Бісектриса? Висота?
4. Сформулюйте і доведіть теорему про суму кутів трикутника; про властивість зовнішнього кута трикутника.
5. Які властивості має прямокутний трикутник?
6. Сформулюйте і доведіть теорему про властивості та ознаку рівнобедреного трикутника.
7. Які дві геометричні фігури називаються рівними?
8. Сформулюйте і доведіть ознаки рівності трикутників за двома сторонами і кутом між ними; за стороною і прилеглими до неї кутами; за трьома сторонами.
9. Сформулюйте ознаки рівності прямокутних трикутників.

Уважно прочитайте задачу і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання кожного тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

- 1° Два кути трикутника дорівнюють 80° і 25° . Чому дорівнює третій кут?
 А. 95° . Б. 90° . В. 85° . Г. 75° .
- 2° Зовнішній кут трикутника, не суміжний з кутами α і β , дорівнює 120° . Яке із співвідношень правильне?
 А. $\alpha + \beta = 60^\circ$. Б. $\alpha - \beta = 60^\circ$. В. $\alpha + \beta = 120^\circ$. Г. $\alpha + \beta = 180^\circ$.
- 3° Знайдіть кути трикутника, якщо вони відносяться, як 1 : 2 : 3.
 А. $20^\circ, 40^\circ, 80^\circ$. Б. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. В. $40^\circ, 80^\circ, 160^\circ$. Г. $50^\circ, 100^\circ, 150^\circ$.
- 4 Зовнішній кут трикутника, не суміжний з кутами α і β , дорівнює 90° . Яке із співвідношень правильне?
 А. $\alpha = 90^\circ, \beta < 90^\circ$. Б. $\alpha < 90^\circ, \beta > 90^\circ$.
 В. $\alpha < 90^\circ, \beta = 90^\circ$. Г. $\alpha < 90^\circ, \beta < 90^\circ$.
- 5* Різниця двох зовнішніх кутів трикутника дорівнює 36° ; вони відносяться, як 9 : 7. Знайдіть кути трикутника.
 А. $56^\circ, 72^\circ, 82^\circ$. Б. $36^\circ, 72^\circ, 72^\circ$. В. $48^\circ, 56^\circ, 60^\circ$. Г. $18^\circ, 54^\circ, 108^\circ$.

№ 2

- 1° У трикутників ABC і DEF : $AB = DE, BC = EF, \angle B = \angle E$. Чому дорівнює $\angle C$, якщо $\angle D = 35^\circ, \angle E = 50^\circ, \angle F = 95^\circ$?
 А. 90° . Б. 35° . В. 50° . Г. 95° .
- 2° У трикутників PQR і KLM : $PR = KM, \angle P = \angle K, \angle R = \angle M$. Чому дорівнює LM , якщо $PQ = 3$ см, $QR = 5$ см, $PR = 7$ см?
 А. 3 см. Б. 5 см. В. 7 см. Г. 4 см.
- 3° У трикутнику ABC проведено медіану BD , причому $\angle BDA = \angle BDC = 90^\circ$. Чому дорівнює BC , якщо AB на 2 см менша від AC , а $DC = 12$ см?
 А. 2 см. Б. 12 см. В. 24 см. Г. 22 см.
- 4 У трикутнику ABC проведено бісектрису AL , причому $\angle ALB = \angle ALC$. Чому дорівнює $\angle B$, якщо $\angle C$ на 30° менший від $\angle A$?
 А. 30° . Б. 50° . В. 75° . Г. 90° .
- 5* Медіану BO трикутника ABC продовжено за основу AC на відрізок $OD = BO$ і точку D сполучено з точкою A . Знайдіть кут BAD , якщо $\angle BAO = 52^\circ, \angle BCO = 44^\circ$.
 А. 85° . Б. 74° . В. 84° . Г. 96° .

№3

- 1° У рівнобедреному тупокутному трикутнику ABC з основою AB проведено бісектрису BD . Яке із співвідношень правильне?
 А. $AD = DC$. Б. $\angle A = \angle C$. В. $\angle ADB = 90^\circ$. Г. $AC \neq AB$.
- 2° У трикутнику KLM : $\angle K = \angle M$, $KL = a$.
 Яке із співвідношень правильне?
 А. $KM = a$. Б. $ML = a$. В. $KM = ML$. Г. $KL = 2KM$.
- 3° У рівнобедреному трикутнику ONM з периметром P до основи OM проведено бісектрису $ND = a$. Чому дорівнює периметр трикутника DMN ?
 А. $\frac{1}{2}P$. Б. $P - a$. В. $(P + a) : 2$. Г. $\frac{1}{2}P + a$.
- 4 Кут D трикутника DKT удвічі більший за його кут T . Зовнішній кут при вершині K дорівнює 108° . Яке із співвідношень правильне?
 А. $\frac{DK}{DT} > 1$. Б. $\frac{DK}{DT} = 1$. В. $\frac{TK}{DT} = 1$. Г. $\frac{TK}{DT} < 1$.
- 5* Кути трикутника ABC відносяться, як $1 : 1 : 2$. Бісектрису CD проведено до найбільшої із сторін трикутника. Яке із співвідношень правильне?
 А. $AB = 2CD$. Б. $AB = 2AC$. В. $CD = BC$. Г. $\angle DAC > \angle DCA$.


№4

- 1° Трикутники ABC і DEF мають відповідно рівні сторони. Чому дорівнює $\angle E$, якщо $\angle A = 100^\circ$, $\angle C = 45^\circ$?
 А. 100° . Б. 45° . В. 80° . Г. 35° .
- 2° Прямокутні трикутники ABC і DBC з прямим кутом B мають рівні гіпотенузи завдовжки 10 см. Чому дорівнює AB , якщо $\angle D = 60^\circ$?
 А. 10 см. Б. 20 см. В. 2,5 см. Г. 5 см.
- 3° У трикутників KLM і DEF : $\angle K = \angle D = 90^\circ$, $KM = DF$, $LM = EF$. Чому дорівнює сторона DE , якщо $KM = 5$ см, а KL більша за DF на 7 см?
 А. 5 см. Б. 7 см. В. 12 см. Г. 2 см.
- 4 Рівнобедрені трикутники ABC і KLM мають рівні основи s і m та рівні периметри. Чому дорівнює $\angle A$, якщо $\angle M$ на 15° менший від $\angle L$?
 А. 15° . Б. 65° . В. 50° . Г. 55° .
- 5* У трикутнику DEF медіани DK і FM рівні, причому $KE = ME$. Яке із співвідношень правильне?
 А. $\angle DMF = \angle DKF$. Б. $\angle D < \angle F$. В. $DM = 2KF$. Г. $\angle KDF = \angle MFE$.

**У розділі
дізнаєтесь:**

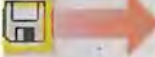
- ▶ про коло, його елементи та їх властивості; про взаємне розміщення двох кіл, прямої та кола;
- ▶ які властивості кола, вписаного у трикутник, і кола, описаного навколо нього;
- ▶ про геометричні фігури, всі точки яких мають одну і ту саму властивість;
- ▶ що таке задача на побудову, які етапи та способи її розв'язування

§ 17. КОЛО І КРУГ

 Якщо циркулем, не змінюючи його розхилу, опишемо криву замкнену лінію, то дістанемо коло (мал. 329). Усі точки кола рівновіддалені від однієї точки. Сформулюйте означення кола і порівняйте з наведеним.





Мал. 329

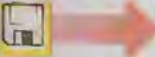
 **Колом** називається геометрична фігура, яка складається з усіх точок площини, рівновіддалених від даної точки. Ця точка називається *центром* кола.


З колом пов'язують три відрізки, які мають спеціальні назви: *радіус*, *хорда*, *діаметр*.

На малюнку 330: OC – радіус кола, DE – хорда, AB – діаметр. Сформулюйте означення цих відрізків. Порівняйте ваші означення з наведеними.

 **Радіусом** називається відрізок, який сполучає будь-яку точку кола з його центром.

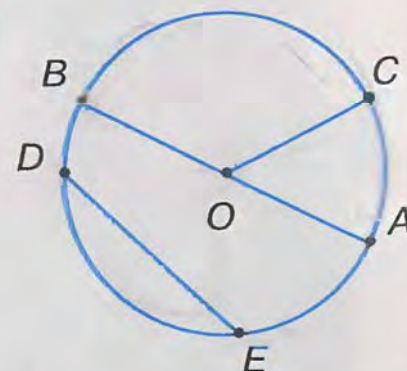
 **Хордою** називається відрізок, який сполучає будь-які дві точки кола.

 **Діаметром** називається хорда, яка проходить через центр кола.

 Радіус позначають буквою R або r , діаметр – буквою D або d .

Зрозуміло, що всі радіуси кола рівні між собою. Діаметр дорівнює двом радіусам.

Будь-які дві точки кола поділяють його на частини, які називаються *дугами*.

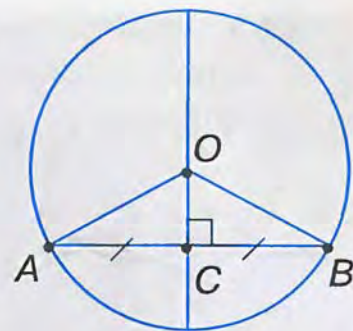


Мал. 330

Задача. Доведіть, що діаметр, перпендикулярний до хорди, ділить її навпіл.

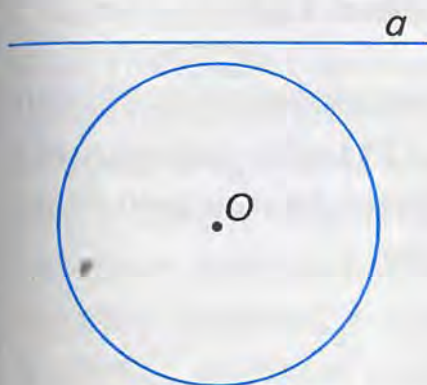
Розв'язання. Нехай AB – хорда, $OC \perp AB$ (мал. 331). Доведемо, що $AC = CB$.

$\triangle AOB$ – рівнобедрений, оскільки $OA = OB$ як радіуси кола. У рівнобедреному трикутнику AOB висота OC , проведена до основи, є медіаною. Отже, $AC = CB$.

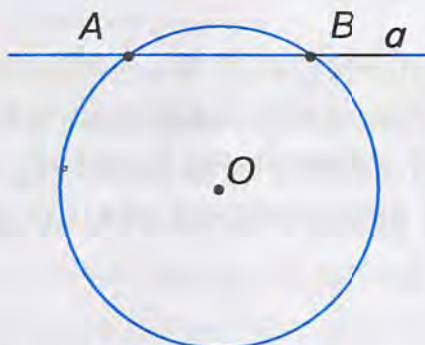


Мал. 331

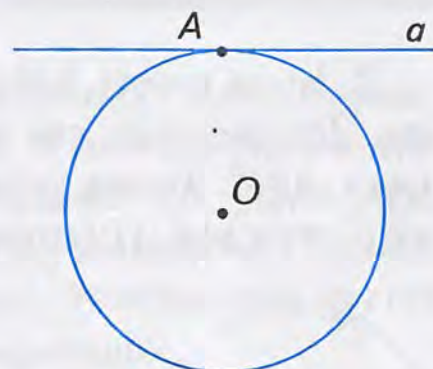
Подивіться на малюнки 332 – 334. На них зображено три випадки взаємного розміщення прямої і кола.



Мал. 332



Мал. 333



Мал. 334

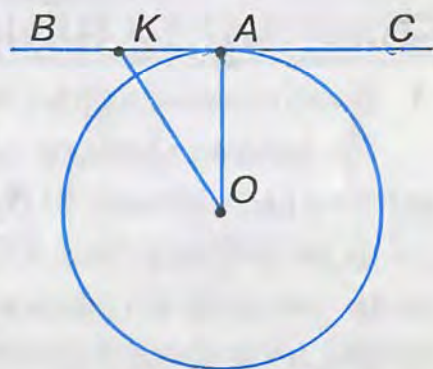
1. Пряма і коло не мають спільних точок (мал. 332).
2. Пряма і коло мають дві спільні точки (мал. 333). Така пряма називається *січною*.
3. Пряма і коло мають одну спільну точку (мал. 334).

Пряма називається **дотичною** до кола, якщо вона має з колом одну спільну точку.

Ця точка називається *точкою дотику*.

Властивість дотичної. Дотична до кола перпендикулярна до радіуса цього кола, проведеного в точку дотику.

Справді, якщо пряма BC дотикається до кола в точці A (мал. 335), то будь-яка інша точка K цієї прямої лежатиме поза колом і $OK > OA$. Тому радіус OA кола – найменший з відрізків, які сполучають точку O з точками прямої BC . Таким відрізком є перпендикуляр, проведений з точки O до прямої BC , тобто $BC \perp OA$.



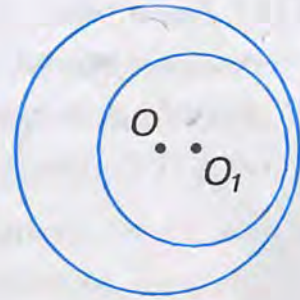
Мал. 335

Розглянемо взаємне розміщення двох кіл.

1. Кола не мають спільної точки. Такі кола лежать одне поза одним (мал. 336) або одне всередині другого (мал. 337).

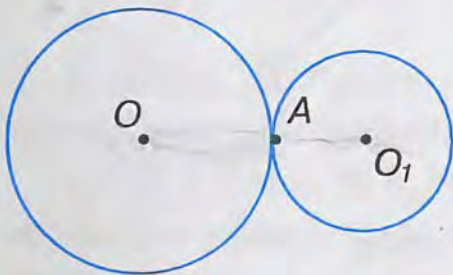


Мал. 336

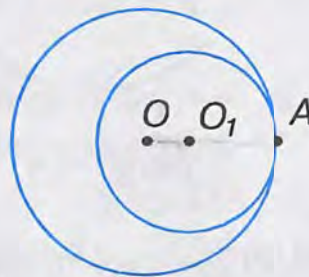


Мал. 337

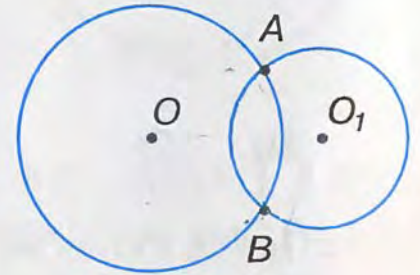
2. Кола мають одну спільну точку. Такі кола називаються *дотичними*. Дотик двох кіл може бути зовнішнім (мал. 338) або внутрішнім (мал. 339). Точка дотику лежить на прямій, яка проходить через центри даних кіл. Ця пряма називається *лінією центрів*.



Мал. 338



Мал. 339



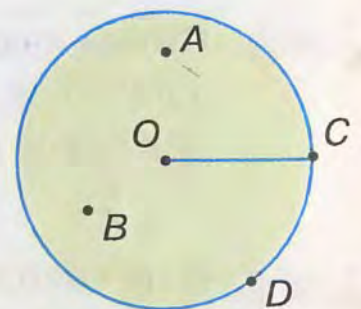
Мал. 340

3. Кола мають дві спільні точки (мал. 340). Вони перетинаються в цих точках.



Частина площини, обмежена колом, називається **кругом**.

Точки круга радіуса R віддалені від його центра O на відстань, яка менша або дорівнює R (мал. 341).

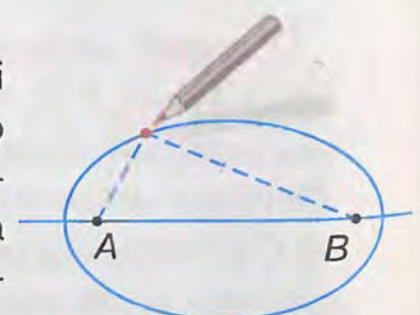


Мал. 341

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Найближчий «родич» кола — *еліпс*.

На аркуші цупкого паперу закріпіть шпильками кінці нитки у двох точках A і B (довжина нитки має бути більшою за довжину відрізка AB). Проведіть лінію, рухаючи олівець так, щоб він натягував нитку (мал. 342). Накреслена крива лінія буде еліпсом. Усі точки еліпса мають властивість: сума відстаней від будь-якої точки еліпса до точок A і B є величиною сталою.



Мал. 342

Точки A і B називаються фокусами еліпса.

Еліпси ми часто спостерігаємо в житті. Якщо, наприклад, нахилити склянку з водою, то обрис верхнього шару набуде вигляду еліпса.

Ще німецький учений Йоганн Кеплер (1571 – 1630) виявив, що планети рухаються навколо Сонця не за колами, як вважали раніше, а за еліпсами, причому Сонце перебуває у фокусі кожного еліпса.

2. Слово «коло» було відоме ще за часів Київської Русі. Воно означало «круг», «колесо» і збереглося до наших днів в українській, білоруській, польській і чеській мовах. У південних слов'ян поширений народний танок «коло». У сучасній українській мові є багато слів, похідних від іменника «коло»: кільце, колесо, одноколка, двоколка, кружний (шлях, дорога). Корінь «коло» (круг) знаходимо в словах «колобродити» (безцільно ходити, бродити де-небудь), «коловорот» (ручне свердло), «полярні кола», «зачаровані кола», «колобок» тощо.

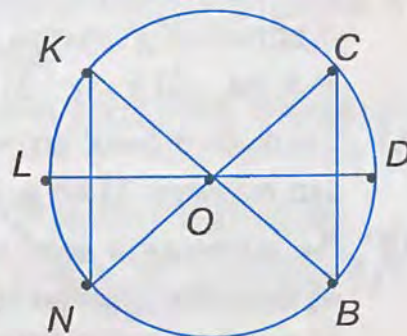
Слово «радіус» походить від латинського *radius* – промінь, спиця в колесі, а позначення радіуса R або r є першою буквою цього слова. Вавилоняни й давні індуси вважали радіус найважливішим елементом кола. Проте вони не вживали цей термін. Евклід називав радіус «прямою з центра». Лише в XVI ст. термін «радіус» почали вживати французькі вчені.

Слово «діаметр» походить від грецького *diametros* – поперечник. Звідси й позначення діаметра буквою d . Слово «хорда» походить від грецького *chorde* – струна.



✓ ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

1. Що таке коло? Центр кола? Радіус?
2. Що таке хорда кола? Яка хорда називається діаметром?
3. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої і кола.
4. Яка пряма називається дотичною до кола?
5. Обґрунтуйте, що дотична до кола перпендикулярна до радіуса цього кола, проведеного в точку дотику.
6. Назвіть випадки взаємного розміщення двох кіл.
7. Які кола називаються дотичними?
8. Що таке круг? Чим відрізняється круг від кола?

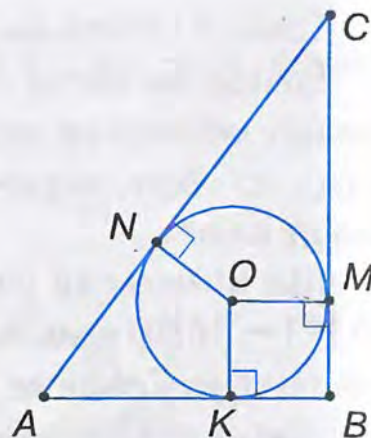


Мал. 343

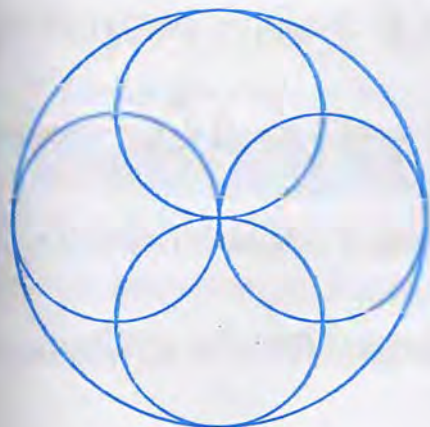
📌 РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

- 1'. Які з відрізків, зображених на малюнку 343, є: 1) хордами; 2) діаметрами; 3) радіусами кола?

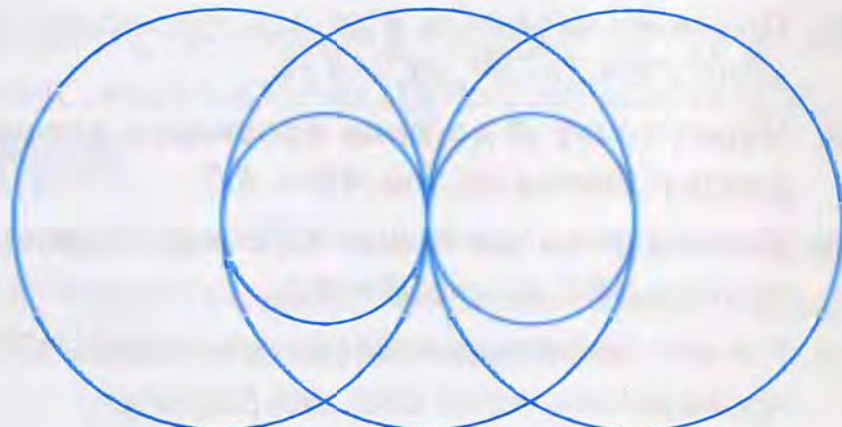
- 2°. Назвіть дотичні до кола на малюнку 344. Запишіть, до якого з радіусів перпендикулярна кожна дотична.
- 3°. Побудуйте два дотичні кола з радіусами, що дорівнюють 2 і 3 клітинкам зошита. Скільки випадків потрібно розглянути?
- 4°. Круг з центром O має радіус 1,5 см. Точки A , B , і C розміщені так, що відстань від кожної з них до центра: 1) менша від радіуса; 2) дорівнює радіусу; 3) більша за радіус.
Зробіть малюнки.
- 5°. Знайдіть діаметр кола, якщо його радіус дорівнює: 1) 6,5 см; 2) 2,6 см; 3) t см; 4) $2n$ см.
- 6°. Знайдіть радіус кола, якщо його діаметр дорівнює: 1) 4,2 см; 2) 8,2 см; 3) a см; 4) $2a$ см.
- 7°. Скільки з однієї точки кола можна провести: 1) хорд; 2) діаметрів; 3) радіусів?
- 8°. Радіус кола — 4 см. Чи може хорда цього кола дорівнювати: 1) 7 см; 2) 8 см; 3) 9 см; 4) 4 см?
Відповідь поясніть.
- 9°. Діаметр AB перетинає хорду CD під прямим кутом; M — точка їх перетину. Чи завжди рівність правильна: 1) $AM = BM$; 2) $CM = DM$?
Відповідь поясніть.
- 10°. Знайдіть довжину хорди кола, якщо перпендикулярний до неї діаметр відтинає від неї відрізок: 1) 0,5 дм; 2) 30 мм; 3) 4,5 см; 4) 0,07 дм.
Відповідь поясніть.
- 11°. Діаметр, що проходить через середину хорди, перпендикулярний до цієї хорди. Доведіть.
- 12°. Діаметр AB ділить хорду CD на відрізки: 1) 2 см і 0,2 дм; 2) 30 мм і 0,3 см; 3) 40 см і 4 дм; 4) 26 см і 0,26 дм.
Чи можна стверджувати, що $AB \perp CD$? Відповідь поясніть.
- 13°. Яке взаємне розміщення прямої та кола, якщо радіус кола становить 5 см, а відстань від центра до прямої дорівнює: 1) 4 см; 2) 5 см; 3) 6 см; 4) 0,5 дм.
- 14°. Скільки різних дотичних до даного кола можна провести через дану точку, що лежить: 1) поза колом; 2) на колі; 3) всередині кола?
- 15°. Як розміщені два кола, якщо: 1) радіуси дорівнюють 5 і 10 см, а відстань між їх центрами становить 16 см; 2) радіуси дорівнюють 6 і 8 см, а відстань між їх центрами становить 14 см; 3) радіуси дорівнюють 12 і 16 см, а відстань між їх центрами становить 4 см?



Мал. 344



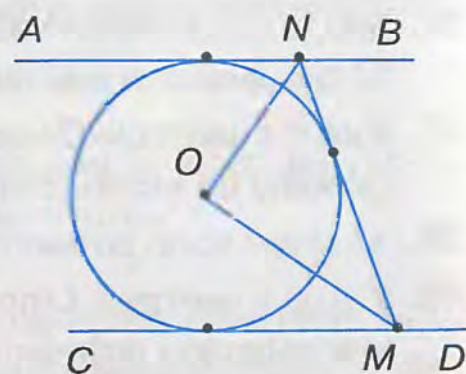
Мал. 345



Мал. 346

- 16°.** Кола з радіусами 4 і 6 см дотикаються. Знайдіть відстань між центрами кіл у випадках зовнішнього і внутрішнього дотиків.
- 17°.** Побудуйте фігури, зображені на малюнках 345, 346. Позначте номерами кола на кожному з малюнків. Як взаємно розміщені ці кола?
- 18°.** Круг з центром O має радіус завдовжки 2 см. Як розміщена точка A відносно цього круга, якщо відрізок OA дорівнює:
1) 0,1 дм; 2) 20 мм; 3) 0,9 см; 4) 3 см?
Відповідь поясніть.
- 19.** Чи можуть дві хорди кола, що не проходять через центр, точкою перетину ділитися навпіл?
- 20.** Хорда CD ділить навпіл перпендикулярну їй хорду AB . Порівняйте ці хорди.
- 21.** Хорда віддалена від центра кола на 10 см. Знайдіть відстань від цієї хорди до паралельної і рівної їй хорди.
- 22.** У колі проведено три рівні хорди. Одна з них віддалена від центра на 6 см. Знайдіть відстань від центра до двох інших хорд.
- 23.** У колі проведено діаметри AB і CD . Доведіть, що хорди AC і BD рівні й паралельні.
- 24.** AB і CD — діаметри кола з центром O . Знайдіть периметр трикутника BOC , якщо $AD = 3$ см, $CD = 8$ см.
- 25.** Із точки A кола з центром O проведено діаметр AB і хорду AC . Знайдіть кут BAC , якщо $\angle BOC = 110^\circ$.
- 26.** Хорда кола перетинає діаметр під кутом 30° і ділиться ним на відрізки 6 і 12 см. Знайдіть відстань від кінців хорди до діаметра.
- 27.** У колі з центром O через середину радіуса проведено хорду AB , перпендикулярну до нього. Знайдіть кут AOB .
- 28.** Чи може коло дотикатися до прямої у двох точках? Поясніть відповідь.
- 29.** У колі з центром O проведено хорду AB і дотичну в точці A . Знайдіть кути між хордою і дотичною, якщо:
1) $\angle AOB = 70^\circ$; 2) хорда дорівнює радіусу кола.

30. Пряма AB дотикається до кола з центром O в точці B . Знайдіть радіус кола, якщо $\angle BAO = 30^\circ$, $AO = 8$ см.
31. Через точку A до кола проведені дотичні AB і AC , де B і C — точки дотику. Доведіть, що $AB = AC$.
32. Дотичні до кола в точках A і B перетинаються в точці C . Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $AB = AC$.
33. Кут між двома радіусами кола дорівнює 150° . Знайдіть кут між дотичними, проведеними через кінці цих радіусів.
34. Дотичні до кола в точках B і C перетинаються в точці A . Знайдіть AB і AC , якщо $\angle BAC = 90^\circ$, а радіус кола — R .
35. Дотичні до кола утворюють кут 60° . Доведіть, що:
 1) відрізок, який сполучає точки дотику, дорівнює довжині дотичної від точки перетину дотичних до точки її дотику;
 2) відрізок, який сполучає точку перетину дотичних з центром кола, дорівнює діаметру кола.
36. Кут BAC , утворений дотичними AB і AC до даного кола, дорівнює 60° . Знайдіть відстань між точками дотику B і C , якщо:
 1) $AB = 4$ см; 2) $AB + AC = 10$ см.
37. Кола з центрами O і O_1 перетинаються в точках A і B . Доведіть:
 1) $\angle AOO_1 = \angle BOO_1$; 2) $\angle OAB = \angle OBA$; 3) $AB \perp OO_1$.
- 38*. З точки кола проведено діаметр і хорду, що дорівнює радіусу. Знайдіть кут між ними.
- 39*. З точки кола проведено дві хорди, що дорівнюють радіусу. Знайдіть кут між ними.
- 40*. З точки кола проведено дві рівні хорди і діаметр. Доведіть, що цей діаметр ділить кут між хордами навпіл.
- 41*. Доведіть, що рівні хорди рівновіддалені від центра кола.
- 42*. Сформулюйте і доведіть твердження, обернене до сформульованого в задачі 41.
- 43*. Із даної точки кола проведено дві взаємно перпендикулярні хорди, з яких перша віддалена від центра на 30 см, а друга — на 10 см. Знайдіть їх довжини.
- 44*. З точки, взятої на бісектрисі кута, проведено коло, яке перетинає сторони кута. Чи рівні відрізки відтинає коло від сторін кута? Поясніть відповідь.
- 45*. На малюнку 347: AB , CD , MN — дотичні до кола, причому $AB \parallel CD$. Доведіть, що $\angle MON = 90^\circ$.
- 46*. Кут між дотичними до кола дорівнює куту між радіусами, проведеними в точки дотику. Знайдіть цей кут.

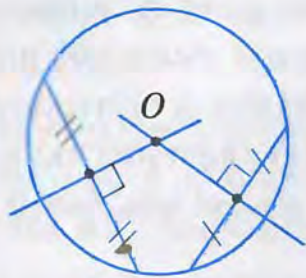


Мал. 347

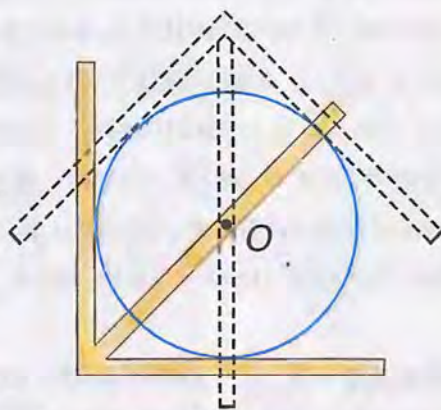
- 47°. Через точку A до кола з центром O проведено дотичні AB і AC , де B і C — точки дотику. Знайдіть кут BAC , якщо середина відрізка AO лежить на колі.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

- 48°. Потрібно описати коло для клумби. Як це зробити, якщо є кілочки і мотузка?
49. На малюнку 348 показано, як відшукати центр кола за допомогою лінійки і косинця. Поясніть, на основі якої властивості можна це зробити.



Мал. 348



Мал. 349

50. Щоб знайти центр деталі, що має форму круга, використовують прилад, який називається центрошукачем. Це довільний кут, виготовлений з двох металевих або дерев'яних планок, в якому прикріплена ще одна планка — бісектриса цього кута. На малюнку 349 показано, як знаходять центр круга. Поясніть, як користуватися цим приладом.

§ 18. ГЕОМЕТРИЧНЕ МІСЦЕ ТОЧОК

Ви знаєте, що всі точки кола мають одну й ту саму властивість — усі вони лежать на однаковій відстані від даної точки.

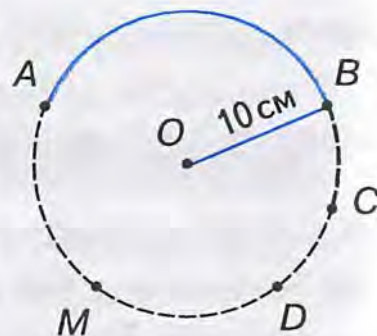


Фігура, що складається з усіх точок площини, які мають певну властивість, називається **геометричним місцем точок**.

Дайте означення кола, використавши поняття «геометричне місце точок».

Що означає вимога «фігура складається з усіх точок площини, які мають певну властивість»?

Розгляньте малюнок 350. Чи можна вважати дугу AB кола з центром O і радіусом 10 см геометричним місцем точок, рівновіддалених від центра O на 10 см? Не можна. Справді, кожна точка дуги AB віддалена від точки O на 10 см. Але на площині є точки, що віддалені від точки O на 10 см і не лежать на дузі AB . Наприклад, точки C, D, M та інші.



Мал. 350

Взагалі, фігура може складатися з точок, які мають певну властивість, але не містити всіх точок площини з цією властивістю. Така фігура не є геометричним місцем точок. Отже, коли в означенні геометричного місця точок сказано, що фігура складається з усіх точок площини, які мають певну властивість, то це означає: по-перше, що кожна точка фігури має цю властивість; по-друге, кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі.

Задача 1. Доведіть, що геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектрисою цього кута.

Розв'язання.

1. Доведемо, що кожна точка бісектриси кута рівновіддалена від його сторін.

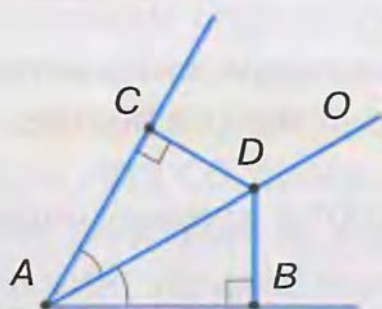
Нехай D — довільна точка бісектриси AO кута A , $DC \perp AC$, $DB \perp AB$ (мал. 351). Доведемо, що $DC = DB$.

Прямокутні трикутники ACD і ABD рівні за гіпотенузою і гострим кутом (гіпотенуза AD — спільна, $\angle CAD = \angle BAD$, бо AO — бісектриса $\angle A$). Тому $DC = DB$.

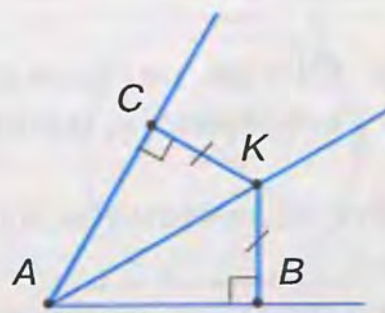
2. Чи не існує інших точок площини, що мають дану властивість? Доведемо, що кожна точка внутрішньої області кута, рівновіддалена від його сторін, лежить на його бісектрисі.

Нехай K — довільна точка внутрішньої області $\angle A$, $KC \perp AC$, $KB \perp AB$ і $KC = KB$ (мал. 352). Доведемо, що AK — бісектриса $\angle A$.

Прямокутні трикутники ACK і ABK рівні за гіпотенузою і катетом (гіпотенуза AK — спільна, $KC = KB$ — за умовою). Звідси випливає: $\angle CAK = \angle BAK$, тобто точка K лежить на бісектрисі кута A .



Мал. 351



Мал. 352

Щоб переконатися, що фігура F є геометричним місцем точок, доведіть два взаємно обернених твердження:

- 1) кожна точка, що належить фігурі F , має дану властивість;
- 2) кожна точка площини, що має дану властивість, належить фігурі F .

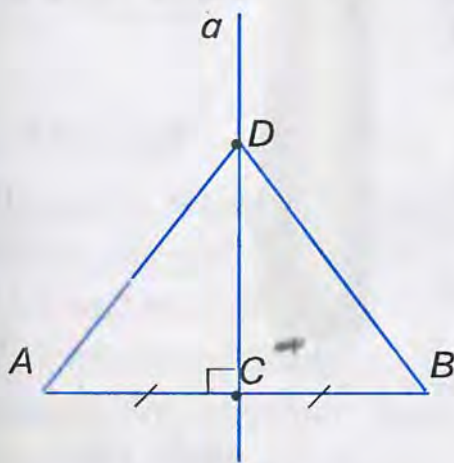
Задача 2. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

Розв'язання. Позначимо кілька точок, рівновіддалених від кінців відрізка AB . Наприклад, M, N, K, P та C – середину відрізка AB . (мал. 353).

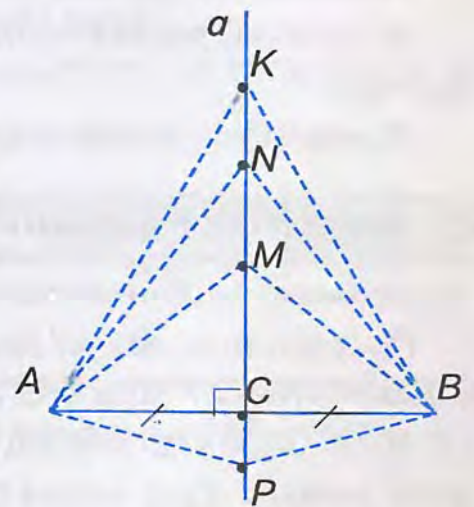
Робимо припущення: шуканим геометричним місцем точок є пряма a , яка перпендикулярна до відрізка AB і проходить через його середину.

Доводимо справедливість припущення.

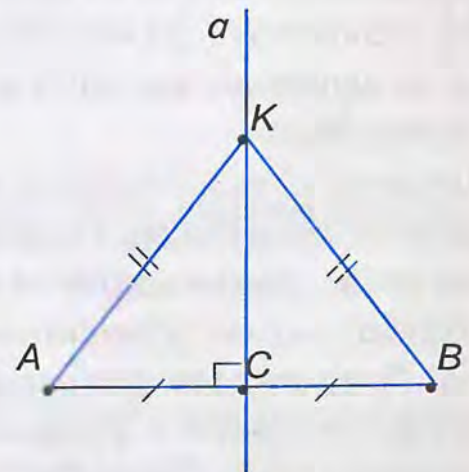
1. Покажемо, що кожна точка прямої a рівновіддалена від точок A і B . Візьмемо на прямій a довільну точку D і сполучимо її з точками A і B (мал. 354). $\triangle ACD = \triangle BCD$ за двома катетами ($AC = CB$ за умовою, CD – спільний катет). З рівності трикутників випливає: $AD = BD$.



Мал. 354



Мал. 353



Мал. 355

2. Доведемо, що кожна точка площини, рівновіддалена від точок A і B , лежить на прямій a .

Візьмемо на площині довільну точку K , рівновіддалену від точок A і B , тобто $AK = BK$ (мал. 355). Проведемо пряму KC , де C – середина відрізка AB . $\triangle ABK$ – рівнобедрений, бо $AK = BK$ за умовою. У ньому KC – медіана, а отже, і висота. Звідси випливає, що точка K лежить на прямій a .

Робимо висновок: геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка, є пряма, яка перпендикулярна до відрізка і проходить через його середину.



Пряма, що проходить через середину відрізка перпендикулярно до нього, називається **серединним перпендикуляром**.



Щоб знайти геометричне місце точок:

- 1) позначте кілька точок з даною властивістю;
- 2) зробіть припущення про вид і розміщення на площині шуканої фігури;
- 3) доведіть правильність припущення.



ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

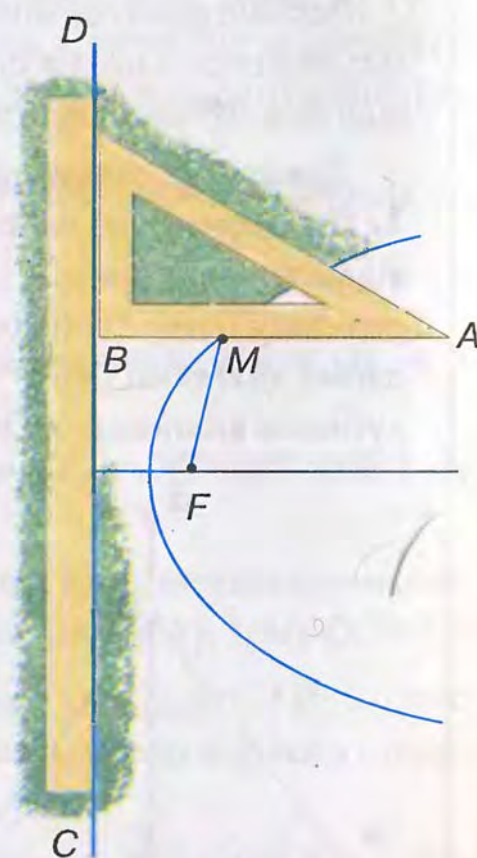
Розглянемо особливе геометричне місце точок.

Проведемо на аркуші паперу будь-яку пряму CD , візьмемо точку F поза нею і рухатимемо вістря олівця M так, щоб відстань від нього до прямої в будь-який момент була такою самою, як і відстань до точки F (мал. 356). Для цього достатньо до вершини A косинця прикріпити кнопкою нитку, довжина якої дорівнює катету AB , а вільний кінець нитки прив'язати до шпильки, ввіткнутої у точку F . Якщо тепер другий катет трикутника ковзатиме по лінійці, прикладеній до CD , то вістря олівця M , яке натягує нитку і притискує її до вільного катета трикутника, буде на однаковій відстані від лінійки і від шпильки: $BM = MF$.

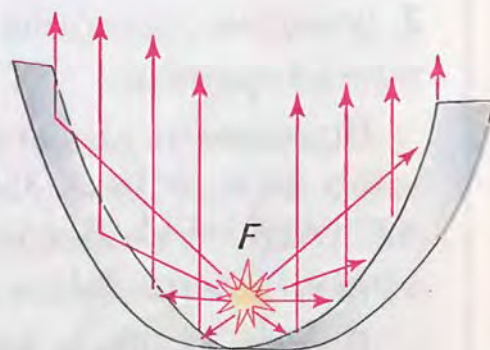
Це вістря опише на папері частину лінії, яка називається *параболою*. Парабола — геометричне місце точок, рівновіддалених від даної точки і даної прямої, яка не проходить через цю точку. Точка F називається *фокусом* параболи. Перпендикуляр, опущений з фокуса на пряму CD і продовжений, є *віссю* параболи.

Якщо вузьку пластинку добре відполірованого металу зігнути за дугою параболи, то промені точкового джерела світла, вміщеного у фокусі, відбившись від пластинки, підуть паралельно осі (мал. 357). На цій властивості параболи ґрунтується будова параболічних дзеркал, які застосовуються в автомобільних фарах, і, загалом, прожекторах.

Камінь, кинутий не точно вертикально, летить за параболою; те саме можна сказати і про гарматний снаряд. Хоча опір повітря в обох випадках дещо спотворює форму параболи.



Мал. 356



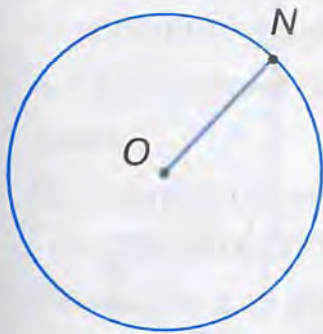
Мал. 357

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

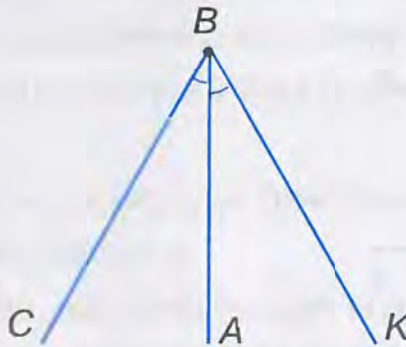
1. Що таке геометричне місце точок?
2. Наведіть приклади геометричних місць точок.
3. Що таке серединний перпендикуляр?
4. Як переконатися, що фігура є геометричним місцем точок?
5. Доведіть, що геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута, є бісектрисою цього кута.
6. Як знайти геометричне місце точок?
7. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців даного відрізка.

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

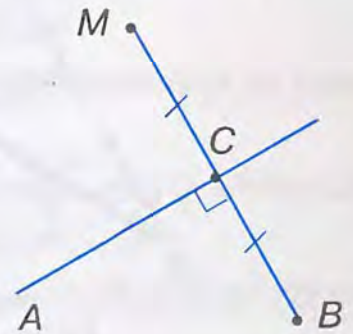
- 1'. Назвіть геометричні місця точок, зображених на малюнках 358 – 360.



Мал. 358

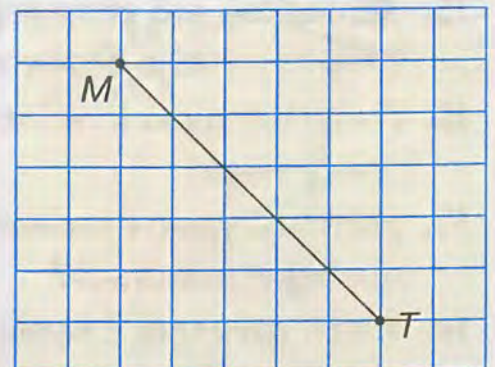


Мал. 359



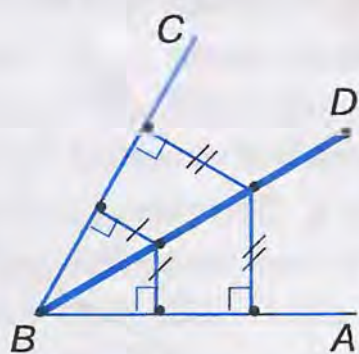
Мал. 360

- 2'. Позначте точку P і побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від цієї точки на:
- 1) 2 клітинки зошита;
 - 2) 3 клітинки зошита.
- 3'. Накресліть гострий, прямий і тупий кути. За допомогою транспортира і лінійки побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від сторін кута.
- 4'. Накресліть за клітинками відрізок MT , зображений на малюнку 361. За допомогою лінійки і косинця побудуйте геометричне місце точок, рівновіддалених від кінців цього відрізка.
- 5'. Чи можна круг радіуса 10 см вважати геометричним місцем точок, віддалених від його центра на відстань:
- 1) що дорівнює 10 см;
 - 2) більшу за 10 см;
 - 3) меншу від 10 см;
 - 4) не більшу за 10 см;
 - 5) не меншу від 10 см?

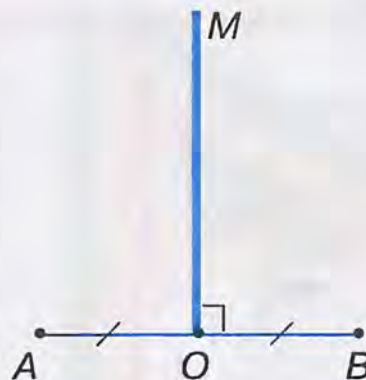


Мал. 361

- 6°. Чи можна вважати частину круга з радіусом 5 см геометричним місцем точок, віддалених від центра круга на відстань, не більшу за 5 см?
- 7°. Яке з висловлень правильне:
 1) будь-яка точка бісектриси кута рівновіддалена від сторін кута;
 2) існують точки бісектриси кута, не рівновіддалені від сторін кута?
- 8°. На малюнку 362 кожна точка відрізка BD рівновіддалена від сторін кута ABC . Чи є відрізок BD геометричним місцем точок, рівновіддалених від сторін кута? Поясніть відповідь.
- 9°. Побудуйте довільний трикутник ABC . За допомогою транспортира і лінійки проведіть бісектриси кутів A і B . Яку властивість має точка їх перетину?
- 10°. Чи можна вважати промінь OM геометричним місцем точок, рівновіддалених від кінців відрізка AB (мал. 363)?




Мал. 362



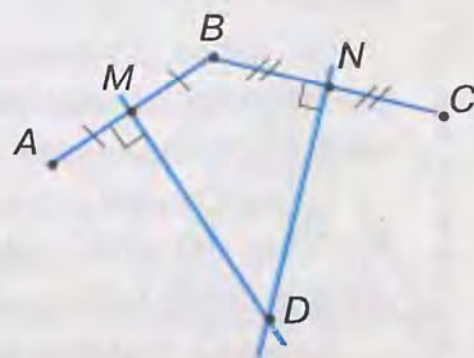
Мал. 363

- 11°. Дано дві точки A і B . Чому промінь AB не можна вважати геометричним місцем точок, які лежать між точками A і B ?
- 12°. Побудуйте довільний трикутник ABC . За допомогою косинця і лінійки проведіть серединні перпендикуляри до його сторін AB і BC . Яку властивість має точка їх перетину?
13. Побудуйте геометричне місце центрів кіл з радіусом R , що проходять через дану точку A .
14. Знайдіть геометричне місце центрів кіл з радіусом R , що дотикаються до даного кола з радіусом r .
15. Доведіть, що геометричним місцем центрів кіл, що дотикаються до сторін кута, є бісектриса цього кута.
16. Якою фігурою є геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх сторін трикутника?
17. Якою фігурою є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох прямих, що перетинаються?
18. Якою фігурою є геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до двох прямих, які перетинаються? Зробіть малюнок.

19. Доведіть, що геометричним місцем центрів кіл, які проходять через дві дані точки A і B , є серединний перпендикуляр до відрізка AB .
20. Якою фігурою є геометричне місце вершин рівнобедрених трикутників, що мають спільну основу AB ?
21. Знайдіть геометричне місце точок, рівновіддалених від усіх вершин трикутника.
-  Щоб знайти відстань між двома паралельними прямими, треба провести перпендикуляр з якої-небудь точки однієї прямої до другої прямої.
22. Якою фігурою є геометричне місце точок, рівновіддалених від двох паралельних прямих?
23. Знайдіть геометричне місце точок, віддалених від прямої a на відстань m .
24. Усі точки відрізка AB віддалені від прямої a на 2 см. Чи є відрізок AB геометричним місцем точок, віддалених від прямої a на 2 см?
25. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса R , що дотикаються до даної прямої.
- 26*. Побудуйте геометричне місце вершин трикутників зі спільною основою AB і бічною стороною, що дорівнює a .
- 27*. Проведіть два рівних кола, що лежать одне поза одним. Побудуйте геометричне місце центрів кіл, які дотикаються до цих кіл.
- 28*. Якою фігурою є геометричне місце центрів кіл, що дотикаються до прямої a в точці A ?
- 29*. Дано кут ABC і дві точки M і N у його внутрішній області. На сторонах кута знайдіть точки, рівновіддалені від точок M і N . Скільки розв'язків має задача?
- 30*. Якою фігурою є геометричне місце вершин трикутників, що мають спільну сторону AB і однакову висоту h , проведену до цієї сторони?
- 31*. Знайдіть геометричне місце центрів кіл радіуса R , які відтинають на даній прямій хорду даної довжини.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

32. Недалеко від залізниці розташовано два села. Знайдіть на лінії залізниці місце для станції, яка була б рівновіддаленою від цих сіл. Зробіть малюнок.
33. Мешканці трьох дачних будинків A , B і C вирішили знайти таке місце для колодязя, щоб відстань від нього до будинків була однаковою. На малюнку 364 показано, як обрали місце D для колодязя. Поясніть, чому $CD = BD = AD$.



Мал. 364



§ 19. ОПИСАНІ І ВПИСАНІ КОЛА

На малюнку 365 зображено коло, описане навколо трикутника, а на малюнку 366 – коло, вписане в трикутник. Дайте означення цим поняттям. Порівняйте їх з наведеними.



Коло називається **описаним** навколо трикутника, якщо воно проходить через усі його вершини.



Коло називається **вписаним** у трикутник, якщо воно дотикається до всіх його сторін.



Чи існує такий трикутник, навколо якого не можна описати коло? Не існує.



Теорема (про описане коло).
Навколо будь-якого трикутника можна описати коло і до того ж тільки одне.

Дано: $\triangle ABC$ (мал. 367).

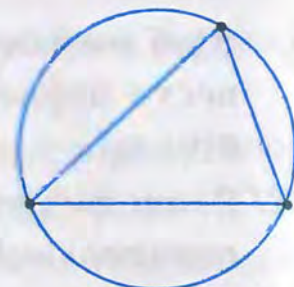
Довести: 1) для $\triangle ABC$ описане коло існує;
2) описане коло одне.

Доведення. Нехай ABC — довільний трикутник. Доведемо, що існує точка, рівновіддалена від його вершин і лише одна.

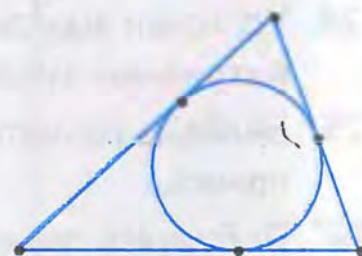
Усі точки, рівновіддалені від вершин A і C , лежать на серединному перпендикулярі до відрізка AC . Усі точки, рівновіддалені від вершин A і B , лежать на серединному перпендикулярі до відрізка AB .

Точка O перетину цих перпендикулярів рівновіддалена від вершин A , B і C ($CO = AO = BO$). Якщо з точки O радіусом AO опишемо коло, то воно пройде через вершини A , B і C .

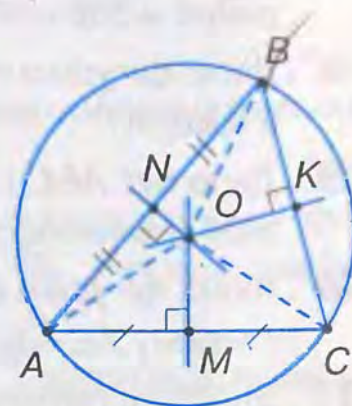
Точка O — єдина, оскільки серединні перпендикуляри до відрізків AC і AB , які не лежать на одній прямій, перетинаються в одній точці. Тому навколо трикутника можна описати тільки одне коло.



Мал. 365



Мал. 366



Мал. 367

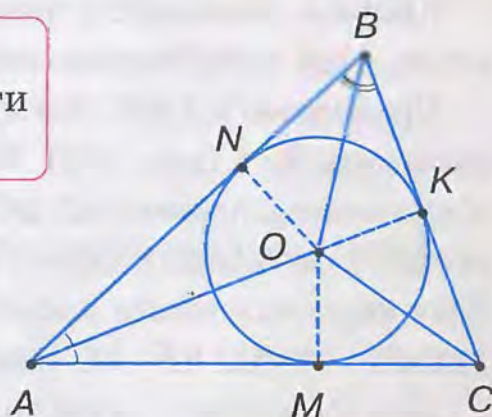
Наслідок. Серединні перпендикуляри до сторін трикутника перетинаються в одній точці – центрі описаного кола.

Справді, ми довели, що $CO = AO = BO$. Але з рівності $CO = BO$ випливає, що точка O лежить також на серединному перпендикулярі до відрізка BC .

У гострокутному трикутнику центр описаного кола лежить всередині трикутника, у тупокутному – зовні трикутника, у прямокутному – на середині гіпотенузи.

Теорема (про вписане коло).

У будь-який трикутник можна вписати коло і до того ж тільки одне.



Мал. 368

Дано: $\triangle ABC$ (мал. 368).

Довести: 1) для $\triangle ABC$ вписане коло існує;
2) вписане коло одне.

Доведення. Нехай ABC – довільний трикутник. Доведемо, що існує точка, рівновіддалена від його сторін і лише одна.

Усі точки, рівновіддалені від сторін AC і AB кута A , лежать на його бісектрисі. Усі точки, рівновіддалені від сторін AB і BC кута B , лежать на його бісектрисі. Точка O перетину цих бісектрис рівновіддалена від сторін AC , AB і BC трикутника. Проведемо з точки O перпендикуляри до сторін трикутника: $OM \perp AC$, $ON \perp AB$ і $OK \perp BC$. Ці перпендикуляри рівні між собою: $OM = ON = OK$. Якщо з точки O радіусом OM проведемо коло, то воно буде вписаним у трикутник ABC .

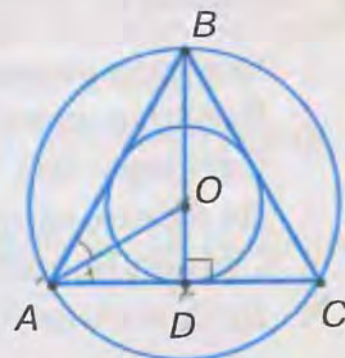
Точка O – єдина, бо бісектриси кутів A і B перетинаються в одній точці. Тому в трикутник можна вписати тільки одне коло.

Наслідок. Бісектриси трикутника перетинаються в одній точці – центрі вписаного кола.

Справді, ми довели, що $OM = ON = OK$. Але з рівності $OM = OK$ випливає, що точка O лежить також на бісектрисі кута C .

Задача. Доведіть, що радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, дорівнює половині радіуса кола, описаного навколо нього.

Розв'язання. У рівносторонньому трикутнику бісектриси є висотами і медіанами, тому вони перетинаються в одній точці. Ця точка є центром вписаного і описаного кіл. Отже, відрізок AO – радіус описаного кола (мал. 369), а відрізок OD – радіус вписаного кола.



Мал. 369

У прямокутному трикутнику AOD $\angle OAD = 30^\circ$, оскільки AO – бісектриса $\angle A$. За властивістю катета, що лежить проти кута 30° , матимемо:

$$OD = \frac{OA}{2}.$$

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Крім кіл, вписаного у трикутник і описаного навколо нього, є ще *зовнівписане* коло.

Проведемо у $\triangle ABC$ бісектриси зовнішніх кутів при вершинах B і C (мал. 370). Точка O_1 їх перетину рівновіддалена від прямих AB, BC, AC ($O_1M = O_1K = O_1N$). Тому вона є центром кола, яке дотикається до сторони BC трикутника і продовжень двох інших його сторін. Таке коло називають *зовнівписаним*. Центр O_1 кола рівновіддалений від продовжень сторін AB і AC , тому він лежить на бісектрисі кута A .

Для будь-якого трикутника можна провести три зовнівписаних кола. Накресліть трикутник і проведіть ці кола.

Зовнівписане коло має цікаві властивості. Поміркуємо.

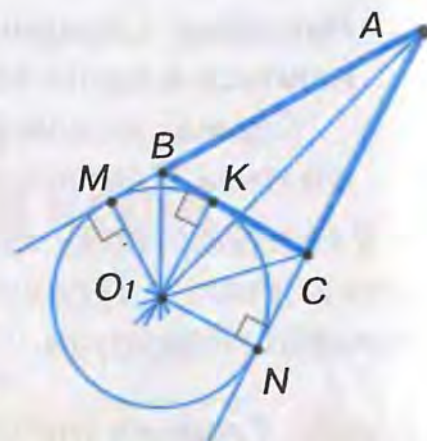
На малюнку 370 $AM = AB + BK$, оскільки $BK = BM$; $AN = AC + CK$, оскільки $CK = CN$. Додавши ліві й праві частини цих рівностей, дістанемо:
 $AM + AN = AB + AC + BK + CK = AB + AC + BC$.

Оскільки $AM = AN$, то $AM = AN = \frac{AB + AC + BC}{2} = p$, де p – півпериметр $\triangle ABC$.

Маємо властивість: відстані від точок дотику зовнівписаного кола, які належать продовженню двох сторін трикутника, до їх спільної вершини дорівнюють півпериметру трикутника.

Оскільки $AM = AB + BK = p$, $AN = AC + CK = p$ і $AM = AN$, то $AB + BK = AC + CK = p$.

Дістали ще одну властивість: пряма, що проходить через точку дотику зовнівписаного кола до сторони трикутника і протилежну цій стороні вершину, поділяє його периметр навпіл.



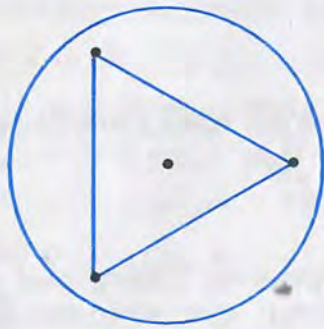
Мал. 370

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

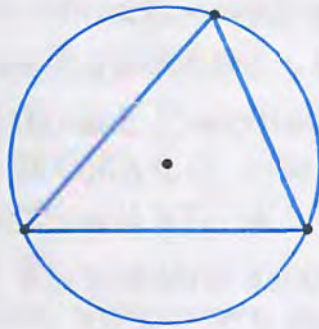
1. Яке коло називається описаним навколо трикутника?
2. Яке коло називається вписаним у трикутник?
3. Сформулюйте і доведіть теорему про описане коло.
4. Де лежить центр описаного кола?
5. Сформулюйте і доведіть теорему про вписане коло.
6. Де лежить центр вписаного кола?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

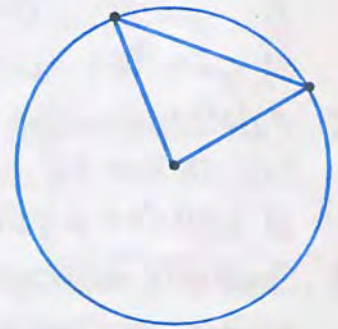
1'. На якому з малюнків 371 – 373 зображено коло, описане навколо трикутника?



Мал. 371

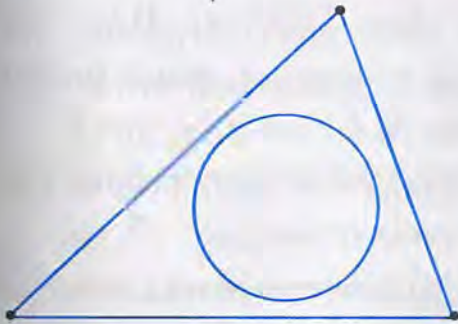


Мал. 372

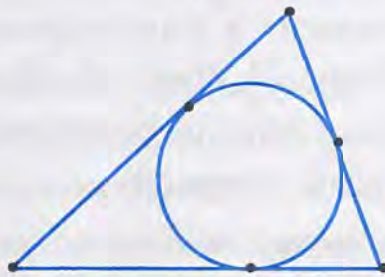


Мал. 373

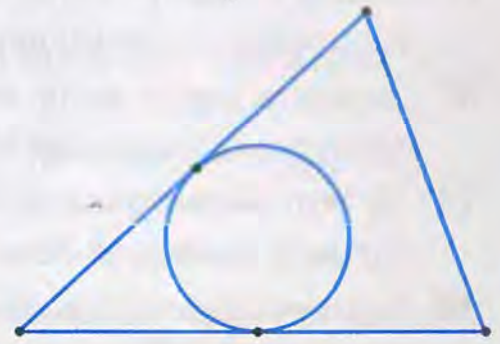
2'. На якому з малюнків 374 – 376 зображено коло, вписане в трикутник?



Мал. 374



Мал. 375

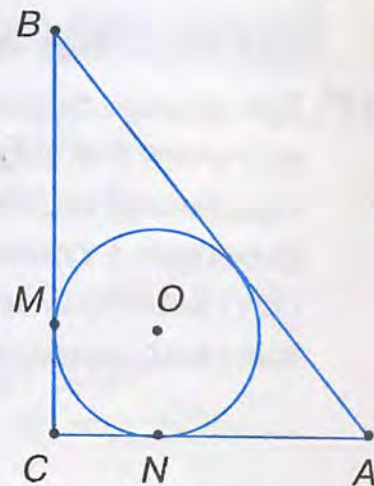


Мал. 376

- 3'. Накресліть трикутники: гострокутний, прямокутний і тупокутний. Для кожного з них знайдіть за допомогою косинця і лінійки центр описаного кола і проведіть це коло. Як розміщені центри проведених кіл?
- 4'. Накресліть довільний трикутник. За допомогою транспортира і лінійки знайдіть центр вписаного кола і проведіть це коло.
- 5°. Де розміщується центр кола, яке проходить через три точки A , B , C , що не лежать на одній прямій?
- 6°. Скільки кіл можна провести через:
 - 1) одну точку; 2) дві точки; 3) три точки?
- 7°. Якщо коло описане навколо трикутника, то говорять також, що *трикутник вписаний у коло*. Зобразіть на малюнках різні випадки розміщення центра O кола відносно сторони AC трикутника ABC , вписаного в коло.
- 8°. У рівносторонньому трикутнику проведено дві медіани. Чи можна вважати точку перетину медіан центром описаного кола?
- 9°. Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює a . Знайдіть радіус описаного кола, якщо:
 - 1) $a = 2$ см; 2) $a = 36$ мм; 3) $a = 9$ дм.

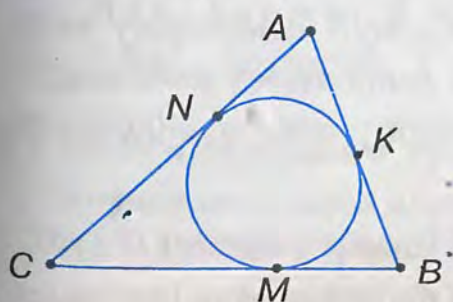
- 10°. Навколо прямокутного трикутника ABC з прямим кутом C описано коло. Знайдіть радіус кола, якщо $AC = 10$ см, $\angle B = 30^\circ$.
- 11°. Точка O — центр кола, вписаного у $\triangle ABC$. Знайдіть $\angle ABO$, $\angle CBO$, $\angle CAO$, якщо:
1) $\angle A = 50^\circ$, $\angle B = 70^\circ$; 2) $\angle A = \angle B = 40^\circ$;
3) $\angle A = 30^\circ$, $\angle B = 60^\circ$; 4) $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = \angle C$.
- 12°. У $\triangle KLM$ вписано коло, з центром O . Знайдіть кути даного трикутника, якщо:
1) $\angle OKL = 25^\circ$, $\angle OLM = 30^\circ$; 2) $\angle KMO = \angle MKO = 20^\circ$;
3) $\angle MLO = 2\angle OMK = 30^\circ$; 4) $\angle OLK = \angle OKM = 15^\circ$.
- 13°. Знайдіть відношення радіуса вписаного в рівносторонній трикутник кола до радіуса описаного кола.
- 14°. Доведіть, що сума радіусів кіл, описаного навколо рівностороннього трикутника і вписаного в нього, дорівнює його висоті.
- 15°. Знайдіть радіус кола, описаного навколо рівностороннього трикутника, якщо висота трикутника дорівнює: 1) 12 см; 2) 24 см; 3) 36 см; 4) h .
- 16°. Знайдіть радіус кола, вписаного в рівносторонній трикутник, якщо висота трикутника дорівнює: 1) 9 см; 2) 18 см; 3) 36 см; 4) h .
17. За якої умови точка перетину серединних перпендикулярів двох сторін трикутника лежить на його третій стороні?
18. Чи може один із катетів прямокутного трикутника дорівнювати радіусу описаного кола? Поясніть відповідь.
19. У прямокутному трикутнику кут між медіаною і бісектрисою, проведеними з вершини прямого кута, дорівнює 10° . Знайдіть кути трикутника.
20. На сторонах кута ABC , що дорівнює 120° , відкладено відрізки $BA = BC = 6$ см. Знайдіть радіус кола, що проходить через точки A, B, C .
21. Доведіть, що центр кола, описаного навколо рівнобедреного трикутника ABC з основою AC , лежить на бісектрисі, проведеної з вершини B .
22. Кут між бічними сторонами рівнобедреного трикутника дорівнює 120° , бічна сторона — 4 см. Знайдіть радіус описаного кола.
23. Доведіть, що центр кола, вписаного в рівнобедрений трикутник, лежить на одній з його медіан.
24. Коло, вписане в рівнобедрений трикутник, ділить його бічну сторону на відрізки 8 і 4 см, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника.
25. У рівнобедреному трикутнику бічна сторона ділиться точкою дотику вписаного кола у відношенні 5 : 7, починаючи від основи. Знайдіть периметр трикутника, якщо його основа дорівнює 10 см.
26. Точки дотику кола, вписаного в трикутник, ділять його сторони на відрізки, три з яких дорівнюють 4, 5 і 6 см. Знайдіть сторони трикутника.
27. У прямокутний трикутник ABC з прямим кутом C вписане коло, яке доти-

кається до катетів у точках M і N . Доведіть, що відрізки CM і CN дорівнюють радіусу кола (мал. 377).

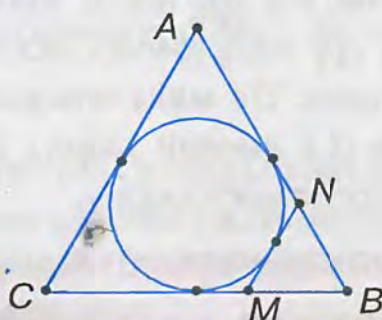


Мал. 377

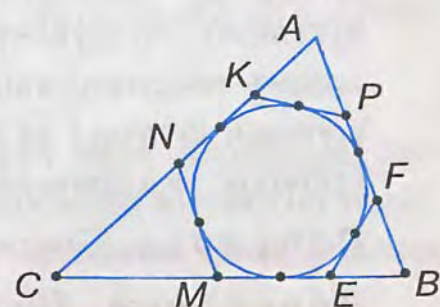
28. У прямокутному трикутнику гіпотенуза ділиться точкою дотику вписаного кола радіуса r на відрізки довжиною m і n . Знайдіть периметр трикутника, якщо:
- 1) $m = 4$ см, $n = 6$ см, $r = 2$ см;
 - 2) $m = 3$ см, $n = 10$ см, $r = 2$ см;
 - 3) $m = 5$ см, $n = 12$ см, $r = 3$ см;
 - 4) $m = 4$ см, $n = 21$ см, $r = 3$ см.
- 29*. Доведіть, що центром кола, описаного навколо прямокутного трикутника, є середина гіпотенузи.
- 30*. У прямокутний трикутник з катетами a , b і гіпотенузою c вписано коло радіуса r . Доведіть, що $r = \frac{a+b-c}{2}$.
- 31*. Знайдіть радіус кола, вписаного в прямокутний трикутник з катетами m і n та гіпотенузою k , якщо:
- 1) $m : n : k = 3 : 4 : 5$, $P = 24$ см;
 - 2) $m : n : k = 8 : 15 : 17$, $P = 12$ дм;
 - 3) $m : n : k = 5 : 12 : 13$, $P = 0,6$ м,
- де P – периметр даного трикутника.
- 32*. Із вершини прямого кута трикутника проведено промені через центри вписаного і описаного кіл. Кут між цими променями дорівнює 7° . Знайдіть гострі кути трикутника.
- 33*. Вписане у трикутник ABC коло дотикається до сторін AB , BC і AC відповідно в точках K , M і N . Доведіть, що $AK + BM + CN = BK + CM + AN$.
- 34*. У трикутник ABC вписано коло, яке дотикається до сторін у точках M , N і K (мал. 378). Доведіть, що $AN = AK = p - BC$, $BM = BK = p - AC$, $CM = CN = p - AB$, де p – півпериметр трикутника.
- 35*. До кола, вписаного в рівносторонній трикутник ABC зі стороною a , проведено дотичну, яка перетинає сторони трикутника в точках M і N (мал. 379). Знайдіть периметр трикутника BMN .
- 36*. До кола, вписаного в трикутник ABC , проведено три дотичні (мал. 380). Периметри утворених трикутників AKP , BEF і CMN відповідно дорівнюють P_1 , P_2 , P_3 . Знайдіть периметр трикутника ABC .



Мал. 378



Мал. 379




Мал. 380


ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ


- 37*. Три заводи розміщені у вершинах A , B і C різностороннього трикутника і сполучені між собою магістралями. Всередині цього трикутника на однаковій відстані від магістралей розташований населений пункт O , який сполучено дорогами з кожним заводом. Яким має бути найкоротший замкнений маршрут автобуса, призначеного для розвезення жителів населеного пункту до всіх трьох заводів?





§20. НАЙПРОСТІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

 У задачах на побудову потрібно побудувати геометричну фігуру *циркулем і лінійкою*.

 Які побудови можна виконувати за допомогою лінійки?

 **За допомогою лінійки можна провести:**
довільну пряму;
пряму, що проходить через дану точку;
пряму, що проходить через дві дані точки.

 Які побудови можна виконувати за допомогою циркуля?

 **За допомогою циркуля можна:**
провести даним радіусом коло з даного центра;
відкласти даний відрізок на промені від його початку.

Ніяких інших операцій виконувати циркулем і лінійкою не можна. У розв'язуванні задач на побудову будемо виділяти три *етапи* – аналіз, побудову, доведення.

Аналіз – це міркування, під час якого знаходимо план побудови. Припускаємо, що шукану фігуру побудовано. Зображаємо її на малюнку, який можна виконати «від руки». Це малюнок-ескіз. Аналізуємо властивості шуканої фігури і зв'язок її з даними задачі. Встановлюємо послідовність побудов, яка приведе до розв'язку задачі.

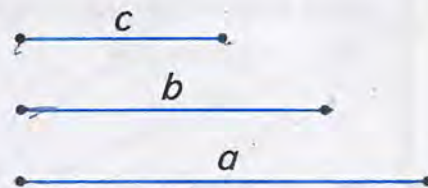
Побудова. Стисло записуємо план побудови і будуємо шукану фігуру.

Доведення. Обґрунтовуємо, що побудована фігура відповідає вимогам задачі.

Розглянемо найпростіші задачі на побудову.

Задача 1. Побудуйте трикутник з даними сторонами a , b , c .

Дано:

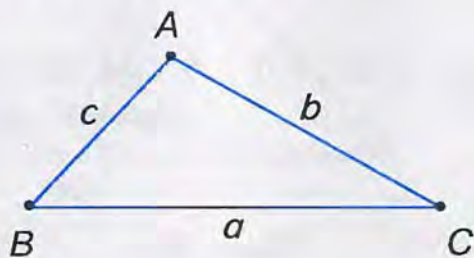


Побудувати: $\triangle ABC$,
у якого $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

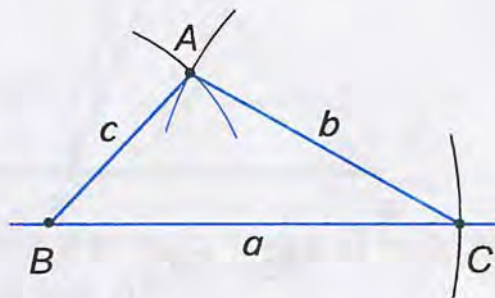
Розв'язання.

Аналіз (мал. 381). Припустивши, що $\triangle ABC$ побудовано, зобразимо його на малюнку-ескізі. Бачимо, що відклавши відрізок $BC = a$, знайдемо вершини B і C $\triangle ABC$. Як знайти вершину A ? Вершина A лежить на відстані b від точки C , тобто на колі з центром у точці C і радіусом b . Так само встановлюємо, що вершина A лежить на колі з центром B і радіусом c . Отже, вершина A є точкою перетину цих кіл.

Побудова (мал. 382).



Мал. 381



Мал. 382

1. За допомогою лінійки проводимо довільну пряму і позначаємо на ній довільну точку B .
2. На промені з початком B циркулем відкладаємо відрізок $BC = a$.
3. Розхилом циркуля, що дорівнює b , описуємо коло з центром у точці C (на малюнку проводимо лише дугу кола).
4. Розхилом циркуля, що дорівнює c , описуємо коло з центром у точці B .
5. Точку A перетину цих кіл сполучаємо відрізками з точками B і C .

Доведення. У побудованому $\triangle ABC$: $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Отже, $\triangle ABC$ – шуканий.

Щоб побудувати трикутник, досить побудувати його вершини. Дві вершини можна вважати відомими, якщо на промені від його початку відкласти даний відрізок. Третя вершина – шукана. Розв'язання задачі зводиться до її побудови.

Задача 2. Побудуйте кут, що дорівнює даному куту.

Дано:

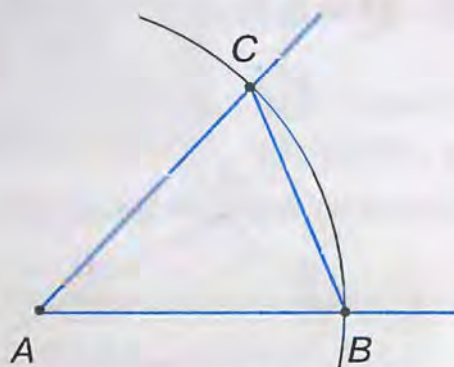


Побудувати: $\angle A_1 = \angle A$.

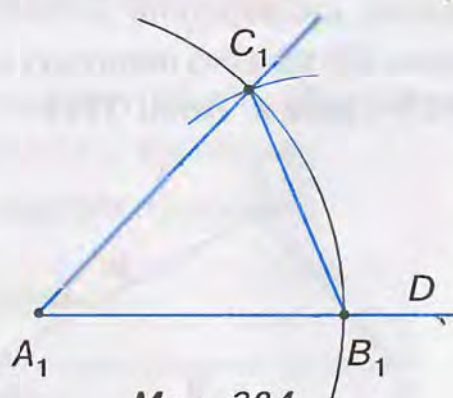
Розв'язання.

Аналіз. У рівних трикутників проти рівних сторін лежать рівні кути. Тому спочатку утворимо $\triangle ABC$ з даним $\angle A$ (мал. 383). Для цього позначимо на сторонах кута A точки B і C і сполучимо їх відрізком. Потім побудуємо за трьома сторонами AC , AB і BC $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$ (задача 1). Побудова спрощується, якщо позначати точки B і C на сторонах кута A одним розхилом циркуля.

Побудова (мал. 383, 384).



Мал. 383



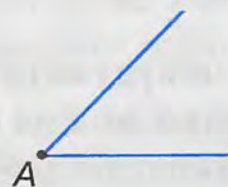
Мал. 384

1. Проводимо промінь A_1D .
2. Описуємо кола рівних радіусів з центрами A і A_1 . Нехай одне коло перетинає сторони кута A у точках B і C , а друге — промінь A_1D у точці B_1 .
3. Описуємо коло з центром B_1 і радіусом BC . Точка C_1 — точка перетину побудованих кіл.
4. Проводимо промінь A_1C_1 .

Доведення. За побудовою, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ (за трьома сторонами). Тоді $\angle A_1 = \angle A$ як кути рівних трикутників, що лежать проти рівних сторін. Отже, $\angle B_1A_1C_1$ — шуканий.

Задача 3. Побудуйте бісектрису даного кута.

Дано:



Побудувати: бісектрису $AD \angle A$.

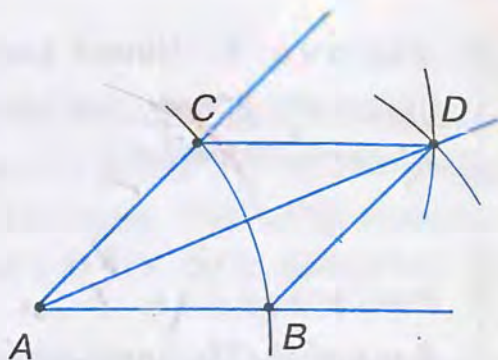
Розв'язання.

Аналіз (мал. 385). Для побудови бісектриси $\angle A$ достатньо утворити два трикутники ACD і ABD з рівними сторонами. Для цього описуємо кола одним і тим самим радіусом з центрами в точках A, C, B .

Побудова (мал. 385).

1. Описуємо коло довільного радіуса з центром у вершині A даного $\angle A$. Точки B і C — точки перетину кола зі сторонами кута.
2. Описуємо кола тим самим радіусом із центрів B і C . Точка D — точка перетину побудованих кіл.
3. Проводимо промінь AD .

Доведення. $\triangle ACD = \triangle ABD$ за трьома сторонами. Тому $\angle CAD = \angle BAD$. Отже, промінь AD — шукана бісектриса кута A .



Мал. 385

Задача 4. Поділіть даний відрізок навпіл.

Дано:



Побудувати: точку O — середину відрізка AB .

Розв'язання.

Аналіз. Щоб розв'язати задачу, слід побудувати серединний перпендикуляр до даного відрізка AB (мал. 386). Кожна точка цього перпендикуляра буде рівновіддаленою від точок A і B .

Складіть за малюнком план побудови. Порівняйте його з наведеним.

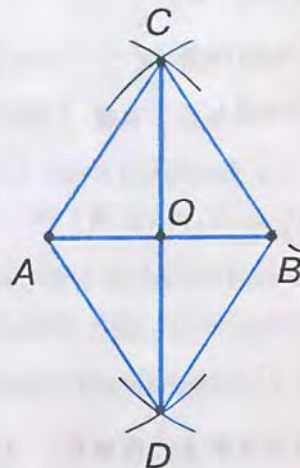
Побудова (мал. 386).

1. З точок A і B радіусом AB описуємо кола. Точки C і D — точки перетину цих кіл.
2. Проводимо відрізок CD . Точка O — точка перетину відрізків CD і AB .

Доведення. $\triangle ACD = \triangle BCD$ за трьома сторонами. Звідси випливає, що $\angle ACO = \angle BCO$. Тоді $\triangle ACO = \triangle BCO$ за двома сторонами і кутом між ними.

З рівності трикутників маємо: $AO = OB$.

Отже, O — середина відрізка AB .



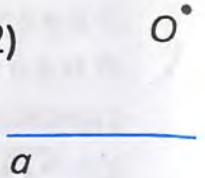
Мал. 386

Задача 5. Через дану точку O проведіть пряму, перпендикулярну до даної прямої a .

Дано: 1)



2)



Побудувати: пряму $CO \perp a$.

Розв'язання.

Аналіз. Можливі два випадки:

- 1) точка O лежить на прямій a ;
- 2) точка O не лежить на прямій a .

Розгляньте малюнки 387 і 388.

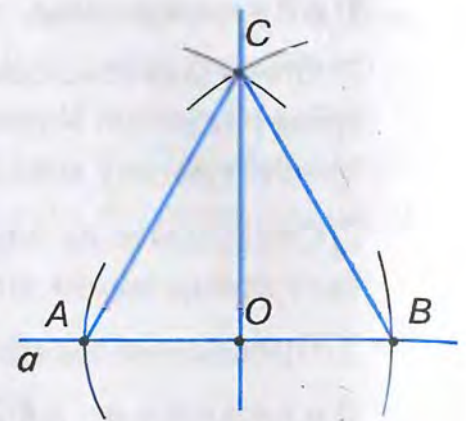
Шукану пряму можна побудувати як серединний перпендикуляр до якогось відрізка прямої a . Тому потрібно знайти такі точки A і B , щоб точка O в обох випадках була рівновіддаленою від кінців відрізка AB .

Поясніть, як це зробити в кожному з випадків. Складіть план побудови, скориставшись розв'язанням попередньої задачі.

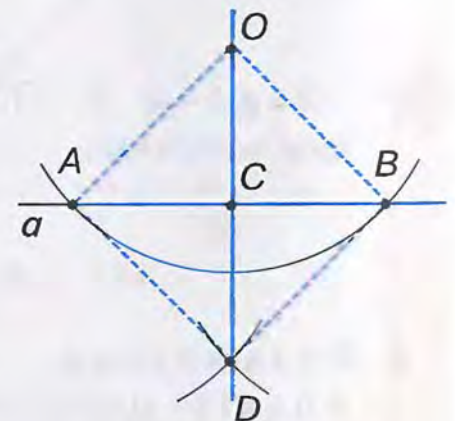
1 випадок — точка O лежить на прямій a .

Побудова (мал. 387).

1. З даної точки O довільним радіусом проводимо коло. Точки A і B — точки перетину кола і прямої a .
2. З точок A і B проводимо кола радіусом AB . Точка C — точка їх перетину.
3. Проводимо пряму CO .



Мал. 387



Мал. 388

Доведення. $\triangle ACO = \triangle BCO$ за трьома сторонами. З рівності трикутників випливає: $\angle AOC = \angle BOC$. Ці кути прями, оскільки вони суміжні й рівні. Отже, $CO \perp a$.

2 випадок — точка O не лежить на прямій a .

Побудова (мал. 388).

1. З даної точки O довільним радіусом проводимо коло, що перетинає пряму a . Точки A і B — точки перетину кола і прямої.
2. З точок A і B тим самим радіусом проводимо кола. Точка D — точка їх перетину, що лежить з другого боку від прямої a , ніж точка O .
3. Проводимо пряму OD .

Доведення. $\triangle AOB = \triangle ADB$ за трьома сторонами.

Звідси випливає: $\angle OAC = \angle DAC$. Тоді $\triangle OAC = \triangle DAC$ за двома сторонами і кутом між ними. З рівності трикутників маємо: $\angle ACO = \angle ACD$. Оскільки ці

ДИЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

1. Чи будь-яку задачу на побудову можна розв'язати циркулем і лінійкою?

Виявляється, що ні. Одна з таких задач — поділити даний кут на три рівних кути. Цю задачу називають *задачею про трисекцію кута*. Протягом багатьох століть математики намагалися її розв'язати. Лише в XIX ст. було доведено, що для довільного кута така побудова неможлива.

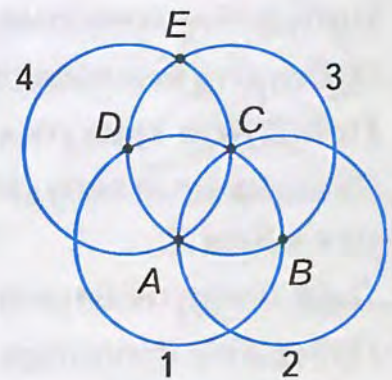
2. Ви будували геометричні фігури циркулем і лінійкою. Проте побудови можна виконувати лише циркулем, лінійкою або двосторонньою лінійкою, прямим кутом косинця. Спочатку виділяють операції, які можна виконувати тим чи іншим інструментом так, як було це зроблено для циркуля і лінійки.

Розглянемо, наприклад, побудову циркулем.

При цьому пряма вважається побудованою, якщо побудовано дві її точки, відрізок побудованим, якщо побудовано його кінці, промінь — якщо побудовано початок і ще одна його точка. Виявляється, що **ті задачі на побудову, які розв'язуються за допомогою циркуля і лінійки, можна розв'язати лише за допомогою одного циркуля.**

Задача. Пряма задана двома точками A і B . Через точку A проведіть пряму, перпендикулярну до заданої (мал. 389).

Побудова. (Усі кола проводимо радіусом AB .) Проводимо: кола 1 і 2 з точок A і B (C — точка їх перетину); коло 3 з точки C (D — точка перетину кіл 1 і 3); коло 4 з точки D (E — точка перетину кіл 3 і 4). Пряма, задана точками A і E , — шукана.



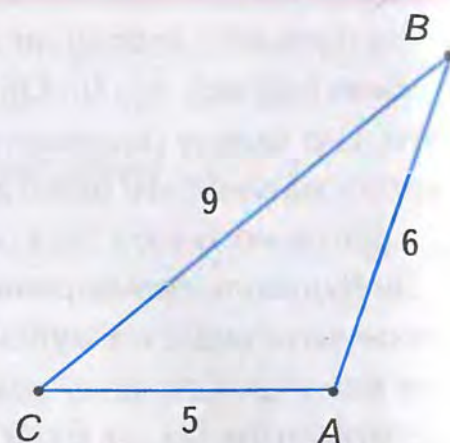
Мал. 389

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

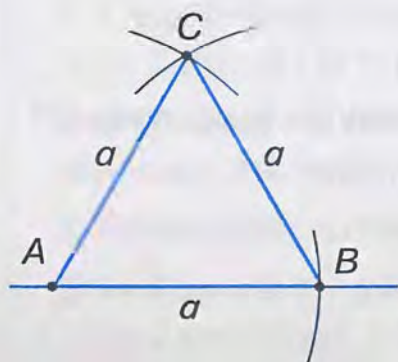
1. Які етапи розв'язування задачі на побудову?
2. Як побудувати трикутник з даними сторонами?
3. Як побудувати кут, що дорівнює даному куту?
4. Як побудувати бісектрису даного кута?
5. Як поділити даний відрізок навпіл?
6. Як через дану точку провести пряму, перпендикулярну до даної прямої?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

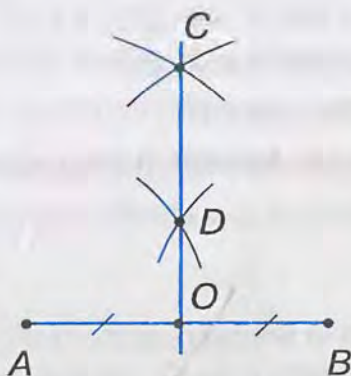
- 1°. Якими радіусами потрібно провести три кола, щоб побудувати трикутник, що дорівнює трикутнику ABC на малюнку 390?
- 2°. Накресліть гострий, прямий і тупий кути. За допомогою циркуля і лінійки побудуйте бісектрису кожного з кутів.
- 3°. Проведіть промінь AB під кутом 35° до горизонтальної лінії зошита. Відкладіть на ньому відрізок AC довжиною:
 - 1) 5 см; 2) 0,35 дм; 3) 43 мм.
 За допомогою циркуля і лінійки побудуйте точку O — середину цього відрізка.
- 4°. На малюнку 391 побудовано рівносторонній трикутник зі стороною a . Складіть план побудови.
- 5°. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a і бічною стороною b .
- 6°. Побудуйте трикутник за двома сторонами і кутом між ними.
- 7°. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічними сторонами і кутом між ними.
- 8°. Побудуйте трикутник за стороною і прилеглими до неї кутами.
- 9°. Складіть план побудови рівнобедреного трикутника за основою a і прилеглим кутом A .
- 10°. Дано тупокутний трикутник. Побудуйте бісектрису зовнішнього гострого кута.
- 11°. Побудуйте точку перетину двох бісектрис трикутника ABC .
- 12°. Дано рівнобедрений трикутник. Побудуйте точку перетину бісектриси кута при основі з бічною стороною.
- 13°. На малюнку 392 даний відрізок AB поділено навпіл інакше, ніж у підручнику. Складіть план побудови та доведіть, що точка O — середина відрізка AB .
- 14°. Дано трикутник. Побудуйте одну з його медіан.
- 15°. Побудуйте прямий кут.



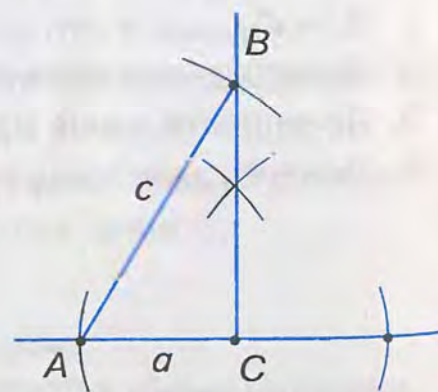
Мал. 390



Мал. 391



Мал. 392



Мал. 393



§21. СКЛАДНІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

Розв'язування складніших задач на побудову полягає не стільки в побудові фігури циркулем і лінійкою, скільки у знаходженні плану побудови на основі проведеного аналізу, а також у доведенні, що в результаті виконання зазначених побудов одержимо фігуру, яка відповідає вимогам задачі.

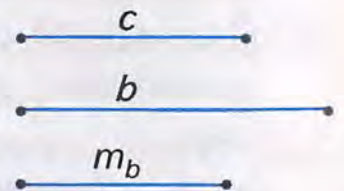
У запису плану побудови посилаємося на найпростіші задачі на побудову. Це задачі попереднього параграфу, розв'язані в тексті, та задачі, виділені жирним шрифтом (№ 6, 8, 17, 24 і 25).

Розв'язуючи складніші задачі на побудову, будемо використовувати два методи. Розглянемо їх.

Метод допоміжного трикутника. Спочатку знаходимо на малюнку-ескізі трикутник, який є частиною шуканого трикутника і побудова якого відома. Такий трикутник назвемо *допоміжним*. Потім з'ясуємо, як добудувати допоміжний трикутник до шуканого.

Задача. Побудуйте трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.

Дано:



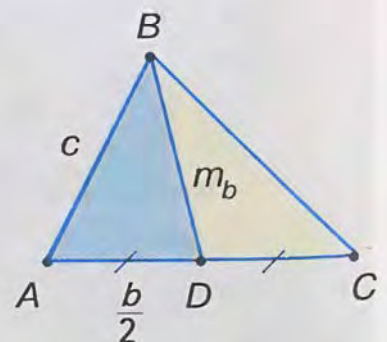
Побудувати: $\triangle ABC$, у якого $AB = c$, $AC = b$, $BD = m_b$.

Розв'язання

Аналіз (мал. 395). Припустимо, що побудовано $\triangle ABC$, у якого $AB = c$, $AC = b$, $BD = m_b$. Бачимо, що $\triangle ABD$ є частиною $\triangle ABC$ і його можна побудувати за трьома сторонами ($AB = c$, $BD = m$, $AD = \frac{b}{2}$). Побудувавши $\triangle ABD$, знайдемо вершини A і B . Щоб знайти вершину C , відкладаємо на промені AD відрізок $AC = b$.

Побудова.

1. Будуємо $\triangle ABD$ за трьома сторонами: $AB = c$, $BD = m_b$, $AD = \frac{b}{2}$.
2. Відкладаємо на промені AD відрізок $AC = b$.
3. Проводимо відрізок BC .



Мал. 395

Доведення. За побудовою, у $\triangle ABC$ $AB = c$, $AC = b$. Оскільки $AD = \frac{b}{2}$, а отже, $DC = AD = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}AC$, то BD — медіана. За побудовою, $BD = m_b$. Отже, $\triangle ABC$ — шуканий.

Щоб знайти план побудови трикутника:

- 1) відшукайте на малюнку-ескізі допоміжний трикутник, побудова якого відома;
- 2) установіть, скільки побудовано вершин шуканого трикутника внаслідок побудови допоміжного;
- 3) з'ясуйте, як побудувати решту вершин шуканого трикутника.

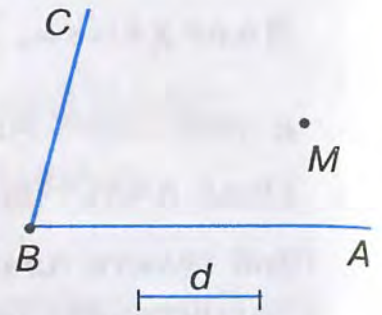
Метод геометричних місць. Пригадайте, як ми будували трикутник з даними сторонами (§ 20, задача 1). Побудова звелася до знаходження вершини A $\triangle ABC$ (мал. 382). Вершина A задовольняє дві вимоги: 1) розміщується на відстані b від точки C ; 2) розміщується на відстані c від точки B . Геометричним місцем точок, що задовольняють першу вимогу, є коло з центром C і радіусом b . Геометричним місцем точок, що задовольняють другу вимогу, є коло з центром B і радіусом c . Вершина A належить обом колам, тобто є точкою їх перетину. Провівши ці кола, знайшли вершину A $\triangle ABC$.

Ми розв'язали цю задачу методом геометричних місць. Його суть полягає ось у чому. Задача на побудову часто зводиться до знаходження деякої точки X , яка задовольняє дві вимоги. Геометричне місце точок, що задовольняють першу вимогу, — це деяка фігура F_1 , а геометричне місце точок, що задовольняють другу вимогу, — це деяка фігура F_2 . Шукана точка X належить F_1 і F_2 , тобто є їх точкою перетину. Побудувавши ці геометричні місця, знайдемо точку X .



Задача. Побудуйте точку, яка рівновіддалена від сторін кута ABC і розміщується на відстані d від точки M .

Дано:



Побудувати: точку X , щоб відстані від неї до сторін кута були рівними і $MX = d$.

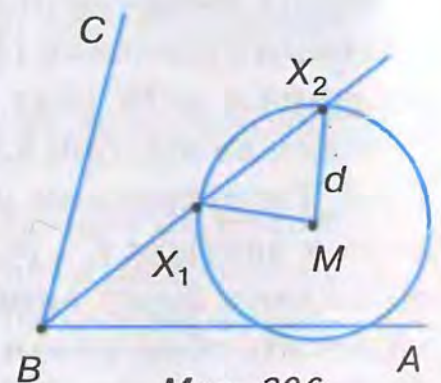
Розв'язання

Аналіз (мал. 396). Шукана точка X має задовольняти дві вимоги:

- 1) бути рівновіддаленою від сторін $\angle ABC$;
- 2) лежати на відстані d від точки M .

Геометричним місцем точок, що задовольняють першу вимогу, є бісектриса $\angle ABC$, а геометричним місцем точок, що задовольняють другу вимогу, є коло з центром у точці M і радіусом d . Шукана точка X лежить на перетині цих геометричних місць. Таких точок дві — X_1 і X_2 .

Запишіть план побудови і обґрунтуйте, що точки X_1 і X_2 задовольняють вимоги задачі.



Мал. 396

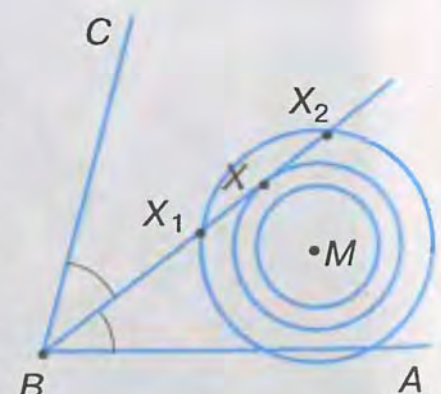
Розв'язуючи задачі методом геометричних місць:

- 1) проаналізуйте умову задачі та виділіть шукану точку;
- 2) з'ясуйте, які дві вимоги вона задовольняє;
- 3) знайдіть геометричне місце точок, що задовольняють: першу вимогу; другу вимогу;
- 4) зробіть висновок: шукана точка — точка перетину знайдених геометричних місць.

ДІЗНАЙТЕСЯ БІЛЬШЕ

Поміркуємо над останньою розв'язаною задачею. Розгляньте малюнок 397. Геометричні місця точок — бісектриса і коло — можуть не мати спільних точок, мати одну або дві спільні точки. Залежно від взаємного розміщення цих геометричних місць задача може не мати розв'язків, мати один розв'язок (точка X) або два (точки X_1 і X_2).

З'ясування питання, скільки розв'язків має задача на побудову — важлива складова розв'язування. Її називають *дослідженням*.



Мал. 397

Досліджуючи кількість розв'язків задачі:

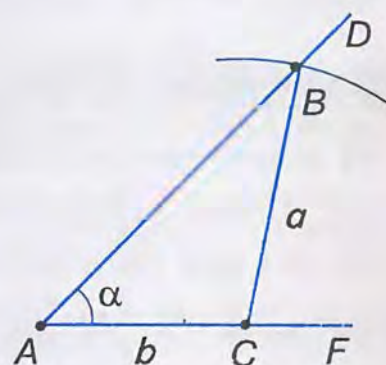
- 1) виділіть геометричні місця точок (дві прями, пряму і коло, два кола), на перетині яких лежить шукана точка;
- 2) зобразіть усі випадки взаємного розміщення цих геометричних місць;
- 3) з'ясуйте, скільки точок перетину можуть мати геометричні місця; вони визначають кількість розв'язків задачі.

Задача. Побудуйте трикутник за сторонами a , b і кутом α , протилежним одній з них.

Розв'язання

План побудови (мал. 398):

- 1) будуємо $\angle FAD = \alpha$;
- 2) відкладаємо на стороні AF кута відрізок $AC = b$;
- 3) знаходимо вершину B — спільну точку променя AD і кола радіуса a з центром C ;
- 4) проводимо відрізок BC .



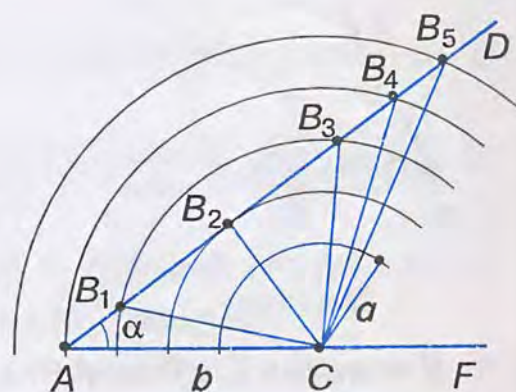
Мал. 398

Дослідження (мал. 399).

Змінюючи довжину відрізка a , зображаємо усі випадки взаємного розміщення променя AD і кола радіуса a з центром C (кут α залишається без змін).

Дістанемо:

- 1) $a > b$. Коло перетинає промінь AD у точці B_5 . Задача має один розв'язок — тупокутний $\triangle AB_5C$;
- 2) $a = b$. Коло перетинає промінь AD у точці B_4 . Задача має один розв'язок — рівнобедрений $\triangle AB_4C$.
- 3) $a < b$:
 - а) коло може перетинати промінь AD у двох точках B_1 і B_3 .
Матимемо два розв'язки — гострокутний $\triangle AB_3C$ і тупокутний $\triangle AB_1C$;
 - б) коло може дотикатися до променя AD у точці B_2 .
Задача має один розв'язок — прямокутний $\triangle AB_2C$;
 - в) коло і промінь AD не мають спільних точок.
Задача розв'язку не має.



Мал. 399

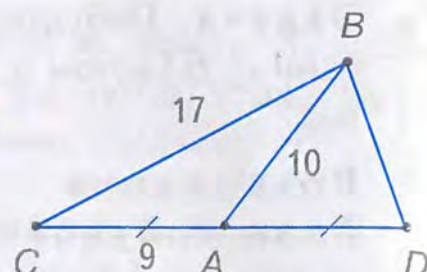
Таким чином, задача може мати один розв'язок ($\triangle AB_5C$, або $\triangle AB_4C$, або $\triangle AB_2C$), два розв'язки ($\triangle AB_3C$ і $\triangle AB_1C$) або не мати розв'язків.

ЗГАДАЙТЕ ГОЛОВНЕ

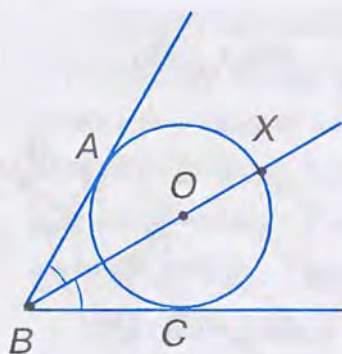
1. Поясніть, як побудувати трикутник за двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них.
2. У чому полягає суть методу допоміжного трикутника?
3. Поясніть, як побудувати точку, яка рівновіддалена від сторін даного кута і розміщується на даній відстані від даної точки.
4. У чому полягає суть методу геометричних місць?

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

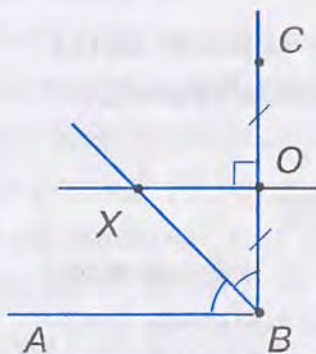
- 1'. Чи можна вважати $\triangle ABC$ допоміжним у побудові трикутника CDB (мал. 400)?
- 2'. Назвіть два геометричних місця точок, яким належить точка X на малюнках 401 – 403.



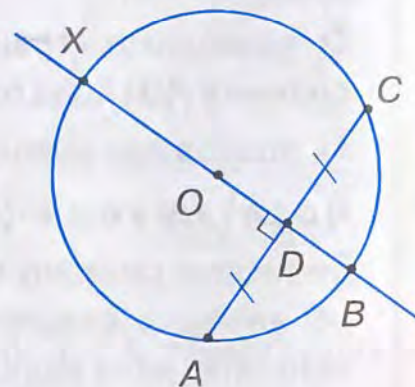
Мал. 400



Мал. 401



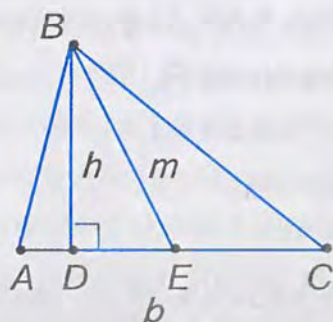
Мал. 402



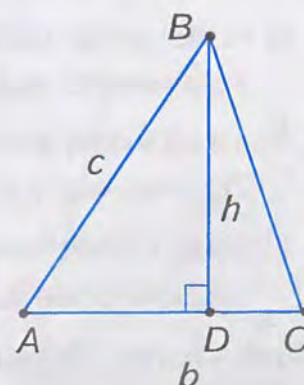
Мал. 403

У задачах 3 – 6 виділіть штриховкою на відповідному малюнку-ескізі допоміжний трикутник та запишіть план побудови шуканого трикутника.

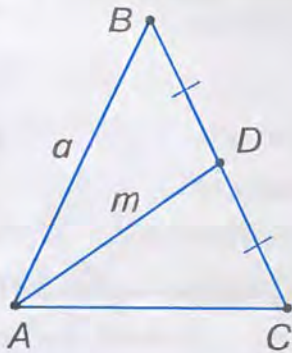
- 3°. Побудуйте трикутник за стороною b і проведеними до неї медіаною m та висотою h (мал. 404).
- 4°. Побудуйте трикутник за сторонами b і c та висотою h , проведеною до однієї з них (мал. 405).



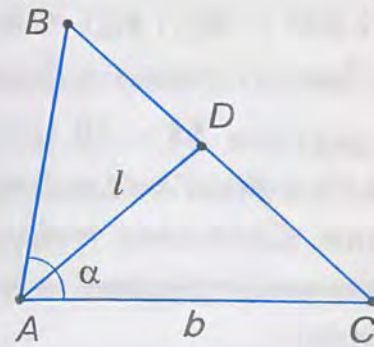
Мал. 404



Мал. 405



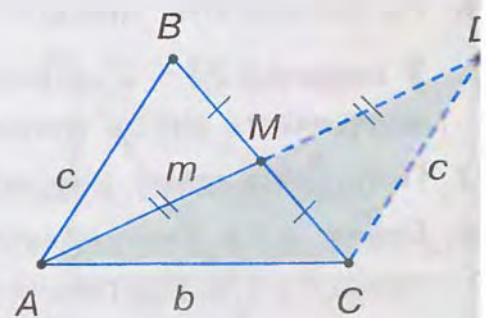
Мал. 406



Мал. 407

- 5°. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною a і медіаною m проведеною до бічної сторони (мал. 406).
- 6°. Побудуйте трикутник за стороною b , прилеглим кутом α і бісектрисою l проведеною з вершини цього кута (мал. 407).
- У задачах 7 – 12 побудуйте малюнок-ескіз та виділіть на ньому допоміжний трикутник, запишіть план побудови шуканого трикутника та доведіть, що цей трикутник відповідає вимогам задачі.
7. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a і висотою h , проведеною до основи.
8. Побудуйте рівнобедрений трикутник за кутом α при вершині і висотою h проведеною з цієї вершини.
9. Побудуйте трикутник за двома сторонами a і b та висотою h , проведеною до третьої сторони.
10. Побудуйте трикутник за стороною a , медіаною m , проведеною до однієї з двох інших сторін, і кутом α між даними стороною і медіаною.
11. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною b і висотою h проведеною до основи.
12. Побудуйте трикутник за кутом α , висотою h і бісектрисою l , проведеними з вершини цього кута.
- 13*. Побудуйте трикутник за сторонами b і c та медіаною m , проведеною до третьої сторони.

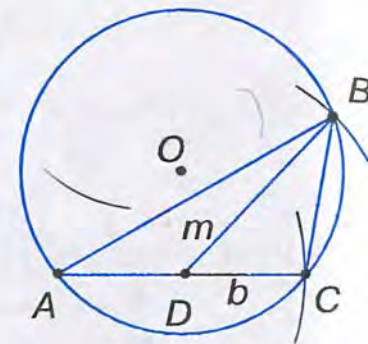
Аналіз (мал. 408). Нехай побудовано $\triangle ABC$, у якого $AB = c$, $AC = b$, $AM = m$. Відклавши на продовженні медіани AM відрізок $MD = AM$ і сполучивши точки D і C , дістанемо допоміжний $\triangle ADC$, у якого відомі сторони AC і AD . Крім того, $DC = AB = c$, оскільки $\triangle ABM = \triangle DCM$ за двома сторонами і кутом між ними. Отже, $\triangle ADC$ можна побудувати за трьома сторонами ($DC = c$, $AC = b$, $AD = 2m$). Побудувавши $\triangle ADC$, знайдемо вершини A і C шуканого $\triangle ABC$. Врахувавши,



Мал. 408

що $BM = MC$ і $MD = AM$, знайдемо третю вершину B . Запишіть план побудови.

У задачах 14 – 19 потрібно побудувати трикутник за його елементами і радіусом описаного кола. Спочатку побудуйте коло даного радіуса, а потім на колі – інші елементи, дані в умові задачі.



Мал. 409

14. Побудуйте трикутник за стороною b , медіаною m , проведеною до цієї сторони, і радіусом R описаного кола. За малюнком 409 складіть план побудови.
15. Побудуйте рівнобедрений трикутник за основою a і радіусом R описаного кола.
16. Побудуйте рівнобедрений трикутник за бічною стороною b і радіусом R описаного кола.
17. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом a і радіусом R описаного кола.
18. Побудуйте трикутник за стороною a , прилеглим кутом α і радіусом R описаного кола.
19. Побудуйте трикутник за двома сторонами a і b та радіусом R описаного кола.


У задачах 20 – 26 знайдіть лише одне геометричне місце точок. Шукану точку X визначте як точку перетину знайденого геометричного місця точок і даної в умові задачі фігури.

20. На прямій a знайдіть точку, рівновіддалену від точок A і B .
21. На даному колі знайдіть точку, рівновіддалену від точок A і B . Скільки розв'язків має задача?
22. На прямій, яка перетинає сторони даного кута, знайдіть точку, рівновіддалену від його сторін.
23. На даному колі побудуйте точку, рівновіддалену від сторін даного кута. Скільки може бути таких точок?
24. Знайдіть на прямій a точку, рівновіддалену від прямих b і c , що перетинаються.
25. На прямій a побудуйте точку, яка розміщується на відстані m від точки A . Скільки може бути таких точок?
26. На даному колі знайдіть точку, яка розміщується на відстані d від точки B .


У задачах 27 – 31 шукану точку визначте як точку перетину двох геометричних місць точок.

27. Побудуйте точку, рівновіддалену від сторін кута ABC і точок M і K .
28. Прямі a і b перетинаються. Знайдіть точку, що лежить на відстані n від прямої a і на відстані m від прямої b . Скільки може бути таких точок?
29. Знайдіть точку, що рівновіддалена від точок A і B та розміщується на відстані d від прямої a .

30. Побудуйте точку, що розміщується на відстані d від прямої a і рівновіддалена від прямих b і c , які перетинаються.
31. Знайдіть точку, що розміщується на відстані n від прямої a і на відстані m від точки M . Скільки може бути таких точок?

 **Розв'язування задач 32 – 36 на побудову кола зводиться до побудови шуканої точки – центра кола.**

32. Побудуйте коло, що проходить через точку A і дотикається до прямої a в точці B . За малюнком 410 складіть план побудови.
33. Побудуйте коло радіуса R , що проходить через точку A і дотикається до даної прямої a .
34. Побудуйте коло, яке дотикається до сторін $\angle ABC$, причому до однієї з них – у точці D .
35. Побудуйте коло з центром на прямій a , що проходить через точки A і B .
- 36*. Точка M лежить між двома паралельними прямими a і b . Побудуйте коло, що проходить через точку M і дотикається до даних прямих.

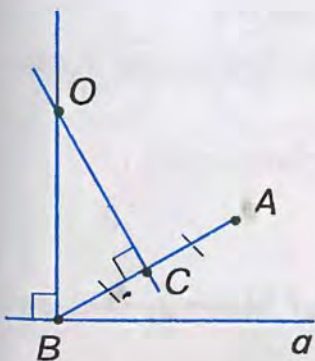
 **У задачах 37 – 42, щоб побудувати трикутник методом геометричних місць, спочатку виділіть шукану точку.**

37. Побудуйте трикутник за стороною a , проведеною до неї медіаною m та висотою h , проведеною до другої сторони.

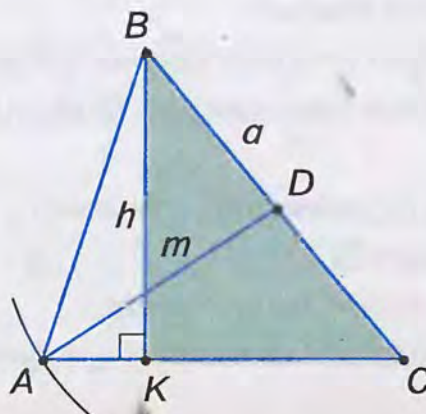
Аналіз (мал. 411). Нехай $\triangle ABC$ – шуканий і $BC = a$, $AD = m$, $BK = h$. Побудувавши допоміжний $\triangle BKC$ ($BK = h$, $BC = a$, $\angle BKC = 90^\circ$), знайдемо вершини B і C $\triangle ABC$. Вершина A – шукана. Вона задовольняє дві вимоги: лежить на промені CK ; розміщується на відстані m від точки D .
Залишіть план побудови.

- 38*. Побудуйте трикутник за стороною a , протилежним кутом α і висотою h , проведеною до однієї з двох інших сторін.

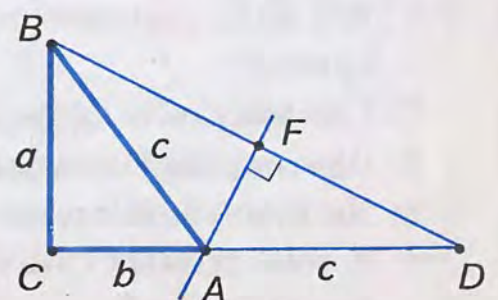
- 39*. Побудуйте прямокутний трикутник за катетом a і сумою $b + c$ другого катета і гіпотенузи. За малюнком 412 складіть план побудови та доведіть, що $\triangle ABC$ відповідає вимогам задачі.



Мал. 410



Мал. 411



Мал. 412

- 40*. Побудуйте трикутник за стороною c , прилеглим до неї кутом α і сумою $a + b$ двох інших сторін.
- 41*. Побудуйте прямокутний трикутник за гіпотенузою c і сумою катетів $a + b$.
- 42*. Побудуйте трикутник за стороною a , прилеглим до неї кутом α і різницею $b - c$ двох інших сторін.

ЗАСТОСУЙТЕ НА ПРАКТИЦІ

43. Дві автомагістралі перетинають річку в різних місцях. Де потрібно розмістити базу відпочинку, щоб відстані від неї до річки і до кожної магістралі були однаковими? Вкажіть місце для бази відпочинку, де ці відстані мінімальні.



ПЕРЕВІРТЕ, ЯК ЗАСВОЇЛИ МАТЕРІАЛ РОЗДІЛУ 4

✓ КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке коло? Центр кола? Радіус, хорда, діаметр кола?
2. Назвіть випадки взаємного розміщення прямої і кола; двох кіл.
3. Чим відрізняється круг від кола?
4. Що таке геометричне місце точок?
5. Як переконатися, що фігура є геометричним місцем точок?
6. Яке коло називається описаним навколо трикутника? Вписаним у трикутник?
7. Сформулюйте і доведіть теореми про описане та вписане кола.
8. Що таке задача на побудову?
9. Які етапи розв'язування задачі на побудову?
10. У чому полягає суть методу допоміжного трикутника? Методу геометричних місць?

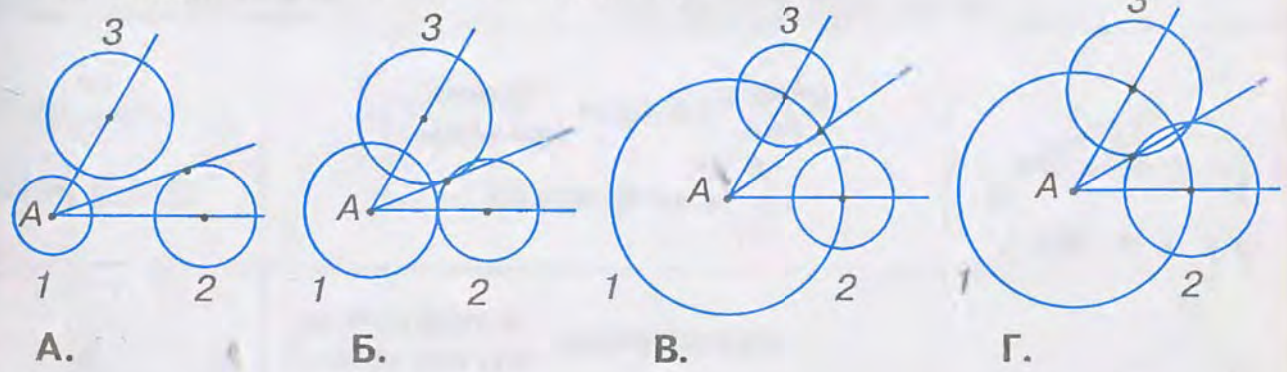
Уважно прочитайте задачу і знайдіть серед запропонованих відповідей правильну. Для виконання тестового завдання потрібно 10 – 15 хв.

№ 1

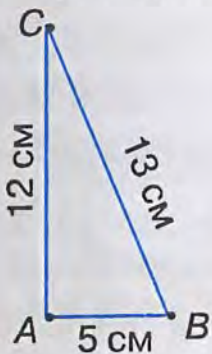
- 1° Навколо трикутника ABC описано коло з центром O і радіусом R . Яке із співвідношень правильне?
 А. $\angle OAB = \angle OAC$. Б. $\angle A = \angle B$. В. $BC = R$. Г. $OC = R$.
- 2° У трикутник KLM вписано коло з центром O і радіусом r , яке дотикається до сторони KL у точці A , сторони LM – у точці B і сторони KM – у точці C . Яке із співвідношень правильне?
 А. $KL = r$. Б. $\angle KCO < \angle MCO$. В. $MB = BL$. Г. $\angle OAK = 90^\circ$.
- 3° У колі з центром O і радіусом 5 см проведено діаметри AN і CM та хорду AM так, що утворився рівносторонній $\triangle AOM$. Яке із співвідношень правильне?
 А. $AC = 10$ см. Б. $CN = 2,5$ см. В. $\angle NAM = 90^\circ$. Г. $\angle CON = 60^\circ$.
- 4 Рівнобедрений трикутник ABC описаний навколо кола, центр O якого лежить на медіані BD . Чому дорівнює кут CBD , якщо $\angle DAO = 25^\circ$?
 А. 25° . Б. 40° . В. 50° . Г. 80° .
- 5* Прямокутний трикутник ABC вписаний у коло з центром O і радіусом R . До гіпотенузи AC проведено медіану і висоту, кут між якими дорівнює меншому з кутів даного трикутника – $\angle A$. Чому дорівнює відстань від основи висоти до вершини A ?
 А. $0,5R$. Б. R . В. $1,5R$. Г. $2R$.

№ 2

1° Щоб побудувати бісектрису кута A , провели кола, позначені на малюнках цифрами 1, 2 і 3. Яка з побудов правильна?



- 2° Які кола потрібно провести для побудови трикутника, що дорівнює трикутнику ABC ?



- А. Кола зі спільним центром A радіусами 5, 12 і 13 см.
Б. Кола з центром A радіусом 12 см і з центром B радіусом 13 см.
В. Кола з центром C радіусами 12 і 13 см і з центром B радіусом 5 см.
Г. Кола з центром A радіусом 5 см, з центром B радіусом 12 см, з центром C радіусом 13 см.

- 3° Центр кола, описаного навколо різностороннього $\triangle ABC$ лежить на перетині:

- А. Бісектрис $\angle A$ і $\angle B$.
Б. Бісектриси $\angle A$ і серединного перпендикуляра до сторони BC .
В. Серединних перпендикулярів до сторін AB і BC .
Г. Висоти, проведеної до сторони AC , і бісектриси $\angle C$.

- 4 Для побудови трикутника ABC ($\angle A > 90^\circ$) за стороною BC , висотою VH та медіаною BK допоміжним трикутником можна вважати:

- А. $\triangle ABC$. Б. $\triangle BCH$. В. $\triangle ABK$. Г. $\triangle BCK$.

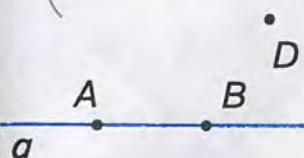
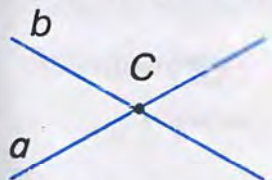


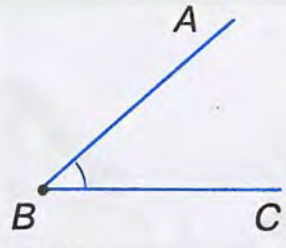
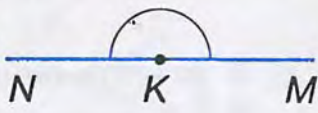
- 5* Скільки існує точок, рівновіддалених від трьох даних прямих, дві з яких перпендикулярні, а третя — паралельна одній з них?

- А. Жодної. Б. Одна. В. Дві. Г. Безліч.

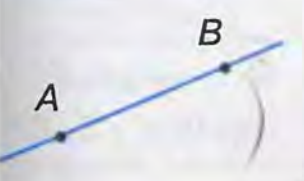
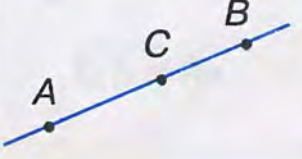
ПОВТОРЕННЯ ВИВЧЕНОГО

НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ

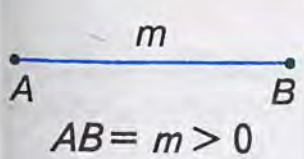
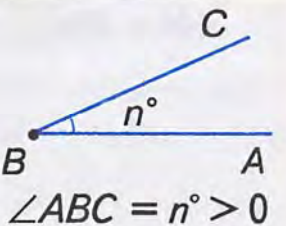
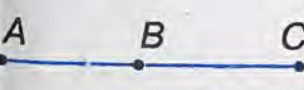
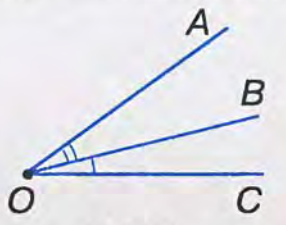
НАЙПРОСТІШІ ГЕОМЕТРИЧНІ ФІГУРИ

Точки і прямі	Відрізки	Промені	Кути
 <p>Пряма a або AB $A \in a, B \in a, D \notin a$</p>  <p>$C \in a, C \in b$ Прямі a і b перетинаються в точці C</p>	 <p>Відрізок AB – частина прямої</p> <p>Точки A і B – кінці відрізка</p> <p>Точка X – внутрішня точка відрізка AB</p>	 <p>Промінь OA – частина прямої</p> <p>Точка O – початок променя</p> <p>Промені OA і OC – доповняльні</p>	 <p>$\angle ABC$ утворюють промені BA і BC</p>  <p>$\angle NKM$ – розгорнутий, утворюють доповняльні промені KM і KN</p>

ВЛАСТИВОСТІ

прямої	розміщення точок на прямій
 <p>Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну</p>	 <p>З трьох точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими</p>

ВЛАСТИВОСТІ ВИМІРЮВАННЯ

відрізків	кутів
 <p>$AB = m > 0$</p>	<p>$\frac{\text{Довжина}}{\text{Градусна міра}}$ кожного відрізка більша за нуль</p>  <p>$\angle ABC = n^\circ > 0$</p>
 <p>$AC = AB + BC$</p>	<p>$\frac{\text{Довжина відрізка}}{\text{Градусна міра кута}}$ дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається градусних мір кутів будь-якою його точкою будь-яким променем, що проходить між сторонами кута</p>  <p>$\angle AOC =$ $= \angle AOB + \angle BOC$</p>

ВЛАСТИВОСТІ ВІДКЛАДАННЯ

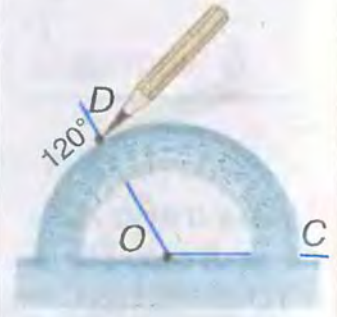
відрізків

кутів



$OC = m$ — єдиний

На промені від його початку
Від променя по один бік від нього
можна відкласти *тільки один*
відрізок даної довжини
кут даної градусної міри

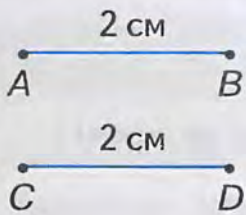


$\angle COD = n^\circ$ —
єдиний

РІВНІСТЬ

відрізків

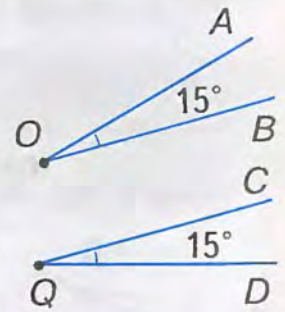
кутів



$AB = CD$

Відрізки
Кути називаються *рівними*,

якщо рівні їх $\frac{\text{довжини}}{\text{градусні міри}}$



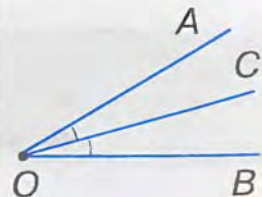
$\angle AOB = \angle CQD$



$AM = BM$

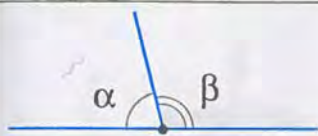
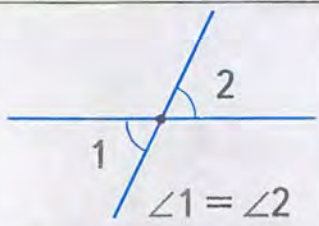
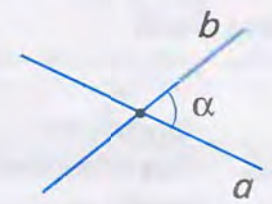
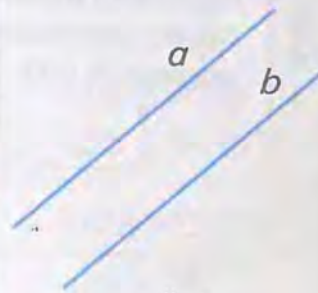
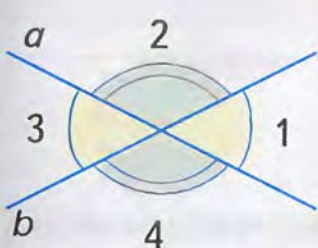
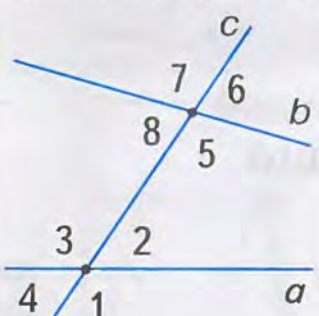
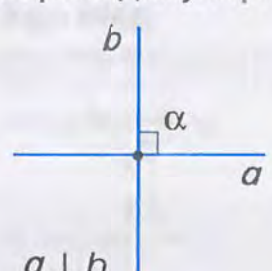
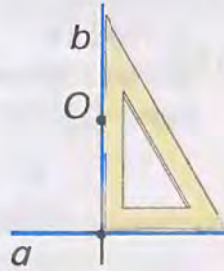
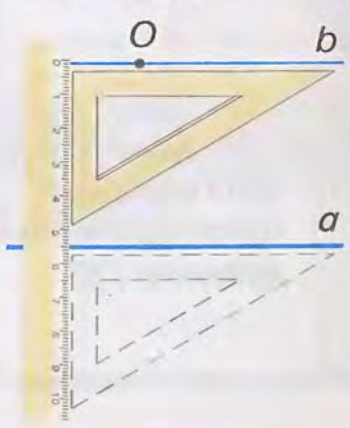
Точка M —
середина AB

Промінь OC —
бісектриса $\angle AOB$



$\angle AOC = \angle BOC$

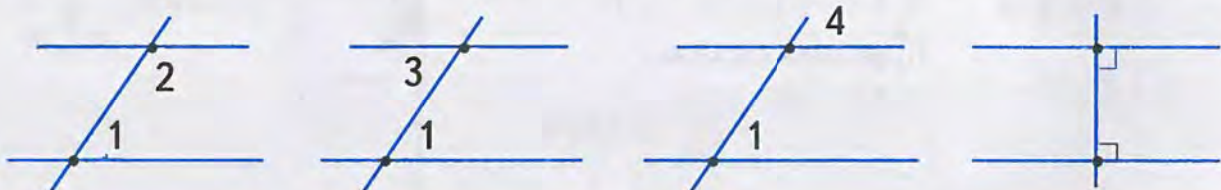
ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ НА ПЛОЩИНІ

КУТИ		ПРЯМІ	
суміжні	вертикальні	перетинаються	не перетинаються
 <p>$\alpha + \beta = 180^\circ$</p>	 <p>$\angle 1 = \angle 2$</p>	<p>під кутом $\alpha < 90^\circ$</p> 	<p>(паралельні)</p>  <p>$a \parallel b$</p>
між двома прямими	при двох прямих і січній	під кутом $\alpha = 90^\circ$ (перпендикулярні)	
<p><i>Вертикальні:</i></p> <p>$\angle 1$ і $\angle 3$, $\angle 2$ і $\angle 4$</p>  <p><i>суміжні:</i></p> <p>$\angle 1$ і $\angle 2$, $\angle 2$ і $\angle 3$, $\angle 3$ і $\angle 4$, $\angle 4$ і $\angle 1$,</p>	<p><i>Внутрішні</i></p> <p>а) односторонні $\angle 2$ і $\angle 5$, $\angle 3$ і $\angle 8$</p> <p>б) різносторонні $\angle 2$ і $\angle 8$, $\angle 3$ і $\angle 5$</p>  <p><i>Відповідні</i></p> <p>$\angle 1$ і $\angle 5$, $\angle 2$ і $\angle 6$, $\angle 3$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 8$,</p> <p><i>зовнішні:</i></p> <p>а) односторонні $\angle 1$ і $\angle 6$, $\angle 4$ і $\angle 7$; б) різносторонні $\angle 1$ і $\angle 7$, $\angle 4$ і $\angle 6$</p>	<p>під кутом $\alpha = 90^\circ$ (перпендикулярні)</p>  <p>$a \perp b$</p>	
		<p>Через точку <u>поза прямою або на прямій</u> <u>поза прямою</u> можна провести єдину пряму <u>перпендикулярну</u> даній <u>паралельну</u></p>  	

ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

ОЗНАКИ

ЯКЩО

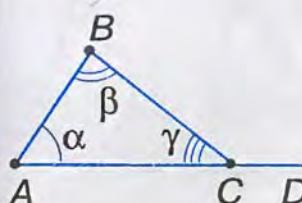
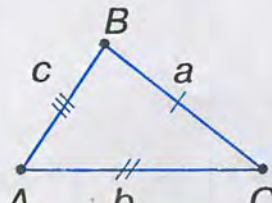


ВЛАСТИВОСТІ

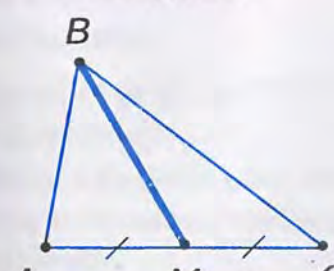
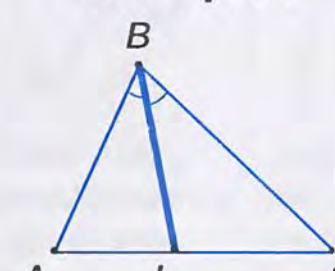
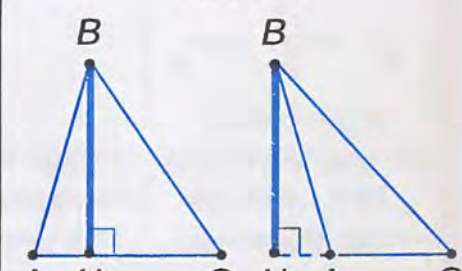
ЯКЩО



ТРИКУТНИКИ

ВЛАСТИВОСТІ		ВИДИ	
кутів	сторін	за сторонами	за кутами
 <p>$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ $\angle BCD = \alpha + \beta$ $\angle BCD > \alpha$ $\angle BCD > \beta$</p>	 <p>$a + b + c = P$ $a < b + c$ $b < a + c$ $c < a + b$</p>	<p>РІЗНОСТОРОННІ $a \neq b \neq c$</p> <p>РІВНОБЕДРЕННІ $a = b$ або $a = c$ або $b = c$</p> <p>РІВНОСТОРОННІ $a = b = c$</p>	<p>ГОСТРОКУТНІ $\alpha < 90^\circ$ $\beta < 90^\circ$ $\gamma < 90^\circ$</p> <p>ПРЯМОКУТНІ $\alpha = 90^\circ$ або $\beta = 90^\circ$ або $\gamma = 90^\circ$</p> <p>ТУПОКУТНІ $\alpha > 90^\circ$ або $\beta > 90^\circ$ або $\gamma > 90^\circ$</p>

ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ

медіана	бісектриса	висота
		

РІВНОБЕДРЕННИЙ ТРИКУТНИК	ПРЯМОКУТНИЙ ТРИКУТНИК
<p>властивості</p> <p>ЯКЩО ΔABC – рівнобедрений ($AB = BC$)</p> <p style="text-align: right;">← $\angle A = \angle C$</p> <p style="text-align: center;">← ТО ← бісектриса BD є медіаною</p> <p style="text-align: center;">← бісектриса BD є висотою</p> <p style="text-align: right;">← ЯКЩО</p> <p style="text-align: center;">ознаки</p> 	<p>властивості</p> <p>ЯКЩО ΔABC – прямокутний ($\angle C = 90^\circ$)</p> <p style="text-align: right;">← $\alpha + \beta = 90^\circ$</p> <p style="text-align: center;">← ТО ← $m_c = 0,5c$</p> <p style="text-align: right;">← ЯКЩО</p> <p style="text-align: center;">ознаки</p> 

ОЗНАКИ РІВНОСТІ ТРИКУТНИКІВ

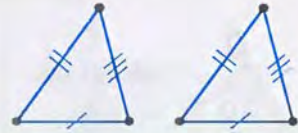
за двома сторонами
і кутом між ними



за стороною
і двома прилеглими кутами

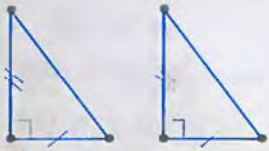


за трьома
сторонами

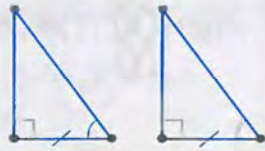


ОЗНАКИ РІВНОСТІ ПРЯМОКУТНИХ ТРИКУТНИКІВ

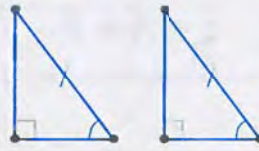
за двома катетами



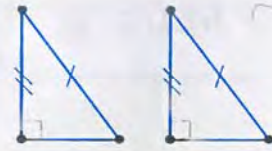
за катетом
і гострим
кутом



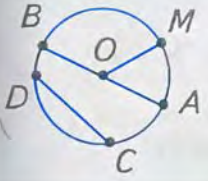
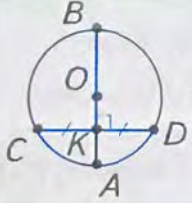
за
гіпотенузою
і гострим
кутом



за гіпотенузою і
катетом


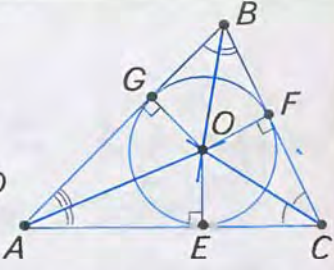


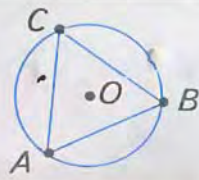
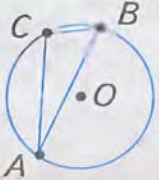
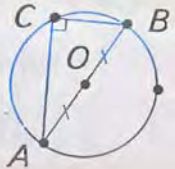
КОЛО

ВАЖЛИВІ ВІДРІЗКИ	ВЛАСТИВОСТІ
 <p>AB – діаметр, CD – хорда, OM – радіус</p> <p>$AB = 2OM$ $CD \leq AB$</p>	 <p>Якщо $\frac{AB \perp CD}{CK = KD}$, то $\frac{CK = KD}{AB \perp CD}$</p>

ДОТИЧНА ДО КОЛА	ВЗАЄМНЕ РОЗМІЩЕННЯ ДВОХ КІЛ		
 <p>a – дотична, $a \perp OM$</p>  <p>$AN = BN$</p>			 <p>$AB \perp OO_1$, $AK = KB$</p>
			

ГЕОМЕТРИЧНІ МІСЦЯ ТОЧОК			
<p>Фігура F є геометричним місцем точок (ГМТ) площини, якщо:</p> <ol style="list-style-type: none"> кожна точка фігури має ту саму властивість; кожна точка площини, яка має цю властивість, належить даній фігурі 	 <p>Коло є ГМТ, рівновіддалених від даної точки</p>	 <p>Бісектриса кута є ГМТ, рівновіддалених від сторін кута</p>	 <p>Серединний перпендикуляр до відрізка є ГМТ, рівновіддалених від кінців відрізка</p>

КОЛО, ОПИСАНЕ НАВКОЛО ТРИКУТНИКА	КОЛО, ВПИСАНЕ У ТРИКУТНИК
 <p>Центр O кола – точка перетину серединних перпендикулярів</p> <p>Навколо будь-якого трикутника У будь-який трикутник</p>	 <p>бісектрис кутів $r = OE = OF = OD$</p> <p>можна описати вписати коло і до того ж тільки одне</p>

РОЗМІЩЕННЯ ЦЕНТРА ОПИСАНОГО КОЛА ВІДНОСНО СТОРІН ТРИКУТНИКА		
		 <p>$R = \frac{AB}{2}$</p>

ОСНОВНІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

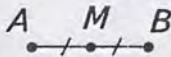

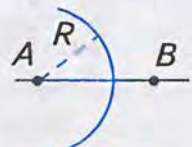


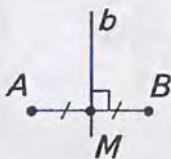

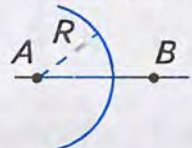

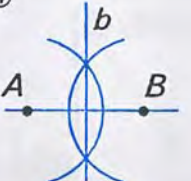
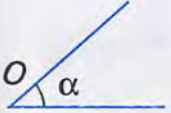
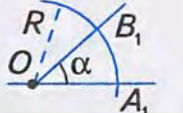
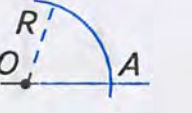
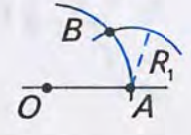
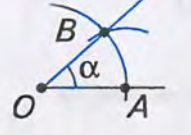
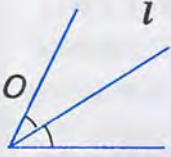

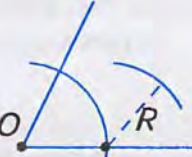
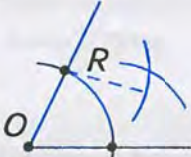

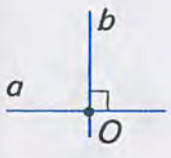
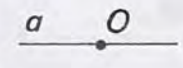
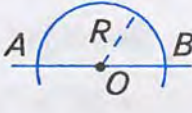
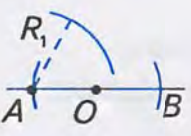
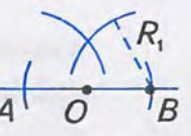
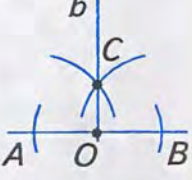
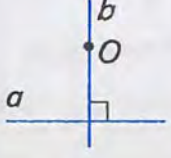

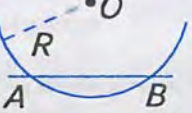


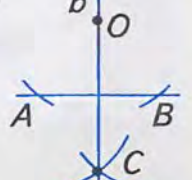
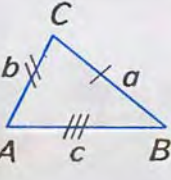
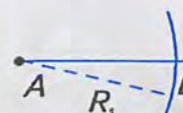
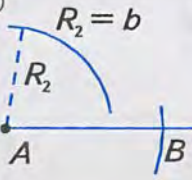
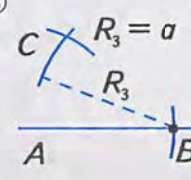
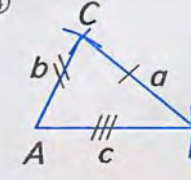
За допомогою лінійки можна провести:

- довільну пряму;
- пряму, що проходить через дану точку;
- пряму, що проходить через дві дані точки

За допомогою циркуля можна:

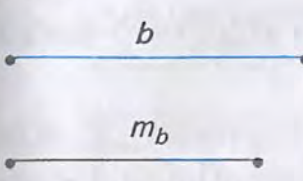
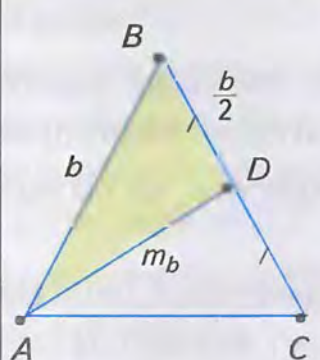
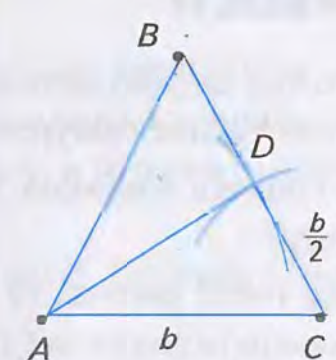
- провести коло з даного центра даним радіусом;
- відкласти відрізок на промені від його початку

Ніяких інших операцій виконувати циркулем і лінійкою не можна

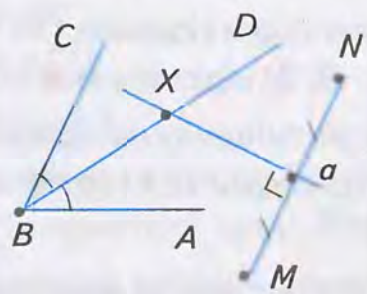
Побудувати	Кроки побудови				
	① 	② $R > 0.5AB$ 	③ 	④ 	
	① 	② $R > 0.5AB$ 	③ 	④ 	
	① R – довільний 	② 	③ $R_1 = A_1B_1$ 	④ 	
	① R – довільний 	② 	③ 	④ 	
	① 	② R – довільний 	③ $R_1 > OA$ 	④ 	⑤ 
	① 	② R – довільний 	③ 	④ 	⑤ 
	① $R_1 = c$ 	② $R_2 = b$ 	③ $R_3 = a$ 	④ 	

СКЛАДНІШІ ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ

МЕТОД ДОПОМІЖНОГО ТРИКУТНИКА

Задача	Аналіз	Побудова	Доведення
<p>Дано</p>  <p>Побудувати</p> <p>$\triangle ABC$ так, щоб $AB = BC = b$, $AD = m_b$, $(D - \text{середина } BC)$</p>	 <ol style="list-style-type: none"> 1) виконуємо малюнок-ескіз 2) $\triangle ABD$ – допоміжний ($AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$); 3) $BC = b$ 	 <p>Будуємо:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $\triangle ABD$ за трьома сторонами $AB = b$, $BD = \frac{b}{2}$, $AD = m_b$; 2) відрізок $BC = b$ на промені BD; 3) відрізок AC. $\triangle ABC$ – шуканий 	<p>У $\triangle ABC$ $AB = BC = b$, $AD = m_b$, $(D - \text{середина } BC)$ за побудовою</p>

МЕТОД ГЕОМЕТРИЧНИХ МІСЦЬ

Задача	Аналіз	Побудова	Доведення
<p>Дано</p> <p>$\angle ABC$ і точки M і N</p> <p>Побудувати</p> <p>точку X, рівновіддалену від сторін $\angle ABC$ і точок M, N</p>	<p>Точка X:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) рівновіддалена від сторін $\angle ABC$; 2) рівновіддалена від M і N. <p>ГМТ, що задовольняє:</p> <ul style="list-style-type: none"> • умову 1 – бісектриса $\angle ABC$; • умову 2 – серединний перпендикуляр до відрізка MN. <p>X – точка перетину цих ГМТ</p>	 <p>Будуємо:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) бісектрису $BD \angle ABC$; 2) серединний перпендикуляр a до відрізка MN; 3) X – точку перетину BD і a 	<p>$X \in BD$, тому X рівновіддалена від сторін $\angle ABC$.</p> <p>$X \in a$, тому $MX = NX$</p>

РОЗВ'ЯЖІТЬ ЗАДАЧІ

Найпростіші геометричні фігури та їх властивості

- Як за допомогою шнура, натертого крейдою, відмітити на класній дошці пряму? Як користуються шнуром для проведення прямої муляри і теслі?
- Як, не користуючись лінійкою, перевірити, чи по прямій відрізано аркуш; картон; фанеру?
- Поясніть зміст таких речень: 1) затемнення Сонця відбувається тоді, коли Місяць займає положення між Сонцем і Землею; 2) затемнення Місяця відбувається тоді, коли Земля займає положення між Сонцем і Місяцем.
- Чи лежить точка C на відрізку AB , якщо:
 - $AB = 10$ см, $AC = 45$ мм, $BC = 0,55$ дм;
 - $BC = 41$ мм, $AC = 0,5$ дм, $AB = 9,6$ см?
- Чи можуть точки A , B , C лежати на одній прямій, якщо:
 - $AB = 3,7$ см, $BC = 42$ мм, $AC = 0,8$ дм;
 - $AC = 90$ мм, $BC = 3,8$ см, $AB = 0,52$ дм?
- Точки A , B , C і D послідовно розміщені на прямій, причому $AB = CD$. Доведіть, що відрізки AD і BC мають спільну середину.
- Точки A , B і C лежать на прямій, точки M і N – середини відрізків AB і AC . Доведіть, що $BC = 2MN$.
- Точки A , B і C лежать на прямій, $AB = 6$ см, $BC = 10$ см. Якою може бути довжина відрізка AC ? Для кожного з можливих випадків зробіть малюнок.
- На прямій дано два відрізки $OA = 8$ см і $OB = 4$ см. Знайдіть: 1) відстань між точками A і B ; 2) відстань між точкою O і серединою M відрізка AB .
- Три школи розміщено по прямій лінії. Відстань між школами № 1 і № 2 – 5 км, а між школами № 1 і № 3 – 4 км. Якою може бути відстань між школами № 2 і № 3?
- Від центра агрофірми до центра її відділення прокладають телефонну лінію. Для цього через кожні 50 м слід поставити стовп. Скільки потрібно заготовити стовпів, якщо довжина лінії становить 4 км?
- Через кожен метр 20-метрового прямого паркану закопано стовп. 1) Скільки закопано стовпів? 2) Яка відстань між першим стовпом від початку і п'ятим – від кінця? 3) Десятим – від початку і десятим – від кінця?
- На карті Києва, виконаній у масштабі 1:30 000, довжина кварталу: 1) між вулицями Хрещатик і Пушкінською дорівнює 2 см; 2) між вулицями Липською та Шовковичною дорівнює 1,5 см. Яка довжина цих кварталів?

14. Майстерня має довжину 44 м і ширину – 24 м. Посередині коротшої стіни розташовано двері шириною 4 м, а довша стіна має п'ять вікон з рівними простінками між ними. Ширина кожного вікна дорівнює 4 м. Накресліть план майстерні в масштабі 1:400.
15. Вимірявши два відрізки в деяких одиницях довжини, ви дістали, що один з них довший за другий удвічі. Потім вирішили порівняти їх довжини точніше і для цього зменшили одиницю довжини в 10 разів (наприклад, замість 1 см взяли 1 мм). Чи досягли ви мети?
16. На аркуші паперу позначено дві точки A і B . Як треба зігнути цей аркуш, щоб поділити відрізок AB навпіл?
17. Із 3- і 4-метрових колод однакової товщини потрібно заготовити машину дров, розпилявши колоди на куски довжиною по 1 м. Які колоди вигідніше розпилювати?
18. Як можна швидко визначити приблизну кількість аркушів паперу, складеного у великий стос?
19. Потрібно виміряти лінійкою діаметр дуже тонкого дроту. Запропонуйте спосіб вимірювання.
20. Вам потрібно виміряти діагональ цеглини (відстань між найбільш віддаленими її вершинами). Запропонуйте спосіб вимірювання діагоналі лінійкою.
21. Виріжте із цупкого паперу смужку. Згинанням поділіть її на 3; 4; 6 рівних частин.
22. Як від куска тканини довжиною 8 м відрізати, не відмірюючи, 5 м?
23. Чи проходить промінь OC між сторонами кута AOB , якщо:
 - 1) $\angle AOC = 92^\circ$, $\angle BOC = 43^\circ$, $\angle AOB = 49^\circ$;
 - 2) $\angle AOC = 30^\circ$, $\angle BOC = 65^\circ$, $\angle AOB = 95^\circ$?
24. Як перевірити, чи є даний кут розгорнутим?
25. Якщо розгорнутий кут поділити на три рівних кути, то бісектриса середнього кута перпендикулярна до сторін розгорнутого кута. Доведіть.
26. Вася і Ваня у зошитах провели відрізок AB , позначили на ньому точку O і побудували прямий кут KOM . Вася з'ясував, що сума кутів AOK і BOM дорівнює 90° . Ваня ж наполягає на тому, що їх різниця дорівнює 90° . Хто з них правий?
27. На скільки градусів повернеться хвилинна стрілка за: 1) 20 хв; 2) 10 хв?
28. (Жарт.) Від аркуша паперу відрізали один з кутів. Скільки кутів матиме аркуш?

Взаємне розміщення прямих на площині

29. Розгорнутий кут поділено на 3 рівних кути. Як за допомогою косинця провести бісектрису середнього із цих кутів?
30. Один із суміжних кутів збільшується від 0° до 180° . Як змінюватиметься другий кут?
31. Чи можуть на паралельних прямих лежати: 1) вершини трикутника; 2) сторони трикутника?
32. Чи можуть на перпендикулярних прямих лежати: 1) вершини трикутника; 2) сторони трикутника?
33. Дві прямі перетинаються. Чи можна провести третю пряму, паралельну кожній з них? Поясніть відповідь.
34. Прямі a і b паралельні прямій c . Доведіть, що пряма, яка перетинає пряму a , перетинає також і пряму b .
35. Дві паралельні прямі перетинає третя. Скільки при цьому може бути кутів: 1) гострих; 2) тупих; 3) прямих?
36. За якої умови рівні всі кути, що утворені при перетині двох паралельних прямих третьою?
37. Чи правильне твердження: якщо при перетині двох прямих третьою утворилося рівно два кути по 91° , то прямі не паралельні?
38. Дві паралельні прямі перетинає третя так, що один із утворених кутів становить $\frac{1}{3}$ прямого кута. Під яким кутом його бісектриса перетинає другу з паралельних прямих?
39. Доведіть, що бісектриси двох кутів з паралельними сторонами паралельні або перпендикулярні між собою.
40. З точки A виходять три промені. На одному з крайніх променів взято точку K , через яку проведено пряму, що перетинає середній промінь у точці M . Відомо, що $KM = AK$. За якої умови пряма KM буде паралельною іншому з крайніх променів?
41. На одній стороні кута O відкладено відрізки OA_1 і A_1A_2 , а на другій – відрізки $OB_1 = OA_1$ і $B_1B_2 = A_1A_2$. Доведіть, що $A_1B_1 \parallel A_2B_2$.
42. Як виміряти кут, вершина якого лежить за межами аркуша паперу?
43. На аркуші паперу проведіть пряму і позначте точку, яка не лежить на прямій. Зігнувши аркуш, проведіть через дану точку пряму, перпендикулярну до даної прямої.
44. Як треба зігнути аркуш паперу, щоб провести через дану точку пряму, паралельну даній прямій?
45. Як треба зігнути кусок тканини, щоб переконатися в тому, що два його краї паралельні?

Трикутники

46. Які з наведених тверджень є аксіомами?

- 1) Через будь-які дві точки можна провести пряму і тільки одну.
- 2) Сума суміжних кутів дорівнює 180° .
- 3) З трьох будь-яких точок прямої одна і тільки одна точка лежить між двома іншими.
- 4) Вертикальні кути рівні.
- 5) Довжина відрізка дорівнює сумі довжин відрізків, на які він розбивається будь-якою його точкою.

47. Які з наведених тверджень є властивостями геометричних фігур, а які — їх ознаками?

- 1) Якщо в трикутнику два кути рівні, то він рівнобедрений.
- 2) У рівнобедреному трикутнику кути при основі рівні.
- 3) Якщо при перетині двох прямих третьою внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні.
- 4) Якщо дві паралельні прямі перетинає третя, то відповідні кути рівні.
- 5) Якщо медіана трикутника дорівнює половині його сторони, до якої вона проведена, то такий трикутник прямокутний.
- 6) У прямокутному трикутнику медіана, проведена до гіпотенузи, дорівнює половині гіпотенузи.

48. Накресліть трикутник. Проведіть три прямі, які перетинають дві його сторони і паралельні третій. Скільки утворилося трикутників? Дайте відповідь на це саме запитання, якщо прямих проведено: 1) 4; 2) 5; 3) n .

49. Як зміниться периметр трикутника, якщо його сторони:

- 1) збільшити на 3 см;
- 2) збільшити у 3 рази;
- 3) зменшити в 1,5 рази;
- 4) зменшити на 1,5 см?

50. Як зміниться довжина сторони рівностороннього трикутника, якщо його периметр:

- 1) збільшити на 6 см;
- 2) збільшити у 2 рази;
- 3) зменшити в 4 рази;
- 4) зменшити на 2,7 см?

51. Довжини сторін трикутника виражаються цілими числами. Знайдіть сторону трикутника, якщо дві інші сторони дорівнюють 1 і 2 см.

52. Сума двох будь-яких сторін трикутника дорівнює 10 см. Знайдіть периметр трикутника.

53. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює 20 см. Доведіть, що його периметр більший, ніж 40 см.

54. Бічна сторона рівнобедреного трикутника дорівнює 10 см. Доведіть, що його периметр менший, ніж 40 см.
55. Виріжте з паперу трикутник. За допомогою перегинання трикутника проілюструйте, що сума його кутів дорівнює 180° .
56. Доведіть, що серед кутів трикутника принаймні один не менший, ніж 60° .
57. Чи існує трикутник, у якого один з кутів дорівнює різниці двох інших кутів?
58. Чи можна який-небудь трикутник розрізати на два гострокутних трикутники?
59. Визначте вид трикутника, в якого сума двох кутів:
- 1) менша від третього;
 - 2) дорівнює третьому;
 - 3) більша за третій.
60. Знайдіть кути трикутника ABC , якщо $\angle A + \angle B = 103^\circ$, $\angle A - \angle B = 63^\circ$.
61. Чи існує трикутник, в якого перпендикулярні:
- 1) бісектриси двох його кутів;
 - 2) висоти, проведені з двох його вершин?
62. У якому трикутнику кожен зовнішній кут удвічі більший за кут трикутника:
- 1) суміжного з ним;
 - 2) не суміжного з ним?
63. Які кути утворюються при перетині двох бісектрис рівностороннього трикутника?
64. Паперовий трикутник ABC перегнули так, що вершина C опинилася на стороні AB , а з непокритих частин утворилися два рівнобедрених трикутники з вершинами A і B . Знайдіть кут C .
65. Крокви даху будинку утворюють між собою кут 130° . Під яким кутом нахилені крокви до горизонту?
66. Знайдіть висоту даху, крокви якого мають форму рівнобедреного прямокутного трикутника, якщо його основа дорівнює 7 м.
67. Плоский напилек має перехресну насічку. Одна насічка утворює з ребром напилку кут 35° , а друга — 74° . Знайдіть кут між насічками, якщо сторони цих кутів — доповняльні промені.
68. Для вимірювання висоти AB пагорба відійшли від нього по прямій і відмітили точку D так, щоб пагорб було видно під кутом 30° . Потім відійшли ще раз і відмітили точку C , з якої пагорб видно під кутом 15° . Яку відстань треба виміряти, щоб знайти висоту пагорба? Зробіть малюнок.
69. Дві сторони рівнобедреного трикутника дорівнюють 40 і 18 см. Яка з них є основою?
70. Знайдіть сторони рівнобедреного трикутника, у якого одна сторона дорівнює 10 см, а один з кутів — 60° .
71. Якого виду трикутник утворюють бісектриси кутів при основі рівнобедреного трикутника з основою цього трикутника?

- 72.** У рівнобедреному трикутнику точка перетину бісектрис кутів при основі рівновіддалена від кінців основи. Доведіть.
- 73.** Доведіть, що коли медіана трикутника ділить його на два трикутники з рівними периметрами, то даний трикутник рівнобедрений або рівносторонній.
- 74.** Яким має бути кут при основі рівнобедреного трикутника, щоб трикутник був: 1) гострокутним; 2) прямокутним; 3) тупокутним?
- 75.** Вам потрібно відпиляти кінець дошки з паралельними краями під кутом 45° . Як ви це зробите?
- 76.** Кусок тканини має форму трикутника. Як, перегинаючи тканину, встановити, чи є цей трикутник рівностороннім або хоча б рівнобедреним?
- 77.** Як за допомогою перегинання аркуша паперу дістати:
- 1) рівнобедрений трикутник;
 - 2) рівносторонній трикутник?
- 78.** Накресліть рівнобедрений трикутник ABC , на його основі AC позначте точку X і проведіть відрізок BX .
- 1) Доведіть, що коли відрізок AX більший за відрізок CX , то периметр $\triangle ABX$ більший за периметр $\triangle BCX$. Сформулюйте і доведіть обернене твердження.
 - 2) Знайдіть різницю периметрів трикутників ABX і BCX , якщо $AX - CX = 2$.
 - 3) Знайдіть різницю відрізків AX і CX , якщо різниця периметрів трикутників ABX і BCX дорівнює m .
- 79.** У рівносторонньому трикутнику проведено всі медіани, бісектриси і висоти. Які висновки можна зробити?
- 80.** Якщо в трикутнику ABC медіана m_a дорівнює половині сторони a , то кут A дорівнює сумі кутів B і C . Доведіть.
- 81.** Гіпотенуза рівнобедреного прямокутного трикутника дорівнює 28 см. Знайдіть висоту, проведену до гіпотенузи.
- 82.** На гіпотенузі рівнобедреного прямокутного трикутника ABC ($\angle B = 90^\circ$) відклали відрізок $AM = AB$. Через точку M провели пряму, перпендикулярну до AC . Вона перетнула катет BC у точці T . Доведіть, що:
- 1) $\triangle BMT$ – рівнобедрений;
 - 2) $BT = MC$.
- 83.** Кут BAC дорівнює 30° . З точки D на стороні AB проведено перпендикуляр DE до сторони AC . З точки E проведено перпендикуляр EF до сторони AB , а з точки F – перпендикуляр FM до сторони AC . Знайдіть довжину відрізка FM , якщо $DE = 10$ см.
- 84.** Бісектриси двох внутрішніх або зовнішніх односторонніх кутів при двох паралельних прямих та січній перпендикулярні між собою. Доведіть.
- 85.** У прямокутному трикутнику з вершини прямого кута проведено висоту, бісектрису і медіану. Знайдіть гострі кути трикутника, якщо:

- 1) кут між висотою і бісектрисою дорівнює 10° ;
 - 2) кут між бісектрисою і медіаною дорівнює 15° ;
 - 3) кут між висотою і медіаною дорівнює 20° .
- 86.** У прямокутному трикутнику з вершини прямого кута проведено висоту, бісектрису і медіану. Один з гострих кутів трикутника дорівнює 40° . Знайдіть:
- 1) кут між висотою і бісектрисою;
 - 2) кут між бісектрисою і медіаною;
 - 3) кут між висотою і медіаною.
- Порівняйте кути між висотою і бісектрисою та бісектрисою і медіаною. Зробіть висновок.
- 87.** Кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює α . Знайдіть зовнішній кут при його вершині. Як використати цей результат:
- 1) для поділу кута навпіл;
 - 2) для подвоєння кута?
- 88.** Зовнішній кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює α . При яких значеннях α трикутник буде:
- 1) рівностороннім;
 - 2) прямокутним?
- 89.** Кут при вершині рівнобедреного трикутника дорівнює 40° .
- 1) Знайдіть зовнішній кут при основі трикутника.
 - 2) Знайдіть кут між бісектрисами зовнішнього кута при основі і зовнішнього кута при вершині.
 - 3) Розв'яжіть цю задачу, якщо кут при вершині дорівнює α .
- 90.** Доведіть, що коли бісектриса зовнішнього кута трикутника паралельна його стороні, то трикутник рівнобедрений.
- 91.** Доведіть, що кут A трикутника ABC дорівнює $(B_1 + C_1 - A_1) : 2$, де A_1, B_1, C_1 — зовнішні кути при відповідних вершинах.
- 92.** Чи може бісектриса зовнішнього кута трикутника бути паралельною:
- 1) одній з його сторін;
 - 2) одній з його висот;
 - 3) одній з бісектрис кутів трикутника?
- Поясніть відповідь.
- 93.** Доведіть, що бісектриса кута трикутника перпендикулярна до бісектриси зовнішнього кута, який має ту саму вершину.
- 94.** Накресліть два рівних трикутники ABC і $A_1B_1C_1$.
- 1) Позначте точки K і K_1 на сторонах AB і A_1B_1 так, щоб $AK = A_1K_1$; точки L і L_1 — на сторонах BC і B_1C_1 так, щоб $BL = B_1L_1$; точки M і M_1 — на сторонах CA і C_1A_1 так, щоб $CM = C_1M_1$. Утворіть трикутники KLM і $K_1L_1M_1$. Які трикутники рівні на малюнку? Чому?
 - 2) Дайте відповідь на це саме запитання, якщо точки K, K_1, L, L_1, M, M_1 позначити на продовженнях сторін трикутника за відповідні вершини.

95. У рівнобедреному трикутнику ABC з основою AC проведено медіану BD . На сторонах AB і CB позначено відповідно точки M і N так, що $AM = CN$. Доведіть, що: 1) $\triangle BDM = \triangle BDN$; 2) $\triangle ADM = \triangle CDN$.
96. Скільки пар рівних трикутників дістанемо, якщо в рівносторонньому трикутнику проведемо: 1) одну медіану; 2) дві медіани; 3) три медіани. Як зміниться одержаний результат, якщо даний трикутник буде рівнобедреним?
97. Дано трикутник ABC і точки E і F такі, що середина відрізка BE збігається із серединою сторони AC , а середина відрізка CF — із серединою сторони AB . Доведіть, що точки E , F і A лежать на одній прямій.
98. У рівнобедреному трикутнику ABC проведено медіани AM і CN до бічних сторін AB і BC . Доведіть, що $MN \parallel AC$. Чи зміниться результат, якщо замість медіан провести бісектриси; висоти?
99. Через точку перетину бісектрис зовнішніх кутів при вершинах A і B трикутника ABC проведено пряму, паралельну стороні AB . Ця пряма перетинає продовження сторін AC і BC відповідно в точках D і E . Доведіть, що $DE = AD + BE$.
100. Доведіть, що у рівних трикутників бісектриси, що проведено з вершин рівних кутів, рівні. Чи зміниться результат, якщо замість бісектрис провести медіани; висоти?
101. Доведіть, що коли в трикутнику дві висоти рівні, то трикутник рівнобедрений.
102. Якщо в трикутнику проведено дві висоти, а відрізки від точки їх перетину до вершин рівні, то трикутник рівнобедрений. Доведіть.

Коло і круг. Геометричні побудови

103. Учень намалював коло, але забув позначити його центр. Чи зможе він знайти центр, якщо пам'ятає, що радіус дорівнює 30 мм?
104. Діаметр кола більший за його радіус на: 1) 10 см; 2) 15 мм; 3) 3,8 дм. Знайдіть діаметр кола.
105. Діаметр круглої заготовки деталі дорівнює 60 мм, а діаметр виробу — 54 мм. Якої товщини шар металу було знято під час виготовлення деталі?
106. Найбільша відстань від точки A до точок кола дорівнює m , а найменша — n . Знайдіть радіус кола (у сантиметрах), якщо:
1) $m = 0,3$ дм, $n = 10$ мм;
2) $m = 50$ мм, $n = 0,2$ дм.
107. Дано коло з центром O і діаметром $AB = 4$ см.
1) На діаметрі позначено точку C так, що $OC = 1$ см. Знайдіть відстань від точки C до кінців діаметра.
2) На прямій AB позначено точку D так, що $AD = 1$ см. Знайдіть довжину відрізка BD .

- 108.** На озері правильної круглої форми розташований маленький острів. Знайдіть найкоротший прямий маршрут катера, який сполучатиме дві точки берега і матиме проміжну пристань біля острова.
- 109.** Скільки можна провести кіл через дві точки A і B ? Чи є серед них коло з найбільшим радіусом? А з найменшим?
- 110.** Дано коло з центром O і радіусом R .
- 1) Яку фігуру утворюють середини всіх його радіусів?
 - 2) Яку фігуру утворюють усі точки X такі, що $OX = 2R$?
- 111.** Проведіть відрізок AB і позначте на ньому точки A_1, B_1, X так, щоб $AA_1 = BB_1, XA = XB$.
- 1) Доведіть, що $XA_1 = XB_1$.
 - 2) Доведіть обернене: якщо $XA_1 = XB_1$, то $XA = XB$.
 - 3) Розв'яжіть задачу для випадку, коли точка X не лежить на відрізку AB .
- 112.** Як поділити навпіл кут на місцевості, не вимірюючи його?
- 113.** Як на місцевості провести пряму, перпендикулярну до даної прямої, користуючись лише кілками і мотузкою?
- 114.** Доведіть, що серединні перпендикуляри до двох сторін трикутника перетинаються.
- 115.** Гіпотенуза прямокутного трикутника дорівнює a . Знайдіть відстань між точкою перетину висот трикутника і центром описаного кола.
- 116.** Один із гострих кутів прямокутного трикутника дорівнює 35° . Під яким кутом видно кожен з його катетів із центра описаного кола?
- 117.** З історії стародавнього світу до нас дійшла легенда про давньогрецького математика Фалеса з Мілету (625 — 548 рр. до н.е.): вчений приніс у жертву бика, відкривши спосіб побудови кола, описаного навколо прямокутного трикутника. У чому полягає цей спосіб?
- 118.** Висота, проведена до гіпотенузи прямокутного трикутника, є діаметром кола. Як розміщене коло відносно сторін трикутника?
- 119.** Периметр трикутника дорівнює 3 см. Чи може радіус описаного навколо цього трикутника кола бути більшим, ніж 30 см?
- 120.** Побудуйте трикутник за стороною, рівною 5 см, і прилеглими до неї кутами 40° і 70° . На більшій стороні знайдіть точку, рівновіддалену від кінців меншої сторони.
- 121.** Побудуйте трикутник за двома сторонами 3 см і 4 см і кутом між ними 100° . На більшій стороні побудуйте точку, рівновіддалену від двох інших сторін.
- 122.** *Задача Н. Тартальї* (італійський математик, 1500 — 1557). На даному відрізку AB за допомогою лінійки і циркуля, розхил якого заданий і не дорівнює AB , побудуйте рівносторонній трикутник.

123. У «Началах» Евкліда запропоновано такий спосіб побудови дотичної до кола з даної поза колом точки M : сполучивши точку M з центром O кола, дістанемо на колі точку A . Перпендикулярна пряма до відрізка OM у точці A і коло з центром O і радіусом OM перетинаються в точці B . Перетин даного кола з відрізком OB — точка C . Пряма MC дотикається до кола. Доведіть, що пряма MC — шукана.

124. *Задача Евкліда.* Поділіть навпіл кут, вершина якого недоступна.



Розділ I

§ 1

1. 1) Точки B, D, N ; 2) точки M, A, C . 2. AB . 5. Доповняльні промені: AP і AQ ; AS і AR . 6. 1) OA, OB, OC, OD ; 2) OA і OB ; OC і OD . 7. Безліч. 8. 1) Ні; 2) ні. 10. Чотири прямих: AD, AC, BD, CD . 11. 1) Прямую a можна позначити AB , пряму b по-іншому позначити не можна. 13. 6. 14. 2) Так, якщо точка Q лежить між точками P і R . 15. 1) 3 або 1; 2) 1, 4 або 6. 17. Ні. 19. Так. 20. 6 променів; $2n$ променів. 22. Кожну пряму перетинають 4 інші прямі, при цьому утворилося 10 точок перетину; точок, через які b не проходила жодна пряма, немає. 23. 2 промені; 4 промені; $2n$ променів. 24. 4) Київ. 25. *Вказівка*: скористайтеся властивістю прямої. 26. Якщо треба провішати пряму лінію між двома точками A і C , положення яких задано, то спочатку в цих точках ставлять віхи, потім між ними встановлюють проміжну віху B так, щоб віхи A і C закривали віху B . Якщо від точки A до точки C далеко, то доводиться ставити ще віхи між точками A і B та B і C . Іноді доводиться провішувати пряму лінію, напрям якої задано двома віхами, поставленими в точках A і B . У цьому випадку ставлять в потрібному напрямі третю віху C так, щоб її закривали віхи A і B . Потім ставлять наступні віхи, щоб їх закривали дві раніше встановлені віхи.

§ 2

1. 2) Кінці A, M , внутрішні точки O, B . 2. 3 відрізки: AB, AC, BC . 4. 1) $AB < CD$. 7. 1) $AC > BD, AC = KL, BD < KL$; 2) $AC < BD, AC = KL, BD > KL$; 3) $AC = BD = KL, BD, KL$. 8. 6 см. 9. $AB > AC$. 10. 1) $KN = 1,5$ см; 2) $KN = 1$ см; 3) $KN = 2,5$ см. 11. 1) $AC = 10$ см; 2) $AB = 4,3$ см; 3) $BC = 6$ см. 12. 1) Ні; 2) так. 13. 1) Ні; 2) так. 14. 1) Так; 2) ні. 15. 1) Один; 2) два — по одному на кожному з доповняльних променів. 16. 1) $AO = OB = 4,5$ см; 2) $AB = 86$ мм, $OB = 43$ мм; 3) $AB = 16,6$ мм, $AO = 8,3$ мм. 17. $AO = 2$ см, $OB = 6$ см. 18. 1) AE, BE, CE, DE ; 2) AB, DE . 19. 6 відрізків. 20. $AC = 6$ см, $BC = 2$ см. 21. $BC = BD$. 22. 1) A ; 2) B ; 3) A ; 4) A . 23. M — середина відрізка AB . 24. 1) 17 см; 2) 7 см. 25. 30 см або 2 см. 26. 1) 10 мм; 2) 5 мм. 27. 9 см. 28. 6 см. 29. 35 пар відрізків. 30. *Вказівка*: через точки B і C можна провести єдину пряму. 31. *Вказівка*: скористайтеся властивістю прямої. 32. $k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$, n — кількість точок ($n \geq 3$). 33. 5 см. 34. 1) 1 см; 2) 5 см. 35. $\frac{m}{2}$. 36. $2n$. 37. 12 см. 38. 8 см. 39. 1) Якщо X — шукана точка, то або $AX = 3$ см і $BX = 6$ см, або $AX = 9$ см і $BX = 18$ см; 2) будь-яка внутрішня точка відрізка AB ; 3) якщо X — шукана точка, то $AX = 8$ см і $BX = 6$ см. 40. 340 км. 42. 1) Від 4 до 5 км; 2) від 3 до 4 км.

§ 3

1. $\angle SAP, \angle PAR, \angle SAR, \angle SAR$ – розгорнутий. 2. 3) $\angle COB, \angle DOB, \angle AOB$; 4) $\angle COA, \angle DOA$. 7. Вказівка: $\angle AOB = \angle BOC$. 8. 1) 4; 2) 2; 3) 6. 9. Так. 10. Не обов'язково. 11. $\angle ABC, \angle ABM, \angle ABN, \angle MBC, \angle NBC, \angle MBN$. 12. 1) $\angle B < \angle A < \angle C$; 2) $\angle A < \angle C < \angle B$; 3) $\angle A = \angle B < \angle C$. 13. 1) $\angle AOB = 70^\circ$; 2) $\angle AOC = 41^\circ$. 14. $\angle MOF = 155^\circ$. 15. 1) $\beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$; 2) $\alpha = 100^\circ, \gamma = 50^\circ$; 3) $\beta = 40^\circ, \gamma = 80^\circ$; 4) $\alpha = 180^\circ, \beta = 60^\circ$. 16. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 17. 1) Один; 2) два – по одному від кожного променя. 18. 1) 72° ; 2) 87° ; 3) 130° ; 4) 41° . 19. 3. 20. Ні. 21. 1) $\angle BOC = 41^\circ$; 2) $\angle BOC = 15^\circ, \angle AOC = 65^\circ$. 22. 2) Кут AOC дорівнює або 70° , або 152° . 23. 1) 39° ; 2) 54° ; 3) 15° . 24. 10° або 90° . 25. 15° або 105° . 26. $\angle EOF = 50^\circ$. 27. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 28. Розв'язання (мал. 61). За умовою $\angle AOC = \angle BOD$, $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, $\angle BOD = \angle COD + \angle BOC$. Отже, $\angle AOB + \angle BOC = \angle COD + \angle BOC$. Звідси $\angle AOB = \angle COD$. 29. Вказівка: доведіть рівність кутів DOC і FOC . 30. Вказівка: доведіть рівність кутів AOC і BOC . 31. 1) 60° ; 2) 120° . 32. 30° і 60° . 33. 73° . 34. $\angle NOK = 10^\circ, \angle MOK = 50^\circ$. 35. $\angle AOC = 58^\circ$. 36. 20° . 37. 1) $90^\circ : n$; 2) $45^\circ : n$; 3) $60^\circ : n$; 4) $30^\circ : n$. 38. 1) Вказівка: розгляньте три випадки розміщення на прямій точок A, B, O ; 2) 100° . 39. На 45° . 40. 1) Один до Києва, другий до Одеси; 2) обидва до Києва або обидва до Одеси. 42. Вказівка: використайте засічку на аркуші у точці B . 43. 14 год 30 хв (або 2 год 30 хв) чи 21 год 30 хв (або 9 год 30 хв).

Розділ II

§ 4

1.1) $\angle ABD$ і $\angle CBD$ (мал. 71); 2) $\angle LMN$ і $\angle EFK$ (мал. 72). 2. У $\angle AOD$ і $\angle BOC$ (мал. 73) немає спільної сторони; у $\angle TKO$ і $\angle OKL$ (мал. 74) немає сторін, що є доповняльними променями. 5. $139^\circ; 75^\circ$. 7. 1) 43° ; 2) 126° ; 3) 18° ; 4) 157° . 9. $\alpha = 80^\circ; \beta = 129^\circ$. 10. 1) $105^\circ; 75^\circ$; 2) $62^\circ; 118^\circ$; 3) $111^\circ; 69^\circ$. 11. $\alpha = 45^\circ$ (мал. 79); $\beta = 120^\circ$ (мал. 80). 12. 1) $36^\circ, 144^\circ$; 2) $60^\circ, 120^\circ$; 3) $20^\circ, 160^\circ$. 13. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 14. Ні. 15. Доведення. Позначимо дані суміжні кути α і β . Нехай $\alpha < 90^\circ$, тоді $\alpha = 90^\circ - n^\circ$. З теореми про суму суміжних кутів випливає, що $\beta = 180^\circ - \alpha$. Отже, $\beta = 180^\circ - (90^\circ - n^\circ) = 90^\circ + n^\circ > 90^\circ$. Тому, за означенням, кут β – тупий. 16. Вказівка: див. задачу 15. 17. Вказівка: див. задачу 15. 19. 1) $105^\circ, 75^\circ$; 2) $142^\circ 30', 37^\circ 30'$; 3) $123^\circ 30', 56^\circ 30'$; 4) $90^\circ, 90^\circ$. 20. 1) $18^\circ, 162^\circ$; 2) $15^\circ, 165^\circ$;

- 3) $90^\circ, 90^\circ$; 4) $10^\circ, 170^\circ$. 21. 1) $162^\circ, 18^\circ$; 2) $15^\circ, 165^\circ$; 3) $90^\circ, 90^\circ$; 4) $170^\circ, 10^\circ$.
 22. 1) $45^\circ, 135^\circ$; 2) $108^\circ, 72^\circ$; 3) $80^\circ, 100^\circ$; 4) $84^\circ, 96^\circ$. 23. 1) $30^\circ, 150^\circ$; 2) $67^\circ 30', 112^\circ 30'$; 3) $100^\circ, 80^\circ$; 4) $144^\circ, 36^\circ$. 24. $\angle ACD$ і $\angle DCB$; $\angle ACL$ і $\angle LCB$.
 25. *Вказівка:* позначте дані рівні кути, наприклад, α_1 і α_2 , а суміжні з ними кути — відповідно β_1 і β_2 . Скористайтеся теоремою про суму суміжних кутів та порівняйте суми: $\alpha_1 + \beta_1$ і $\alpha_2 + \beta_2$. 26. *Вказівка:* позначте дані суміжні кути, наприклад, α і β . Скористайтеся означенням бісектриси кута і теоремою про суму суміжних кутів.
 27. 1) $30^\circ, 150^\circ$; 2) $150^\circ, 30^\circ$; 3) $120^\circ, 60^\circ$; 4) $90^\circ, 90^\circ$. 29. 1) α — гострий, β — тупий; 2) α — тупий, β — гострий; 3) α — тупий, β — гострий; 4) α — гострий, β — тупий.
 30. 1) $150^\circ \leq \alpha \leq 160^\circ$; 2) $50^\circ \leq \alpha \leq 60^\circ$; 3) $135^\circ \leq \alpha \leq 142^\circ$; 4) $1^\circ \leq \alpha \leq 5^\circ$. 31. 1) $170^\circ, 10^\circ$; 2) $127^\circ 30', 52^\circ 30'$; 3) $155^\circ 30', 24^\circ 30'$; 4) $118^\circ 30', 61^\circ 30'$. 32. 1) $150^\circ, 30^\circ$; 2) $157^\circ 30', 22^\circ 30'$; 3) $162^\circ, 18^\circ$; 4) $165^\circ, 15^\circ$. 33. 1) $150^\circ, 30^\circ$; 2) $120^\circ, 60^\circ$; 3) $105^\circ, 75^\circ$; 4) $75^\circ, 105^\circ$. 34. 1) 140° ; 2) 70° ; 3) 120° ; 4) 30° . 35. *Вказівка:* обгрунтуйте, що $\angle AOM = 90^\circ - \angle CON$, $\angle BOM = 90^\circ - \angle BON$ та врахуйте рівність кутів CON і BON . 36. Ні. 37. Так. 38. *Вказівка:* див. задачу 17. 39. *Вказівка:* додайте до 180° градусну міру кута між напрямком на південь і даним напрямком.

§ 5

- 1.1) $\angle BYZ$ і $\angle AYX$ (мал. 92); 2) $\angle MLN$ і $\angle OLK$ (мал. 93). 2. 1) $\angle AOD$; 2) $\angle AOC$ і $\angle BOD$. 5. $\angle AOB = 41^\circ$, $\angle MON = 149^\circ$. 7. Кожен, якщо кути гострі; жоден, якщо кути тупі. 8. $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 110^\circ$. 9. 1) 15° ; 2) $105^\circ 30'$; 3) $33^\circ 30'$; 4) 95° . 10. 1) Так; 2) так; 3) так. 11. 130° і 50° ; 72° і 108° . 12. 1) $40^\circ, 140^\circ, 140^\circ$; 2) $12^\circ, 168^\circ, 168^\circ$; 3) $25^\circ, 155^\circ, 155^\circ$; 4) $17^\circ, 163^\circ, 163^\circ$. 13. 1) $83^\circ, 83^\circ, 97^\circ, 97^\circ$; 2) $62^\circ, 62^\circ, 118^\circ, 118^\circ$; 3) $71^\circ, 71^\circ, 109^\circ, 109^\circ$; 4) $55^\circ, 55^\circ, 125^\circ, 125^\circ$. 14. 2 пари вертикальних кутів і 4 пари суміжних кутів. 16. 1) 45° ; 2) 90° ; 3) 109° ; 4) 130° . 17. 1) 130° ; 2) 217° ; 3) $172^\circ 50'$; 4) $118^\circ 30'$. 19. Так. 20. Так. 22. *Вказівка:* позначте дані рівні кути, наприклад, α_1 і α_2 , а вертикальні до них кути відповідно β_1 і β_2 . Скористайтеся теоремою про вертикальні кути. 23. *Вказівка:* при перетині двох прямих утворюється 2 пари вертикальних кутів і 4 пари суміжних кутів. 24. 1) $51^\circ, 51^\circ, 129^\circ, 29^\circ$; 2) $160^\circ, 160^\circ, 20^\circ, 20^\circ$; 3) $119^\circ, 119^\circ, 61^\circ, 61^\circ$; 4) $91^\circ, 91^\circ, 89^\circ, 89^\circ$. 25. 1) $104^\circ 30', 104^\circ 30', 75^\circ 30', 75^\circ 30'$; 2) $147^\circ 30', 147^\circ 30', 32^\circ 30', 32^\circ 30'$; 3) $143^\circ 30', 143^\circ 30', 36^\circ 30', 36^\circ 30'$; 4) $116^\circ 30', 116^\circ 30', 63^\circ 30', 63^\circ 30'$. 26. 1) $162^\circ, 62^\circ, 18^\circ, 18^\circ$; 2) $165^\circ, 165^\circ, 15^\circ, 15^\circ$; 3) $150^\circ, 150^\circ, 30^\circ, 30^\circ$; 4) $170^\circ, 170^\circ, 10^\circ, 10^\circ$. 27. *Вказівка:* скористайтеся теоремою про суму суміжних кутів. 28. 1) $32^\circ 30'$; 2) $58^\circ 30'$; 3) $121^\circ 30'$. 29. *Вказівка:* нехай промені OM і ON — бісектриси даних вертикальних кутів. Доведіть, що $\angle MON = 180^\circ$. 30. *Вказівка:* скористайтеся тим, що третя пряма утворює з кожною із двох даних прямих по 2 пари вертикальних і по 4 пари суміжних кутів. 31. 1) 30° ; 2) 40° ; 3) 45° ; 4) 60° .

- 32. Вказівка:** скористайтеся тим, що бісектриси суміжних кутів утворюють прямий кут. **33. Вказівка:** див. задачу 32. **34. Вказівка:** скористайтеся властивістю рівних суміжних кутів; бісектриси прямого кута. **35.** 1) 45° ; 2) 45° ; 3) 180° . **36. Вказівка:** див. задачу 29.

§ 6

- 1.1)** a і b (мал. 115); 2) m і n (мал. 116). **2.** 1) мал. 117, 118; 2) мал. 117; 3) мал. 117. **3.** Ні. **6. Вказівка:** скористайтеся означенням відстані від точки до прямої. **8.** 49° ; 30° . **9.** 1) 60° ; 2) 37° ; 3) 46° ; 4) 11° . **10.** 1) 100° , ні; 2) 90° , так; 3) 70° , ні; 4) 90° , так. **11.** 1) $PA = 6$; 2) $BA = 8$. **12.** 1) $AC = 3$, $OB = 8$, $OC = 5$; 2) $AB = 3$, $OA = 3$, $OB = 6$; 3) $BC = 4$, $OA = 3$, $OC = 4$. **14.** 1) Так; 2) так; 3) так. **15.** Ні. **16.** 1) 1,5 і 5,5 см; 2) 5,5 см і 1,5 см. **17.** 1) 3 см або 15 см; 2) 7,5 см або 1,5 см. **18.** Для кожної точки відстані до сторін кута рівні. **19.** Треба розглянути 3 випадки. **20. Вказівка:** розгляньте усі можливі випадки розміщення прямих c і d відносно прямих a і b та покажіть, що серед них є той, що вимагається. **21. Вказівка:** доведіть, що $\angle ABD$ – розгорнутий. **23. Вказівка:** скористайтеся твердженням про єдиність перпендикулярної прямої.

§ 7

- 1.1)** c і d (мал. 134); 2) q і p (мал. 135). **3. Вказівка:** скористайтеся розміщенням прямих за клітинками. **4.** 1) внутрішні односторонні; 2) внутрішні різносторонні; 3) внутрішні односторонні; 4) внутрішні різносторонні. **5.** 1) MN і NM ; 2) AB , BC , AC . **6.** b не перетинає a , c перетинає a . **7.** 1) 8 способами; 2) 8 способами; 3) 4 способами; 4) 4 способами. **9.** 36° і 134° та 46° і 144° ; 114° і 76° та 104° і 66° . **10.** 1) 50° і 135° та 45° і 130° ; 2) 60° і 120° ; 3) 110° і 70° . **12.** a перетинає c . **13.** 1) 127° , 43° , 53° , 137° , 53° , 137° ; 2) 15° , 165° , 15° , 15° , 165° , 165° ; 3) 95° , 95° , 85° , 85° , 85° , 85° . **14.** 1) 2 кути по 30° і 4 кути по 150° ; 2) 2 кути по 150° і 4 кути по 30° ; 3) 2 кути по $80^\circ 30'$ і 4 кути по $99^\circ 30'$; 3) 2 кути по $99^\circ 30'$ і 4 кути по $80^\circ 30'$. **15. Вказівка:** скористайтеся теоремою про суму суміжних кутів. **16. Вказівка:** скористайтеся теоремою про суму суміжних кутів. **17. Вказівка:** скористайтеся доведенням від супротивного. **18.** 1) 2 способами; 2) 2 способами. **19. Вказівка:** скористайтеся доведенням від супротивного і теоремою про суму суміжних кутів. **20.** 90° , 90° , 90° , 90° , 45° , 135° , 45° , 135° . **21.** 1) $180^\circ - \beta$, β , $180^\circ - \beta$, $180^\circ - \alpha$, α , $180^\circ - \alpha$. **22. Вказівка:** доведіть, що один із даних відповідних кутів дорівнює суміжному з ним куту. **23.** З північного сходу на південний захід (або навпаки); з північного заходу на південний схід (або навпаки).

§ 8

1) AP і BO (мал.150); 2) a і b (мал. 149). 3. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. *Вказівка:* скористайтеся ознакою паралельності прямих за відповідними кутами. 5. 1) $18^\circ + 118^\circ \neq 180^\circ$; 2) $130^\circ + 102^\circ \neq 180^\circ$; 3) $37^\circ + 87^\circ \neq 180^\circ$. *Вказівка:* скористайтеся ознакою паралельності прямих за внутрішніми різнооронніми кутами. 7. 1) Ні; 2) так; 3) так. 8. *Вказівка:* розгляньте кути при прямих a і b та січній d . 9. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 10. $a \parallel b$. 12. 1) Ні; 2) ні; 3) так; 4) ні. 13. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так. 14. 1) Ні; 2) так; 3) так, наприклад, коли $\alpha = \beta = 90^\circ$; 4) к. 15. 1) Так; 2) ні; 3) ні; 4) ні. 17. *Вказівка:* позначте кути, які утворюють сектриси із січною, через α і β . Доведіть, що $2\alpha + 2\beta = 180^\circ$. 18. 1) 20° ; 2) 90° . 19. *Вказівка:* скористайтеся ознакою паралельності прямих за внутрішніми зносторонніми кутами та доведіть, що бісектриси лежать на паралельних прямих. 20. 1) Ні; 2) так. 21. *Вказівка:* доведіть, що пряма a перетинає сторони даного кута. 22. *Вказівка:* скористайтеся доведенням від супротивного. 23. *Вказівка:* скористайтеся ознакою паралельності прямих за відповідними кутами. 25. Так.

§ 9

Так, ні. 2. Ні, так. 3. Так, ні. 5. 55° ; 125° ; 55° . 6. 1) 43° ; 2) 126° ; 3) 18° ; 4) 157° . 7. 80° і 100° ; 45° і 135° . 8. 1) 105° і 75° ; 2) 30° і 150° ; 3) 60° і 120° . 9. 1) $53^\circ 30'$; 47° ; 3) 66° ; 4) $21^\circ 30'$. 10. 1) Так; 2) так; 3) так. 11. 1) $68^\circ 30'$; 2) 27° ; 3) 81° ; $11^\circ 30'$. 12. 1) Так; 2) так; 3) так. 13. Ні. 15. 1) 105° і 75° ; 2) $37^\circ 30'$ і $142^\circ 30'$; $56^\circ 30'$ і $123^\circ 30'$; 4) 90° і 90° . 16. 1) 18° і 162° ; 2) 15° і 165° ; 3) 90° і 90° ; 4) 10° і 0° . 17. 1) 18° і 162° ; 2) 165° і 15° ; 3) 90° і 90° ; 4) 10° і 170° . 18. 1) 45° і 135° ; 2) 72° і 108° ; 3) 80° і 100° ; 4) 96° і 84° . 19. 1) 30° і 150° ; 2) $67^\circ 30'$ і $112^\circ 30'$; 3) 80° і 100° ; 36° і 144° . 20. 36° , 72° , 72° . 21. *Вказівка:* скористайтеся теоремою про властивість паралельних прямих. 23. *Вказівка:* позначте внутрішні односторонні кути через α і β . Доведіть, що $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \neq 180^\circ$. 24. 1) α ; 2) β ; 3) β ; 4) α . 25. 1) 170° і 10° ; 2) $52^\circ 30'$ і $127^\circ 30'$; 3) $24^\circ 30'$ і $155^\circ 30'$; 4) $61^\circ 30'$ і $118^\circ 30'$. 26. 1) 30° і 150° ; 2) 30° і $157^\circ 30'$; 3) 18° і 162° ; 4) 15° і 165° . 27. 1) 30° і 150° ; 2) 60° і 120° ; 3) 75° і 105° ; 4) 60° і 120° . 28. *Вказівка:* скористайтеся наслідком 1 з теореми про ознаку паралельності прямих. 29. *Вказівка:* скористайтеся наслідком 2 з теореми про ознаку паралельності прямих. 30. 1) *Вказівка:* див. задачу 28; 2) *Вказівка:* див. задачу 29. 31. *Вказівка:* доведіть, що пряма, яка проходить через точку перетину двох перпендикулярних прямих, перетинає кожну з них під гострим кутом. 32. *Вказівка:* якщо предмет P_3 урівноважує предмети P_1 і P_2 , то $CP_1 \parallel CP_3 \parallel BP_2$.

Розділ III

§ 10

1. $\triangle BCD, \triangle BCA, \triangle BAD$. 2. 1) BC, AC ; 2) $\angle C, \angle A$; 3) $\angle A, \angle B$; 4) $\angle C$. 4. Сторона $DE - f$, сторона $EF - d$, сторона $DF - e$. 5. Так. 6. 1) $\triangle FBC$; 2) $\triangle AFB, \triangle FBC$; 3) $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle FBD, \triangle CBD$; 4) $\triangle FBC$; 5) $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle FBD, \triangle CBD$; 6) $\triangle AFB$. 8. Медіана CL , бісектриса BN , висота AM . 12. 1) Ні; 2) так; 3) ні; 4) так. 13. Ні(мал.199); так(мал. 200). 14. 1) Так; 2) ні; 3) так. 15. 1) Різносторонній; 2) рівносторонній; 3) рівнобедрений. 16. 1) Основа b ; 2) основа a ; 3) основа c . 17. Ні. 19. 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 24 см. 20. 1) 38 см; 2) 50 см; 3) 18 см. 21. 1) Прямокутний; 2) тупокутний; 3) тупокутний. 22. 1) Прямокутний; 2) гострокутний; 3) тупокутний. 24. 1) Гіпотенуза BC ; 2) гіпотенуза AC ; 3) гіпотенуза AC ; 4) гіпотенуза BC . 25. 1) 2,5 см; 2,5 см; 4 см; 4 см; 3,5 см; 3,5 см; 2) 10 см; 10 см; 11 см; 11 см; 11 см; 11 см; 3) 5 см; 5 см; 8 см; 8 см; 5 см; 5 см; 4) всі по 13,5 см. 26. *Вказівка*: скористайтеся означенням бісектриси кута і бісектриси трикутника. 27. 1) $65^\circ, 65^\circ, 15^\circ, 15^\circ, 10^\circ, 10^\circ$; 2) $35^\circ, 35^\circ, 27^\circ 30', 27^\circ 30', 27^\circ 30', 27^\circ 30'$; 3) $20^\circ, 20^\circ, 25^\circ, 25^\circ, 45^\circ, 45^\circ$; 4) всі по 30° . 29. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 30. 1) Рівносторонній; 2) різносторонній; 3) рівнобедрений. 31. 1) Основа AB ; 2) основа AC ; 3) основа BC . 32. 1) 11 см; 2) 10 см; 3) 9 см, 7 см, 7 см. 33. 10 см, 13 см, 13 см. 34. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 35. Ні. 36. 40 см. 37. 10 см, 20 см. 38. 5 см. 39. *Вказівка*: скористайтеся означенням медіани трикутника. 40. 12 см. 41. 1) Прямокутний; 2) тупокутний; 3) гострокутний. 42. 1) Прямокутний; 2) прямокутний; 3) тупокутний; 4) тупокутний. 43. 1) Так; 2) так; 3) ні. 44. 1) 12 см; 2) 15 см; 3) 14 см. 45. 1) 20 см, 20 см, 10 см; 2) 15 см, 15 см, 5 см; 3) 28 см, 28 см, 7 см. 46. 31 см. 47. 35 см. 48. Рівнобедрений. 50. 1) На 4,8 см; 2) на 38,08 см; 3) на $16\frac{2}{13}$ см. 51. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 52. *Вказівка*: розгляньте усі можливі види трикутників.

§ 11

2. Ні. 3. $\angle ABM, \angle MBO, \angle OBC$; $\angle ABM = \angle OMB, \angle OBC = \angle BOM$; 180° . 4. $\angle ACP, \angle BCD$. 6. $\angle B = 55^\circ$ (мал. 211); $\angle B = 50^\circ$ (мал. 212). 7. 1) 120° ; 2) 50° ; 3) 40° . 8. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 10. 1) Ні; 2) ні; 3) ні. 11. 1) Ні; 2) ні. 12. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 13. 1) 38° ; 2) 66° ; 3) 25° . 14. 1) Прямокутний; 2) тупокутний. 15. 1) Прямокутний; 2) тупокутний; 3) гострокутний. 16. *Вказівка*: скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника. 17. 130° . 18. $123^\circ, 146^\circ, 104^\circ$. 19. 140° . 21. 6. 22. 1) $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$; 2) $48^\circ, 72^\circ, 60^\circ$; 3) $50^\circ, 50^\circ, 80^\circ$. 23. 1) $30^\circ, 60^\circ$; 2) $55^\circ, 35^\circ$; 3) $36^\circ, 54^\circ$. 24. *Вказівка*: доведіть, що: $\angle CAB + \angle ABD = 180^\circ$ (мал. 215); $\angle CAE + \angle ACF = 180^\circ$ (мал. 216). 25. 135° . 26. 95° . 27. 90° . 28. 40° . 29. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle ABC$ — рівнобед-

33. $15^\circ, 75^\circ$. 34. $40^\circ, 110^\circ, 30^\circ$ (мал. 217); $60^\circ, 70^\circ, 110^\circ$ (мал. 218). 35. 1) $40^\circ, 60^\circ, 30^\circ$; 2) $55^\circ, 80^\circ, 45^\circ$; 3) $30^\circ, 80^\circ, 70^\circ$. 36. 1) $60^\circ, 30^\circ$; 2) $48^\circ, 42^\circ$; 3) $36^\circ, 54^\circ$. 37. $30^\circ, 50^\circ$. 38. Тупими. 39. 1) Прямокутний; 2) тупокутний; 3) тупокутний. 40. 1) Ні; 2) так; 3) так. 41. 7° . 42. 60° . 43. 76° . 44. $\angle ABD = 25^\circ, \angle ADB = 85^\circ, \angle DBC = 25^\circ, \angle CDB = 95^\circ$. 45. *Вказівка:* точка D лежить на продовженні сторони BC . 46. 1) 12° ; 2) 20° ; 3) 20° . 47. $83^\circ, 35^\circ, 62^\circ$. 48. Так. 49. *Вказівка:* при кожній вершині трикутника можна побудувати два зовнішні кути. 50. Ні. 51. *Вказівка:* скористайтеся теоремою про зовнішній кут трикутника. 52. $\triangle ABC$ — прямокутний рівнобедрений. 53. *Вказівка:* $\triangle ACB$ — прямокутний рівнобедрений.

§ 12

2. Ні. 3. Так. 4. $XY = 17, YZ = 9, XZ = 10, \angle X = \angle A, \angle Y = \angle B, \angle Z = \angle C$. 5. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 9. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 10. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 11. 1) Ні; 2) так; 3) ні. 12. Так. 13. 1) Так; 2) так; 3) так; 4) не завжди. 14. Так. 15. 1) Ні; 2) ні; 3) так. 16. 1) Ні; 2) ні; 3) ні. 17. 1) $AB = A_1B_1, BC = B_1C_1, AC = A_1C_1$; 2) $\angle A = \angle A_1, \angle B = \angle B_1, \angle C = \angle C_1$. 18. 1) $A_1B_1 = 6$ см, $B_1C_1 = 7$ см, $A_1C_1 = 8$ см; 2) $\angle A = 65^\circ, \angle B = 80^\circ, \angle C = 35^\circ$. 19. 1) $\angle A_1 = 42^\circ, \angle B_1 = 80^\circ, \angle C_1 = 58^\circ$; 2) $\angle A_1 = 70^\circ, \angle B_1 = 65^\circ, \angle C_1 = 45^\circ$. 20. 1) 27 см; 2) 46 см; 3) 5,4 дм. 21. Ні. 22. 1) $A_1B_1 = 11$ см, $A_1C_1 = 16$ см, $B_1C_1 = 14$ см; 2) $\angle B_1 = 60^\circ, \angle A = 50^\circ, \angle C = 70^\circ$. 23. $AB = 4,2$ см, $BC = 2$ см, $\angle B = 115^\circ, \angle C = 45^\circ$; $B_1C_1 = 2$ см, $A_1C_1 = 6,3$ см, $\angle C_1 = 45^\circ, \angle A_1 = 20^\circ$; $A_2B_2 = 4,2$ см, $A_2C_2 = 6,3$ см, $\angle A_2 = 20^\circ, \angle B_2 = 115^\circ$. 25. *Вказівка:* для зручності виконуйте побудови за клітинками. 26. *Вказівка:* для зручності виконуйте побудови за клітинками. 27. *Вказівка:* кути з відповідно перпендикулярними сторонами рівні.

§ 13

1. Ні ($AB \neq DF$). 5. Ні ($DE \neq AB$). 7. $\triangle ADB = \triangle CDB$ (за першою ознакою) (мал. 250); $\triangle ABD = \triangle CBD$ (за першою ознакою) (мал. 251); $\triangle AOB = \triangle DOC$ (за першою ознакою) (мал. 252). 8. $\triangle ABC = \triangle EFD$ (за першою ознакою), $\angle B = \angle F$. 10. $x = KM = 7$. 11. *Вказівка:* скористайтеся першою ознакою. 12. *Вказівка:* скористайтеся першою ознакою. 13. 2) 130° . 14. 1) $BC = 5$ см; 2) $\angle ABC = 65^\circ$. 15. *Вказівка:* скористайтеся другою ознакою. 16. $\triangle ABC = \triangle EFD, \angle D = \angle C$. 18. $x = 40^\circ, y = 12$. 19. 1) $AB = 6,2$ см; 2) $\angle D = 54^\circ$; 3) $\angle B = 46^\circ 39'$; 4) $PM = 85$ мм. 20. *Вказівка:* скористайтеся тим, що $\angle BOC = \angle AOD$ як вертикальні. 21. *Вказівка:* скористайтеся властивістю бісектриси кута. 22. *Вказівка:* скористайтеся властивістю бісектриси кута. 23. *Вказівка:* доведіть, що $\triangle AOB = \triangle COD$. 24. *Вказівка:* скористайтеся першою ознакою. 25. *Вказівка:* скористайтеся першою ознакою. 26. *Вказівка:* скористайтеся першою ознакою. 27. *Вказівка:*

доведіть рівність утворених трикутників. **28. Вказівка:** доведіть, що $\triangle AEC = \triangle CDA$. **29. Вказівка:** доведіть, що $\triangle ADO = \triangle CBO$. **30. Вказівка:** скористайтеся першою ознакою. **31. Вказівка:** доведіть, що $\triangle BAD = \triangle BCD$. **32. Вказівка:** $\angle ABO = \angle CDO$ як внутрішні різносторонні при паралельних прямих і січній, $\triangle AOB = \triangle COD$ за другою ознакою. **33.** 1) 10 см; 2) 6 см. **34. Вказівка:** у випадку тупого кута основи перпендикулярів лежать на продовженнях сторін кута. **35. Вказівка:** нехай D — точка перетину даної прямої і бісектриси, тоді $\triangle ACD = \triangle ABD$ за другою ознакою. **36. Вказівка:** скористайтеся другою ознакою. **37. Вказівка:** доведіть рівність кутів A і A_1 , ABD і $A_1B_1D_1$ та скористайтеся другою ознакою. **38. Вказівка:** доведіть, що $AC = A_1C_1$ і $\angle C = \angle C_1$. **39. Вказівка:** доведіть рівності $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $C = C_1$. **41. Вказівка:** скористайтеся першою ознакою. **40. Вказівка:** доведіть, що $\triangle BOC = \triangle DOA$ (за першою ознакою), $\triangle ABM = \triangle CDM$ (за другою ознакою). **42.** 96° . **43. Вказівка:** скористайтеся першою ознакою. **44. Вказівка:** скористайтеся другою ознакою. **45. Вказівка:** доведіть рівність $OC = OD$. **46. Вказівка:** $\triangle AOB = \triangle DOC$ за першою ознакою, $\triangle BOM = \triangle CON$ за другою ознакою. **47. Вказівка:** $\triangle ABD = \triangle CBD$ за другою ознакою, $\triangle ABM = \triangle CBM$ за першою ознакою. **48. Вказівка:** розгляньте трикутники OCB і OAD . **49. Вказівка:** скористайтеся спочатку першою, а потім другою ознакою. **50. Вказівка:** див. задачу 48. **51. Вказівка:** скористайтеся першою ознакою. **52. Вказівка:** скористайтеся другою ознакою.

§ 14

1. $K=L$. **2.** $KD=DF$, $KE=EF$, $\angle DKF = \angle DFK$, $\angle KDE = \angle FDE$, $\angle KED = \angle FED$. **4.** Так. **5.** 1) 3 см, 3 см; 2) 3,5 см, 3,5 см; 3) 4 см, 4 см. **6.** 1) 1,4 дм; 2) 50 мм. **7.** 1) Ні; 2) ні; 3) так. **8.** 1) $\angle AOC$, $\angle BOC$; 2) $\angle AOB$, $\angle AOC$; 3) $\angle AOB$, $\angle COB$. **9.** 1) ON ; 2) MN ; 3) OM . **10.** 45° , 45° , 90° (мал. 276); 75° , 75° , 30° (мал. 277). **11.** 1) 100° ; 2) 50° ; 3) 20° . **12.** 1) 54° ; 2) 45° ; 3) 30° . **13.** 90° , 45° , 45° . **14. Вказівка:** скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника. **15.** 60° . **16. Вказівка:** розгляньте два випадки: 1) дано кут при основі; 2) дано кут, що лежить проти основи. Обчисліть кути трикутника. **17.** 1) 40° , 70° , 70° ; 2) 120° , 30° , 30° . **18.** Тільки гострим. **19.** Тільки тупим. **20.** 1) 90° , 45° , 45° ; 2) 120° , 30° , 30° ; 3) 140° , 20° , 20° . **21.** 1) $AC=BC$, $AH=BH$, $\angle CAB = \angle CBA$, $\angle ACH = \angle BCH$, $\angle AHC = \angle BHC$. **22.** 2) $DE=DF$, $ME=MF$, $\angle DEF = \angle DFE$, $\angle EDM = \angle FDM$, $\angle EMD = \angle FMD$. **23. Вказівка:** скористайтеся теоремою про суму кутів трикутника та ознакою рівнобедреного трикутника. **24.** 1) 20° , 80° , 80° або 20° , 20° , 140° ; 2) 40° , 40° , 100° або 40° , 70° , 70° ; 3) 80° , 80° , 20° або 80° , 50° , 50° . **25.** 1) 36° , 36° , 108° ; 2) 36° , 72° , 72° . **26.** 1) 40° , 70° , 70° ; 2) 20° , 80° , 80° . **27.** 1) 50° , 65° , 65° або 55° , 55° , 70° ; 2) 36° , 72° , 72° або 45° , 45° , 90° . **28.** 1) 70° , 55° , 55° або 70° , 70° , 40° ;

- 2) 45° , 45° , 90° або 45° , $67^\circ 30'$, $67^\circ 30'$. 29. 1) 20° ; 2) 25° ; 3) 60° . 30. 1) 50° , 65° , 55° ; 2) 60° , 60° , 60° ; 3) 30° , 30° , 120° . 31. *Вказівка*: доведіть, що трикутники ADB і CDB – рівнобедрені. 32. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle AOC$ рівнобедрений. 33. *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника та другою ознакою рівності трикутників. 34. *Вказівка*: скористайтеся властивістю зовнішнього кута трикутника. 35. *Вказівка*: доведіть рівність двох трикутників, що утворилися при основі даного трикутника. 36. *Вказівка*: використайте відповідні кути при паралельних прямих і січній. 37. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle NBM = \triangle DAN = \triangle MCD$. 38. 1) *Вказівка*: доведіть, що $\triangle ABM = \triangle CBN$; 2) *Вказівка*: доведіть, що $\triangle ABO = \triangle CBO$; 5) *Вказівка*: доведіть, що $\triangle DBE$ рівнобедрений. 39. *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника. 40. *Вказівка*: доведіть рівність утворених трикутників. 41. Рівнобедрений. 42. Рівнобедрений. 43. *Вказівка*: скористайтеся наслідком 1 з теореми про властивість паралельних прямих. 44. 45° , 45° , 90° . 45. *Вказівка*: доведіть, що кут при основі рівнобедреного трикутника дорівнює половині зовнішнього кута при його вершині. 46. Утворилося 2 трикутники з кутами 36° , 72° , 72° і 36° , 36° , 108° . 47. *Вказівка*: покажіть, що в $\triangle BAD$ $BD = AD$, а в $\triangle ADC$ $AD = AC$. 48. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle ADC = \triangle CBA$. 49. Рівнобедрений. 50. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle AMO$ і $\triangle ONC$ рівнобедрені (використайте ознаку паралельності прямих). 52. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle DAB$ – рівнобедрений. 53. *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника.

§ 15

- . Так. 2. Ні ($AB \neq MN$). 4. 1) $\triangle BOA = \triangle COD$ (мал. 300); 2) $\triangle ABC = \triangle CDA$ (мал. 301); 3) $\triangle ABC = \triangle ADC$ (мал. 302). 5. 1) $\triangle ADE = \triangle CDE$; $\triangle ADB = \triangle CDB$; $\triangle AEB = \triangle CEB$; 2) $\triangle ABC = \triangle CDA$; $\triangle BCD = \triangle DAB$. 6. *Вказівка*: скористайтеся значенням периметра трикутника. 7. $\triangle ABC = \triangle EFD$ (за третьою ознакою). $\angle A = \angle E$, $\angle C = \angle D$, $\angle B = \angle F$. 9. *Вказівка*: скористайтеся означенням рівностороннього трикутника та третьою ознакою рівності трикутників. 10. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle ADC = \triangle ABC$. 11. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle AMC = \triangle CNA$, а $\triangle ABC$ – рівнобедрений. 12. 1) *Вказівка*: доведіть, що $\triangle BAD = \triangle BCD$. 13. 1) $\angle ABD = 85^\circ$; 2) *Вказівка*: доведіть, що $\triangle DBA = \triangle ACD$ та $\triangle BOA = \triangle COD$. 14. 1) 35° ; 2) 3 см. 15. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$. 16. *Вказівка*: доведіть рівність трикутників, у яких сторони відповідно дорівнюють одній із даних сторін, даній медіані та половині другої даної сторони. 17. *Вказівка*: скористайтеся вказівкою на ст. 117. 18. *Вказівка*: продовжіть медіану AM на відрізок MA_1 , що дорівнює їй ($2AM = AA_1$); доведіть, що $\triangle ABM = \triangle A_1CM$; застосуйте нерівність трикутника у $\triangle ACA_1$. 19. *Вказівка*: скористайтеся третьою ознакою. 20. *Вказівка*: так, щоб утворився трикутник.

§ 16

1. Ні. 2. Так (мал. 319), так (мал. 320), так (мал. 321). 4. 1) $AB=ED, AC=EF, BC=DF, \angle A=\angle E, \angle B=\angle D, \angle C=\angle F$. 5. 1) 5 см; 2) 0,15 дм; 3) 100 мм. 6. 1) 2,5 см; 2) 50 мм; 3) 0,4 дм. 7. 1) 12 мм; 2) 2,25 см; 3) 10 дм. 8. 1) 9,12 см; 2) 0,112 дм; 3) 39 мм. 9. *Вказівка*: розгляньте $\triangle AEM$ і $\triangle CFM$. 10. *Вказівка*: розгляньте трикутники, сторонами яких є висоти і основа даного трикутника. 11. *Вказівка*: скористайтеся ознакою рівності прямокутних трикутників за гіпотенузою і гострим кутом. 12. *Вказівка*: нехай точка M лежить на бісектрисі CE кута ACB . Опустіть з точки M перпендикуляри MP і MF на сторони AC і CB . Доведіть, що $\triangle PCM = \triangle FCM$. 13. *Вказівка*: нехай точка M рівновіддалена від сторін кута ACB . Точки P і F — основи перпендикулярів, опущених з точки M на сторони AC і CB . Доведіть, що $\triangle PCM = \triangle FCM$. 14. 1) 30° ; 2) 60° ; 3) 27° . 15. 1) $\angle CAB=10^\circ, \angle ACB=\angle ADB=80^\circ$; 2) $\angle CAB=20^\circ, \angle ACB=\angle ADB=70^\circ$; 3) $\angle CAB=30^\circ, \angle ACB=\angle ADB=60^\circ$. 16. Так. *Вказівка*: нехай A_1B_1 перетинає AB у точці M . Доведіть, що $\triangle AA_1M = \triangle BB_1M$. 17. *Вказівка*: доведіть рівність інших катетів. 18. *Вказівка*: скористайтеся властивістю рівнобедреного трикутника та однією з ознак рівності прямокутних трикутників. 19. 2) *Вказівка*: нехай у $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ BM і B_1M_1 — медіани, BH і B_1H_1 — висоти. $AC = A_1C_1, BM = B_1M_1, BH = B_1H_1$. Доведіть, що $\triangle BMH = \triangle B_1M_1H_1, \triangle BHA = \triangle B_1H_1A_1, \triangle BHC = \triangle B_1H_1C_1$. 20. 2) Нехай у $\triangle ABC$ і $\triangle A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, висоти $AH = A_1H_1, BK = B_1K_1$. Доведіть, що $\triangle ACH = \triangle A_1C_1H_1, \triangle ABK = \triangle A_1B_1K_1$. Тоді $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ за другою ознакою. 21. 3 см; 4 см; 5 см. 22. *Вказівка*: скористайтеся властивістю катета, що лежить проти кута 30° . 23. 7 см. 24. 4 см. 25. 3 см і 9 см. 26. $AB=2a, BD=\frac{3a}{2}, CD=\frac{b}{2}, AD=\frac{a}{2}$. 27. *Доведення*. Нехай у $\triangle ABC$ кут C прямий, $2BC=AB$. Добудуємо до $\triangle ABC$ трикутник ADC так, щоб точка D належала променю BC і $CD=CB$. $\triangle ABC = \triangle ADC$. Тоді у $\triangle ABD$: $AB=BD=AD$. Кути рівностороннього трикутника дорівнюють по 60° . AC — висота і бісектриса. Отже, $\angle CAB=30^\circ$. 28. $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. 29. $30^\circ, 75^\circ, 75^\circ$. 30. 9 см. 31. *Доведення*. Нехай у $\triangle ABC$ кут C прямий, CD — медіана: $CD = AD = DB$. У $\triangle ACD$: $\angle CAD = \angle DCA = \alpha$, у $\triangle CDB$: $\angle DCB = \angle DBC = \frac{180^\circ - 2\alpha}{2} = 90^\circ - \alpha$. Тоді $\angle ACB = \angle ACD + \angle DCB = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$. 32. 18 см. 33. 2 см. 34. 30 см. 35. 4 см. 36. 5 см. 37. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle ADC = \triangle BDC$. 38. *Вказівка*: з точок B і C проведіть перпендикуляри до прямої AD та доведіть рівність утворених прямокутних трикутників. 39. *Вказівка*: відрізок між пунктами візьміть за гіпотенузу.

Розділ IV

§ 17

2) NC, LD, KB . 2. Прямі AB, BC, AC . 3. Два. 5. 1) 13 см; 2) 5,2 см; 3) $2m$ см; $2n$ см. 6. 1) 2,1 см; 2) 4,1 см; 3) $\frac{a}{2}$ см; 4) a см. 7. 1) Безліч; 2) один; 3) один. 1) Так; 2) так; 3) ні; 4) так. 9. 1) Ні; 2) так. 10. 1) 1 дм; 2) 60 мм; 3) 9 см; 4) 0,14 дм.

I. *Вказівка*: проведіть радіуси з кінців хорди та скористайтеся властивістю рівнобічного трикутника. 12. 1) Так; 2) ні; 3) так; 4) ні. 13. 1) Пряма перетинає коло; пряма дотикається до кола; 3) пряма не перетинається з колом; 4) пряма дотикається до кола. 14. 1) Дві; 2) одну; 3) жодної. 15. 1) Не перетинаються; 2) дотикаються зовні; 3) дотикаються внутрішньо. 16. 10 см і 2 см. 18. 1) Всередині круга; на колі; 3) всередині круга; 4) поза кругом. 19. Ні. 20. Якщо AB — діаметр, то $D = AB$, в інших випадках $CD > AB$. 21. 20 см. 22. 6 см. 23. *Вказівка*: скористайтеся першою ознакою рівності трикутників. 24. 11 см. 25. 55° . 26. 3 см і 6 см. 27. 120° . 28. Ні. 29. 1) 35° ; 2) 30° . 30. 4 см. 31. *Вказівка*: проведіть радіуси в точки дотику та відрізок, що сполучає точку A з центром кола. 32. 60° . 33. 30° .

I. $AB = AC = R$. 35. *Вказівка*: див. задачу 31. 36. 1) 4 см; 2) 5 см. 37. *Вказівка*: доведіть, що $\triangle AOB$ рівнобедрений. 38. 60° . 39. 120° . 40. *Вказівка*: сполучіть дуги кінці хорд з центром і розгляньте утворений трикутник. 41. *Вказівка*: проведіть радіуси в кінці хорд та доведіть рівність утворених трикутників. 43. 20 см і 1 см. 44. Так. 45. *Вказівка*: доведіть, що MO і NO — бісектриси внутрішніх кутів. 46. 90° . 47. 60° . 48. *Вказівка*: скористайтеся означенням бісектриси кута. 49. *Вказівка*: пряма, що перпендикулярна до хорди кола і ділить її навпіл, проходить через центр кола. 50. *Вказівка*: доведіть, що центр кола лежить на бісектрисі кута між дотичними.

§ 18

Коло (мал. 358), бісектриса кута (мал. 359), серединний перпендикуляр (мал. 360). 5. 1) Ні; 2) ні; 3) ні; 4) так; 5) ні. 6. Ні. 7. Перше. 8. Ні. 9. Така точка рівновіддалена від сторін трикутника. 10. Ні. 11. Тому, що на промені є точки, які задовольняють властивості. 12. Така точка рівновіддалена від вершин трикутника. 13. Коло з радіусом R . 14. Коло радіуса $R + r$, центр якого міститься у центрі даного кола. 15. *Вказівка*: проведіть радіуси в точки дотику та доведіть рівність утворених трикутників. 16. Це — точка перетину бісектрис трикутника. 17. Дві прямі, що містять бісектриси кутів між даними прямими. 18. Дві прямі, що містять бісектриси кутів між даними прямими. 19. *Вказівка*: проведіть радіуси з точок A і B . 20. Серединний перпендикуляр до відрізка AB без точки, що є серединою відрізка AB . 21. Точка перетину серединних перпендикулярів. 22. Пряма, паралельна даним прямим. 23. Дві прямі, паралельні даній прямій і віддалені

від неї на m . **24.** Ні. **25.** Дві прями, які паралельні даній прямій і знаходяться від неї на відстані R . **26.** Коло радіуса a з центром B без двох точок, що лежать на прямій AB на відстані a від точки B . **27.** Серединний перпендикуляр до відрізка, що сполучає центри даних кіл. **28.** Пряма, яка перпендикулярна до прямої a і перетинає її в точці A . **29.** Один розв'язок, якщо серединний перпендикуляр до MN паралельний одній із сторін кута або збігається з бісектрисою кута ABC . Два розв'язки — в усіх інших випадках. **30.** Дві паралельні прями, які знаходяться на відстані h від даної прямої. **31.** Дві прями, паралельні даній прямій, якщо довжина хорди менша від $2R$; дана пряма, якщо довжина хорди дорівнює $2R$; такого геометричного місця точок не існує, якщо довжина хорди більша за $2R$. **32. Вказівка:** скористайтеся властивістю серединного перпендикуляра до відрізка. **33. Вказівка:** скористайтеся властивістю серединного перпендикуляра до відрізка.

§ 19

1. Мал. 372. **2.** Мал. 375. **3.** У гострокутному трикутнику всередині нього, у прямокутному — на середині гіпотенузи, у тупокутному — зовні трикутника. **5.** У точці перетину серединних перпендикулярів до сторін трикутника ABC . **6.** 1) Безліч; 2) безліч; 3) одне. **8.** Так. **9.** 1) 1 см; 2) 18 мм; 3) 4,5 дм. **10.** 10 см. **11.** 1) $35^\circ, 35^\circ, 25^\circ$; 2) $20^\circ, 20^\circ, 20^\circ$; 3) $30^\circ, 30^\circ, 15^\circ$; 4) $15^\circ, 15^\circ, 60^\circ$. **12.** 1) $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$; 2) $40^\circ, 40^\circ, 100^\circ$; 3) $60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$; 4) $30^\circ, 30^\circ, 120^\circ$. **13.** 1 : 2. **14. Вказівка:** див. задачу на стор. 145. **15.** 1) 8 см; 2) 16 см; 3) 24 см; 4) $\frac{2h}{3}$ см. **16.** 1) 3 см; 2) 6 см; 3) 12 см; 4) $\frac{h}{3}$ см. **17.** Якщо трикутник прямокутний. **18.** Так, якщо один із кутів дорівнює 60° . **19.** $35^\circ, 55^\circ, 90^\circ$. **20.** 6 см. **21. Вказівка:** доведіть, що бісектриса, проведена з вершини B трикутника, лежить на серединному перпендикулярі до основи AC . **22.** 4 см. **23. Вказівка:** див. задачу 21. **24.** 40 см. **25.** 34 см. **26.** 11 см, 10 см, 9 см. **27. Вказівка:** доведіть, що $\triangle CMO = \triangle CNO$ і вони є рівнобедреними. **28.** 1) 24 см; 2) 30 см; 3) 40 см; 4) 56 см. **30. Вказівка:** див. задачу 27. **31.** 1) 2 см; 2) 0,9 дм; 3) 0,04 м. **32.** $38^\circ, 52^\circ$. **33. Вказівка:** див. задачу 31 на стор. 136. **34. Вказівка:** див. задачу 31 на стор. 136. **35.** a . **36.** $P_1 + P_2 + P_3$. **37. Вказівка:** найменшу довжину буде мати маршрут, який не проходить за найбільшою стороною $\triangle ABC$.

§ 20

1. 5, 6, 9. **4. Вказівка:** див. задачу 1 на стор. 151. **5. Вказівка:** побудуйте трикутник за трьома сторонами a, b, b . **6. Вказівка:** побудуйте кут, що дорівнює даному. На сторонах кута відкладіть дані відрізки. **7. Вказівка:** див. задачу 6. **8. Вказівка:** побудуйте кут, рівний одному з даних кутів; на його стороні відкладіть від вершини відрізок, рівний даному; другий з даних кутів побудуйте

так, щоб його вершина містилася у другому кінці відрізка. **9. Вказівка:** див. задачу 8. **10. Вказівка:** зовнішній кут при вершині тупого кута трикутника є гострим. **14. Вказівка:** поділіть одну сторону навпіл і з'єднайте точку поділу з протилежною вершиною трикутника. **15. Вказівка:** нехай l — деяка пряма. З деякої точки проведіть пряму, що перпендикулярна до прямої l . **16. Вказівка:** через вершину проведіть пряму, перпендикулярну до протилежної сторони трикутника. **17. Вказівка:** спочатку від довільної точки C на прямій відкладіть рівні відрізки довжиною a . **18. Вказівка:** для випадку $\frac{1}{4}$: проведіть бісектрису даного кута — отримаєте $\frac{1}{2}$ даного кута. Половину кута поділіть ще раз навпіл, провівши бісектрису. **19. Вказівка:** від сторони даного кута відкладіть кут, що дорівнює даному. **20. Вказівка:** через дану точку проведіть пряму й оберіть на ній іншу довільну точку. У цій точці міститиметься вершина шуканого кута. **21. Вказівка:** поділіть відрізок навпіл, отриману частину відрізка поділіть ще раз навпіл — одержите $\frac{1}{4}$ частину відрізка. **22. Вказівка:** від одного з кінців відрізка відкладіть інший відрізок, рівний даному. **23. Вказівка:** шукана пряма — серединний перпендикуляр до відрізка BC . Задача не завжди має розв'язок. **24. Вказівка:** побудуйте прямий кут, на його сторонах відкладіть дані відрізки. **25. Вказівка:** див. задачу 8. **26. Вказівка:** доведіть, що $\triangle ABN = \triangle ACM$ за першою ознакою, $\triangle CON = \triangle BOM$ за другою ознакою, $\triangle ACO = \triangle ABO$ за третьою ознакою. **27. Вказівка:** побудуйте бісектрису кута AOB , а потім пряму, яка перпендикулярна до цієї бісектриси і проходить через точку O . **28. Вказівка:** нехай точки A і B — населені пункти, пряма l — берег каналу, точка O — основа перпендикуляра, проведеного з точки A до прямої l . Відкладіть на продовженні відрізка AO відрізок $AO_1 = AO$ і знайдіть точку перетину прямих A_1B і l .

§ 21

1. Так. **2.** Бісектриса кута і коло (мал. 401); бісектриса кута і серединний перпендикуляр (мал. 402); коло і серединний перпендикуляр (мал. 403). **3. Вказівка:** трикутник BDE — допоміжний. Вершини A і C одержимо, відклавши з обох боків від точки E відрізки довжиною $\frac{1}{2}b$. **4. Вказівка:** побудуйте допоміжний прямокутний трикутник з гіпотенузою c і катетом h . **5. Вказівка:** побудуйте допоміжний трикутник ABD за трьома сторонами: $a, m, \frac{1}{2}a$. **6. Вказівка:** побудуйте допоміжний прямокутний трикутник ADC за кутом $\frac{1}{2}\alpha$ і сторонами l і b .

7. *Вказівка:* побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетами h і $\frac{1}{2}a$.
8. *Вказівка:* побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом h і прилеглим гострим кутом $\frac{1}{2}\alpha$.
9. *Вказівка:* побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом h і гіпотенузою b .
10. *Вказівка:* побудуйте допоміжний трикутник за двома сторонами a і m та кутом між ними α .
11. *Вказівка:* побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом h і гіпотенузою b .
12. *Вказівка:* побудуйте допоміжний прямокутний трикутник за катетом h і гіпотенузою l .
14. *Вказівка:* спочатку побудуйте коло радіуса R і його хорду b .
15. *Вказівка:* побудуйте коло радіуса R і його хорду a . Серединний перпендикуляр до цієї хорди перетинає коло у вершині шуканого трикутника.
16. *Вказівка:* побудуйте коло радіуса R і проведіть коло радіуса b з центром у деякій точці даного кола.
17. *Вказівка:* побудуйте коло радіуса R і його хорду a . Діаметр, що має спільний кінець з побудованою хордою, є гіпотенузою шуканого трикутника.
18. *Вказівка:* побудуйте коло радіуса R і його хорду a . Відкладіть кут α від даної хорди. Сторона кута перетинає коло у вершині трикутника.
19. *Вказівка:* побудуйте коло радіуса R та дві хорди a і b , що мають спільну точку на побудованому колі.
20. *Вказівка:* шукана точка є точкою перетину прямої a із серединним перпендикуляром до відрізка AB .
21. Задача може мати або 1, або 2 розв'язки, або не мати розв'язків.
22. *Вказівка:* шукана точка є точкою перетину даної прямої з бісектрисою даного кута.
23. *Вказівка:* шукана точка є точкою перетину даного кола з бісектрисою даного кута. Задача може мати або 1, або 2 розв'язки, або не мати розв'язків.
24. *Вказівка:* задача може мати або 1, або 2, або безліч розв'язків.
25. 0, 1, 2.
26. *Вказівка:* шукана точка є точкою перетину кола радіуса d з центром у точці B із заданим колом.
27. *Вказівка:* шукана точка є точкою перетину серединного перпендикуляра до відрізка MK з бісектрисою кута ABC .
28. *Вказівка:* геометричним місцем точок, які лежать на даній відстані від даної прямої, є дві прямі, паралельні даній прямій і розміщені на даній відстані від неї.
29. *Вказівка:* шукана точка є точкою перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB з прямими, які паралельні прямій a і розміщені на відстані d від неї.
30. *Вказівка:* див. задачі 24, 28.
31. 0, 1, 2, 3, 4.
32. *Вказівка:* центр кола є точкою перетину серединного перпендикуляра до відрізка AB із прямою, що проходить через точку A перпендикулярно до прямої a .
33. *Вказівка:* центр кола є точкою перетину прямих, які паралельні прямій a і знаходяться на відстані R від неї, та кола з центром A і радіусом R .
34. *Вказівка:* центр кола є точкою перетину бісектриси кута ABC з перпендикуляром, проведеним з точки D до сторони кута.
35. *Вказівка:* центр кола є точкою перетину прямої a із серединним перпендикуляром до відрізка AB .
36. *Вказівка:* центр кола є точкою перетину кола радіуса d з центром у точці M і прямої, яка паралельна даним прямим і віддалена від них на відстань, що дорівнює половині відстані між даними паралельними

прямими. **38. Вказівка:** вершина трикутника, з якої проведено висоту h , є точкою перетину однієї зі сторін даного кута α і геометричного місця точок, розміщених на відстані h від прямої, що містить другу сторону цього кута. **39. Вказівка:** точка A є точкою перетину серединного перпендикуляра до сторони BD трикутника BDC та сторони CD . **40. Вказівка:** побудувати допоміжний трикутник за двома сторонами c і $a + b$ та кутом між ними α . Шукана вершина лежить на перетині сторони $a + b$ допоміжного трикутника із середнім перпендикуляром до його третьої сторони. **41. Вказівка:** побудуйте допоміжний трикутник за двома сторонами c і $a + b$ та кутом 45° , який лежить проти сторони c . **42. Вказівка:** див. задачу 40. **43. Вказівка:** врахуйте, що автомагістралі перетинають умовну пряму річки (обидві під прямим кутом).

Повторення вивченого

2. Подивитись уздовж зрізу. 4. 1) Так; 2) ні. 5. 1) Ні; 2) так. 8. 4 см або 16 см. 9. 1) 4 см або 12 см; 2) 2 см або 6 см. 10. 1 км або 9 км. 11. 81. 12. 1) 21 м; 2) 16 м; 3) 2 м. 13. 1) 600 м; 2) 450 м. 15. Не досягли. 17. Колоди довжиною 3 м. 18. **Вказівка:** спочатку виміряйте невеликий стос аркушів (наприклад, висотою 1 см) і підрахуйте кількість аркушів у ньому. Потім виміряйте висоту даного стосу і знайдіть кількість аркушів у ньому. 19. Намотайте дрот на лінійку так, щоб сусідні витки дроту були щільно притиснуті один до одного. Тоді, поділивши ширину отриманого шару на кількість витків, дістанете товщину одного витка, яка і буде діаметром дроту. 22. **Вказівка:** перегніть кусок тканини навпіл, потім одну з половинок перегніть навпіл ще раз і, нарешті, ту четвертинку, яка ближче до середини, знову перегніть навпіл. 23. 1) Ні; 2) так. 24. Прикладіть до кута лінійку. 26. Обидва. 27. 1) 120° ; 2) 60° . 28. 5. 29. **Вказівка:** з вершини кута проведіть перпендикулярний промінь з того боку, де відкладено рівні кути. 30. Зменшуватиметься від 180° до 0° . 31. 1) Так; 2) ні. 32. 1) Так; 2) так, зокрема дві з трьох сторін. 33. Ні. **Вказівка:** скористайтесь аксіомою паралельних прямих. 34. **Вказівка:** спочатку обґрунтуйте, що $a \parallel b$. Потім скористайтесь методом доведення від супротивного. 35. 1) 4; 2) 4; 3) 8. 36. Січна перпендикулярна до паралельних прямих. 37. Так. 38. 60° . 40. Якщо AM — бісектриса кута A . 41. **Вказівка:** скористайтесь ознакою паралельності прямих. 42. **Вказівка:** проведіть на однакових відстанях (рівних ширині лінійки) від сторін кута паралельні їм прямі та знайдіть точку їх перетину. 46. 1), 3), 5). 47. Властивості: 2), 4), 6); ознаки: 1), 3), 5). 48. 4; 5; 6; $n + 1$. 49. 1) Збільшиться на 9 см; 2) збільшиться у 3 рази; 3) зменшиться в 1,5 рази; 4) зменшиться на 4,5 см. 50. 1) Збільшиться на 2 см; 2) збільшиться у 2 рази; 3) зменшиться у 4 рази; 4) зменшиться на 0,9 см. 51. 2 см. 52. 15 см. 53. **Вказівка:** скористайтесь нерівністю трикутника. 57. Прямокутний трикутник. 58. Не можна. 59. 1) Тупокутний; 2) прямокутний; 3) гострокутний.

60. $83^\circ, 77^\circ, 20^\circ$. 61. 1) Ні; 2) ні. 62. Рівносторонньому. 63. $60^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 120^\circ$. 64. 60° . 65. 25° . 66. 3,5 см. 67. 71° . 68. CD . 69. 18 см. 70. 10 см, 10 см, 10 см. 71. Рівнобедрений. 72. *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівнобедреного трикутника. 74. 1) Більший за 45° , але менший від 90° ; 2) 45° ; 3) менший від 45° . 75. *Вказівка*: від вершини прямого кута відкладіть уздовж дошки відстань, рівну її ширині. Одержану точку сполучіть з вершиною протилежного прямого кута дошки. 78. 2) 2; 3) m . 81. 14 см. 83. 7,5 см. 85. 1) $55^\circ, 35^\circ$; 2) $60^\circ, 30^\circ$; 3) $55^\circ, 35^\circ$. 86. 1) 5° ; 2) 5° ; 3) 10° . 87. 2α . 88. 1) 60° ; 2) 90° . 89. 1) 110° ; 2) 55° ; 3) $90^\circ + \alpha/2, 45^\circ + \alpha/4$. 92. 1) Так; 2) ні; 3) ні. 94. 1) $\triangle AKM = \triangle A_1K_1M_1, \triangle BKL = \triangle B_1K_1L_1, \triangle CML = \triangle C_1M_1L_1, \triangle MKL = \triangle M_1K_1L_1$. 95. *Вказівка*: скористайтесь першою ознакою рівності трикутників. 96. 1) Одна; 2) три; 3) п'ятнадцять. 97. *Вказівка*: спочатку доведіть, що $AE \parallel BC$ і $AF \parallel BC$. 99. *Вказівка*: скористайтесь властивістю паралельних прямих. 100. *Вказівка*: скористайтесь першою ознакою рівності трикутників. Не зміниться. 102. *Вказівка*: скористайтесь ознакою рівнобедреного трикутника. 103. *Вказівка*: позначте на колі будь-які дві точки і за допомогою циркуля побудуйте точку, віддалену від кожної з цих двох точок на відстань 30 мм. 104. 1) 20 см; 2) 30 мм; 3) 7,6 дм. 105. 3 мм. 106. 1) 1 см або 2 см; 2) 1,5 см або 3,5 см. 107. 1) 1 см, 3 см; 2) 3 см або 5 см. 108. Найкоротший маршрут катера співпадає з хордою, перпендикулярною до радіуса, що проходить через острів. Якщо ж острів знаходиться у центрі кола, то всі маршрути матимуть однакову довжину. 109. Безліч. Немає. Найменший радіус тоді, коли центром кола є середина відрізка AB . 110. 1) Коло з радіусом $R/2$; 2) коло з радіусом $2R$. 112. За допомогою мотузки треба відкласти на сторонах кута від його вершини рівні відрізки; закріпити у кінцях відрізків кінці мотузки і натягнути її, тримаючи за середину. Тоді одержана точка лежатиме на бісектрисі кута. 113. Треба позначити кілками три точки на даній прямій так, щоб одна з точок була серединою відрізка з кінцями у двох інших точках; закріпити кінці мотузки у кінцях цього відрізка і натягнути мотузку, тримаючи її за середину; отримана точка і середина відрізка визначатимуть перпендикулярну пряму. 114. *Вказівка*: скористайтесь методом доведення від супротивного. 115. $0,5a$. 116. $110^\circ, 70^\circ$. 117. Центр кола лежить на середині гіпотенузи, а його радіус дорівнює половині гіпотенузи. 118. Дотикається до гіпотенузи і перетинає катети. 119. Може. Якщо в трикутнику є тупий кут, достатньо близький до 180° , то точка перетину серединних перпендикулярів буде як завгодно віддалена від його вершини. Тому і радіус кола, описаного навколо трикутника, може бути як завгодно великим. 122. Побудуйте два рівносторонні трикутники зі стороною, що дорівнює даному розхилу циркуля так, щоб одна з їх сторін лежала на променях AB і BA відповідно. 123. *Вказівка*: доведіть рівність трикутників ABO і CMO . 124. Нехай a і b сторони кута. З довільної точки A сторони a кута проведемо перпендикуляр AB до сторони b , а з точки B — перпендикуляр BC до сторони a . Шукана бісектриса буде перпендикулярною до бісектриси BM $\triangle ABC$ і проходитиме через середину BM .

- Аксиома 35
 — паралельних прямих 53
- Бісектриса кута 25
 — трикутника 76
- Бічна сторона рівнобедреного трикутника 75
- Важливі відрізки у трикутнику 76
- Вершина кута 22
 — трикутника 74
- Висота трикутника 76
- Відрізок 15
- Відрізка кінці 15
 — внутрішні точки 15
- Відрізки рівні 16
- Відстань від точки до прямої 47
 — між двома точками 17
- Властивість відкладання відрізків 17
 — дотичної 131
 — зовнішнього кута трикутника 84
 — — кутів 24
 — паралельних прямих 64
 — прямої 10
 — розміщення точок на прямій 10
- Властивості вимірювання відрізків 16
 — — кутів 24
 — рівнобедреного трикутника 105
- Геометричне місце точок 137
- Геометрія 9
- Гіпотенуза 75
- Градус 23
- Градусна міра кута 23
- Діаметр кола 130
- Доведення 34
 — від супротивного 46
- Дотична до кола 131
- Дуга кола 130
- Елементи трикутника 76
- Етапи розв'язування задач на побудову 150
- Катет 75
- Коло 130
 — , вписане в трикутник 144
 — , описане навколо трикутника 144
- Кола дотичні 132
- Круг 132
- Кут 22
 — гострий 24
 — між двома прямими 41
 — прямий 24
 — розгорнутий 23
 — трикутника зовнішній 83
 — тупий 24
- Кути вертикальні 40
 — відповідні 53
 — внутрішні односторонні 53
 — зовнішні односторонні 53
 — рівні 23
 — — різносторонні 53
 — суміжні 34
 — трикутника 74
 — трикутників відповідні 91

- Лінія центрів 132
- Медіана трикутника 76
- Метод геометричних місць 159
— допоміжного трикутника 158
- Міну́та 23
- Наслідок 53
- Нерівність трикутника 74
- Ознака 58
— паралельності прямих 58
— рівнобедреного трикутника 106
— рівності трикутників 96
- Ознаки рівності прямокутних трикутників 118 — 119
— — трикутників за двома сторонами і кутом між ними 96
— — трикутників за стороною і двома прилеглими кутами 97
— — трикутників за трьома сторонами 112
- Означення 11
- Основа перпендикуляра 47
— рівнобедреного трикутника 75
- Периметр трикутника 75
- Перпендикуляр до прямої 47
— серединний 140
- Планіметрія 9
- Площина 8
- Побудова бісектриси кута 152
— кута, рівного даному 152
— перпендикулярної прямої 154
— — — трьома сторонами 151
- Поділ відрізка навпіл 153
- Початок променя 10
- Промені доповняльні 11
- Промінь 10
— , що проходить між сторонами кута 23
- Пряма 9
- Прямі паралельні 52
— перпендикулярні 45
— , що перетинаються 10
— — — під кутом α 41
- Радіус кола 130
- Секунда 23
- Січна 53
— кола 131
- Спосіб накладання 90
- Сторони кута 22
— трикутника 74
— трикутників відповідні 91
- Теорема 34
— обернена 63 — 64
— про вертикальні кути 40
— — вписане коло 145
— — єдиність перпендикулярної прямої 46
— — описане коло 144
— — суму кутів трикутника 83
— — — суміжних кутів 34
- Теореми умова і вимога 34
- Точка 8
— дотику 131
— лежить між точками 10

- лежить на прямій 9
- рівновіддалена 48

Точки лежать з одного боку 10

Трикутник 74

- гострокутний 75
- прямокутний 75
- рівнобедрений 75
- рівносторонній 75
- різносторонній 74
- тупокутний 75

Трикутники рівні 91

Фігури геометричні 8

- — на площині 8
- — просторові 8
- — рівні 91

Хорда кола 130

Центр кола 130

- — , вписаного у трикутник 145
- — , описаного навколо трикутника 145

Навчальне видання

*БУРДА Михайло Іванович,
ТАРАСЕНКОВА Ніна Анатоліївна*

ГЕОМЕТРІЯ

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Видано за рахунок державних коштів. Продаж заборонено

Редактори: *В. Кириченко, О. Попович*

Художній редактор *А. Віксенко*

Технічний редактор *Л. Аленіна*

Коректор *І. Урілова*

Комп'ютерне макетування

та підготовка до друку *Е. Авраменко*

Малюнки художників *О. Дядика, А. Лапушена, Л. Попової*

Фото: *Е. Авраменко, А. Віксенко, В. Соловйов, Є. Чекалін*

При оформленні обкладинки
використано картину Сальвадора Далі
«Явлення обличчя Афродити Кнідської у пейзажі».

Підписано до друку 30.05.2007. Формат 70x100 $\frac{1}{16}$. Папір офсет. Друк офсет.

Гарнітура Шкільна, Прагматика. Умов.-друк. арк. 16,9 + 0,33 форзац.

Обл.-вид. арк. 16,5 + 0,4 форзац. Наклад 152 100 прим. Зам. № 15/07

Видавництво «Зодіак-ЕКО».

0104, Київ-4, вул. Басейна, 1/2.

Свідоцтво про державну реєстрацію серія ДК № 155 від 22.08.2000 р.

Друкарня ТОВ «Торнадо»

61045, м. Харків, вул. Отакара Яроша, 18

ГРЕЦЬКИЙ АЛФАВІТ

Букви	Назви букв
Α α	Άλφα
Β β	Βέτα
Γ γ	Γάμα
Δ δ	Δέλτα
Ε ε	Έψιλον
Ζ ζ	Δζέτα
Η η	Έτα
Θ θ	Τέτα
Ι ι	Ίότα
Κ κ	Κάπα
Λ λ	Λάμβδα
Μ μ	Μι (мю)
Ν ν	Νι (ню)
Ξ ξ	Κσι
Ο ο	Όμικρον
Π π	Πι
Ρ ρ	Ρο
Σ σ	Σίγμα
Τ τ	Τάυ
Υ υ	Ίψилон
Φ φ	Φι
Χ χ	Χι
Ψ ψ	Пси
Ω ω	Ομέγα

ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Букви	Назви букв
A a	a
B b	бе
C c	це
D d	де
E e	е
F f	еф
G g	же
H h	аш
I i	i
J j	йот (жі)
K k	ка
L l	ель
M m	ем
N n	ен
O o	о
P p	пе
Q q	ку
R r	ер
S s	ес
T t	те
U u	у
V v	ве
W w	дубль-ве
X x	ікс
Y y	ігрек
Z z	зет

СУЧАСНІ МІРИ ДОВЖИНИ

$$1 \text{ см} = 10 \text{ мм}$$

$$1 \text{ дм} = 10 \text{ см} = 100 \text{ мм}$$

$$1 \text{ м} = 10 \text{ дм} = 100 \text{ см} = 1000 \text{ мм}$$

$$1 \text{ км} = 1000 \text{ м}$$

СТАРОВИННІ МІРИ ДОВЖИНИ

$$1 \text{ дюйм} \approx 2,5 \text{ см}$$

$$1 \text{ вершок} \approx 4,4 \text{ см}$$

$$1 \text{ п'ядь} \approx 18 \text{ см}$$

$$1 \text{ фут} \approx 30 \text{ см}$$

$$1 \text{ аршин} \approx 71 \text{ см}$$

$$1 \text{ верста} \approx 1 \text{ км } 67 \text{ м}$$

$$1 \text{ миля морська} \approx 1 \text{ км } 852 \text{ м}$$

$$1 \text{ миля географічна} \approx 7 \text{ км } 420 \text{ м}$$

Позначення, що використовуються в підручнику

a – пряма a

AB – пряма AB

AB – відрізок AB

AB – промінь AB з початком A

$A \in a$ – точка A належить прямій a

$A \notin a$ – точка A не належить прямій a

$a \parallel b$ – прямі a і b паралельні

$a \perp b$ – прямі a і b перпендикулярні

$\angle A$ – кут A

$\triangle ABC$ – трикутник ABC

m_a – медіана, проведена до сторони a трикутника

l_a – бісектриса, проведена до сторони a трикутника

h_a – висота, проведена до сторони a трикутника

$F_1 = F_2$ – фігури F_1 і F_2 рівні

P – периметр

$ГМТ$ – геометричне місце точок