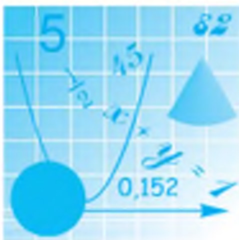
Алгебра

Ю.І. Мальований
Г.М. Литвиненко
Г.М. Бойко

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх
навчальних закладів



ТЕРНОПІЛЬ
НАВЧАЛЬНА КНИГА — БОГДАН
2015

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72
М21

Рецензенти:
доцент кафедри математики і методики викладання математики Тернопільського національного педагогічного університету ім. В. Гнатюка
В.Д. Галан,
вчитель математики Червоноградської ЗОШ № 11, вчитель-методист
О.Г. Лапій

Мальований Ю.І.

М21 Алгебра : підручник для 7 кл. загальноосвітн. навч. закл. / Ю.І. Мальований, Г.М. Литвиненко, Г.М. Бойко. — Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2015. — 256 с : іл. + 1 електрон. опт. диск (CD). — Електрон. версія. — Режим доступу: http://www.bohdan-digital.com/edu.

ISBN 978-966-10-4110-2

Пропонований підручник відповідає програмі з алгебри для 7-го класу й передбачає готовність учнів до широкого і свідомого застосування математики. Цю орієнтацію забезпечують зміст курсу, характер викладення навчального матеріалу, добір ілюстрацій і приклади застосувань, запитання для перевірки знань, задачі і вправи на повторення, а також письмові роботи, призначені для самоконтролю.

Для учнів і вчителів загальноосвітніх навчальних закладів.

УДК 512(075.3)
ББК 22.14я72

Охороняється законом про авторське право.
Жодна частина цього видання не може бути відтворена в будь-якому вигляді без дозволу автора чи видавництва

© Мальований Ю.І., Литвиненко Г.М., Бойко Г.М., 2015
© Навчальна книга – Богдан, оригінал-макет, 2015

ISBN 978-966-10-4110-2

Піктограмою у підручнику позначено ті його складові, які можна відкрити у pdf-файлі або скориставшись CD, що входить у комплект.

У зв'язку з великим обсягом електронної складової підручника у pdf-файлі активною є тільки її частина. Для завантаження всіх матеріалів треба перейти за посиланням:

http://www.bohdan-digital.com/edu.

*Алгебра щедра, вона часто дає більше,
ніж у неї просять.*

**Ж. Д'Аламбер,
французький математик**

СЛОВО ДО УЧНІВ

Дорогі семикласники!

Перед вами підручник, за яким вам доведеться вивчати новий навчальний предмет з курсу математики — *алгебру*. До цього часу ви мали справу в основному з обчисленнями, які виконували з конкретними числами. Ви ознайомилися з правилами і прийомами таких обчислень, навчилися виконувати чотири математичні дії (операції) з цілими і дробовими числами. Ці та інші відомості, що стосуються чисел, вивчає галузь математики, яка називається *арифметикою*.

На відміну від арифметики, в алгебрі числа записують не лише за допомогою цифр, але в багатьох випадках позначають буквами. Алгебра вивчає правила перетворення виразів, складених із чисел, букв, знаків математичних дій. Вивчаючи алгебру, ви ознайомитеся з новими математичними операціями, а також поняттями, без яких не можна уявити не лише математики, але й більшості наук, навіть, здавалося б, далеких від неї. Протягом усієї історії становлення і розвитку алгебри як самостійної галузі математики важливим предметом її вивчення були рівняння. Вам уже відомі найпростіші рівняння, і ви вмієте їх розв'язувати. У процесі вивчення алгебри ваші знання про рівняння значно розширяться. Ви ознайомитеся з багатьма новими видами рівнянь і способами їх розв'язування, дізнаєтесь багато цікавого про функцію як могутній інструмент опису і дослідження реальних процесів навколишнього світу.

Отже, попереду у вас захоплююча подорож у світ алгебри. Сподіваємось, що здолати всі труднощі цієї подорожі вам допоможе підручник. Яким він буде помічником — добрим чи не дуже — залежить і від вас. Ось декілька порад щодо роботи з ним.

Ніколи не намагайтеся виконувати вправи, не ознайомившись із теоретичним матеріалом, поданим у відповідному пункті підручника.

Щоб привернути вашу увагу до особливо важливих положень, їх виділено відмінним від звичайного шрифтом. Означення та властивості, які потрібно запам'ятати, виділено **напівжирним** шрифтом і позначено . Основні формули записано на кольоровій плашці. Послідовність виконання певних дій, перетворення виразів, розв'язування задач надруковано *курсивом*. Курсивом виділено й окремі терміни, які зустрічаються вперше.

Для зручності вивчення навчальний матеріал підручника розподілено за трьома розділами. Вони містять параграфи, які розбито на пункти, а ті, у свою чергу, — на підпункти. Кожна з цих складових частин має заголовок і відповідний порядковий номер. Зокрема, номер підпункту позначено цифрою всередині кружечка.

Зосередити увагу на найсуттєвішому вам допоможуть відповідні запитання та завдання для самоперевірки, подані в кінці кожного пункту, а також основні вимоги щодо засвоєння змісту кожного розділу, які його завершують.

У тексті наведено приклади розв'язування ряду вправ із детальними поясненнями і зразками відповідних записів. У рубриці «Увага!» ви знайдете застереження від можливих помилок, яких нерідко припускаються школярі.

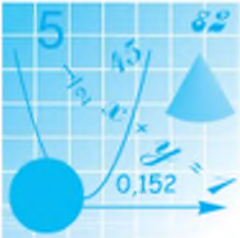
Виконуючи завдання для самоперевірки, ви зможете оцінити свої навчальні досягнення.

На рівень складності пропонованих задач і вправ указують умовні позначки: знак ° біля номера завдання позначає вправи, що відповідають початковому і середньому рівням; знак * — вправи високого рівня навчальних досягнень. Під номером без усіляких позначень уміщено вправи, що відповідають достатньому рівню.

У кінці підручника подано основні відомості з курсу математики 5–6-х класів, які допоможуть пригадати навчальний матеріал, потрібний для вивчення певного пункту.

Що ж, тепер залишається поринути у світ невідомого. Успіхів вам у його пізнанні!

Автори



Розділ I

ЦІЛІ ВИРАЗИ

§1. РАЦІОНАЛЬНІ АЛГЕБРАЇЧНІ ВИРАЗИ. ПЕРЕТВОРЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ

1.1. Вирази зі змінними. Раціональні алгебраїчні вирази

! Пригадайте

1. Наведіть приклади числового виразу і буквеного виразу.
2. Як знайти значення числового виразу?
3. Що необхідно знати, щоб знайти значення буквеного виразу?
4. До яких відомих вам формул входять букви? Поясніть їхній зміст.

① **Що таке алгебраїчний вираз.** У попередніх класах ви вже неодноразово зустрічалися з числовими виразами, тобто такими, де всі числа записані цифрами, а також із буквеними виразами, в яких одне або декілька чисел були позначені буквами. До числових належать, наприклад, вирази $6{,}8 - 3{,}5 \cdot 4$, $\frac{45-11}{2}$, $0{,}8 - 4 \cdot (13{,}1 + 14{,}9)$, $\left(\frac{2}{3} - 18\right) \cdot (7{,}5 + 12)$, а до буквених — $2m - 3n$, $0{,}5a^2$,

$2 \cdot (3x + y)$, $\dfrac{2b-1}{3}$. Одне число, записане цифрами (6; 384; –3,12 тощо) також уважають числовим виразом, а число, позначене буквою (m, x, c тощо), — буквеним виразом.

У буквеному виразі одна і та сама буква може позначати різні числа залежно від конкретних умов. Наприклад, у виразі $2(a + b)$, що є загальним записом правила обчислення периметра прямокутника зі сторонами a і b, букви a і b позначають будь-які додатні числа, якими можуть виражатися довжини відповідних сторін прямокутника. Тобто вони можуть змінювати свої значення. Тому їх називають ***змінними***, а цей та інші буквені вирази — ***виразами зі змінними*** (або зі змінною, якщо змінна — одна).

Числові вирази і вирази зі змінними, які містять лише арифметичні дії над числами, мають загальну назву ***раціональних алгебраїчних виразів***. Саме їх ми і будемо вивчати.

Якщо у вираз $a^2 - 5a + 4$ підставимо, наприклад, замість змінної a число 4 і виконаємо зазначені дії, то дістанемо числове значення, або коротше, ***значення*** цього виразу. Тобто,

якщо $a = 4$, то $a^2 - 5a + 4 = 4^2 - 5 \cdot 4 + 4 = 16 - 20 + 4 = 0$;

якщо $a = 2$, то $a^2 - 5a + 4 = 2^2 - 5 \cdot 2 + 4 = 4 - 10 + 4 = -2$;

якщо $a = -3$, то $a^2 - 5a + 4 = (-3)^2 - 5 \cdot (-3) + 4 = 9 + 15 + 4 = 28$, і т. д.

0, –2, 28 — усе це значення виразу $a^2 - 5a + 4$ за відповідних значень a.

Бачимо, що для різних значень a дістаємо різні значення даного виразу. Тому кажуть, що значення цього виразу залежить від значення a.

Приклад 1. Розглянемо вираз $(4x + 96) : 4 - x$ і знайдемо його значення для кількох різних значень x:

якщо $x = 0$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot 0 + 96) : 4 - 0 = 96 : 4 = 24$;

якщо $x = 2$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot 2 + 96) : 4 - 2 = 104 : 4 - 2 = 26 - 2 = 24$;

якщо $x = -3$, то $(4x + 96) : 4 - x = (4 \cdot (-3) + 96) : 4 - (-3) = (-12 + 96) : 4 + 3 = 84 : 4 + 3 = 21 + 3 = 24$.

Чи випадково числові значення виразу для різних значень x виявилися однаковими?

Для відповіді на це запитання спростимо даний вираз, скориставшись правилом ділення суми на число. Маємо:

$$(4x + 96) : 4 - x = 4x : 4 + 96 : 4 - x = x + 24 - x = 24.$$

Тепер очевидно, що яким би не було значення x, значення виразу дорівнюватиме 24. Тому кажуть, що значення виразу $(4x + 96) : 4 - x$ *не залежить* від значення x.

Приклад 2. Обчислюючи значення виразу $\frac{2b}{b-5}$, коли $b = 5$, дістанемо числовий вираз $\frac{2 \cdot 5}{5-5}$, який не має значення, бо знаменник дробу дорівнює нулю. У такому разі кажуть, що, коли $b = 5$, вираз $\frac{2b}{b-5}$ *не має смислу*.

Вираз $\frac{3a+4}{a^2-1}$ не має смислу, коли $a = 1$ та $a = -1$. Поясніть, чому.

Алгебраїчний вираз, який не містить ділення на змінну, називається ***цілим виразом***. Далі ми розглядатимемо перетворення цілих виразів.

② **Як назвати вираз.** Обчислюючи значення виразу $(a-2)(a+4)$, слід виконувати дії в такій послідовності:

1) віднімання в перших дужках;
2) додавання у других дужках;
3) множення першого результату на другий.

Назву результату дії, яку в процесі знаходження значення виразу виконують останньою, поширюють на назву самого виразу. У даному випадку остання дія — множення, її результатом є добуток. Тому даний вираз є добутком виразів $a - 2$ і $a + 4$. У свою чергу, $a - 2$ — це різниця чисел a і 2, а $a + 4$ — сума чисел a і 4. Отже, остаточна назва виразу $(a - 2)(a + 4)$ така: добуток різниці чисел a і 2 та суми чисел a і 4.

При обчисленні значення виразу $(140 + 10) : (52 - 22)$ останньою дією є ділення, а її результатом — частка, що й визначає назву даного виразу: частка суми чисел 140 і 10 та різниці чисел 52 і 22.

Вирази виду $m : n$, або $\frac{m}{n}$, називають ще відношенням m і n.

Отже, попередній вираз $(140 + 10) : (52 - 22)$ можна назвати ще й так: відношення суми чисел 140 і 10 та різниці чисел 52 і 22.

Вираз $3 \cdot 8$ є добутком чисел 3 і 8. Використовують також іншу назву цього виразу — потроєне число 8. Вираз $2ab$ називають подвоєним добутком чисел a і b; $\frac{7+4}{2}$ — півсумою чисел 7 і 4; $\frac{1}{3}\cdot(5\cdot10)$ — третиною добутку чисел 5 і 10.

Історична довідка

Перший крок до створення буквеної символіки зробив давньогрецький математик Діофант (III ст.), який використовував скорочений запис слів.

Франсуа Вієт

Основоположником застосування буквеної символіки в алгебрі вважають французького математика Франсуа Вієта (1540–1603). Його буквена символіка відрізняється від сучасної. Проте її використання дало змогу Вієту зробити важливі відкриття в математиці.

Спростив і узагальнив алгебраїчну символіку видатний французький учений Рене Декарт (1596–1650). Запровадженими ним позначеннями послуговуються і сучасні математики.

Запитання для самоперевірки

1. Які вирази належать до раціональних алгебраїчних? Наведіть приклади.

2. Як знайти значення раціонального алгебраїчного виразу, якщо він є: а) числовим; б) виразом зі змінною?
3. Який алгебраїчний вираз називають цілим? Наведіть приклади.
4. Як утворити назву алгебраїчного виразу? Поясніть на прикладах.

Задачі та вправи

Знайдіть значення виразів (1–2):

1°. а) $92 \cdot 5$; б) $103 \cdot 12$; в) $-98 \cdot 7$;
г) $27\frac{7}{8} \cdot 8$; ґ) $34{,}3 : 7$; д) $0{,}25 \cdot 7$.

2°. а) $1{,}5 \cdot \frac{2}{3} - 1\frac{5}{8}$; б) $2{,}6 + 3{,}4 : 1\frac{1}{16}$;
в) $2\frac{1}{49} \cdot 1\frac{1}{55} - 1{,}16 : 0{,}56$; г) $(51{,}8 + 44{,}3 + 48{,}2 - 24{,}3) : \frac{1}{3}$.

3. Чи правильні рівності:
а) $4\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \cdot \left(1\frac{7}{9} - \frac{4}{9}\right) = 5$; б) $5\frac{1}{7} - \frac{1}{7} \cdot \left(1\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) = 3$;
в) $90{,}9 : 3{,}03 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{6}\right) = 1$; г) $\left(\frac{2}{5} + 2\frac{3}{5}\right) \cdot (12{,}4 : 3{,}1) = 12$;
ґ) $\frac{12{,}5 - 4{,}1}{4} = 1{,}7 + 0{,}6$; д) $\frac{0{,}75 - 0{,}15}{2} = 0{,}15 + 0{,}25$?

4°. Значення якого з виразів дорівнює 4:
а) $5 - 3\frac{2}{7} + \frac{2}{7} \cdot (-8)$; б) $12 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2$;
в) $-3\frac{1}{3} \cdot 0{,}9 - \frac{2}{5} \cdot 2\frac{1}{2}$; г) $2\frac{2}{3} + 1\frac{3}{4} \cdot 8\frac{4}{21} - 13$?

5°. Знайдіть значення виразів:
а) $2k$, якщо $k = 103$; б) $2k + 1$, якщо $k = 103$;
в) $2k - 1$, якщо $k = 28$; г) $3k + 1$, якщо $k = 25$;
ґ) $3k - 1$, якщо $k = 29$; д) $5k + 1$, якщо $k = 35$;
е) vt, якщо $v = 48{,}5$, $t = 2{,}6$.

6. Складіть і запишіть числовий вираз, який не має смислу.

Знайдіть значення виразів (7–9):

7°. а) $3a + 7{,}4$, якщо $a = 12$; б) $0{,}5x + 14$, якщо $x = -3$;
в) $24{,}5 - 4m$, якщо $m = 6$; г) $-k + 17$, якщо $k = -7$.

8°. а) $14a + 15b$, якщо $a = 1{,}5$ і $b = 0{,}5$;
б) $15a - 14b$, якщо $a = 2{,}5$ і $b = 0{,}5$;
в) $x(0{,}5a - 4)$, якщо $a = 42$ і $x = 0{,}2$;
г) $84a + 12b$, якщо $a = 0{,}25$ і $b = -\frac{3}{4}$.

9. а) $2(a + b)$, якщо $a = 6{,}4$ см, $b = 0{,}045$ м;
б) $a + b + c$, якщо $a = 3{,}4$ см, $b = 0{,}4$ дм, $c = 0{,}05$ м;
в) ah, якщо $a = 0{,}028$ км, $h = 18{,}5$ м;
г) $4(a + b + c)$, якщо $a = 4{,}3$ дм, $b = 30$ см, $c = 0{,}27$ м.

10*. Запишіть вирази для обчислення периметрів фігур, зображених на рисунку 1. Яка з фігур має найбільшу площу?

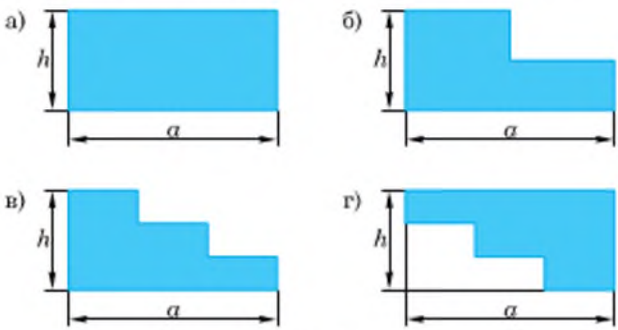


Рис. 1

11°. Нафтопровід перекачує 7 тис. т нафти за годину. Скільки тонн нафти можна перекачати нафтопроводом за 3 год? За 2,5 год? За t год? За добу? За 2 доби? За k діб?

12°. Для яких значень змінної y не мають смислу вирази:

а) $\frac{3}{y-5}$; б) $\frac{y}{y+3}$; в) $\frac{7}{y^2+1}$; г) $\frac{13y}{6y-4}$; ґ) $\frac{y+5}{2y}$?

13*. Знайдіть, якщо це можливо, пару значень змінних a і b, для яких не мають смислу вирази:

а) $\frac{17}{a-b}$; б) $\frac{5}{a+b}$; в) $\frac{a^2}{a^2+b^2}$; г) $\frac{a+b}{a^2+b^2+4}$.

14. Чи може значення виразу $-2x$ бути додатним числом? Якщо може, то наведіть приклади.

15. Чи може вираз $1 + a^2$ набувати від'ємних значень? Відповідь поясніть. Укажіть найменше значення цього виразу.

16*. Задумайте ціле число, помножте його на 3, від одержаного результату відніміть 27, різницю поділіть на 3 і від частки відніміть задумане число. Яке число ви дістали? Доведіть, що одержаний результат не залежить від задуманого числа.

17. Заповніть таблицю (рух рівномірний прямолінійний):

Шлях, км	200	s	s	s		
Швидкість, км/год			50	v	60	v
Час, год	4	t			5	10

18. Заповніть таблицю:

Урожайність, ц з 1 га	4,1	P	25	P	
Площа ділянки, га	8,5	8			6,5
Валовий збір урожаю, ц			500	m	m

Запишіть вирази для розв'язування задач (19–22):

19. Зошит коштує a коп., ручка — вдвічі дорожча. Скільки коштують п'ять зошитів і три ручки?

20. Учні посадили x саджанців дуба, саджанців сосни — в 1,4 разу більше, а саджанців клена — на 80 штук менше, ніж саджанців сосни. Скільки саджанців сосни і клена посадили учні?

21. Турист ішов 5 год зі швидкістю a км/год і 3 год зі швидкістю b км/год. Яку відстань подолав турист?

22. Яку відстань пройде моторний човен проти течії за 2,4 год, якщо власна його швидкість 7,5 км/год, а швидкість течії x км/год?

23. Із двох населених пунктів A і B вирушають одночасно назустріч один одному пішохід та велосипедист і зустрічаються через t год. Складіть вираз для визначення відстані між цими населеними пунктами, якщо швидкість пішохода 5 км/год, а швидкість велосипедиста 12 км/год. Знайдіть цю відстань, якщо: а) $t = 2{,}5$ год; б) $t = 4$ год.

24. Периметр прямокутника 48 дм, основа a дм. Складіть вираз для обчислення площі прямокутника. Знайдіть площу прямокутника, якщо: а) $a = 7$ дм; б) $a = 11{,}5$ дм; в) $a = 14$ дм.

25. Запишіть чотири натуральні числа, кратні числу 3. Подайте кожне з них у вигляді добутку числа 3 на відповідне натуральне число. Запишіть вираз зі змінною, який позначає натуральне число, що ділиться на 3 без остачі.

26*. Складіть за рисунком 2 вираз для обчислення довжини відрізка CD.

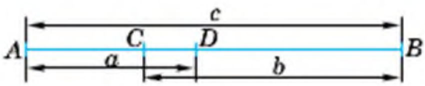


Рис. 2

Запишіть у вигляді виразу і обчисліть (27–29):

27°. а) Суму чисел 27,29 і 72,71;

б) різницю чисел 68,1 і –31,3;

в) добуток чисел $1\frac{3}{8}$ і $-1\frac{3}{5}$;

г) частку чисел 0,01 і –0,002;

ґ) подвоєну суму чисел 37,29 і 62,71;

д) потроєну різницю чисел 68,1 і –41,9;

е) подвоєний добуток чисел 7,5 і 0,4;

є) третину суми чисел 5,8 і 3,5;

ж) піврізницю чисел 9 і 15.

28°. а) Суму чисел m і n, якщо $m = 4\frac{1}{4}$, $n = -5,3$;

б) різницю чисел m і n, якщо $m = 0,6$, $n = -2\frac{2}{5}$,

в) подвоєну суму чисел m і n, якщо $m = 10,7$, $n = 5,3$.

29*. а) Різницю частки чисел $\frac{11}{15}$ і $3\frac{2}{3}$ та числа 0,5, зменшену на число, протилежне числу –0,3;

б) суму добутку чисел $5\frac{1}{3}$ і 0,75 та числа 2,4, збільшену на число, протилежне числу –0,6.

30°. Від суми чисел $-15\frac{1}{4}$ і $7\frac{3}{4}$ відніміть 0,25.

31°. Від добутку чисел $3\frac{1}{2}$ і $-5\frac{3}{4}$ відніміть суму чисел 10,7 і –3,3.

32. На скільки:

а) різниця чисел 65,71 і – 24,3 більша від їх суми;

б) добуток чисел 14,6 і –1,5 менший від суми чисел 47,89 і –28,7?

33*. Що більше і на скільки: різниця числа 2 та добутку чисел 0,25 і $7\frac{1}{5}$, поділена на $1\frac{2}{3}$, чи сума числа 3 та добутку чисел $-2\frac{1}{2}$ і 0,4, помножена на $\frac{1}{3}$?

1.2. Тотожно рівні вирази. Тотожності

① **Що таке тотожність.** Два числові вирази, сполучені знаком «=», утворюють ***числову рівність***.

Якщо значення лівої і правої частин рівності одне й те саме число, то рівність називають ***правильною***.

Наприклад, рівність $(56 + 24) \cdot 2 = 160$ правильна, оскільки $(56 + 24) \cdot 2 = 80 \cdot 2 = 160$. Правильною є також рівність $3 \cdot (15 - 9) = (41 - 5) : 2$, бо $3 \cdot (15 - 9) = 3 \cdot 6 = 18$ і $(41 - 5) : 2 = 36 : 2 = 18$.

Приклад 1. Розглянемо три вирази з однією і тією самою змінною: $2x + 2$, $0,5 + 0,5x$, $2(x + 3) - 4$.

Знайдемо їхні значення, якщо $x = 2$. Маємо:

$$2x + 2 = 2 \cdot 2 + 2 = 6;$$
$$0,5 + 0,5x = 0,5 + 0,5 \cdot 2 = 1,5;$$
$$2(x + 3) - 4 = 2 \cdot (2 + 3) - 4 = 2 \cdot 5 - 4 = 6.$$

Числа 6; 1,5; 6 називають ***відповідними значеннями*** даних виразів.

Знайдемо відповідні значення даних виразів для кількох інших значень змінної x і порівняємо їх між собою. Для зручності результати обчислень занесемо до таблиці:

x	1	0	–1	–2	–3
$2x + 2$	4	2	0	–2	–4
$0,5 + 0,5x$	1	0,5	0	–0,5	–1
$2(x + 3) - 4$	4	2	0	–2	–4

Як бачимо, відповідні значення всіх виразів рівні між собою, якщо $x = -1$. Відповідні значення першого і третього виразів рівні між собою для всіх наведених у таблиці значень x.

Цікаво, чи будуть вони рівними і для інших значень змінної x? Щоб відповісти на це запитання, перетворимо третій вираз, скориставшись розподільним законом множення. Маємо:

$$2(x + 3) - 4 = 2x + 6 - 4 = 2x + 2.$$

Отже, рівність $2(x + 3) - 4 = 2x + 2$ правильна для будь-яких значень змінної x. Таким чином, відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному при всіх значеннях змінної x. Про такі вирази кажуть, що вони тотожно рівні, або тотожні.

Вирази називають тотожно рівними, якщо всі їхні відповідні значення дорівнюють одне одному.

Два тотожно рівні вирази, сполучені знаком рівності, називають ***тотожністю***.

Наприклад, рівності $2(x + 3) - 4 = 2x + 2$, $a + b = b + a$, $ab = ba$, $(a + b) + c = a + (b + c)$ є тотожностями.

Очевидно, які б значення змінних не підставляти в тотожність, дістанемо правильну рівність.

Тотожність — це рівність, правильна за всіх значень змінних, що входять до неї.

Заміну виразу тотожно рівним йому називають ***тотожним перетворенням виразу***.

Тотожні перетворення виразів виконують на основі законів і властивостей арифметичних дій, правил тощо. Так, заміну виразу $k(a + b)$ на тотожно рівний йому вираз $ka + kb$ зроблено з використанням розподільного закону множення відносно додавання.

Тотожне перетворення виразу $3a - (a - 2b)$ можна виконати, послідовно застосувавши правила розкриття дужок і зведення подібних доданків. Маємо: $3a - (a - 2b) = 3a - a + 2b = 2a + 2b$.

② **Як довести тотожність.** Довести тотожність — означає встановити шляхом логічних міркувань, що дані два вирази тотожно рівні. Для цього один із виразів або обидва тотожно перетворюють так, щоб звести їх до однакового вигляду.

Приклад 2. Встановити тотожну рівність виразів $3x + 6$ і $1{,}5 \cdot (4 + 2x)$.

Розв'язання. Перетворимо другий вираз у тотожно рівний йому на основі розподільного закону множення:

$$1{,}5 \cdot (4 + 2x) = 6 + 3x.$$

За переставним законом додавання маємо: $6 + 3x = 3x + 6$.

Після цього тотожність виразів $3x + 6$ і $1{,}5 \cdot (4 + 2x)$ не викликає сумніву.

Приклад 3. Встановити тотожність виразів $(b + d)a + dc$ і $(a + c)d + ab$.

Розв'язання. Зведемо обидва вирази до однакового вигляду:

1) $(b + d)a + dc = ab + ad + dc$;

2) $(a + c)d + ab = ad + dc + ab = ab + ad + dc$.

Отже, $(b + d)a + dc = (a + c)d + ab$. Таким чином, дані вирази теж тотожні.

Завдання встановити тотожну рівність двох виразів може бути сформульоване інакше: *довести тотожність*. У цьому випадку процес перетворень залишається тим самим.

Приклад 4. Довести тотожність $2a + 5(7 + a) - 40 = 7a - 5$.

Доведення. $2a + 5(7 + a) - 40 = 2a + 35 + 5a - 40 = 7a - 5$.

Отже, $7a - 5 = 7a - 5$. Тотожність доведено.

Для доведення тотожностей можна використати ще й такий спосіб: записують різницю лівої та правої частин даної рівності і одержаний вираз спрощують. Якщо в результаті дістали нуль, то тотожність уважають доведеною. Доведіть таким способом попередню тотожність.

Тотожні перетворення виразів, тотожності та їх доведення лежать в основі курсу алгебри і постійно зустрічатимуться у процесі розв'язування задач і вправ.

УВАГА! Щоб довести тотожність двох виразів, недостатньо порівняти між собою лише кілька відповідних значень цих виразів і переконатися, що вони дорівнюють одне одному. Адже йдеться про рівність *усіх* відповідних значень виразів, що шляхом обчислень перевірити неможливо, бо таких значень безліч. Тому застосовують розглянуті вище способи доведення.

А от для того, щоб установити, що дані вирази не є тотожно рівними, достатньо назвати хоча б одне значення змінної, при якому відповідні значення їх не дорівнюють одне одному.

Запитання для самоперевірки

1. Які значення двох виразів називають відповідними?
2. Які вирази називають тотожно рівними (тотожними)?
3. Що таке тотожність? Наведіть приклади.
4. Що таке тотожне перетворення виразу?
5. Які способи доведення тотожності двох виразів ви знаєте?

Задачі та вправи

34°. Запишіть відомі вам тотожності, що виражають властивості арифметичних дій.

35°. Чому дані вирази тотожно рівні:

а) $3a + 2$ і $2 + 3a$; б) $3(x + 4) = 3x + 12$;

в) $a(2b) = 2ab$; г) $3 + (4 - 5x) = 7 - 5x$?

36°. Які вирази тотожно рівні:

а) $3(x + y)$ і $3x + 3y$; б) $5{,}7(x + y)$ і $5{,}7x + 5{,}7y$;

в) $4{,}8(a + b)$ і $4{,}8a + b$; г) $(a - b) \cdot 8 + a$ і $7a - 8b$;

ґ) $4(m - 3)$ і $4m - 3$; д) $1 - a + b$ і $1 - (a - b)$?

37. Доведіть тотожності:

а) $-5(4 + a) + 28 = 8 - 5a$; б) $-0{,}8(-2 + 0{,}75a) = 1{,}6 - 0{,}6a$;

в) $(x + 3{,}5) \cdot 4 - 3x = x + 14$; г) $4{,}2(x - 5) - 3{,}2x = x - 21$.

38. Заповніть таблицю:

x	0	1	–1	2	–2	2,5
$3(2x - 1) + 4$						
$6x + 1$						

Чи тотожні вирази $3(2x - 1) + 4$ і $6x + 1$? Відповідь обґрунтуйте.

39. Заповніть таблицю:

x	0	1	2	3	4	–1	–2	0,1
$\lvert x\rvert + 3$								
$x + 3$								

Чи тотожні вирази $\lvert x\rvert + 3$ і x + 3? Обґрунтуйте відповідь.

40. Складіть вирази для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 3, спочатку доповнивши фігуру до прямокутника, а потім розбивши її на два прямокутники. Доведіть тотожність утворених виразів.

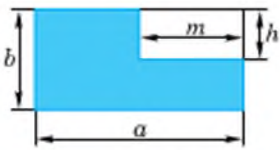


Рис. 3

41*. У тотожності $3x + 4x = 7x$ замініть змінну x виразом $a - 6$. Чи є тотожністю утворена рівність? Обґрунтуйте відповідь.

42*. У тотожності $2y + 8y = 10y$ замініть змінну y виразом $a - b$. Доведіть, що утворена рівність є тотожністю.

43. Доведіть, що значення виразів не залежить від a:

а) $6(3 - 2a) + 12a$; б) $-1{,}5(a - 8) + 3{,}5 \cdot \frac{3}{7}a$.

44*. Доведіть тотожність виразів:

а) $\frac{1}{2}mn - 0{,}5kn$ і $kn + \frac{1}{2}(m - k)n$;

б) $y(x - m) + m(y - n)$ і $xy - nm$.

45*. Запишіть замість «*» такий вираз, щоб утворилася тотожність:

а) $4x(m + 0{,}5n) - 2xm = *(m - n)$;

б) $*(x - y) = 3kx - 3ky$.

1.3. Степінь з натуральним показником

Пригадайте

1. За якими формулами обчислюють площу квадрата зі стороною a і об'єм куба з ребром b?
2. Як ви розумієте записи: a^2; a^3?
3. Обчисліть: 5^2; 2^3; $0{,}5^2$; 4^3.

① **Що таке степінь з натуральним показником.** Ви вже відновили в пам'яті, що $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$. Тобто в цих виразах числа 2 і 3 вказують відповідно на кількість множників a, з яких утворено добуток.

Аналогічно вважають, що вираз a^5 — це добуток п'яти множників a: $a^5 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$.

Відповідно добуток шести однакових множників b записують так: b^6. Отже, $b^6 = b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$.

У виразі a^5 число a називають ***основою степеня***, 5 — ***показником степеня***, а весь вираз a^5 — ***степенем***.

Читають вираз a^5 так: a в п'ятому степені або п'ятий степінь числа a.

Аналогічно: b^6 — шостий степінь числа b або b в шостому степені. Основою степеня тут є число b, а показником степеня число 6.

Степенем числа a з натуральним показником **n ($n \neq 1$) називають добуток n множників, кожний з яких дорівнює a:**

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}}.$$

В означенні обумовлено, що $n \neq 1$. Це природно, адже немає смислу говорити про добуток, що складається з одного множника.

Втім, домовилися першим степенем будь-якого числа вважати саме це число. Тобто $a^1 = a$. Показник степеня 1, як правило, у запису пропускають.

Нагадаємо, що другий степінь числа називають його *квадратом*, а третій — *кубом* цього числа.

УВАГА! Для правильного вживання терміна «степінь» не забувайте, що це іменник чоловічого роду.

Зазначимо, що основою степеня може бути будь-яке число або вираз.

Наприклад, $(-7{,}3)^3 = -7{,}3 \cdot (-7{,}3) \cdot (-7{,}3)$; $\left(\frac{4}{7}\right)^4 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7}$; $(6mn)^2 = 6mn \cdot 6mn$; $(x - 3y)^3 = (x - 3y) \cdot (x - 3y) \cdot (x - 3y)$.

Зверніть увагу на відмінність між виразами $(6mn)^3$ і $6mn^3$. У першому виразі показник степеня стосується всього добутку, що стоїть у дужках, а в другому — лише множника n. Тобто $(6mn)^3 = 6mn \cdot 6mn \cdot 6mn$, а $6mn^3 = 6m \cdot n \cdot n \cdot n$.

Корисно знати, що:

степінь додатного числа з будь-яким натуральним показником є число додатне;

степінь від'ємного числа з парним показником є додатним числом, а з непарним — від'ємним;

0 *у будь-якому степені з натуральним показником дорівнює* 0;

будь-який степінь 1 *дорівнює* 1.

Спробуйте обґрунтувати ці твердження самостійно.

Варто пам'ятати і таке правило: *щоб піднести до степеня дріб, треба піднести до цього степеня чисельник дробу і його знаменник та записати перший результат у чисельнику, а другий — у знаменнику нового дробу.*

Це правило випливає з означення степеня з натуральним показником і правила множення звичайних дробів. Зокрема $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$. Взагалі $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

② **Як правильно обчислювати.** Вам відомо, що додавання кількох рівних між собою чисел замінюють множенням, наприклад,

$$\underbrace{5+5+5+5}_{4\text{ рази}} = 5 \cdot 4.$$

Аналогічно, множення рівних між собою множників замінюють новою дією, яку називають ***піднесенням до степеня***.

Ви знаєте, що додавання і віднімання — це дії *першого ступеня*, множення і ділення — *другого ступеня*. Піднесення до степеня належить до дій *третього ступеня*. Під час обчислень і перетворення виразів спочатку виконують (з урахуванням дужок) дії третього ступеня, потім — другого і нарешті — першого, в тому порядку, як вони записані.

Наприклад, $3 \cdot (4^2 + 56) : 2^2 = 3 \cdot (16 + 56) : 4 = 3 \cdot 72 : 4 = 54$.

Піднесення числа до степеня за допомогою мікрокалькулятора замінюють дією множення.

Наприклад, $4{,}2^3$ можна обчислити за такою програмою:

4,2 $\boxed{\times}$ 4,2 $\boxed{\times}$ 4,2 $\boxed{=}$ 74,088, або 4,2 $\boxed{\times}$ $\boxed{=}$ 74,088, тобто після набору 4,2 натиснути клавішу $\boxed{\times}$, а потім двічі на $\boxed{=}$.

? Запитання для самоперевірки

1. Як ви розумієте запис: b^n, де n — натуральне число, відмінне від 1? Яку назву в цьому випадку мають b, n і b^n?
2. Який порядок виконання дій у процесі обчислення значення виразу $4 \cdot 3^2 - 8(6^3 + 7^2)$?

Задачі та вправи

Обчисліть значення виразів (46–47):

46°. а) 2^2, 4^2, 5^2, $0{,}1^2$, $0{,}1^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^2$, $\left(\frac{6}{7}\right)^2$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{3}{5}\right)^3$;

б) $(-2)^2$, $(-2)^3$, $(-3)^2$, $(-3)^3$, $(-0{,}5)^2$, $(-0{,}5)^3$, $(-0{,}6)^2$.

47. а) $1{,}5^2$, $2{,}5^2$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^2$, $\left(2\frac{1}{3}\right)^2$, $\left(1\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(2\frac{1}{3}\right)^3$, $\left(1\frac{2}{5}\right)^2$, $\left(1\frac{2}{5}\right)^3$;

б) 8^2, $(-8)^2$, 11^2, $(-11)^2$, $1{,}2^2$, $(-1{,}2)^2$, $2{,}1^2$, -3^2, $-0{,}3^2$.

48°. Обчисліть площу квадрата зі стороною:

а) $a = 5$ см; б) $a = 7\frac{1}{2}$ см; в) $a = 2,5$ дм; г) $a = 3\frac{1}{4}$ дм.

49°. Обчисліть об'єм куба з ребром:

а) $a = 4$ см; б) $a = 1,5$ дм; в) $a = 2\frac{1}{2}$ дм; г) $a = 3$ м.

50°. Запишіть вирази у вигляді степеня:

а) $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$;

б) $2a \cdot 2a \cdot 2a \cdot 2a$;

в) $(x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y)$;

г) $4m^2n \cdot 4m^2n$.

51. Поясніть відмінність між виразами, записавши кожний із них у вигляді добутку без показника степеня:

а) $2a^4$ і $(2a)^4$; б) $3xy^2$ і $(3xy)^2$;

в) $5(m - n)^3$ і $(5(m - n))^3$; г) $2c^2d^2$ і $(2cd)^2$.

52. Випишіть вирази, які слід піднести до відповідного степеня:

а) $3b^5$; б) $5mn^3$; в) $(2xy)^4$; г) $(3b)^5$;

ґ) $4x^3y$; д) $0,1xy^2$; е) $(1,2x^3y)^2$; є) $(4x^2)^3$.

53. Серед даних виразів знайдіть ті, що є степенями, і запишіть їх:

а) $0,4a^2$; б) x^9; в) $25y^2$; г) $(-3x^2y)^4$;

ґ) $\frac{1}{27}$; д) x^2y^2; е) $(c - d)^3$; є) $(-a)^4$.

54°. Які з виразів є тотожними:

а) $(-a)^6$ і $-a^6$; б) $(-a)^3$ і $-a^3$;

в) $x - 2a$ і $-2a + x$; г) pp^3 і p^4?

55°. Серед даних виразів знайдіть тотожно рівні та запишіть їх:

а) $(-m)^7$; б) $(-a)^4$; в) $2a^2b^2$; г) $-m^7$; ґ) m^7;

д) $(2ab)^2$; е) a^4; є) $-a^4$; ж) $2ab^2$.

56°. Вкажіть порядок дій при обчисленні значень виразів:

а) $2 \cdot 3^4$; б) $(2 \cdot 3)^4$; в) $(10 - 2)^2$; г) $10^2 - 2^2$;

ґ) $7ab^4$; д) $(7ab)^4$; е) $2 \cdot (3 - 4)^2$; є) $(2 \cdot (3 - a))^2$.

57°. Обчисліть значення виразів:

а) $0,25 \cdot 2^2$; б) $(0,25 \cdot 2)^2$; в) $(-5)^2 \cdot (-2)^2$; г) $-5^2 \cdot (-2^2)$.

58°. Спростіть вирази:

а) $x \cdot x \cdot x + y \cdot y$; б) $a \cdot a - b \cdot b \cdot b$;

в) $m \cdot m + n \cdot n$; г) $c \cdot c \cdot c - p \cdot p$;

ґ) $r \cdot r + x \cdot x \cdot x$; д) $p \cdot p \cdot p + r \cdot r$.

59°. Запишіть вирази:

а) квадрат числа x;

б) квадрат суми чисел x і y;

в) різниця квадратів чисел x і y;

г) квадрат різниці чисел x і y;

ґ) куб числа a;

д) куб суми чисел a і b;

е) сума кубів чисел a і b;

є) різниця кубів чисел a і b.

60. Обчисліть:

а) суму квадратів чисел 3 і –2;

б) квадрат різниці чисел 25 і 8;

в) різницю куба числа –3 і квадрата числа 5;

г) суму куба числа –2 і різниці кубів чисел 4 і –1.

61. Значення якого з числових виразів дорівнює 5:

а) $(-1)^3 + 2^2 + 0{,}4 \cdot 3\frac{1}{3} - \frac{1}{3}$; б) $3^2 + 0{,}5 \cdot 2^3 - 2^3$;

в) $1\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3} + 1\frac{2}{5} + (-1)^7$; г) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(-5\frac{1}{2}\right) + 3 \cdot 2\frac{1}{2} + 2^2$?

62. Обчисліть:

а) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4^2 + 3$; б) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 3 \cdot (0{,}5)^2$;

в) $-(-5)^3 \cdot 0{,}5 + 10^2$; г) $-5 \cdot (-2)^3 + \frac{2}{3} \cdot (-6)^2$.

63. Чи тотожні вирази:

а) $-x^2$ і $(-x)^2$; б) $-x^3$ і $(-x)^3$;

в) $3(-x)^2$ і $3(-x^2)$; г) $4(-x)^3$ і $4x^2(-x)$?

64. Запишіть у вигляді степеня з основою 10 такі числа: 100; 1000; 100 000; 10 000 000.

65*. Куб, об'єм якого дорівнює 1 м^3, розрізали на кубічні сантиметри і розклали їх впритул в один ряд. Яку довжину матиме ряд (у сантиметрах)? Запишіть результат у вигляді степеня числа 10.

66*. Швидкість світла дорівнює 300 000 000 м/с. Запишіть це число з використанням степеня числа 10.

67*. Відстань від Землі до планети Нептун дорівнює 4,5 мільярда кілометрів. Запишіть значення цієї відстані, використавши степінь числа 10.

68*. У Київському інституті кібернетики створено суперкомп'ютер, який виконує 1 млрд операцій за 1 с. Запишіть за допомогою степеня числа 10, скільки операцій він виконає за 1 год; за 10 год.

69*. Назвіть порядок дій, які слід виконати у даних виразах, і запишіть назву кожного з них:

а) $\dfrac{a+b}{(a-b)^2}$; б) $(m+n)^3 - x^2$; в) $2(a^2 - b^2)$; г) $2x^2y + \dfrac{x}{y^2}$.

70*. Знайдіть x:

а) $x^4 = 81$; б) $x^3 = -8$; в) $x^2 = \dfrac{9}{16}$;

г) $2^x = 8$; ґ) $0{,}3^x = 0{,}027$; д) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^x = \dfrac{1}{25}$.

1.4. Властивості степеня з натуральним показником

① **Швидка лічба.** Спробуйте без калькулятора миттево обчислити добуток $128 \cdot 256$. На перший погляд, зробити це неможливо.

Тим часом, завдання не є таким безнадійним.

Запишемо перші п'ятнадцять натуральних чисел, а під кожним із них — відповідний степінь числа 2. Дістанемо таку таблицю:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16 384	32 768

Знайдемо добуток $128 \cdot 256$ на калькуляторі або письмово. Дістанемо 32768. Як бачимо, це число теж стоїть у рядку степенів числа 2, і йому відповідає показник степеня 15, тобто $32\,768 = 2^{15}$. У свою чергу, $128 = 2^7$, $256 = 2^8$. Помічаємо, що $15 = 7 + 8$. Отже, $2^7 \cdot 2^8 = 2^{7+8} = 2^{15}$.

Щоб обчислити добуток $32 \cdot 64$, знайдемо у верхньому рядку таблиці відповідні цим множникам показники степенів 5 і 6, додамо їх і під сумою 11 прочитаємо результат — 2048. Множення 32 на 64 звичайним способом показує, що результат дістали правильний.

Для обчислення частки $8192 : 512$ знайдемо різницю відповідних показників степенів: $13 - 9 = 4$. Під показником 4 шукаємо потрібний результат — 16. Перевірте правильність відповіді.

Обчисліть аналогічно: $8192 : 1024$; $16\,384 : 512$.

Ці обчислення виявилися можливими на основі властивостей степеня з натуральним показником, з якими ви зараз ознайомитесь. Зауважимо, що далі поряд зі словосполученням «степінь з натуральним показником» буде вживатися просто «степінь», що означатиме те саме поняття.

② Властивості степеня.

Властивість 1. **Добуток степенів однієї основи дорівнює степеню цієї самої основи, показник якого дорівнює сумі показників множників:**

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}.} \qquad (1)$$

Доведення. Скористаємось означенням степеня з натуральним показником. Маємо:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n \text{ разів}} = a^{m+n}.$$

На основі цієї властивості можна сформулювати таке правило: *щоб помножити степені однієї основи, треба показники степенів додати, а основу залишити ту саму.*

Наприклад: 1) $2^5 \cdot 2^9 = 2^{5+9} = 2^{14}$; 2) $b^{13} \cdot b^4 = b^{17}$.

Цю властивість називають ***основною властивістю степеня*** з натуральним показником. Вона має місце для трьох і більше степенів. Наприклад, $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{2+4+6} = 5^{12}$.

Властивість 2. **Частка степенів однієї основи дорівнює степеню цієї самої основи, показник якого дорівнює різниці показників діленого і дільника:**

$$\boxed{a^m : a^n = a^{m-n} \ (m > n,\ a \neq 0).} \qquad (2)$$

Доведення. Ви знаєте, як перевірити правильність виконання ділення. Для цього треба частку помножити на дільник. У результаті маємо дістати ділене. Скористаємось цим у даному випадку. Помножимо частку a^{m-n} на дільник a^n і результат знайдемо за основною властивістю степеня. Маємо:

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m.$$

Дістали ділене. Отже, $a^m : a^n = a^{m-n}$.

Зверніть увагу на застереження у формулюванні властивості 2: $m > n$ і $a \neq 0$. Вони не випадкові. Адже коли $m = n$ або $m < n$, тоді різниця $m - n$ не буде натуральним числом, а йдеться про степінь з натуральним показником; $a \neq 0$, бо на нуль ділити не можна.

Наприклад: 1) $6^9 : 6^7 = 6^{9-7} = 6^2$; 2) $\frac{c^{16}}{c^{12}} = c^4$.

З цієї властивості випливає правило:

щоб поділити степені однієї основи, треба від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника, а основу залишити ту саму.

Властивість 3. **Степінь добутку двох множників дорівнює добутку степенів множників:**

$$\boxed{(ab)^n = a^n \cdot b^n.} \qquad (3)$$

Доведення. Для перетворення виразу $(ab)^n$ скористаємося означенням степеня з натуральним показником, а також переставним і сполучним законами множення. Маємо:

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \ldots \cdot ab}_{n \text{ разів}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n \text{ разів}} = a^n \cdot b^n.$$

Ця властивість має місце і для добутку більше двох множників.

Отже, правило піднесення добутку до степеня з натуральним показником таке:

щоб піднести добуток до степеня, треба кожний множник піднести до цього степеня і записати добуток отриманих результатів.

Наприклад: 1) $(3 \cdot 4)^2 = 3^2 \cdot 4^2$; 2) $(3ab)^3 = 3^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = 27a^3b^3$.

Властивість 4. **Степінь степеня дорівнює степеню тієї самої основи, показник якого є добутком даних показників степенів:**

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}.} \qquad (4)$$

Доведення. За означенням степеня з натуральним показником маємо:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ разів}}.$$

За основною властивістю степеня маємо:

$$a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}.$$

Отже, $(a^m)^n = a^{mn}$.

Відповідне правило піднесення степеня можна сформулювати так:

щоб піднести степінь до степеня, треба основу степеня залишити ту саму, а показники степенів перемножити.

Наприклад: 1) $(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6 = 64$; 2) $(b^6)^5 = b^{6 \cdot 5} = b^{30}$.

Усі розглянуті властивості степеня обґрунтовано для натуральних показників, більших за 1. Якщо показник степеня дорівнює 1, то ці властивості очевидні. Переконайтеся у цьому самостійно.

③ **Спрощуємо обчислення.** Кожну з розглянутих тотожностей можна використовувати, помінявши місцями ліву і праву їхні частини.

Наприклад, обчислення виразу $2^5 \cdot 5^5$ можна суттєво спростити, скориставшись тотожністю (3): $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$, прочитаною справа наліво: $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$. Маємо:

$$2^5 \cdot 5^5 = (2 \cdot 5)^5 = 10^5 = 100\,000.$$

Аналогічно, скориставшись тотожністю $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$, одержаною з розглянутої на с. 22 тотожності $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, спрощуємо обчислення виразу $\frac{32^4}{16^4}$:

$$\frac{32^4}{16^4} = \left(\frac{32}{16}\right)^4 = 2^4 = 16.$$

Запитання для самоперевірки

1. Якими властивостями степеня з натуральним показником скористалися у перетворенні виразів:
   а) $3^2 \cdot 3^3 = 3^5$; б) $(7ab^3)^2 = 49a^2b^6$;
   в) $32^3 : 16^2 = (2^5)^3 : (2^4)^2 = 2^{15} : 2^8 = 2^7$?
2. Яка з рівностей правильна:
   а) $2^4 \cdot 3^4 = 6^8$; б) $2^4 \cdot 3^4 = 6^{16}$; в) $2^4 \cdot 3^4 = 6^4$?

Задачі та вправи

71°. Виконайте множення:

а) $x^4 \cdot x^8$; б) $a^{12} \cdot a^7$; в) $y^4 \cdot y^8$; г) $m \cdot m^2$;
ґ) $b^3 \cdot b^2 \cdot b$; д) $c \cdot c$; е) $c^3 \cdot c^2 \cdot c$; є) $2a^2 \cdot a^3$;
ж) $3b^4 \cdot b^5$; з) $2^5 \cdot 2^2$; и) $3^3 \cdot 3^3$; і) $7{,}8 \cdot 7{,}8^2$;
ї) $a^n \cdot a^2$; й) $b^3 \cdot b^k$; к) $c^m \cdot c^n$.

Піднесіть до степеня (72–73):

72°. а) $(a^2)^3$; б) $(b^4)^2$; в) $(x^3)^3$; г) $(m^3)^3$;
ґ) $(y^{10})^{10}$; д) $(c^7)^4$; е) $(a^5)^5$; є) $(p^3)^3$;
ж) $(x^n)^3$; з) $(m^4)^p$.

73°. а) $(a^2b^2)^2$; б) $(x^3y^3)^3$; в) $(2m^2n^4)^2$; г) $(3xy^5)^2$;
ґ) $(0{,}1p^3n)^3$; д) $(a^nx^2)^4$; е) $(a^2x^m)^n$; є) $(b^mc^n)^p$.

Виконайте ділення (74–75):

74°. а) $y^8 : y^4$; б) $a^6 : a^3$; в) $m^{12} : m^4$; г) $c^{16} : c^8$;
ґ) $x^{24} : x^{12}$; д) $b^{36} : b^6$; е) $n^{18} : n^3$; є) $p^{25} : p^5$;
ж) $x^{14} : x^7$; з) $y^{30} : y^{15}$.

75°. а) $x^{16} : x^8$; б) $x^{16} : x^2$; в) $x^{16} : x^{10}$; г) $a^8 : a^5$;
ґ) $a^{18} : a^2$; д) $a^{18} : a^9$; е) $a^{18} : a^{12}$; є) $b^{17} : b^{15}$;
ж) $2^7 : 2^5$; з) $c^4 : c^3$; и) $5^{16} : 5^{15}$; і) $y^n : y^5$;
ї) $x^7 : x^p$; й) $m^n : m^k$.

76*. Спростіть вирази:
а) $m^{p-2} \cdot m^{3-p}$; б) $a^{2k} \cdot a^{1-k}$; в) $b^{3n} \cdot b^n$; г) $x^n \cdot x^n$;
ґ) $y^{3p} : y^{2p}$; д) $y^{p+1} : y^p$; е) $c^{k+3} : c^{k+2}$; є) $m^{k-1} : m^{k-3}$.

77. Замість крапок запишіть відповідні множники, щоб утворилися тотожності:
а) $x^8 \cdot \ldots = x^{16}$; б) $m^{12} \cdot \ldots = m^{24}$; в) $\ldots \cdot 2^6 = 2^{12}$;
г) $\ldots \cdot 3^3 = 3^6$; ґ) $\ldots \cdot x^5 = x^5$; д) $a^3 \cdot \ldots = a^{10}$;
е) $b^4 \cdot \ldots \cdot b^5 = b^{11}$; є) $y \cdot y^2 \cdot \ldots = y^6$; ж) $n \cdot \ldots \cdot n^3 = n^5$.

Знайдіть і виправте допущені помилки (78–79):

78°. а) $x^3 \cdot x^2 = x^6$; б) $x^5 \cdot x^4 = x^9$; в) $(y^4)^2 = y^6$;
г) $(p^3)^4 = p^{12}$; ґ) $(a^2)^2 = a^4$; д) $c^{27} : c^9 = c^3$;
е) $a^{15} : a^5 = a^{10}$; є) $a^3 \cdot b^2 = ab^5$; ж) $(ab^2)^3 = ab^6$;
з) $(ab^2)^3 = ab^5$; и) $(ab^2)^4 = a^4b^6$; і) $(ab^2)^4 = a^4b^8$.

79. а) $(4x^3y^4)^2 = 8x^6y^8$; б) $(3x^4y)^2 = 9x^8y^2$;
в) $(0{,}3x^2y^2)^2 = 0{,}9x^4y^4$; г) $(2a^3b^4)^4 = 16a^{12}b^{16}$;
ґ) $5 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = 10^3 = 1000$; д) $\dfrac{75^2}{15^2} = 5$.

80°. Запишіть у вигляді степеня:
а) a^2b^2; б) x^4y^4; в) b^6c^6; г) $36m^2n^2$;
ґ) x^6y^2; д) $4m^4n^6$; е) $c^{12}d^9$; є) $8x^6$;
ж) $-p^3$; з) -5^5.

Обчисліть (81–84):

81°. а) $0{,}25^{10} \cdot 4^{10}$; б) $\left(\dfrac{1}{8}\right)^4 \cdot 16^4$; в) $\left(1\dfrac{1}{8}\right)^{10} \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}$;
г) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^7 \cdot 6^7$; ґ) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot 4^5$; д) $(0{,}125)^6 \cdot 8^6$.

82. а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^5 \cdot 2^7$; б) $(0,2)^8 \cdot 5^9$; в) $(1,25)^4 \cdot 8^6$; г) $(0,5)^9 \cdot 4^8$.

83. а) $\dfrac{2^4 \cdot 3^5}{6^6}$; б) $\dfrac{2^9}{4^4}$; в) $\dfrac{9^5}{3^9}$; г) $\dfrac{27^4}{9^6}$;

ґ) $\dfrac{4^{10}}{8^6}$; д) $\dfrac{27^{10}}{81^7}$; е) $\dfrac{6^{10}}{2^9 \cdot 3^9}$; є) $\dfrac{2^5 \cdot 5^5}{100^2}$.

84*. а) $\dfrac{4^2 \cdot 5^3}{2^5 \cdot 25}$; б) $\dfrac{(-2)^6 \cdot 49^2}{7^5 \cdot 8^2}$; в) $\dfrac{5^3 \cdot 9^4}{3^9 \cdot 25^2}$; г) $\dfrac{2 \cdot 10^3 \cdot 100^2}{1000^2}$.

85*. Порівняйте:

а) 4^8 і 8^5; б) 9^7 і 27^4; в) 10^{20} і 20^{10}; г) 6^5 і 3^{10}.

Розв'яжіть рівняння (86–88):

86. а) $4^2 \cdot x = 4^3$, $2^4 \cdot x = 2^6$, $3^2 \cdot x = 3^7$,

б) $a : 2^3 = 2^2$, $5^3 : x = 5^2$, $3^6 : x = 9^2$.

87. а) $\dfrac{x}{2^2} = 2^3$; б) $\dfrac{4^5}{x} = 4^3$; в) $\dfrac{4^5 \cdot x}{4^2} = 4^4$; г) $\dfrac{(-3)^2 t}{3^3} = 3$.

88*. а) $(2^x)^3 = 2^6$; б) $(3^2)^x = 3^6$; в) $(2^2)^x = 2^8$;

г) $x^3 = 1$; ґ) $(x-3)^2 = 0$; д) $(x-3)^2 = 1$.

89*. Заповніть порожні клітинки таблиць числами так, щоб добуток усіх чисел по кожній вертикалі, горизонталі та діагоналі дорівнював одному й тому самому числу. Числа, записані в клітинках, розставте у порядку зростання. Визначте закономірність розміщення чисел.

а)

		2^6
	2^5	
2^4	2^3	

б)

	–32	
16	–8	2^8

90*. Обчисліть за допомогою калькулятора і результати округліть до десятих:

а) $4{,}2^2 \cdot 5{,}6^3$; б) $8{,}8^3 : 4^3$; в) $\dfrac{6{,}1^2 \cdot 2^3}{3{,}1^2}$; г) $\dfrac{7{,}48^2 \cdot 3^2}{2^3}$.

91*. Для якого значення x вирази мають найменше або найбільше значення? Які саме?

а) $x^2 + 3$; б) $2 - x^2$; в) $|x| + 3$;

г) $\frac{4 + x^2}{2}$; ґ) $\frac{4 - x^2}{2}$; д) $\frac{4}{x^2 + 2}$.

1.5. Одночлен. Перетворення одночленів

① **Що таке одночлен.** Розглянемо відомі формули, що стосуються зображених на рисунку 4 чотирьох фігур.

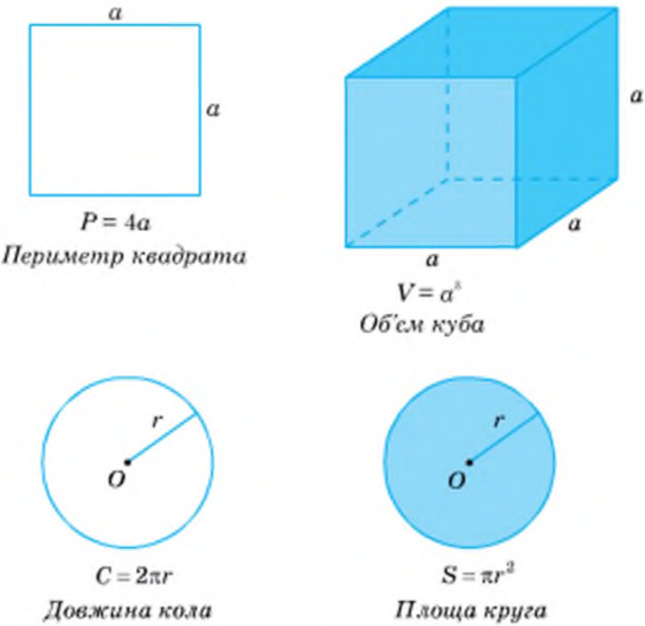


Рис. 4

Вирази, що містяться у правих частинах формул, є добутками чисел (4, 2, π), змінних (a, r) або їхніх степенів. Такі вирази називають ***одночленами***.

Вираз, що є добутком чисел, змінних та їхніх степенів, називають *одночленом*.

Приклади одночленів: $2a^2b$, $-3x^2y^4$, $4c^3d^2 \cdot 0{,}1m$.

Одночленами вважають також числа, змінні та їхні степені. Наприклад: 5, 2^2, a^3.

Вираз $\dfrac{5m^2n^4}{2}$ за означенням не є одночленом (бо містить дію ділення на 2), але його можна записати у вигляді одночлена, виконавши нескладне перетворення: $\dfrac{5m^2n^4}{2} = \dfrac{5}{2}m^2n^4$, де $\dfrac{5}{2}$ — число.

Вирази $2(a + b)$, $(x - y)^2$, $3ab - 4c^3$ не є одночленами, бо, крім множення і піднесення до степеня, містять додавання або віднімання.

② **Стандартний вигляд одночлена.** Трапляється, що одночлен містить кілька числових множників або степенів однієї змінної. У такому разі їх, як правило, замінюють одним числовим множником і одним степенем відповідної змінної.

Розглянемо для прикладу таку задачу.

Задача 1. Знайдіть масу товару, що може вмістити рефрижератор (рис. 5), якщо маса 1 м^3 товару дорівнює 0,12 т.

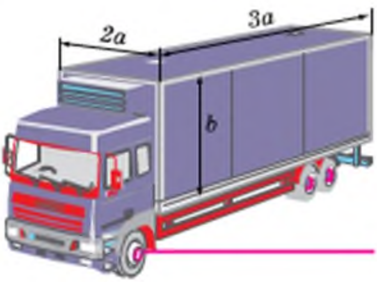


Рис. 5

Розв'язання. Оскільки рефрижератор має форму прямокутного паралелепіпеда, то його об'єм дорівнює: $3a \cdot 2a \cdot b$ (м^3).

Отже, маса товару в рефрижераторі буде: $0{,}12 \cdot 3a \cdot 2a \cdot b$ (т).

Одержаний вираз легко перетворити, скориставшись переставним і сполучним законами множення:

$$0{,}12 \cdot 3a \cdot 2ab = (0{,}12 \cdot 3 \cdot 2) \cdot (aa)b = 0{,}72a^2b.$$

Аналогічно можна перетворити одночлени:

а) $-0{,}3x \cdot 5xy$; б) $4a^2b \cdot (-2{,}4a^3b^4)$.

Маємо:

а) $-0{,}3x \cdot 5xy = -0{,}3 \cdot 5xxy = -1{,}5x^2y$;

б) $4a^2b \cdot (-2{,}4a^3b^4) = 4 \cdot (-2{,}4)a^2a^3bb^4 = -9{,}6a^5b^5$.

Зверніть увагу на те, що в кожному з одержаних одночленів числовий множник стоїть на першому місці і кожна змінна входить до них тільки один раз.

Одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці, і до якого кожна змінна в певному степені входить тільки один раз, називають *одночленом стандартного вигляду*.

Перетворення, внаслідок якого з даних одночленів дістають одночлени стандартного вигляду, називають ***зведенням одночленів до стандартного вигляду***.

Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають ***коефіцієнтом***.

Наприклад, коефіцієнти одночленів $\frac{1}{2}ah$, $6a^2$, $4a$, $-1{,}5x^2y$ дорівнюють відповідно $\frac{1}{2}$, 6, 4, –1,5.

В одночлені a^3 коефіцієнтом уважають 1, бо a^3 можна записати як $1 \cdot a^3$. Одиниці дорівнюють і коефіцієнти в таких одночленах: ab^2, m^5, x^4y^7 тощо. Аналогічно коефіцієнт одночлена $-x^3y^4$ дорівнює –1, бо $-x^3y^4 = -1 \cdot x^3y^4$.

УВАГА! Не забувайте про це в майбутньому і не припускайтеся помилки, вважаючи, наприклад, що у виразі ab коефіцієнта немає!

③ **Як звести одночлен до стандартного вигляду.** Ми розглянули кілька прикладів зведення одночленів до стандартного вигляду. Так само слід підходити до виконання більшості вправ: їхні умови можуть бути сформульовані по-різному, але суть залишається тією самою.

Наприклад:

а) виконайте множення $4x^4 \cdot 2x^4y$;

б) виконайте дії: $4x^4 \cdot 2x^4y$;

в) спростіть вираз $4x^4 \cdot 2x^4y$;

г) знайдіть добуток $4x^4 \cdot 2x^4y$.

Усі ці формулювання, по суті, означають одне: потрібно звести одночлен $4x^4 \cdot 2x^4y$ до стандартного вигляду.

Для виконання цього завдання достатньо скористатися відповідними законами арифметичних дій і властивостями степеня:

$$4x^4 \cdot 2x^4y = 4 \cdot 2x^4x^4y = 8x^8y.$$

Зводячи одночлен $4x^4 \cdot 2x^4y$ до стандартного вигляду, ми фактично замінили добуток двох одночленів $4x^4$ і $2x^4y$ одним одночленом.

Якщо потрібно перетворити в одночлен стандартного вигляду степінь одночлена, застосовують правило піднесення до степеня добутку.

Наприклад: $(3a^2b^4)^2 = 3^2(a^2)^2(b^4)^2 = 9a^4b^8$.

④ **Як записати одночлен у вигляді добутку двох одночленів.** Інколи доводиться виконувати перетворення, обернене до попереднього, — записувати одночлен стандартного вигляду як добуток двох одночленів.

Наприклад, одночлен $6x^4y^8$ потрібно записати у вигляді добутку двох одночленів, один із яких дорівнює $3xy^2$. Щоб знайти другий одночлен, порівнюють відповідні множники даних одночленів і з'ясовують, на який вираз слід помножити один із них, щоб дістати потрібний. У даному випадку такими множниками є 6 і 3; x^4 і x; y^8 і y^2. Щоб дістати 6, потрібно 3 помножити на 2; щоб дістати x^4, треба x помножити на x^3; щоб дістати y^8, слід y^2 помножити на y^6. Отже, шуканий одночлен дорівнює $2x^3y^6$. Тобто $6x^4y^8 = 3xy^2 \cdot 2x^3y^6$.

⑤ **Степінь одночлена**. Одночлен $3x^2$ містить змінну x у другому степені, а одночлен $2{,}4x^5$ — у п'ятому. В такому разі кажуть, що одночлен $3x^2$ — *другого степеня*, а одночлен $2,4x^5$ — *п'ятого степеня*.

Степінь одночлена з кількома змінними дорівнює сумі показників степенів цих змінних.

Наприклад, вираз $4x^3y^2z$ є одночленом шостого степеня, бо сума показників степенів змінних, що входять до нього, дорівнює $3 + 2 + 1 = 6$. Одночлен $7xy$ — другого степеня, оскільки до нього входять змінні x та y в першому степені: $1 + 1 = 2$.

? Запитання для самоперевірки

1. Який вираз називають одночленом? Наведіть приклади.
2. Які з одночленів є одночленами стандартного вигляду:
   а) $3a^3ba$; б) $4xy^3$; в) $-4,5m^4n \cdot 2$;
   г) $a^2b^7c^4$; ґ) $3ddd$?
   Відповідь поясніть.
3. Яку неточність допущено в означенні: числовий множник, який стоїть в одночлені на першому місці, називається його коефіцієнтом?
4. Як звести одночлен до стандартного вигляду? Поясніть на прикладі.

Задачі та вправи

92°. Які з виразів є одночленами:

а) $3c^3d^2$; б) $\frac{5}{8}x^4$; в) $\frac{3mn^3}{4}$; г) $\frac{a}{-1,3}$;

ґ) $-\frac{c}{6}$; д) $(x-4)^3$; е) 1; є) $(8a^3)^2$?

Які з них можна записати у вигляді одночлена? Зробіть це.

93°. Зведіть одночлени до стандартного вигляду і назвіть коефіцієнти утворених одночленів:

а) $ab^3 \cdot (-3b^4)$; б) $-8x^2 \cdot (-4x^3y^4)$; в) $4m \cdot 0,25n$;

г) $-5c^2d^3 \cdot 0,2cd$; ґ) $2\frac{1}{3}mn \cdot \frac{1}{7}mn$.

94°. Знайдіть добуток одночленів:

а) $17a^2$ і $5a$; б) $-6ab$ і $2a$; в) $-9ab$ і $-8ab$;

г) $-0{,}5a^2$ і $9ab$; ґ) $-\frac{4}{7}a^2b$ і $\frac{5}{9}a$; д) $-0{,}8a^3b$ і $\frac{4}{7}ab^2$;

е) $-0{,}6a$ $-\frac{3}{4}ab$; є) $\frac{7}{8}a^3b$ і $-0{,}2ab$; ж) $-\frac{4}{9}ab$ і $-18a^3b$.

95°. Спростіть вирази:

а) $(3ax)^2$; б) $(2ax)^3$; в) $(0{,}4ab)^2$;

г) $(-0{,}2ab)^3$; ґ) $(-0{,}5ab)^2$; д) $(-0{,}4a^2b)^3$;

е) $(-0{,}6a^3b)^2$; є) $(-0{,}3a^2b)^3$; ж) $\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^2$.

Піднесіть одночлени до степеня (96–97):

96°. а) $(3xy)^2$, $(4xy)^3$, $(-4x^2)^2$, $(-7xy^2)^2$, $(2x^2y)^3$;
б) $(0{,}1x)^2$, $(0{,}1x)^3$, $(0{,}4x^3)^2$, $(-0{,}4x^2)^2$, $(-0{,}6x^2y)^3$.

97. а) $\left(\frac{3}{7}x^3\right)^2$; б) $\left(-\frac{3}{7}x^2y\right)^3$; в) $\left(-\frac{7}{9}x^2y\right)^3$;

г) $\left(\frac{12}{17}xy\right)^2$; ґ) $\left(\frac{15}{17}x^2y\right)^3$.

Виконайте дії (98–99):

98°. а) $2x \cdot (3x)^2$; б) $0{,}8x \cdot (-4x)^2$; в) $(-2x)^3 \cdot (-0{,}8x)$;

г) $\frac{4}{3} \cdot 2{,}1x$; ґ) $4x^2 \cdot (-4x)^2$; д) $7xy \cdot (-3x^2)^3$.

99°. а) $(-3x)^2 \cdot (-2x)^3$; б) $(-0{,}8x^2)^2 \cdot 1\frac{2}{7}xy$;

в) $\left(1\frac{3}{4}x\right)^2 \cdot \left(-\frac{3}{7}x^3y\right)$.

100. Перетворіть вирази в одночлени стандартного вигляду, а потім, якщо можливо, запишіть їх у вигляді степеня:

а) $2a^3b^4 \cdot 8ab^2$; б) $0{,}7x^3y \cdot 6xy^2$; в) $\frac{1}{2}x^2y \cdot 2x^4y^3$;

г) $8cd^2 \cdot 2c^3d^2$; ґ) $(-3xy^4) \cdot (-12xy^2)$; д) $8m^2n^5 \cdot (-8mn)$.

101*. Знайдіть помилки, виправте їх і поясніть, порушення яких правил призвело до них:

а) $x \cdot x = 2x$; б) $5 \cdot 2^2 = 10^2$; в) $x^3 \cdot x^2 = x^6$;

г) $(x^3)^2 = x^9$; ґ) $(x^4)^3 = x^7$; д) $4^2 \cdot 3^2 = 12^4$;

е) $(-3x)^4 = -12x^4$; є) $a^2b^3 = (ab)^5$; ж) $-a^4 \cdot 2a^3 = 2a^7$.

Заповніть пропущені місця відповідними множниками так, щоб утворилися тотожності (102–104):

102. а) $8x^3 = 4x^2 \cdot \ldots$; б) $25x^2y = \ldots \cdot y$;

в) $16x^2y^3 = 4x^2y \cdot \ldots$; г) $9x^3y^2 = -3x^2y \cdot \ldots$;

ґ) $64x^4y^2 = \ldots \cdot 4x^2y$; д) $-7b^2c \cdot \ldots = 63b^5c^4$.

103. а) $4m^2n \cdot \ldots = m^5n^3$; б) $\ldots \cdot (-5x^2y) = x^4y$;

в) $5a^2b^4 \cdot \ldots = -5a^2b^4$; г*) $3a^3b \cdot \ldots = \frac{1}{9}a^3b^3$;

ґ*) $16m^3n^4 = (2mn)^2 \cdot \ldots$; д*) $36x^5y^2 = \ldots \cdot (3x^2y)^2$.

104*. а) $200x^5y^5 = (5\ldots)^2 \cdot (\ldots)^3$; б) $2x^7y^5 = (\ldots)^3 \cdot (0{,}5\ldots)^2$;

в) $\frac{9}{8}x^5y^5 = \left(\frac{3}{2}\ldots\right)^2 \cdot \frac{1}{2}(\ldots)^3$; г) $\frac{2}{27}x^5y^5 = \left(\frac{2}{3}\ldots\right)^3 \cdot (\ldots)^2$.

105. Вантажним автомобілем привезли 50 дощок завдовжки a м, завширшки b дм, завтовшки $0{,}2b$ дм кожна. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз для обчислення маси всіх дощок, якщо 1 м³ деревини має масу 0,8 т.

106*. Розставте в порожніх клітинках таблиць одночлени так, щоб їхній добуток у кожній вертикалі, горизонталі та діагоналі дорівнював $a^{12}b^{15}$:

а)

		ab^6
a^2b^9		a^6b

б)

	a^4b^5	
a^3b^6	b	

Одночлени, записані в клітинках, розмістіть у порядку зростання степенів букви b. Визначте закономірність розміщення одночленів, записаних у клітинках.

107*. Розставте в порожніх клітинках таблиць одночлени так, щоб добуток усіх одночленів кожної вертикалі, горизонталі та діагоналі був одночленом однакового степеня:

а)

x^4y^2		x^2y^6
	x^3y^5	
		x^6y^8

б)

		a^3b^3
		a^3
	b^3	a^7b^7

Розмістіть одночлени в порядку:

а) спадання степеня y;

б) зростання степеня a.

Завдання для самоперевірки

I – II рівні

1. Обчисліть:

а) $(-3)^2$; б) $(-6)^3$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$; г) $(5-3)^3$;

ґ) 3^3-5; д) $1{,}5^2$; е) -3^3; є) $\frac{3^3}{3^2}$.

2. Знайдіть значення виразу x^2-3x+7, якщо:

а) $x=-4$; б) $x=\frac{2}{3}$; в) $x=1{,}2$; г) $x=0$.

3. Виконайте дії:

а) $a^4 : a^3$; б) $x^2\cdot x\cdot x^5$; в) $3m^8 : m^4$; г) $y^3\cdot 2y\cdot y^5$.

4. Розв'яжіть рівняння:

а) $5^3\cdot x=5^8$; б) $x : 3^3=\frac{1}{3}$; в) $5^5 : x=5^2$; г) $3^2\cdot x=27$.

5. Для яких значень змінної x не мають смислу вирази:

а) $\frac{4}{x-3}$; б) $\frac{x}{x+4}$; в) $\frac{2x}{x^2-4}$; г) $\frac{x+3}{x}$.

6. Які з виразів тотожно рівні:

а) x^5; б) $(x^3)^2$; в) x^6; г) $x^2 \cdot x^3$?

7. Спростіть вирази:

а) $x^3 \cdot x^2$; б) $x^6 : x^2$; в) $(x^3)^2$; г) $x^4 : x^2$?

8. Запишіть одночлени у стандартному вигляді і назвіть їхні коефіцієнти:

а) $3x^4 \cdot x$; б) $-2a^3 \cdot 3a$;

в) $-5a^2x \cdot 0,1ax^3$; г) $0,25mn \cdot 4m^2n$.

9. Допишіть замість крапок такі множники, щоб утворилися тотожності:

а) $a^4b^2 = a^2b^2 \ldots$; б) $x^5y^6 = x^3y^2 \ldots$;

в) $3m^4n^4 = 3mn^3 \ldots$; г) $12x^3y^5 = \ldots 2xy^2$.

10. Запишіть вирази:

а) половина різниці чисел x і y;

б) чверть добутку чисел a і b;

в) подвоєна сума чисел m і n;

г) потроєна частка чисел c і d.

III рівень

1. Обчисліть:

а) $\dfrac{2^4 \cdot 4^8}{8^5 \cdot 16}$; б) $\dfrac{27^2 \cdot 3^6}{81 \cdot 9^3}$; в) $\dfrac{3^5 \cdot 64}{2^8 \cdot 9^2}$; г) $\dfrac{125 \cdot 4^2}{128 \cdot 5^6}$.

2. Обчисліть:

а) квадрат різниці чисел 8 і –3;

б) різницю квадратів чисел 9 і –4.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $9^3 : x = 27^2$; б) $x : 3^3 = \dfrac{1}{3}$;

в) $8^5 \cdot x = 16^4$; г) $(-0,5)^3 \cdot y = 0,25$.

4. Знайдіть помилки, якщо вони допущені, та виправте їх:

а) $a^8 : a^4 = a^2$; б) $x^3x^2 = x^5$; в) $b^8c^8 = bc^8$;

г) $b^8c^8 = (bc)^{16}$; ґ) $(mp^2)^3 = m^3p^5$; д) $(m^4n)^4 = m^{16}n^4$.

5. Запишіть вирази у вигляді степеня:

а) $3^2a^3a^5$; б) $a^3b^2 \cdot ab^6$; в) $2x^2 \cdot 2^4x^3y^5$; г) $c^2d^3 \cdot c^2d^5$.

6. Запишіть одночлени у стандартному вигляді:

а) $-mn \cdot 0{,}5m^2n^4 \cdot 2m$; б) $2c^2 \cdot (-3c^2d)^3$;

в) $(-8a^2b^3)^3 \cdot 2a^2b^3$; г) $-3xy^3 \cdot (3x^2y^2)^2$.

7. Запишіть вирази, якщо це можливо, як одночлени стандартного вигляду:

а) $\dfrac{xy^2}{2}$; б) $\dfrac{a+b}{3}$; в) $2m + 5m$; г) $\dfrac{3ab}{c}$.

8. Допишіть замість крапок одночлени так, щоб утворилися тотожності:

а) $12a^4bc^3 = 4abc \ldots$; б) $15m^8n^6p^3 = \ldots \cdot 3m^4n^2p$;

в) $36x^5y^2 = \ldots (3xy)^2$; г) $-18k^3l^4m^5 = 6kl^2m^5 \ldots$.

9. Запишіть вирази:

а) половина добутку суми чисел x і y та їх різниці;

б) квадрат третини добутку чисел a і b;

в) різниця квадратів чисел m і n;

г) куб половини різниці чисел k і l.

10. Спростіть вираз:

а) $4^{2n} \cdot 4^{3n-1} \cdot 4^{5n+1}$; б) $4^n \cdot 2^{2n-1} \cdot 2^{3n}$.

IV рівень

1. Запишіть вираз зі змінною m, який не має числового значення, якщо:

а) $m = 2$ і $m = -1$; б) $m = 4$; в) $m = -3$ і $m = 0$.

2. Обчисліть:

а) $\left(3\dfrac{5}{9}\right)^2 . (3{,}375)^3$; б) $\dfrac{5^{27} \cdot 4{,}6 + 2{,}7 \cdot 5^{26}}{25^{13}}$;

в) $\dfrac{8 \cdot 1000^n}{2^{3n} \cdot 5^{3n}}$; г) $\dfrac{1000^n}{2^{3n+1} \cdot 5^{3n+2}}$.

3. Виконайте дії:

а) $(-0{,}5x^ny)^3 \cdot 2xy^{4n}$; б) $(0{,}3a^{n+1}b)^2 \cdot \dfrac{5}{9}(ab^3)^3$;

в) $\left(\dfrac{2}{3}x^2y^3\right)^3 \cdot \left(-9x^4y^2\right)^2$; г) $\left(-4c^{3m}d^5\right)^3 \cdot \left(-\dfrac{3}{4}c^5d^{2m-1}\right)^2$.

4. Запишіть, якщо це можливо, вирази у вигляді степеня:

а) $27x^2y^3 \cdot x^4$; б) $4m^2n^4 \cdot 8m^4n^6$;

в) $12ab^2 \cdot 3a^2b$; г) $c^{n-1}d^{2k-1} \cdot 9c^{n+3}d$.

5. Допишіть замість крапок одночлени так, щоб утворилися тотожності:

а) $24a^2b^3d^7 = 2ab^3 \cdot 3d^2 \cdot \ldots$;

б) $100x^7y^4 = (\ldots)^2 \cdot 4x$;

в) $-\frac{24}{49}m^6n^5p^3 = 6mn^2 \cdot \ldots \cdot \frac{2}{7}m^2p$;

г) $32c^5d^4n^6 = -4c^2n^3 \cdot \frac{2}{3}dn^2 \cdot \ldots$.

6. За якого значення x вираз набуває найбільшого або найменшого значення і якого:

а) $(4-x)^2+7$; б) $10-(3-x)^2$;

в) $(2{,}5-x)^2+3\frac{2}{3}$; г) $3{,}6-\left(2\frac{3}{4}-x\right)^2$?

7. Знайдіть число, 60 % якого:

а) більше за його третину на 24;

б) менше від його третини на 24.

8. Запишіть вирази:

а) потроєний добуток квадрата суми чисел a і b та їх різниці;

б) різниця куба суми виразів $3m$ і $2n$ та квадрата їх різниці.

9. Запишіть словами назви виразів:

а) $2(a^2-b^2)+(a-b)^2$; б) $3xy-(x^3+y^3)$.

10. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-7)^2=0$; б) $(4+x)^2=0$;

в) $(x-4)^2=1$; г) $|x|^2=4$.

§2. МНОГОЧЛЕН. ПЕРЕТВОРЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

2.1. Поняття многочлена та його стандартного вигляду

! Пригадайте

1. Які доданки називають подібними? Наведіть приклади.
2. Поясніть, як зводять подібні доданки, виконавши зведення їх у виразах:
   а) $4a + 3a + a$; б) $7b - 3c + 4b - 2b$.

① **Що таке многочлен.** Розглянемо рисунок 6. Місткість рефрижератора з причепом, зображеного на ньому, дорівнює $ac^2 + bch$.

Вираз $ac^2 + bch$ — це сума двох одночленів: ac^2 — місткість рефрижератора; bch — місткість причепа.

Площа зафарбованої фігури, зображеної на рисунку 7, дорівнює

$$ab - \pi r^2 - c^2,$$

де ab — площа прямокутника, πr^2 і c^2 — площі відповідно круга і квадрата, вирізаних із даного прямокутника.

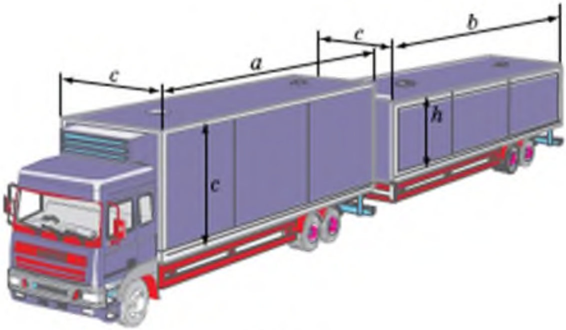


Рис. 6

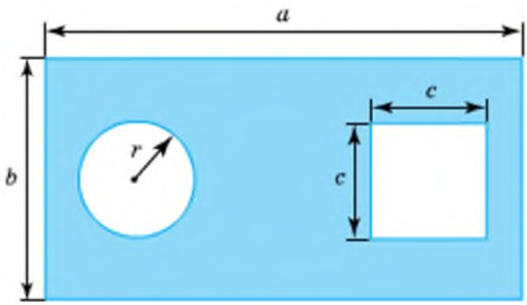


Рис. 7

Оскільки різницю двох виразів завжди можна записати у вигляді суми (наприклад, $a - b = a + (-b)$, то вираз $ab - \pi r^2 - c^2$ теж можна розглядати як суму одночленів:

$$ab - \pi r^2 - c^2 = ab + (-\pi r^2) + (-c^2).$$

Такі вирази називають *многочленами*.

Многочлен **— це сума кількох одночленів.**

Одночлени, які утворюють многочлен, називають ***членами многочлена***.

Зокрема, многочлен $ac^2 + bch$ має два члени: ac^2 і bch; членами многочлена $ab - \pi r^2 - c^2$ є вирази ab, $-\pi r^2$, $-c^2$.

Многочлен, що складається з двох членів, називають ***двочленом***, многочлен, що містить три члени, — ***тричленом***.

② **Подібні члени многочлена та їх зведення.** Вирази $4a + 3a + a$ і $7b - 3c + 4b - 2b$ є многочленами, тому подібні доданки, що входять до них, називають ***подібними членами*** цих многочленів. Подібні члени у многочлені відшукати неважко: це такі одночлени, які відрізняються між собою лише коефіцієнтом або нічим не відрізняються.

Наприклад, у многочлені $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b$ всі члени подібні; у многочлені $\underline{3mn} - \underline{\underline{4y^2}} + \underline{5mn} + 1 + \underline{\underline{3y^2}}$ подібними є перший і третій, а також другий і п'ятий члени.

Перша пара подібних членів підкреслена однією рискою, а друга — двома рисками.

Подібні члени, як і подібні доданки, можна зводити. Таке зведення виконують на основі розподільного закону множення:

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Якщо поміняти місцями ліву і праву частини цієї рівності, то дістанемо: $ac + bc = a(b + c)$.

Скориставшись останньою тотожністю, вираз $5ay + 8ay$ можна перетворити так: $5ay + 8ay = ay(5 + 8) = 13ay$.

Оскільки розподільний закон множення стосується будь-якої кількості доданків, то зводячи подібні члени многочлена $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b$, маємо: $4a^2b - 3a^2b + 5a^2b + 4a^2b = a^2b(4 - 3 + 5 + 4) = 10a^2b$.

Зведення подібних членів многочлена застосовують для його спрощення. Для виконання цього перетворення користуються таким правилом:

щоб звести подібні члени многочлена, потрібно знайти суму їхніх коефіцієнтів і до одержаного результату дописати спільний буквений множник.

Приклад. Звести подібні члени многочлена $2x^2 - 3xy - 5x^2 + 6xy$.

Розв'язання. Многочлен має дві пари подібних членів: $2x^2$ і $-5x^2$ та $-3xy$ і $6xy$. Коефіцієнти першої пари подібних членів дорівнюють 2 і –5, а їхня сума: $2 + (-5) = -3$.

Коефіцієнти другої пари дорівнюють –3 і 6, а їхня сума відповідно дорівнює: $-3 + 6 = 3$.

Отже, в результаті зведення першої пари подібних членів дістанемо $-3x^2$, а другої пари — дістанемо $3xy$. Записують таке перетворення так:

$$\underline{2x^2} - \underline{3xy} - \underline{5x^2} + \underline{6xy} = \underline{(2-5)x^2 + (-3+6)xy} = -3x^2 + 3xy.$$

Згодом підкреслений проміжний запис можна пропускати.

③ **Зведення многочлена до стандартного вигляду.** Поряд із поняттям одночлена стандартного вигляду існує поняття ***многочлена стандартного вигляду***.

***Многочленом стандартного вигляду* називають многочлен, що містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних.**

Наприклад, $5a^2b - 3a$ і $4x^2y - 5xy + y^2$ — многочлени стандартного вигляду. А многочлени $0{,}3a^2 - 6b^2b + 1$ чи $8x^2 - 2xy + x^2 - 3$ не є многочленами стандартного вигляду, оскільки у першому з них другий член не є одночленом стандартного вигляду, а в другому не зведено подібні члени $8x^2$ та x^2.

Таким чином, *щоб звести многочлен до стандартного вигляду, потрібно записати кожний член цього многочлена у стандартному вигляді і звести подібні члени.*

Наприклад: $2a^2a + 3xy - 5a^3 = 2a^3 + 3xy - 5a^3 = -3a^3 + 3xy$.

Записувати члени у многочлені можна в різній послідовності. Інколи їх упорядковують за спадними степенями певної змінної, тобто розміщують члени з цією змінною у порядку поступового зменшення показника степеня даної змінної.

Наприклад, многочлен $4ax + 2x^3 - 3 + 5x^2$, упорядкований за спадними степенями змінної x, має вигляд: $2x^3 + 5x^2 + 4ax - 3$.

Цей самий многочлен, упорядкований за зростаючими степенями x, матиме такий вигляд: $-3 + \underline{4ax} + \underline{5x^2} + \underline{2x^3}$.

Як і для одночлена, існує поняття ***степеня многочлена***. Його визначають за найвищим степенем одночлена з усіх одночленів, що утворюють даний многочлен. Наприклад, серед членів многочлена $7m^2n - 4m^4 + 5m^3n^2 - 6$ найвищий степінь має член $5m^3n^2$; він дорівнює 5 $(3 + 2 = 5)$. Тому кажуть, що даний многочлен п'ятого степеня. Многочлен $x^4 - 15x^2y + y^3$ — четвертого степеня (найвищий степінь його члена x^4 дорівнює 4); многочлен $a^2 - 4ab + 3b^2$ — другого степеня, а многочлен $9x - 2$ — першого степеня.

? Запитання для самоперевірки

1. Що таке многочлен? Наведіть приклади.
2. Які члени многочлена називають подібними? Наведіть приклади.
3. Як звести подібні члени многочлена? Проілюструйте прикладом.
4. Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду?
5. Які перетворення многочлена слід виконати, щоб звести його до стандартного вигляду?
6. Як визначити степінь многочлена?

Задачі та вправи

108°. Назвіть і запишіть члени многочленів:

а) $3a + 4b - c$; б) $4{,}2a^2 - \frac{3}{4}b + c$;

в) $-2{,}5a^2 + 2a - 1$; г) $4{,}5a^2 - 3a + b$;

ґ) $8a^2 - \frac{4}{7}b - \frac{2}{3}$; д) $-4{,}5a + 2{,}7a^2 - 5b^3$.

109°. Запишіть многочлени у вигляді суми одночленів:

а) $3ab - 4a^2 + 3{,}5b^2 + 3{,}5ab$; б) $-1{,}5x^4 + 3x^2 - 12x - 0{,}4$;

в) $-\frac{4}{7}xy - 1{,}2x^2 - 4{,}5y^2$; г) $2{,}5x^3 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 7$.

Зразок. $4{,}8x^2 - \frac{1}{3}xy - 2x = 4{,}8x^2 + \left(-\frac{1}{3}xy\right) + (-2x)$.

110°. Запишіть суму одночленів:

а) $4a$ і $0{,}8b$; б) $-4a^2$ і $2b$; в) $3{,}5a$ і $\frac{1}{2}a^2$;

г) $\frac{3}{4}a$ і $\frac{1}{2}b$; ґ) $-3{,}5a^2$ і $3a$; д) $7{,}5a$ і $\frac{3}{2}b$;

е) $5m^2$, $-6mn$ і -8; є) $2{,}1x^3$, $-7x^2$, $0{,}9xy^2$ і $-y$.

111°. Утворіть многочлени з таких одночленів:

а) a^2, $-2ab$, 3; б) $5x^2$, $4x^2y$, $-6x^2$, -1;

в) $-0{,}2c$, $9{,}2d^2$, $-5cd^3$, 1; г) $-2m$, $4m^3n$, $-3n^2$, $-8m^2n^4$.

112. Упорядкуйте два останні многочлени із вправи 111 спочатку за спадними, а потім за зростаючими степенями кожної змінної.

113. Які з виразів є многочленами:

а) $x + 3$; б) $m^2 - 8m + n$; в) $a(a - 3)$;

г) $(4 - x)^2$; ґ) $p^3 - 3p + g + 1$; д) $b^2 + 2(b - c)$;

е) $\frac{x}{2} + y^2 - 1$; є) $3x^2m - 2(1 - mx)$?

114°. Зведіть подібні члени многочленів:

а) $18a - 15a$; $-12a + 18a$; $14a^2 - 29a^2$; $8{,}9a^3 - 1{,}9a^3$;

б) $7{,}5a^2 - 14a^2$; $4\pi r^2 - 3\pi r^2$; $2\pi r + 8\pi r$; $\pi r^2 + 2\pi r^2$;

в) $7a^3 - 2a^3 - 1{,}5a^3$; $4{,}5xy - 2{,}6xy$; $3xy - 5x - 1{,}8xy$;

г) $8{,}4a^2h - 4{,}7a^2h + a^2h$; $3\pi r^2 - 1{,}5\pi r^2$; $\pi r^2h - 0{,}5\pi r^2h$.

115. Знайдіть допущені помилки і виправте їх:

а) $x + x = x^2$; б) $3a + 7a = 10a$; в) $7a - 3a = 4$;

г) $12x - x = 12$; ґ) $x^5 - x^2 = x^3$; д) $2a + 3b = 5ab$;

е) $2ab + 3ab = 5ab$; є) $12x - x = 11x$.

Зведіть подібні члени многочленів (116–117):

116°. а) $0{,}3c^3 - 3c^2 - 0{,}5c^3 + c^2$; б) $4x^2 - 7y^2 - 6y^2 + 3x^2$;

в) $5ab + 4a^2b^2 + 8a^2b^2 - 3ab$; г) $2y^2 - 3y + 2y - y^2$.

117. а) $11m^2 + 4mn - m^2 - 4mn$; б) $-c^3 - d^3 + 2c^3 - d^3$;

в) $\frac{2}{5}xy - 0{,}2x^2y + \frac{5}{6}xy + 4{,}5x^2y$; г) $6\pi r^2h - 1{,}5\pi r^2h + \pi rh$.

118°. Запишіть многочлени у стандартному вигляді:

а) $2{,}4m^2 - 4n^2n + 6m^2 - n^3$; б) $x^4 - 2x \cdot 4y^2 - x^2x + 5xyy$;

в) $a - 5a \cdot 3ab + 7b \cdot 2a^2 + a$; г) $b^{10} - b^6 - b^2b^4 - b^9b + 2b^6$.

119. Спростіть вирази:

а) $-9m^2 \cdot \frac{1}{3}n + m^2n + 24m \cdot \frac{1}{3}mn$;

б) $2ab \cdot \frac{1}{2}ac - 2a \cdot 2ac - a^2bc + 10a^2 \cdot \frac{1}{2}c$;

в) $2abc \cdot 5a + 1\frac{5}{7}a^2 \cdot \frac{7}{12}bc - 2\frac{2}{3}ab \cdot \left(-\frac{2}{3}a\right)$;

г) $3xy + 2a^2b - 3a^2 \cdot 0{,}5b^2 - 2a^2 \cdot 1{,}5b + 5a^2 \cdot 0{,}5b^2 + 2ab$;

ґ) $8c^2 \cdot 4cd^2 - 5cd \cdot (-9cd^2) - 4c \cdot 5d \cdot 2c^2d$;

д) $5x^2 \cdot 3xy^2 - 4xy \cdot (-8xy^2) - 3x \cdot 5y \cdot 4x^2y$.

120*. Запишіть вираз для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 8, та обчисліть її, якщо $a = 4$ дм, $b = 1{,}6$ дм.

121*. Запишіть вираз для обчислення площі фігури, зображеної на рисунку 9, якщо кожен із двох отворів — круг, радіус якого дорівнює r. Обчисліть площу фігури, якщо $a = 4$ дм, $b = 2$ дм, $r = 4$ см.

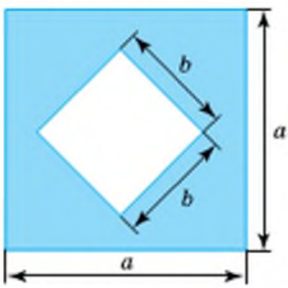


Рис. 8

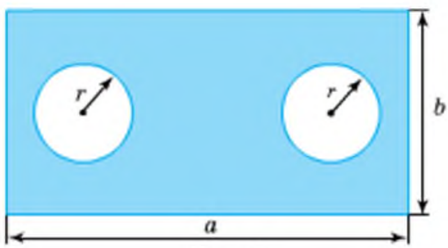


Рис. 9

122*. Складіть вирази для обчислення площі S і довжини лінії, якою обмежена кожна з фігур, зображених на рисунку 10.

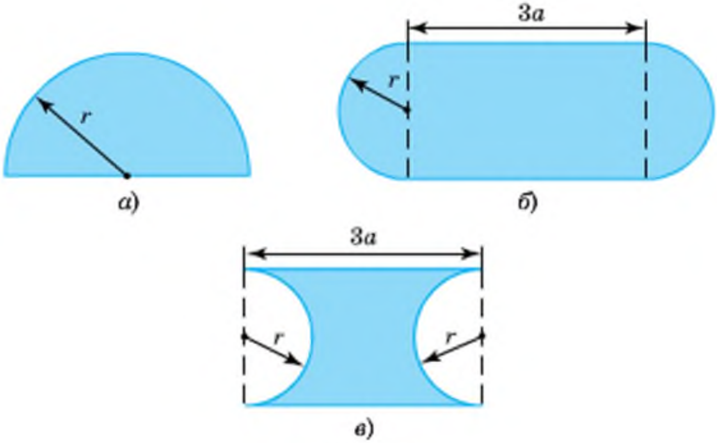


Рис. 10

2.2. Сума і різниця многочленів

Пригадайте

1. Як розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+»?
2. Як розкрити дужки, перед якими стоїть знак «–»?

① **Як знайти суму многочленів.** Розглянемо трикутник, зображений на рисунку 11. Його периметр P дорівнює сумі довжин сторін: $P = AB + BC + AC$.

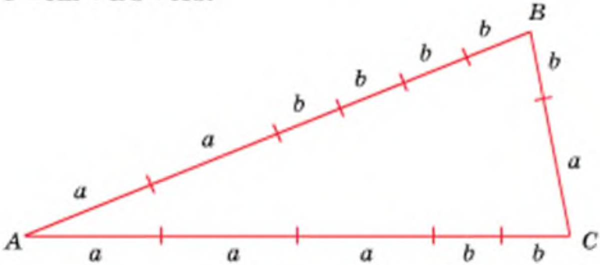


Рис. 11

Оскільки $AB = 2a + 4b$, $BC = a + b$, $AC = 3a + 2b$, то

$$P = (2a + 4b) + (a + b) + (3a + 2b).$$

Знайдений вираз є сумою трьох многочленів: $2a + 4b$, $a + b$ і $3a + 2b$. Розкривши дужки і звівши подібні члени, дістанемо:

$$(2a + 4b) + (a + b) + (3a + 2b) = 2a + 4b + a + b + 3a + 2b = 6a + 7b.$$

Отже,

щоб знайти суму многочленів, потрібно спочатку скласти відповідний вираз, узявши многочлени-доданки в дужки і поставивши між ними знак «+», а потім перетворити одержаний вираз, розкривши дужки і звівши подібні члени.

Приклад 1. Знайти суму многочленів $c^2 - 5cd + 1$ і $8cd - 3$.

Розв'язання. $(c^2 - 5cd + 1) + (8cd - 3) = c^2 - 5cd + 1 + 8cd - 3 = c^2 + 3cd - 2.$

② **Як знайти різницю многочленів.** Різницю многочленів знаходять аналогічно.

Наприклад, щоб від многочлена $3x^2 + 10y$ відняти многочлен $7y - 2$, спочатку складають відповідний вираз — різницю цих многочленів, узявши їх у дужки і поставивши між ними знак «–»: $(3x^2 + 10y) - (7y - 2)$. Потім вираз перетворюють, розкриваючи дужки і зводячи подібні члени:

$$(3x^2 + 10y) - (7y - 2) = 3x^2 + 10y - 7y + 2 = 3x^2 + 3y + 2.$$

Надалі можна не брати в дужки перший многочлен, бо це не впливає на результат віднімання або додавання.

Завдання знаходження суми або різниці многочленів можна сформулювати по-різному:

а) додайте або відніміть многочлени;

б) знайдіть суму або різницю виразів;

в) знайдіть суму або різницю многочленів.

У кожному з таких випадків спочатку записують суму або різницю даних многочленів (якщо її ще не утворено), а потім перетворюють одержаний вираз. Коли ж вираз, що є сумою (різницею) многочленів, уже записано, то його потрібно лише спростити, тобто перетворити у многочлен стандартного вигляду, розкривши дужки і звівши подібні члени.

Приклад 2. Спростити вираз $3m - 12n - (7m + 2n)$.

Розв'язання. $3m - 12n - (7m + 2n) = 3m - 12n - 7m - 2n =$ $= -4m - 14n$.

③ **Як узяти многочлен у дужки.** Ви вже знаєте, як записати суму або різницю многочленів і перетворити одержаний вираз у многочлен.

Часто доводиться виконувати обернене перетворення — даний многочлен записувати у вигляді суми або різниці двох многочленів.

Наприклад, многочлен $3m + 2n + 4a - b$ можна подати у вигляді суми двох многочленів так:

$$3m + 2n + 4a - b = 3m + 2n + (4a - b),$$

а у вигляді різниці многочленів так:

$$3m + 2n + 4a - b = 3m + 2n - (-4a + b).$$

Розкривши дужки, легко встановити, що записи виконано правильно.

Головне у таких перетвореннях — правильно записати многочлен, який має бути в дужках. Для цього слід користуватися таким правилом:

знаки членів многочлена, взятого в дужки, не змінюють, якщо перед дужками ставлять знак «плюс», і змінюють на протилежні, якщо перед дужками ставлять знак «мінус».

Запишемо, користуючись цим правилом, многочлен $7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4$ у вигляді суми двочлена і тричлена, утворених відповідно з двох перших і трьох останніх членів даного многочлена. Оскільки для утворення такої суми перед узятим у дужки тричленом слід поставити знак «плюс», то знаки його членів залишаються такими самими, які вони були у многочлені. Маємо:

$$7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4 = 7a^4 - 3b + (-10b^2 + 6d^3 - c^4).$$

Записуючи даний многочлен у вигляді різниці тих самих двочлена і тричлена, знаки взятих у дужки трьох останніх членів даного многочлена слід змінити на протилежні, бо для утворення різниці перед дужками потрібно поставити знак «мінус». Отже,

$$7a^4 - 3b - 10b^2 + 6d^3 - c^4 = 7a^4 - 3b - (10b^2 - 6d^3 + c^4).$$

Корисно пам'ятати і ще одне правило:

щоб змінити знаки членів многочлена, який стоїть у дужках, на протилежні, потрібно змінити на протилежний знак, що стоїть перед дужками.

Наприклад:

1) $a + (6b - c) = a - (c - 6b)$;

2) $m - (3x - 5y) = m + (5y - 3x)$;

3) $c - n(-2a + b - 2d) = c + n(2a - b + 2d)$.

? Запитання для самоперевірки

1. Запишіть два многочлени. Знайдіть їхню суму, а потім їхню різницю. Які тотожні перетворення вам довелося виконати при цьому?
2. Що слід зробити зі знаками всіх членів многочлена, який беруть у дужки зі знаком «+» перед ними, щоб дістати вираз, тотожний даному многочлену?
3. Що слід зробити зі знаками всіх членів многочлена, який беруть у дужки зі знаком «–» перед ними, щоб дістати вираз, тотожний даному многочлену?

Задачі та вправи

123°. Розкрийте дужки:

а) $(4m - 3n)$; б) $1 + (2x + 5y)$;

в) $(7a - 3) + (4b - 8c)$; г) $-(9xy + 2)$;

ґ) $-(13c - d^2)$; д) $20 - (x^2 - xy + y^2)$;

е) $(a - b) + (c - d) - (x + y)$; є) $x + (3a - 1) - (m - 2n - 5)$.

124°. Знайдіть і виправте помилки в рівностях:

а) $x + (2y - 3z) = x + 2y - 3z$; б) $-(x + y) + 5 = -x + y + 5$;

в) $8 + (a + 3b) = 8a + 3b$; г) $-(x + y) + 5 = -x - y - 5$;

ґ) $3m - (c + 5d) = 3m - c + 5d$; д) $-(x + y) + 5 = -x - y + 5$;

е) $(a - b) - (c - d) = a - b - c + d$; є) $m - (2n + 1) = m - 2n - 1$.

125°. Спростіть вирази:

а) $11a^2 + 7a + (9a^2 - 5a)$; б) $5b + (3b - 2c) + (b - 2c)$;

в) $3x^2 - 5y + (2x^2 - 3y) + (6x^2 + 4y)$; г) $m^2 - 2n - (5m^2 + 4n)$;

ґ) $4x^2y + 8xy - (3x^2y - 5xy^2) + (2x^2y + x^2y)$;

д) $m - (3m - 4) - (m + n)$;

е) $4 + (x^2 - 3x + 2) - (2x^2 + 4x - 1)$;

є) $a + 3 - (a + 2) - (a^2 - 4a - 4)$.

Знайдіть суму і різницю многочленів (126–128):

126°. а) $3x + 28y + 16z$ і $12x + 7z + 6y$;

б) $3a + 42b + 4c$ і $11a + 12b$;

в) $3{,}7xy + 8x^2 - \frac{2}{3}y$ і $12x^2 - 1\frac{1}{3}y + 4{,}5$;

г) $\frac{3}{4}x + 1{,}4y - 3xy$ і $1{,}6y + 1{,}25x$.

127. а) $4x + 12y + 4{,}5$ і $2x + 7y + 3{,}5$;

б) $14x^2 + 14x - 3{,}5$ і $9x^2 - 2{,}5x + 8$;

в) $4{,}5xy - 3{,}2x + 1{,}2$ і $4{,}7xy - 4x + 0{,}8$;

г) $2\frac{3}{5}xy + 3{,}5x - 8$ і $4{,}2xy + 4{,}6x - 4{,}7$.

128. а) $6{,}5x^2 - 7xy + 4x$ і $8{,}3xy + 2{,}5x^2 - 3{,}2x$;

б) $\frac{7}{8}x - 1{,}8xy$ і $-1{,}2xy - \frac{1}{8}x$;

в) $-8{,}5x + 3{,}8y - 0{,}8$ і $-6{,}7x + 6{,}9y$.

129*. Дано три многочлени: $A = a^2 - b^2 + ab$, $B = 2a^2 + 3ab - 5b^2$ і $C = -4a^2 + 2ab - 3b^2$. Знайдіть:

а) $A + B - C$; б) $A - B + C$; в) $A - B - C$; г) $A + B + C$.

130*. Знайдіть многочлен M, якщо:

а) $3x^2 - xy - 3 + M = 5x^2 - xy + 1$; б) $M - (a^2 - 3a + 5) = 6a + 1$.

131*. Користуючись схемою, зображеною на рисунку 12, з'ясуйте, які операції і з якими многочленами виконує машина. Знайдіть остаточний результат.

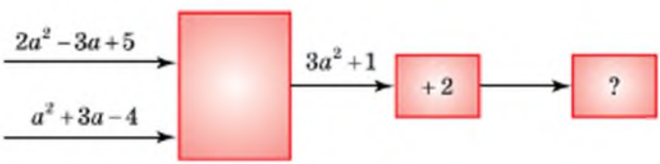


Рис. 12

Обчисліть значення виразів, попередньо спростивши їх (132–133):

132°. а) $(a^2 + 4b - ab) + (-4b + a^2 + ab)$, якщо $a = 0,4$;

б) $(a^2 + 9b - 6a) - (a^2 - 4b + 2,5b)$, якщо $a = 0,5$, $b = 2$;

в) $(4a - 8b + c) - (a - 8b + c)$, якщо $a = 4,25$;

г) $a^2 - 2ab - (3a^2 - ab + a) + (2a^2 + 3ab - b)$, якщо $a = 2,2$, $b = -1,8$.

133*. а) $(5x^2 - 7xy) + (7y^2 - 5xy)$, якщо $x = 4$, $y = -3$;

б) $\left(\frac{4}{5}a - 0,4b\right) - \left(-1,7a + \frac{3}{4}b\right)$, якщо $a = 5$, $b = 4$.

Розв'яжіть рівняння (134–135):

134°. а) $(17 - 5x) - (3x - 11) = 4$;

б) $(43 - 12x) - (33 - 7x) = 4$;

в) $(12,8 - 0,7x) - (15,8 - 0,5x) = 1$;

г) $(23,7 - 0,6x) - (12,2 - 0,8x) = 2,1$.

135. а) $(4x^2 + 12x + 9) - (7x + 4x^2 + 1) = 4$;

б) $(10x^3 - 7x^2 - 9x + 13) + (1 - 10x^3 + 7x^2) = 5$;

в) $(5 - 8x^3 + 7x^2 - 6x) + (8x^3 - 7x^2 - x) = -9$;

г) $x - (5x + 1) = 4x + 1 + (2x - 3)$.

136*. Доведіть, що за будь-яких значень a вирази набувають лише додатних значень:

а) $5a^2 - 4a - (3a^2 - 4a - 2)$;

б) $3a^4 + 2a + (2a^2 - 6a - 7) - (a^2 - 4a - 10)$;

в) $a^2 - 4a - (6a^2 - 7a + 5) - (3a - 5a^2 - 6)$;

г) $a^2 + 2 - (4a - a^2 - 12) + (4a + 5)$.

137*. Запишіть многочлен $a^4 - 2b^3 - 4a^2 + 5a - 3$ у вигляді:

а) суми двочлена $a^4 - 2b^3$ і тричлена;

б) різниці двочлена $a^4 - 2b^3$ і тричлена.

138*. Який двочлен потрібно додати до многочлена $x^2 + 2y^2 - 3xy + 1$, щоб дістати многочлен, що не містить:

а) змінної x; б) змінної y?

139. Запишіть вирази у вигляді многочленів і спростіть їх:

а) $\overline{abc} + \overline{cba}$; б) $\overline{abc} - \overline{ba}$; в) $\overline{abc} + \overline{bc}$; г) $\overline{abc} - \overline{ac}$.

Примітка. Запис $\overline{abc}$ позначає натуральне число, яке має c одиниць, b десятків і a сотень. Тобто $\overline{abc} = 100a + 10b + c$.

140*. Доведіть, що:

а) сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;

б) сума чотирьох послідовних непарних чисел ділиться на 8.

141*. Знайдіть різницю двоцифрового числа і суми його цифр. Чи ділиться ця різниця на 3?

142*. Доведіть, що:

а) різниця трицифрового числа і суми його цифр ділиться на 9;

б) різниця трицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 99.

143*. Доведіть, що:

а) сума чисел $\overline{ab}$ і $\overline{ba}$ кратна сумі a і b;

б) різниця чисел $\overline{abc}$ і $\overline{cba}$ ділиться на 9.

144*. До задуманого числа справа приписали 0 і одержане число відняли від 143. У результаті дістали задумане число. Яке число задумали?

2.3. Добуток одночлена і многочлена. Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки

! Пригадайте

Запишіть розподільний закон множення відносно додавання для випадку:

а) двох доданків у сумі;

б) трьох доданків у сумі.

① **Добуток одночлена і многочлена.** Аналізуючи тотожність, що є записом розподільного закону множення для трьох доданків $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, бачимо, що ліва частина цієї тотожності є добутком одночлена a і многочлена $b + c + d$, а права частина — многочленом, який дістали внаслідок перетворення цього добутку. Щоб вивести правило такого перетворення, звернемо увагу, що кожен член останнього многочлена є добутком одночлена a і відповідного члена даного многочлена $b + c + d$.

Отже,

добуток одночлена і многочлена дорівнює сумі добутків цього одночлена і кожного члена многочлена.

Оскільки добуток — результат множення, а сума — результат додавання, то це твердження можна сформулювати інакше:

щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно помножити одночлен на кожний член многочлена і одержані добутки додати.

Скористаємось цим правилом для перетворення добутку одночлена $2x$ і многочлена $3x^2 - xy + 5y^2$ у многочлен. Маємо:

$$2x(3x^2 - xy + 5y^2) = \underline{2x \cdot 3x^2 + 2x \cdot (-xy) + 2x \cdot 5y^2} = 6x^3 - 2x^2y + 10xy^2.$$

У подальшому, виконуючи такі перетворення, підкреслений проміжний запис можна пропускати.

② **Винесення спільного множника за дужки.** Помінявши місцями ліву і праву частини тотожності $a(b + c + d) = ab + ac + ad$, маємо:

$$ab + ac + ad = a(b + c + d).$$

Бачимо, що многочлен $ab + ac + ad$ записано у вигляді добутку множника a, що є спільним для всіх членів многочлена, та іншого многочлена $b + c + d$.

Таке перетворення називають ***розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки***.

Якщо спільний множник виокремлено, то розкладання на множники не викликає труднощів.

Наприклад:

1) $a^2 \cdot 2b - a^2 \cdot 3cd = a^2(2b - 3cd)$;

2) $3x \cdot 5y^2 + 3x \cdot 2 = 3x(5y^2 + 2)$;

3) $3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = 3x(5y^2 - 4y + 1)$.

УВАГА! Часто у випадках, подібних до останнього, припускаються помилки, записуючи: $3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = 3x(5y^2 - 4y)$.

У неправильності одержаної відповіді легко переконатися, перетворивши добуток $3x(5y^2 - 4y)$ у многочлен. Суть помилки полягає в тому, що «загубився» третій член многочлена. Щоб цього уникнути, на перших порах варто використовувати підкреслений проміжний запис:

$$3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x = \underline{3x \cdot 5y^2 - 3x \cdot 4y + 3x \cdot 1} = 3x(5y^2 - 4y + 1).$$

Для самоконтролю варто пам'ятати, що кількості членів даного многочлена і многочлена в дужках мають бути однакові.

У більшості випадків спільний для всіх членів многочлена множник доводиться виокремлювати самостійно. Для цього достатньо:

знайти найбільший спільний дільник модулів коефіцієнтів усіх членів многочлена, взятий зі знаком «+» або знаком «–», і дописати до нього як множники змінні, що одночасно входять до всіх членів многочлена, — кожну змінну з найменшим показником, який вона має в даному многочлені.

Приклад. Знайти спільний множник для членів многочлена $12a^3b^3 - 8a^2b^5c$.

Розв'язання. Найбільший спільний дільник 12 і 8 дорівнює 4. До обох членів многочлена входять лише дві змінні a і b. Найменший показник степеня змінної a у многочлені дорівнює 2, змінної b дорівнює 3. Отже, спільним множником є вираз $4a^2b^3$ або $-4a^2b^3$.

Крім знаходження спільного множника, який потім виносять за дужки, важливо вміти записати кожний член многочлена у вигляді добутку цього спільного множника й іншого одночлена, тобто: $12a^3b^3 - 8a^2b^5c = \underline{4a^2b^3} \cdot 3a - \underline{4a^2b^3} \cdot 2b^2c$.

Отже,

щоб розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки, потрібно:

1) *знайти спільний множник членів многочлена;*

2) *записати кожний член многочлена у вигляді добутку знайденого спільного множника та відповідного одночлена;*

3) *записати спільний множник перед дужками, а в дужках — многочлен, що залишається.*

Наприклад: $12x^2y^3 - 16x^3y^2 = \underline{4x^2y^2} \cdot 3y - \underline{4x^2y^2} \cdot 4x = 4x^2y^2(3y - 4x)$.

Згодом підкреслений проміжний запис $4x^2y^2 \cdot 3y - 4x^2y^2 \cdot 4x$ можна пропустити.

За дужки можна винести спільний множник, який є не одночленом, а, наприклад, двочленом або будь-яким іншим многочленом.

Наприклад, у виразі $c^2(2m + n) - 3d(2m + n)$ спільним множником є двочлен $2m + n$, а у виразі $2x(3a - b + 4) + 5y(3a - b + 4)$ — тричлен $3a - b + 4$.

Перетворивши ці вирази, маємо:

$$c^2(2m + n) - 3d(2m + n) = (2m + n)(c^2 - 3d);$$

$$2x(3a - b + 4) + 5y(3a - b + 4) = (3a - b + 4)(2x + 5y).$$

УВАГА! **Перетворюючи вирази, не забувайте брати в дужки многочлен, який винесено за дужки. Уникайте помилок на зразок:**

$$c^2(2m + n) - 3d(2m + n) = 2m + n \cdot (c^2 - 3d).$$

Отже, на основі розподільного закону множення стосовно додавання можна виконати два тотожні перетворення: перетворити добуток одночлена і многочлена у многочлен, і навпаки — розкласти многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки.

Перетворення добутку одночлена і многочлена у многочлен

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad$$

Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки

Запитання для самоперевірки

1. Які два перетворення виразів виконують на основі розподільного закону множення?
2. Як перетворити добуток одночлена і многочлена у многочлен?
3. Як виконати розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки? Поясніть на прикладі.

Задачі та вправи

145°. Виконайте множення:

а) $12(a + 4)$; б) $3(x - 7)$; в) $6(x + 2y)$;
г) $9(a - 4b)$; ґ) $(x^2 - 8x) \cdot 5$; д) $(3a + 4b) \cdot 9$;
е) $7(a - b + c)$; є) $(2a - 4b + 5c) \cdot 12$; ж) $8(3a^2 - 4b - 6)$.

Запишіть вирази у вигляді многочленів (146–148):

146°. а) $(20{,}5x + 8{,}2y) \cdot 4$; б) $a(3x - 4y - 12z)$;
в) $-8x(11 - 12x)$; г) $-5a(12a - 14b + 15c)$;
ґ) $-3x^2(-x^3 + x - 7)$; д) $(x^2y - xy^2 - xy) \cdot 3xy^2$.

147. а) $-4{,}5x(2x - 3)$; б) $\frac{2}{3}a\,(3a - 6b + 15c)$;
в) $-2{,}5a(a - b)$; г) $0{,}5x(x^2 - 6x + 10)$.

148*. а) $(6a^2 - 7ab)(-a)$; б) $(5k^2 - 3k + 1{,}2)(-0{,}4k)$;
в) $1{,}3a(a^2 - 3a)$; г) $(1 - 0{,}4a + 0{,}6ab)(-0{,}7a)$;
ґ) $12a(6a - 7b)$; д) $(4a^2 - 3a - 1)\left(-\frac{7}{8}a\right)$.

149. Бічна сторона прямокутника дорівнює a м, основа — на 4 м довша. Визначте периметр і площу прямокутника. Периметр знайдіть двома способами. Доведіть, що вирази тотожні.

150. Із двох міст назустріч один одному рухаються автомобілі. Швидкість одного — v км/год, другого — u км/год. Через t годин вони зустрілися. Яка відстань між містами? Задачу розв'яжіть різними способами. Доведіть, що одержані вирази тотожні.

151. Від пристані вниз річкою одночасно відпливли пліт зі швидкістю v км/год і катер, власна швидкість якого u км/год. Якою буде відстань між плотом і катером через t год? Розв'яжіть задачу двома способами. Доведіть, що одержані вирази тотожні.

152°. Спростіть вирази:

а) $(a + b) + b(a - b)$; б) $2a^2 - a(2a - 5b)$;

в) $3(x + y) - 5(x - y)$; г) $-2(a - 3b) + a(2 - b)$;

ґ) $m(m + n) - 3(m^2 + mn)$; д) $0,5x(2x - 4y) - 2y(3y - x)$.

153. Виправте допущені помилки і запишіть правильно:

а) $a - 3(a^2 + b) = a - 3a^2 + 3b$; б) $-x^2 + x(y - 2) = x^2 + xy - 2x$;

в) $m - n(-m - 5) = m + mn - 5n$; г) $3x \cdot 2(x + y) = 6x(3x^2 + 3xy)$.

Спростіть вирази (154–156):

154°. а) $15(2a - 3b) - 12(3a - 2b)$; б) $17a(a - b) - 18b(2a - 5b)$;

в) $12,5(6a - 4b) - 3(8a - b)$; г) $19a(a - b) - 21b(2a - 3b)$.

155. а) $(a^2 - 1) \cdot 0,4x - 5x(2 - x^2)$; б) $-0,8a(7a - 1) - 0,9a(4a - 1)$;

в) $4a(x - 8) - 18x(3a - 1)$.

156*. а) $4\frac{1}{3}a^2 - 0,4(2,5a^2 + a - 1)$; б) $4,5a^2 - 3,8a - 0,5a(6a - 7)$;

в) $3,2a(a^2 - a + 1) + (-3,2a^3 + 3,2a^2)$.

157°. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:

а) $2m^2 - m(2m - 5n) - n(2m - n)$;

б) $6x^2 - 5x(-x + 2y) + 4x(2,5y - 3x)$;

в) $10a(5a^2 + 2b) - 6a(3b + 7a^2) - 3ab$;

г) $4c(5d - 2c) - (3c - 2d) \cdot 2c$.

158*. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу:

а) $5(2n - 1) - (n - 14)$ ділиться на 9;

б) $7(3n - 1) - (n + 3)$ ділиться на 10;

в) $5(2n - 1) - 2(4n - 2,5)$ є парним числом.

159*. Значення якого з виразів при будь-якому цілому значенні n ділиться на 3:

а) $5n(n + 2) - 2(n^2 - 5) - 7n + 6$; б) $3n(n - 2) + 6(n + 1)$;

в) $n(3n - 1) + 4(n + 1)$; г) $7n(n - 3) - 2(2n - 1)$?

160. Доведіть тотожності:

а) $a(a + b) - b(a - b) = a^2 + b^2$; б) $b(a + b) - b(a - b) = 2b^2$;

в) $n(n + 1) - n(n - 1) = 2n$; г) $3(a^2 - ab) - a(2a - 3b) = a^2$.

161. Розв'яжіть рівняння:

а) $3(x - 5) + 18 = 48$; б) $5x - 4(x - 3) = 10$;

в) $6(x - 3) + 2(x + 2) = 10$; г) $5(y - 1) - 3(y - 3) = 0$;

ґ) $2x - 3(x + 4) = 4(x + 2)$; д) $x(x - 2) + 3 = x(x - 5)$.

162°. Знайдіть спільні множники для одночленів:

а) $3x^2$ і $6x^3$; б) $6a^2x$ і $12ax^2$;

в) $9a^2$ і $-6a^2b$; г) $4x^3y^3$ і $8x^2y^2$;

ґ) $6a^3$; $3ab$; $9ab^2$; д) $-40m^4n^2$; $25m^3n^3$; $20m^2n^4$.

163°. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $3m \cdot 4n + 3m \cdot p$; б) $5x \cdot 4y^2 + 5x \cdot 2y + 5x \cdot 3$;

в) $2x^2 \cdot y^2 - 2x^2 \cdot z + 2x^2 \cdot 4$; г) $ab \cdot 7x + ab \cdot 6y + ab$.

164°. Запишіть відповідні одночлени з попередньої вправи у вигляді добутку двох множників, один із яких — знайдений спільний множник.

165. Заповніть пропуски так, щоб утворилися тотожності:

а) $4a^2 \cdot (\ldots - \ldots) = 20a^5 - 4a^2$; б) $(2x^2 - \ldots) \cdot 3x^3 = \ldots - 15x^4$;

в) $(4a^2 - 3b^2) \cdot \ldots = -8a^2b - \ldots$; г) $(11a^2 - \ldots) \cdot \ldots = 1{,}1a^3 - 0{,}3a$;

ґ) $\ldots \cdot (3x^4 - \ldots) = 3{,}6x^6 - 4{,}8ax^2$; д) $-3x^2 \cdot (\ldots - 0{,}4x) = 3x^3 - \ldots$.

166. Розкладіть вирази на множники:

а) $14xy - 21y$; б) $6ab - 3bc$; в) $-15ax - 20ay$;

г) $mn - n^2$; ґ) $y^3 + y^4$; д) $x^2y + xy^2$;

е) $a^3b^2 - a^2b^3$; є) $3a^2x + 6ax^2$; ж) $9a^4 - 12a^3b$;

з) $5xy^2 - 10x^3y^4$; и) $3x^3y^3 + 15x^2y^2$; і) $9m^4 - 6m^3$.

167. Не обчислюючи значення виразу, доведіть, що:

а) $73^2 - 73 \cdot 17$ ділиться на 8; б) $97 \cdot 24 + 97^2$ ділиться на 11;

в) $12^3 + 12^2$ ділиться на 13; г) $49^4 - 49^3$ ділиться на 24.

168. Доведіть, що:

а) $5^6 - 5^5 + 5^4$ ділиться на 7; б) $27^3 - 3^7$ ділиться на 8;

в*) $10^4 + 5^3$ ділиться на 9; г*) $21^3 - 14^3 - 7^3$ ділиться на 5.

169°. Знайдіть значення виразів, попередньо розклавши їх на множники:

а) $5ab + a^2$, якщо $a = 1,15$, $b = 0,17$;

б) $4m^2 - mn$, якщо $m = 1,47$, $n = 5,88$;

в) $a^2y - a^3$, якщо $a = -3,5$, $y = 6,5$;

г) $3,27b + b^2$, якщо $b = -2,27$;

ґ) $-x^2 - xy$, якщо $x = 0,3$, $y = 9,7$;

д) $4p^2x + 4px^2$, якщо $p = \frac{1}{4}$, $x = 2\frac{3}{4}$.

170°. Подайте у вигляді добутку:

а) $30a - 75b + 15$;
б) $17a - 17b - 34$;
в) $5x^2 - 10xy + 5y^2$;
г) $a^3 - 2a^2 - a$;
ґ) $m^4 + 3m^3 - m^2$;
д) $5x + 15xy + 10ax$;
е) $3ab - 9ac - 12ad$;
є) $12ax^3 - 8ax^2 + 4ax$;
ж) $3a^2b^3 + 6a^2b^2 - 18a^4b^4$;
з) $16a^4 - 8a^3 - 4a^2$.

171. Обчисліть зручним способом:

а) $5,83 \cdot 19 + 5,83 \cdot 54 + 5,83 \cdot 27$; б) $16,22 + 14,8 \cdot 16,2 - 16,2$.

172*. Знайдіть допущені помилки і виправте їх:

а) $2x^2y - 6x^3y^3 + 4xy = 2x(xy - 3x^2y^3 + 2y)$;

б) $x^8 - x^6 + x^2 = x^2(x^4 - x^3)$;

в) $a^9 + 6a^6 - a^3 = a^3(a^6 + 6a^3 - 1)$;

г) $b^2x^3 + cx^2 + x = x(b^2x^2 + cx)$.

173*. Відомо, що $a + b = 15$, а $x + y = m$. Знайдіть:

а) $3a + 3b$;
б) $\frac{1}{2}(a + b)$;
в) $0,8a + \frac{4}{5}b$;
г) $7,5x + 7\frac{1}{2}y$;
ґ) $0,25x + \frac{1}{4}y$;
д) $12x + 8 \cdot 1,5y$.

174*. Відомо, що $a + 5b$ ділиться на 9. Чи ділиться:

а) $7a + 35b$ на 9;
б) $15a + 75b$ на 3;
в) $2a + 10b$ на 6;
г) $4a + 20b$ на 18?

175. Розв'яжіть рівняння, розклавши ліву частину на множники:

а) $2x^2 - 3x = 0$;
б) $4x^2 + 10x = 0$;
в) $x^2 - 4,2x = 0$;
г) $5x^3 - 7,5x^2 = 0$;
ґ) $x^4 - 4x^2 = 0$;
д) $-x^2 + x = 0$.

Розв'язання. а) $x(2x - 3) = 0$.

Добуток двох множників x і $2x - 3$ дорівнює 0 лише тоді, коли один із них або обидва дорівнюють 0. Маємо: $x = 0$; $2x - 3 = 0$; $x = 3 : 2$; $x = 1{,}5$.

Відповідь. $x = 0$; $x = 1{,}5$.

176°. Винесіть за дужки спільний множник:

а) $2a(a - b) + (a - b)$; б) $x(m + n) - y(m + n)$;
в) $m(a + 4) - n(a + 4)$; г) $x(y - 1) - y(y - 1)$;
ґ) $a(7 - b) + (7 - b)$; д) $(b + 5) - a(b + 5)$;
е) $6a(c - d) - 5b(c - d)$; є) $(m + n) + b^3(m + n)$.

177. Знайдіть значення виразу, спочатку розклавши його на множники:

а) $x(a + 3) - y(a + 3)$, якщо $a = 4$, $x = \frac{3}{4}$; $y = \frac{1}{2}$;

б) $m(n - 5) - n(n - 5)$, якщо $m = 6{,}8$, $n = -3{,}2$.

178*. Складіть двома способами вирази для обчислення площ зафарбованих фігур (рис. 13). Доведіть, що обидва вирази, одержані для кожної фігури, тотожні.

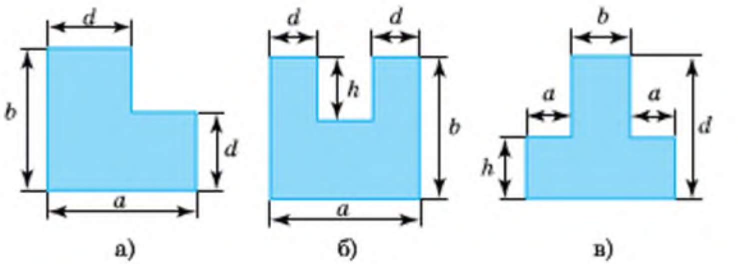


Рис. 13

179*. Для обчислень за допомогою калькулятора використовують тотожності:

$ax^2 + bx + c = (ax + b)x + c$ та $ax^3 + bx^2 + cx + d = ((ax + b)x + c)x + d$.

(Перевірте їх.)

Користуючись калькулятором, обчисліть значення виразів:

а) $7{,}9x^2 + 28x - 29{,}5$, якщо $x = 8{,}26$;

б) $-12,75x^2 - 8,5x + 48,3$, якщо $x = 0,7$;

в) $7,8x^3 - 83,4x^2 + 7x + 28$, якщо $x = 14,5$;

г) $42,5x^3 + 0,28x^2 - 8,75x - 28,4$, якщо $x = 4,35$.

Розв'язання. а) $7,9x^2 + 28x - 29,5 = (7,9x + 28)x - 29,5$.

Якщо $x = 8,26$, то $(7,9 \cdot 8,26 + 28) \cdot 8,26 \cdot 29,5$.

Обчислення на калькуляторі виконуємо в такій послідовності:

$$(\ 7.9 \boxed{\times} 8.26 \boxed{+} 28\ )\ \boxed{\times} 8.26 \boxed{-} 29.5 \boxed{=} 740.7704.$$

Результат округлюємо до десятих: $\approx 740,8$.

2.4. Добуток многочленів. Розкладання многочлена на множники способом групування

① **Добуток двох многочленів.** Перетворимо у многочлен вираз $(a + b)(c + d)$, що є добутком двох двочленів $a + b$ і $c + d$. Зробимо це, скориставшись відомим уже правилом перетворення у многочлен добутку одночлена і многочлена. Для цього позначимо двочлен $c + d$ буквою x:

$$c + d = x.$$

Тоді $(a + b)(c + d) = (a + b)x$.

Останній вираз перетворимо як добуток многочлена і одночлена. Маємо:

$$(a + b)x = ax + bx.$$

Підставимо у вираз, що дістали, замість x позначений ним двочлен $c + d$ і ще раз застосуємо правило перетворення добутку одночлена і многочлена у многочлен:

$$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Остаточно маємо:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Помічаємо, що утворений вираз є сумою добутків кожного члена першого двочлена і кожного члена другого двочлена.

Отже,

добуток двох многочленів дорівнює сумі добутків кожного члена першого многочлена і кожного члена другого.

Оскільки добуток це результат множення, а сума — додавання, то це твердження можна сформулювати й інакше:

щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого і додати знайдені добутки.

Приклад 1. Перетворити у многочлен добуток $(4a - 3b)(c + 5)$.

Розв'язання. $(4a - 3b)(c + 5) = 4a \cdot c + 4a \cdot 5 + (-3b) \cdot c + (-3b) \cdot 5 =$
$= 4ac + 20a - 3bc - 15b$.

Як правило, у таких перетвореннях відразу записують остаточний результат, не забуваючи враховувати знаки відповідних членів обох многочленів.

② **Спосіб групування.** У згорнутому вигляді послідовність розглянутого на початку пункту перетворення добутку двох двочленів у многочлен можна записати так:

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Відтворимо його у зворотному порядку, прочитавши справа наліво. Маємо:

$$ac + ad + bc + bd = a(c + d) + b(c + d) = (a + b)(c + d).$$

У результаті многочлен $ac + ad + bc + bd$ розклали на множники $(a + b)$ і $(c + d)$.

Розглянемо спосіб, яким це було зроблено.

Помічаємо, що відомий спосіб винесення спільного множника за дужки не можна безпосередньо застосувати до даного многочлена, бо немає такого множника, який був би спільним для всіх його членів. Натомість є пари (групи) членів, які мають відповідні спільні множники: наприклад, для першого і другого членів це множник a, для третього і четвертого — множник b. Коли винесемо їх за дужки, то дістанемо вираз $a(c + d) + b(c + d)$. Його, у свою чергу, можна перетворити шляхом винесення за дужки нового спільного множника $(c + d)$:

$$a(c + d) + b(c + d) = (c + d)(a + b).$$

Такий спосіб розкладання многочлена на множники називають ***способом групування***.

Розкладаючи розглянутий многочлен на множники цим способом, його члени можна було згрупувати й інакше: перший — з третім, другий — з четвертим:

$$ac + ad + bc + bd = (ac + bc) + (ad + bd) =$$
$$= c(a + b) + d(a + b) = (a + b)(c + d).$$

Дістали той самий результат.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен $ax + by - bx - ay$.

Розв'язання. Згрупуємо члени многочлена за ознакою наявності спільного множника у членів однієї групи. Це можуть бути групи, утворені першим і четвертим членами (спільний множник a) та другим і третім членами (спільний множник b). Можливий і інший варіант групування: перший і третій члени (спільний множник x) та другий і четвертий члени (спільний множник y). Розглянемо кожний з варіантів окремо.

Варіант 1

$$ax + by - bx - ay = (ax - ay) + (by - bx) = a(x - y) + b(y - x).$$

Бачимо, що вирази в дужках відрізняються лише знаками. Щоб їх зробити однаковими, слід змінити знаки членів одного з цих виразів (наприклад, у других дужках) на протилежні. А для цього, як відомо, достатньо змінити знак перед дужками на протилежний. Зробимо це:

$$a(x - y) + b(y - x) = a(x - y) - b(x - y).$$

Подальші перетворення не викликають труднощів:

$$a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b).$$

У процесі групування можна було відразу перед другими дужками поставити знак «мінус». Тоді перетворення мало б такий вигляд:

$$ax + by - bx - ay = (ax - ay) - (bx - by) =$$
$$= a(x - y) - b(x - y) = (x - y)(a - b).$$

Варіант 2

$$ax + by - bx - ay = (ax - bx) + (by - ay) = x(a - b) + y(b - a) =$$
$$= x(a - b) - y(a - b) = (a - b)(x - y).$$

Отже, *щоб розкласти многочлен на множники способом групування, потрібно:*

1) *знайти і об'єднати в групи (згрупувати) члени многочлена, що мають спільний множник;*

2) *у кожній групі винести за дужки спільний множник;*

3) *якщо вираз у всіх дужках виявиться однаковим, винести його за дужки; якщо ні — спробувати тотожно перетворити його або згрупувати члени многочлена інакше.*

? Запитання для самоперевірки

1. Як перетворити у многочлен добуток двох многочленів? Проілюструйте прикладом.
2. Поясніть суть перетворення, яке називається розкладанням многочлена на множники способом групування.

Задачі та вправи

Запишіть у вигляді многочленів вирази (180–183):

180°. а) $(a - b)(m - n)$; б) $(2 - a)(3 - b)$; в) $(x + y)(a + b)$;
г) $(x - y)(a - b)$; ґ) $(a - b)(4 - x)$; д) $(a - b)(5 - x)$.

181°. а) $(a^2 + b)(c^2 + d)$; б) $(a^2 - b^2)(-c^2 + d)$;
в) $(2x + y)(x + 3y)$; г) $(0{,}5a - b^2)(a - b^3)$;
ґ) $(3ab - 4{,}5b^2)(5a^2b + 2ab)$; д) $(m^2 - 4n^3)(m^4 + 5n^2)$.

182. а) $(2a - b)(3a + 4b)$; б) $(2x - 1)(x - 2)$;
в) $(5m - 4n)(3m + n)$; г) $(4ab - a)(b - 1)$;
ґ) $(5x + 2x^2)(x^2 - 3x)$; д) $(n^2 + n)(n^3 - n^2)$.

183°. а) $(a + b)(a + b)$; б) $(a - b)(a + b)$;
в) $(a - b)(a - b)$; г) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
ґ) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$; д) $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$.

Чи тотожні вирази (184–185):

184°. а) $(a + b)(a + b)$ і $a^2 + 2ab + b^2$;
б) $(a - b)(a - b)$ і $a^2 - 2ab + b^2$;
в) $(a + b)(a - b)$ і $a^2 - b^2$;
г) $(a + b)(a + b)$ і $a^2 + b^2$?

185. а) $(a + b)(a^2 - ab + b^2)$ і $a^3 + b^3$;

б) $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$ і $a^3 - b^3$;

в) $(a + b)(a^2 + 2ab + b^2)$ і $a^3 + b^3$?

186. Розгляньте площу S кожного із прямокутників $ABCD$, зображених на рисунку 14, *а* і *б*, та поясніть, що:

а) $(a + b)(c + d + p) = ac + ad + ap + bc + bd + bp$;

б) $(a + b + c)(d + e + p) = (ad + ae + ap) + (bd + be + bp) + (cd + ce + cp)$.

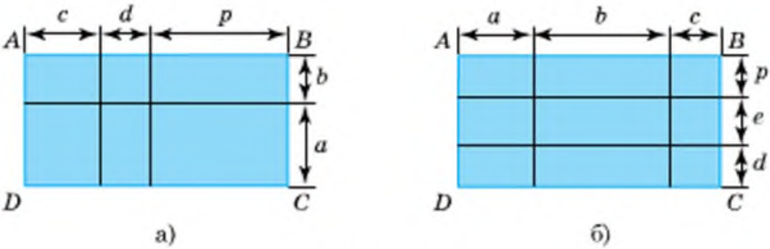


Рис. 14

Перетворіть у многочлени (187–189):

187°. а) $(x - 2)(x + 4) + x(x + 5)$;

б) $(3a - 1)(a - 2) + 2a(a - 3)$;

в) $(3m - n)(2m + 4n) + 5m(m + 3n)$;

г) $(c + d)(d - c) + 3c(c - 2d)$.

188. а) $6a + (a - 6)(a + 2)$;

б) $2p(m - p) + (2m + 1)(p - 2)$;

в) $(x + 2)(x + 3) + (4 - x)(x - 1)$;

г) $(2a - b)(b - 3a) + (a - b)(a + 3b)$.

189. а) $(x - 3y)(x + 5) - 2x(x + y)$;

б) $(5a - 2)(1 - 3a) - a(4a + 2)$;

в) $(6c - 8)(5 - 2c) - 3c(c - 1)$;

г) $(n + 3m)(3m - n) - 2n(n - m)$;

ґ) $(b + 2a)(4a - 3b) - 2a(5a - b)$;

д) $(2x + 5y)(y + 3x) - 2x(3x + 8y)$.

190. Щоб знайти площу S прямокутника $ABCD$ (рис. 15), семикласники розв'язали задачу трьома способами:

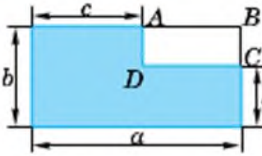


Рис. 15

1) $S = (a - c)(b - d)$;
2) $S = ab - ad - (b - d)c$;
3) $S = ab - bc - (a - c)d$.

Поясніть, як вони міркували. Доведіть, що одержані вирази тотожні.

Спростіть вирази (191–192):

191. а) $3a^2 - (2a - 1)(a + 4)$.

УВАГА! Для уникнення помилок зі знаками, що можуть трапитися при спрощенні подібних виразів, перетворення доцільно виконувати у такій послідовності:

$$3a^2 - (2a - 1)(a + 4) = 3a^2 - (2a^2 + 8a - a - 4) =$$
$$= 3a^2 - 2a^2 - 8a + a + 4 = a^2 - 7a + 4.$$

б) $4b^2 - (a - 2b)(a + 2b)$;
в) $2mn - (m - n)(2m + n)$;
г) $4x(x + y) - (x - y)(2x - 3y)$;
ґ) $c(c - 5d) - (c - 3d)(2d - 4c)$;
д) $(c - d)(c + d) - (c - d)(c - d)$.

192. а) $6x^2 - (3x + 2)(2x - 3)$;
б) $5a(2x - a) - (3a - x)(2x - a)$;
в) $(m + 4)(m - 2) + (2 - 3m)(m + 1)$;
г) $(c - 2)(3c + 1) - (3 - c)(c + 5)$.

Обчисліть значення виразів (193–194):

193°. а) $(x - y)(x + y) + y^2$, якщо $x = 0{,}9$;
б) $(x - y)(x - y) - (x^2 + y^2)$, якщо $x = 0{,}8$ і $y = 1{,}2$;
в) $4ab(4a^2 - b) - 3ab(4a^2 - b)$, якщо $a = -1$ і $b = 0{,}2$;
г) $(a - 4)(a - 2) - (a - 1)(a - 3)$, якщо $a = 1\frac{3}{4}$;

194. а) $(a - 4)(a - 2) - (a - 2)(a - 3)$, якщо $a = 0{,}8$;
б) $(a - 5)(a - 1) - (a + 2)(a - 3)$, якщо $a = -2{,}6$;
в) $b^4 - (b^2 - 2)(2 + b^2)$, якщо $b = -0{,}368$.

195*. Доведіть, що значення виразів при довільних значеннях x є сталими числами:

а) $(4-x)(4+x)+x^2$; б) $(x-5)(x+6)-x(x+1)$;
в) $(x-4)(x^2+4x+16)-x^3$; г) $(5+x)(25-5x+x^2)-x^3$.

196. Обчисліть зручним способом:

а) $2{,}7\cdot 6{,}2-9{,}3\cdot 1{,}2+6{,}2\cdot 9{,}3-1{,}2\cdot 2{,}7$;
б) $1{,}25\cdot 14{,}9+0{,}75\cdot 1{,}1+14{,}9\cdot 0{,}75+1{,}1\cdot 1{,}25$.

197. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x-1)(x-3)-x^2=0$;
б) $(x-0{,}8)(x-1{,}2)-x^2=-0{,}4$;
в*) $6x^2-(2x-3)(3x+2)=2$;
г*) $(10x+9)x-(5x-1)(2x+3)=8$;
ґ*) $(3x-2)(x+4)-(3x+9)(x-1)=0$;
д*) $12-y(y-3)-(6-y)(y+2)=0$.

Запишіть вирази у вигляді добутку (198–200):

198°. а) $3a(a-b)+2b(a-b)$; б) $5(m-2)-m(m-2)$;
в) $6m(p-3)+5n(p-3)$; г) $7q(p-q)-2(p-q)$;
ґ) $2c(x+y)+(x+y)$; д) $d(a+b)-(a+b)$.

Вказівка. Для попередження можливих помилок розв'язання подібних вправ доцільно, принаймні на перших порах, здійснювати у такій послідовності:

ґ) $2c(x+y)+(x+y)=2c(x+y)+1\cdot(x+y)=(x+y)(2c+1)$.

199. а) $3m+n-x(3m+n)$; б) $(a-b)-2c(a-b)$;
в) $a(b-5)+2(5-b)$; г) $2y(5-a)+5-a$;
ґ) $6(x-3)-x(3-x)$; д) $3a(1-a)-4(a-1)$.

Вказівка. в) $a(b-5)+2(5-b)=a(b-5)-2(b-5)=(b-5)(a-2)$.

200*. а) $5(c+d)+b(-c-d)$; б) $2x(3+y)-y(y+3)$;
в) $2c(c-4)-4+c$; г) $3(a-b)+(a-b)^2$;
ґ) $m(n-3)-n+3$; д) $2-a-5(a-2)$;
е) $(x-3)^2-2(x-3)$; є) $(a-4)^2+4-a$.

Розкладіть вирази на множники (201–203):

201°. а) $ab+ad+c(b+d)$; б) $m(x-y)+nx-ny$;
в) $ab-bc-d(a-c)$; г) $ax+bx+ay+by$;
ґ) $ab-ad+bc-dc$; д) $am+bm-ak-bk$.

202. а) $ac - bc - ad + bd$; б) $a^2c^2 + a^2d^2 + bc^2 + bd^2$;

в) $3x - xy + 3y - y^2$; г) $2m^2 + n + m + 2mn$;

ґ) $2m^2 - 2mn - m + n$; д) $3ax - 2a^2 - 2a + 3$.

203. а) $a^5 - a^3 - a^2 + 1$; б) $x^4 - x + 3x^3 - 3$;

в) $a^6 - 3a^4 - 2a^2 + 6$; г) $y^3 + 1 + y^2 + y$;

ґ) $y^2 + 7x - xy - 7y$; д) $x^6 + 6 - 3x^4 - 2x^2$.

204*. Доведіть тотожності:

а) $x^2 - xy + 2x - 2y = (x - y)(x + 2)$;

б) $a^2 - ab - 3a + 3b = (a - 3)(a - b)$;

в) $a^2 + ab - 3a + 3b = (a - 3)(a + b)$;

г) $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$.

205*. Обчисліть значення виразів, спочатку розклавши їх на множники:

а) $131 \cdot 25 + 17 \cdot 131 + 19 \cdot 69 + 69 \cdot 23$;

б) $4a^3 - 12a^2 - a + 3$, якщо $a = 0,5$;

в) $y^2 + 3xy - 6x - 2y$, якщо $x = 0,15$, $y = 0,55$;

г) $5mn - n^2 - n + 5m$, якщо $m = 1,2$, $n = 6$;

ґ) $a^2 + 4a^3 + 4a + 1$, якщо $a = 0,5$;

д) $ab^2 - 4b - a^2b + 4a$, якщо $a = 1,5$, $b = 2,5$.

206*. Розкладіть на множники:

а) $(ab)^n(bc)^k - (ab)^3(bc)^2$, де n і k — натуральні числа;

б) $a^{3n}b^{2n} + a^{2n}b^{3n}$, де n — натуральне число.

207. Розв'яжіть рівняння:

а) $x(x - 3) + (x - 3) = 0$; б) $x(x - 3) + 4x - 12 = 0$;

в) $x^2 - 4x + x - 4 = 0$; г) $x^2 + 4x + x + 4 = 4$;

ґ) $x^3 - 1 + x - x^2 = 0$; д) $3y^3 + 2 + 2y^2 + 3y = 0$.

208*. Із прямокутного листа жерсті зі сторонами a дм і b дм вирізали по кутах однакові квадрати зі стороною h дм. З фігури, що утворилася, виготовили ящик. Запишіть вираз для обчислення площі поверхні та об'єму ящика (рис. 16).

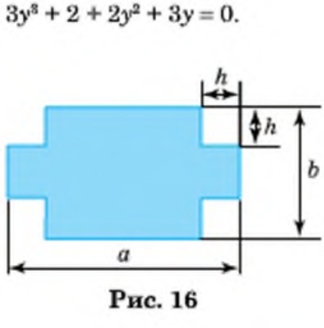


Рис. 16

209. Якщо одну сторону квадрата збільшити на 8 м, а другу — зменшити на 5 м, то площа одержаного прямокутника буде на 4 м^2 меншою від площі квадрата. Обчисліть площу квадрата.

210. Якщо одну сторону квадрата зменшити на 22 м, а другу — збільшити на 68 м, то площа одержаного прямокутника стане меншою від площі квадрата на 24 м^2. Обчисліть площу квадрата.

211. Якщо одну сторону прямокутника збільшити на 2 дм, а іншу — зменшити на 0,5 м, то дістанемо квадрат, площа якого на 50 дм^2 менша від площі прямокутника. Обчисліть площу квадрата.

212. Якщо основу прямокутника зменшити на 4 см, а бічну сторону збільшити на 0,5 дм, до дістанемо квадрат, площа якого на 40 см^2 більша за площу прямокутника. Обчисліть площу прямокутника.

213. Периметр прямокутника дорівнює 36 м. Якщо одну його сторону збільшити на 1 м, а іншу – на 2 м, то площа фігури збільшиться на 30 м^2. Обчисліть площу даного прямокутника.

214*. Маємо чотири послідовні цілі числа. Доведіть, що добуток середніх чисел більший за добуток крайніх на 2.

215*. Маємо чотири послідовні парні числа. Доведіть, що добуток середніх чисел більший за добуток крайніх на 8.

216*. Маємо чотири послідовні непарні числа. Доведіть, що добуток середніх чисел більший за добуток крайніх на 8.

217*. Запишіть вирази у вигляді добутку двочлена і тричлена:

а) $m^2 + m^3n + m^2n - mn^3 - n^3 - n^2$;

б) $x^2y^4 - y^4x + y^4 - x^2z^3 + xz^3 - z^3$;

в) $m^2n^2 - n^3 + 3n^2 - m^2 + n - 3$;

г) $b^2p^2 - b^2g^4 + b^2n^3 - c^2p^2 + c^2g^4 - c^2n^3$.

218*. Розкладіть на множники:

а) $2a^2 - 10ac + 3ab - 15bc + a - 5c$;

б) $16xy^2 - 10z^3 + 32xz^2 - 5y^2z$;

в) $y^{n-3} + y^{n-2} + y^n + y^{n+1}$;

г) $x^n + 2x^{n-2} + x^{n-4} + x^{n+1}$.

2.5. Різниця квадратів

① **Добуток суми і різниці двох виразів.** Запишемо добуток суми виразів a і b та їх різниці і перетворимо його у многочлен. Маємо:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2. \qquad (1)$$

Добуток суми двох виразів і їх різниці дорівнює різниці квадратів цих виразів.

На основі цієї тотожності значно спрощуються перетворення аналогічних добутків. Наприклад:

1) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 4^2 = x^2 - 16$;

2) $(2a - b)(2a + b) = (2a)^2 - b^2 = 4a^2 - b^2$;

3) $(3m + 2n)(2n - 3m)$.

У цьому випадку для застосування встановленої тотожності достатньо переставити доданки у перших дужках:

$$(3m + 2n)(2n - 3m) = (2n + 3m)(2n - 3m) =$$
$$= (2n)^2 - (3m)^2 = 4n^2 - 9m^2.$$

Встановлену тотожність можна використати також для спрощення обчислень. Наприклад:

$102 \cdot 98 = (100 + 2)(100 - 2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9996.$

② **Як розкласти на множники різницю квадратів.** Якщо поміняти місцями ліву і праву частини тотожності (1), дістанемо:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b). \qquad (2)$$

Тобто

різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і їх різниці.

Тотожність (2) використовують для розкладання многочленів на множники. Наприклад:

1) $m^2 - (2n)^2$. Цей вираз є різницею квадратів одночленів m і $2n$, тому маємо: $m^2 - (2n)^2 = (m + 2n)(m - 2n)$.

2) $(a - b)^2 - a^2$. Це різниця квадратів виразів $a - b$ і a, тому $(a - b)^2 - a^2 = (a - b + a)(a - b - a) = (2a - b)(-b) = b(b - 2a)$.

3) $x^4 - 36$.

Якщо у попередніх двох прикладах вирази були записані у вигляді різниці квадратів, то останній вираз спочатку потрібно звести до такого вигляду. Оскільки $x^4 = (x^2)^2$ і $36 = 6^2$, то $x^4 - 36 = (x^2)^2 - 6^2 = (x^2 - 6)(x^2 + 6)$.

4) $9m^2 - 25n^2 = (3m)^2 - (5n)^2 = (3m - 5n)(3m + 5n)$.

? Запитання для самоперевірки

1. Які з рівностей правильні:
   а) $(a - 2)(a + 2) = a^2 - 4$;
   б) $(3 + b)(b - 3) = 9 - b^2$;
   в) $(m - n)(-m - n) = n^2 - m^2$;
   г) $(-x - y)(y - x) = x^2 - y^2$?
2. Наведіть приклади виразів, які:
   а) є різницею квадратів двох виразів;
   б) можна подати у вигляді різниці квадратів двох виразів.

Задачі та вправи

219°. Запишіть вирази у вигляді многочленів:

а) $(a - x)(a + x)$; б) $(m + x)(m - x)$;
в) $(2 - x)(2 + x)$; г) $(x + 4)(x - 4)$;
ґ) $(p - k)(p + k)$; д) $(6 + b)(6 - b)$;
е) $(c - d)(d + c)$; є) $(p + b)(b - p)$;
ж) $(x - 4)(x + 4)$; з) $(x + 5)(x - 5)$.

220°. Запишіть двочлени у вигляді добутку:

а) $a^2 - x^2$; б) $m^2 - n^2$; в) $9 - x^2$;
г) $a^2 - 16$; ґ) $p^2 - m^2$; д) $c^2 - k^2$;
е) $(2x)^2 - b^2$; є) $9x^2 - b^2$; ж) $4x^2 - 9y^2$;
з) $36a^2 - y^2$; и) $25a^2 - 16b^2$; і) $81x^2 - 64y^2$.

Обчисліть (221–222):

221°. а) $85^2 - 15^2$; б) $89^2 - 11^2$; в) $75^2 - 25^2$;
г) $78^2 - 12^2$; ґ) $99{,}1^2 - 0{,}9^2$; д) $27^2 - 13^2$.

222. а) $\left(8\frac{4}{5}\right)^2 - \left(1\frac{1}{5}\right)^2$; б) $\left(9\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$;

в) $0{,}25^2 - \left(1\frac{3}{4}\right)^2$; г) $\left(2\frac{1}{5}\right)^2 - (-0{,}2)^2$.

223. Спростіть:

а) $(m + n)(m - n)$; б) $(a + 2)(a - 2)$; в) $(x - 5y)(x + 5y)$;
г) $(4b - 3)(4b + 3)$; ґ) $(2x - 3y)(2x + 3y)$; д) $(3y^2 + a)(3y^2 - a)$.

224*. Доведіть, що значення виразу $(y + 3)(y - 3) + 10$ додатне за будь-яких значень y. Знайдіть найменше значення, якого може набувати цей вираз.

225. Перетворіть у многочлени вирази:

а) $(a - b)(b + a)$; б) $(2c + d)(d - 2c)$; в) $(a - 3)(3 + a)$;
г) $(4x + 7y)(7y - 4x)$; ґ) $(m^2 - n)(n + m^2)$; д) $(p - s)(-p - s)$;
е) $(5m - n)(n + 5m)$; є) $(a^3 + b^2)(b^2 - a^3)$; ж) $(3x^2 + y^3)(y^3 - 3x^2)$.

Розкладіть вирази на множники (226–227):

226°. а) $p^2 - k^2$; б) $49 - b^2$; в) $36a^2 - y^2$;
г) $25a^2 - 16b^2$; ґ) $81x^2 - 64y^2$; д) $0{,}64a^2 - 0{,}49b^2$.

227. а) $1{,}44a^2 - 2\frac{1}{4}b^2$; б) $1\frac{11}{25}x^4 - 1\frac{7}{9}y^2$; в) $1{,}69x^2 - 2{,}25y^2$;

г) $\left(\frac{a}{2} - 3\right)^2 - \frac{a^2}{4}$; ґ) $\left(2 - \frac{x}{y}\right)^2 - \frac{x^2}{y^2}$; д) $(x - 0{,}5)^2 - 0{,}25$.

Обчисліть (228–229):

228°. а) $98 \cdot 102$; б) $97 \cdot 103$; в) $998 \cdot 1002$;
г) $57 \cdot 63$; ґ) $73 \cdot 87$; д) $997 \cdot 1003$.

229. а) $99{,}7 \cdot 100{,}3$; б) $98{,}8 \cdot 101{,}2$; в) $97{,}4 \cdot 106{,}6$;

г) $45\frac{1}{5} \cdot 14{,}8$; ґ) $39\frac{2}{3} \cdot 40\frac{1}{3}$; д) $27{,}6 \cdot 72\frac{3}{5}$.

230*. Доведіть, що:

а) $156^2 - 144^2$ ділиться на 300;
б) $736^2 - 264^2$ ділиться на 8000.

Спростіть вирази (231–232):

231. а) $(2x-y^2)(2x+y^2)-y^4$; б) $(8xy-9y)(8xy+9y)+81y^2$;
в) $(12x-y^3)(12x+y^3)-144x^2$; г) $(0,6x^2-y)(0,6x^2+y)+y^2$.

232. а) $(1,3x^2-y)(1,3x^2+y)-1,69x^4$; б) $\frac{4}{9}b^2+\left(a^2+\frac{2}{3}b\right)\left(a^2-\frac{2}{3}b\right)$;
в) $(x-4)(x+4)(x^2+16)$; г) $(25x^2+9)(5x-3)(5x+3)$;
ґ) $(0,25x^2+0,16)(0,5x-0,4)(0,4+0,5x)$.

233*. Доведіть, що значення виразів не залежать від значення змінної x:
а) $(7-x)(7+x)+x^2$;
б) $0,7+x^2-(x+0,5)(x-0,5)$;
в) $(x+3)(x-3)-x(x-3)-3x$;
г) $-x(x+64)+64x+(8+x)(x-8)$.

234*. Якщо кожну з двох протилежних сторін квадрата збільшити на 3 см, а кожну з двох інших — зменшити на 3 см, то дістанемо прямокутник. Площа якої фігури більша? На скільки?

235*. Як зміниться площа квадрата, якщо одну його сторону збільшити на 4 см, а другу, суміжну з нею, зменшити на стільки ж?

236*. Знайдіть помилки, виправте їх і поясніть, чому так трапилося:
а) $x^2-64=(x-8)(x+8)$;
б) $2x^2-9=(2x-3)(2x+3)$;
в) $x^2-0,25=(x-0,5)(x+0,5)$;
г) $x^2+49=(x+7)(x-7)$;
ґ) $x^2-0,64=(x-0,8)(x-0,8)$;
д) $(xy^2-4x)(xy^2+4x)=x^2y^4-4x^2$.

237. Розв'яжіть рівняння:
а) $(x-4)(x+4)=0$; б) $x^2-25=0$; в) $36-x^2=0$;
г) $1,44-x^2=0$; ґ) $\frac{4}{9}-x^2=0$; д) $\frac{25}{36}-x^2=0$.

238*. Заповніть пропущені місця відповідними одночленами так, щоб утворилися тотожності:
а) $(4a+\ldots)(\ldots-7b)=16a^2-49b^2$;
б) $(\ldots+5b)(\ldots-5b)=49x^2-\ldots$;
в) $(2x-\ldots)(\ldots+\ldots)=4x^2-0,64y^2$;

г) $(0{,}4x - ...)(0{,}4x + ...) = ... - \frac{4}{9}y^2$;

ґ) $\left(... + \frac{1}{2}y\right)(x - ...) = x^2 - \frac{1}{4}y^2$.

239*. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x - 7)(x + 7) = x^2 + 2x$; б) $2y - y^2 = (3 - y)(3 + y)$;

в) $(12 - x)(12 + x) = 4x - x^2$; г) $(14 + x)(14 - x) = 7x - x^2$.

2.6. Квадрат двочлена

① **Добуток двох однакових двочленів.** Знайдемо добуток двох однакових двочленів $(a + b)(a + b)$. За правилом множення многочленів маємо:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

З іншого боку, $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$.

Отже,

$$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.} \qquad (3)$$

***Квадрат двочлена* дорівнює сумі трьох виразів: квадрата першого члена, подвоєного добутку першого і другого членів та квадрата другого члена.**

Формулу (3) можна проілюструвати, розглянувши площу квадрата, зображеного на рисунку 17.

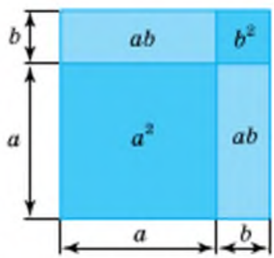


Рис. 17

Розглянемо, якого вигляду набуває формула (3), якщо перед одним із членів двочлена поставити знак «–»:

1) $(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

2) $(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Оскільки $-a + b = b - a$, то

$$\boxed{(a-b)^2 = (b-a)^2 = a^2 - 2ab + b^2.} \qquad (3')$$

Цю формулу читають так:

квадрат різниці двох виразів **дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток першого і другого виразів плюс квадрат другого виразу.**

УВАГА! Застосовуючи розглянуті тотожності, не забувайте, що під a і b розуміють будь-які числа або одночлени.

Нехай потрібно обчислити 101^2. Запишемо число 101 як $(100 + 1)$. Тоді маємо:

$$101^2 = (100 + 1)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 + 200 + 1 = 10\,201.$$

Аналогічно:

$$99^2 = (100 - 1)^2 = 100^2 - 2 \cdot 100 \cdot 1 + 1^2 = 10\,000 - 200 + 1 = 9801.$$

Якщо потрібно записати, наприклад, вираз $(2x + 3)^2$ у вигляді многочлена, то за формулою (3) маємо:

$$(2x + 3)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9.$$

Перетворюючи вираз $(4a - 5b)^2$, зручніше відразу скористатися формулою (3′):

$$(4a - 5b)^2 = (4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot 5b + (5b)^2 = 16a^2 - 40ab + 25b^2.$$

Вираз $(4a - 5b)^2$ можна перетворити і за формулою (3), враховуючи, що членами даного двочлена є вирази $4a$ і $-5b$.

2 Запис тричлена у вигляді квадрата двочлена. Часто доводиться виконувати обернене перетворення, записуючи даний тричлен у вигляді квадрата двочлена. Це перетворення ґрунтується на тотожностях, які можна дістати з формул (3) і (3′), помінявши місцями їхні ліві і праві частини. Маємо:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2,$$

або $a^2 - 2ab + b^2 = (b - a)^2$.

Приклад. Записати вираз $a^2 - 6a + 9$ у вигляді квадрата двочлена.

Розв'язання. Спочатку спробуємо знайти члени тричлена, які можуть бути записані у вигляді квадратів відповідних одночленів. Очевидно, це a^2 і 9. Вони є квадратами одночленів a і 3.

А тепер з'ясуємо, з якими знаками слід узяти ці одночлени. Для цього дивимося на знак подвоєного добутку у даному тричлені: $-6a$. Бачимо, що подвоєний добуток має знак «–». Це означає, що члени одночлена мають різні знаки.

Отже,

$$a^2 - 6a + 9 = (a - 3)^2 \text{, або } a^2 - 6a + 9 = (3 - a)^2.$$

Оскільки $(a - 3)^2 = (3 - a)^2$, то обмежуються, як правило, першим записом.

? Запитання для самоперевірки

1. Які з рівностей є тотожностями:
   а) $(m + n)^2 = (n + m)^2$; б) $(a - b)^2 = (b - a)^2$;
   в) $(b - a)^2 = -(a - b)^2$; г) $(-a - b)^2 = -(a + b)^2$;
   ґ) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$; д) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$?
2. Чи може квадрат суми двох виразів дорівнювати квадрату їх різниці? Відповідь поясніть.

Задачі та вправи

240°. Запишіть вирази у вигляді многочленів:

а) $(m + x)^2$, $(x + d)^2$, $(c - y)^2$;

б) $(n - y)^2$, $(2 - y)^2$, $(x - 5)^2$;

в) $(0{,}5 - x)^2$, $(x - 0{,}4)^2$, $\left(\frac{3}{4} - x\right)^2$;

г) $(0{,}1 - x)^2$, $(-x + 0{,}1)^2$, $(-x - 0{,}1)^2$;

ґ) $(x^2 + x)^2$, $(x^2 - x)^2$, $(-x^2 - x)^2$;

д) $(x^3 + 1)^2$, $(-x^2 + 1)^2$, $(-x^3 - 1)^2$;

е) $(x^2 + x^3)^2$, $(x^3 - x^2)^2$, $(-x^3 - x^2)^2$;

є) $(4x + 3x^2)^2$, $(3x^2 - 4x)^2$, $(-3x - 4x^2)^2$;

ж) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{7}x\right)^2$, $(25 - x)^2$, $(40 - 25x)^2$.

241. Обчисліть, скориставшись формулою квадрата двочлена:

а) 102^2; б) 103^2; в) 97^2; г) 1002^2;

ґ) 998^2; д) $99{,}6^2$; е) $1000{,}4^2$; є) $999{,}7^2$.

Запишіть вирази у вигляді квадрата двочлена (242–243):

242°. а) $x^2 + 2xy + y^2$, $x^2 - 2xy + y^2$;

б) $m^2 - 2xm + x2$, $m^2 + 2mx + x^2$;

в) $4 - 4y + y^2$, $y^2 + 4y + 4$;

г) $0{,}16 + 0{,}8x + x^2$, $x^2 - 0{,}8x + 0{,}16$.

243. а) $x^6 + 2x^3 + 1$, $x^6 - 2x^3 + 1$;

б) $x^4 + 2x^5 + x^6$, $x^4 - 2x^2 + 1$;

в) $x^2 + 16x + 64$, $x^2 - 20x + 100$;

г) $144 + 24x + x^2$, $121 - 22x + x^2$;

ґ) $625 + 50x^2 + x^4$, $1600 + 2000x + 625x^2$.

244. Обчисліть:

а) $37^2 + 2 \cdot 3 \cdot 37 + 3^2$; б) $38{,}3^2 - 2 \cdot 38{,}3 \cdot 8{,}3 + 8{,}3^2$;

в) $82{,}7^2 + 12{,}7^2 - 2 \cdot 82{,}7 \cdot 12{,}7$; г) $71^2 + 29^2 + 71 \cdot 58$;

ґ) $198^2 + 2^2 + 4 \cdot 198$; д) $458^2 + 58^2 - 116 \cdot 458$.

245*. Знайдіть помилки і виправте їх:

а) $(a^n + 1)^2 = a^{2n} + 2a^n + 1$;

б) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$;

в) $(2^n + 3^n)^2 = 4^n + 6^n + 9^n$;

г) $(4 + x)(3 - 3x) = 12 - 9x - 3x^2$;

ґ) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$;

д) $(2a + 3b)(4x + 4y) = 8ax + 12by$.

246*. Замініть зірочки одночленами, щоб утворилися тотожності:

а) $(* + y)^2 = * + 2ay + y^2$; б) $(4x - *)^2 = * - * + y^2$;

в) $(x - *)^2 = * - 6x + *$; г) $* + 24a + * = (4a + *)^2$;

ґ) $(2x^3 + *)^2 = * + 20x^3y^4 + *$.

247*. Заповніть пропущені місця відповідними одночленами так, щоб утворилися тотожності:

а) $3x^2 + 2x + \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}(\ldots + \ldots)^2$; б) $(2a + \ldots)^2 = \ldots + \ldots + 9b^2$;

в) $2(\ldots + \ldots)^2 = 2y^2 + 2y + 0{,}5$; г) $2(\ldots - 3b)^2 = 2a^2 - \ldots + \ldots$.

248. Доведіть тотожності:

а) $(m-n)^2 = (n-m)^2$;

б) $(a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$;

в) $(-a-b)^2 = (a+b)^2$;

г) $(c-d)^2 = (c+d)^2 - 4cd$;

ґ) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$;

д) $(a-b)^2 + 2ab = a^2 + b^2$;

е) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$.

Спростіть вирази (249–250):

249°. а) $(x-y)^2 + (x+y)^2$;

б) $(x+y)^2 - (x-y)^2$;

в) $(a-b)^2 - (a+b)(a-b)$;

г) $(2a-3b)^2 - (2a+3b)^2$.

250. а) $24a^2 - (7a-2)^2 + (5a-3)(5a+3)$;

б) $5(3a-2)^2 - 5(3a-4)(3a+4)$.

251*. Різниця квадратів двох послідовних цілих додатних чисел дорівнює 11. Знайдіть ці числа.

252*. Різниця квадратів двох послідовних парних додатних чисел дорівнює 28. Знайдіть ці числа.

253*. Різниця квадратів двох послідовних непарних додатних чисел дорівнює 32. Знайдіть ці числа.

254. Знайдіть числові значення виразів:

а) $(x-0{,}4)^2 - x(x+1{,}8)$, якщо $x = 0{,}4$;

б) $(x-1{,}2)^2 - y(y+2x) + (y+x)^2$, якщо $x = 3{,}2$;

в) $(x+y)^2 + (x-y)(x+y) + (x-y)^2$, якщо $x = 3$, $y = 2$;

г) $(3x-5)^2 - (3x+5)(3x-5)$, якщо $x = 0{,}1$.

255. Доведіть, що значення виразів не залежать від значення змінної x:

а) $(5+x)^2 + (5-x)^2 - 2x^2$;

б) $(6+x)^2 + (6-x)(6+x) - 12x$;

в) $x^2 - 6x - (3-x)^2$;

г) $(x-y)^2 - (x+y)^2 + 4xy$;

ґ) $(x+1)^2 + 3(x-1)^2 - 4x(x-1)$;

д) $0{,}8ax - (0{,}4a+x)^2 - (0{,}2a-x)(0{,}2a+x)$.

256*. Доведіть, що за довільного цілого значення x значення виразу $(6x + 5)^2 - (4x + 5)^2$ ділиться на 40.

Розв'яжіть рівняння (257–258):

257. а) $(x - 7)^2 = x^2$; б) $(x + 4)^2 = (x - 5)^2$;
в) $(x - 8)^2 = x^2 - 8$; г) $(x - 9)^2 = x^2 + 81$;
ґ) $(x - 12)^2 - x(x - 11) = 1$; д) $x^2 - 8x + 16 = 0$.

258. а) $x^2 - 10x + 25 = 0$; б) $x^2 + 49 = 14x$;
в) $(6x - 1)^2 - 4(3x + 2)(3x - 2) = -7$.

Доведіть, що за будь-яких значень x дані вирази набувають тільки додатних значень (259–260):

259. а) $x^2 + 5$; б) $(x + 3)^2 + 1$;
в) $(x - 7)^2 + 2$; г) $4 + (x - 4)^2$.

260*. а) $x^2 + 6x + 10$; б) $x^2 - 10x + 30$.

261. Розкладіть на множники:
а) $(x^2 - 4xy + 4y^2) - 4$; б) $(a^2 - 6a + 9) - b^2$;
в) $4m^2 - 4mn + n^2 - 1$; г) $b^2 + 10b + 25 - 4c^2$;
ґ) $1 - b^2 + 4ab - 4a^2$; д) $9x^2 - y^2 + 10y - 25$.

262*. Доведіть, що $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

263*. Розкрийте дужки:
а) $(y + x + c)^2$; б) $(x + y - c)^2$; в) $(x - y - 1)^2$;
г) $(x - y - c)^2$; ґ) $(x - 2 - y)^2$; д) $(2x + y + 3c)^2$.

2.7. Сума і різниця кубів

① **Сума кубів.** Тотожності (1), (3) і (3′) дають можливість істотно спростити перетворення відповідних добутків і відразу записати потрібний результат. Тому їх називають ***формулами*** або ***тотожностями скороченого множення***. Розглянемо ще дві формули.

Знайдемо добуток двочлена $a + b$ і тричлена $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Отже,

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3. \qquad (4)$$

Проаналізуємо виведену формулу. Ліва її частина є добутком суми виразів a і b та тричлена $a^2 - ab + b^2$, який називають ***неповним квадратом різниці*** виразів a і b.

Цю назву легко пояснити, порівнявши вираз з так званим повним квадратом різниці виразів a і b:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Відмінність між ними полягає у відсутності двійки перед добутком ab. Аналогічно тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають ***неповним квадратом суми*** виразів a і b.

Праворуч у формулі (4) маємо суму кубів виразів a і b. Тому цю формулу читають так:

добуток суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці дорівнює сумі кубів цих виразів.

Застосуємо цю формулу для перетворення виразів:

1) $(m + n)(m^2 - mn + n^2) = m^3 + n^3$;

2) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4) = b^3 + 2^3 = b^3 + 8$.

Помінявши місцями ліву і праву частини формули (4), дістанемо:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2). \qquad (4')$$

Ця формула читається так:

сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

Цю формулу використовують для розкладання на множники суми кубів двох виразів.

Наприклад:

1) $8 + x^3 = 2^3 + x^3 = (2 + x)(4 - 2x + x^2)$;

2) $a^3 + 27b^3$. Запишемо спочатку $27b^3$ як куб виразу $3b$, а потім застосуємо формулу (4′). Маємо:

$$a^3 + 27b^3 = a^3 + (3b)^3 = (a + 3b)(a^2 - 3ab + 9b^2).$$

② **Різниця кубів.** Скористаємося формулою (4′) для розкладання на множники виразу $a^3 - b^3$. Для цього запишемо його у вигляді суми:

$$a^3 - b^3 = a^3 + (-b^3) = a^3 + (-b)^3.$$

Оскільки $-b^3 = (-b)^3$, то тотожність даних виразів сумніву не викликає. А тепер розкладемо на множники $a^3 + (-b)^3$ як суму кубів виразів a і $-b$. Маємо:

$$a^3 + (-b)^3 = (a + (-b))(a^2 - a(-b) + (-b)^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Остаточно:

$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).} \qquad (5)$$

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Розкладемо на множники за цією формулою вирази:

1) $m^3 - 5^3 = (m - 5)(m^2 + 5m + 25)$;

2) $64a^3 - y^3 = (4a)^3 - y^3 = (4a - y)(16a^2 + 4ay + y^2)$.

Помінявши місцями ліву і праву частини формули (5), дістанемо тотожність, яку використовують для перетворення добутку різниці виразів і неповного квадрата їх суми в різницю кубів цих виразів:

$$\boldsymbol{(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.} \qquad (5')$$

Наприклад:

1) $(x - 5)(x^2 + 5x + 25) = x^3 - 5^3 = x^3 - 125$;

2) $(3m - 2)(9m^2 + 6m + 4) = (3m)^3 - 2^3 = 27m^3 - 8$.

? Запитання для самоперевірки

1. Які з добутків можна записати у вигляді двочлена:

а) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9)$; б) $(a + 3)(a^2 - 6a + 9)$;

в) $(a + 3)(a^2 + 3a + 9)$; г) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$?

2. На які множники розкладається:

а) сума кубів двох виразів;

б) різниця кубів двох виразів?

3. Які з виразів можна записати як суму або різницю кубів двох виразів:

а) $a^3 + 8$; б) $m^3 - 27$; в) $x^3 + 9$;

г) $m^6 + n^3$; ґ) $x^9 - y^9$; д) $c^8 + d^8$?

Відповідь поясніть.

Задачі та вправи

Запишіть добутки у вигляді двочленів (264–265):

264°. а) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; б) $(x + y)(x^2 - xy + y^2)$;

в) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$; г) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;

ґ) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$; д) $(3 + x)(9 - 3x + x^2)$.

265. а) $(1 - x + x^2)(1 + x)$; б) $(4x^2 + 6x + 9)(2x - 3)$;

в) $(4x - 3)(16x^2 + 12x + 9)$; г) $(2x^4 + b)(4x^8 - 2bx^4 + b^2)$;

ґ) $(5x + 4)(25x^2 - 20x + 16)$; д) $(x^2 + y^2)(x^4 - 2x^2y^2 + y^4)$.

Спростіть вирази (266–267):

266°. а) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) - a^3 + 3$;

б) $(x + 1)(x^2 - x + 1) + x^3 + 1$;

в) $(2m - 1)(4m^2 + 2m + 1) + 4 - 8m^3$;

г) $a^3 - 2b^3 + (2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$.

267*. а) $m^2(m + 1) + (m - 2)(m^2 + 2m + 4)$;

б) $8x^3 + 13 - (2x + 2)(4x^2 - 4x + 4)$;

в) $(a - 3)(a^2 + 3a + 9) - a(a - 5)(a + 5)$;

г) $b(b - 1)(b + 1) - (b - 2)(b^2 + 2b + 4)$.

Розкладіть на множники двочлени (268–269):

268°. а) $x^3 + y^3$; б) $x^3 - y^3$; в) $m^3 - n^3$; г) $x^3 - 8$;

ґ) $27 + y^3$; д) $8x^3 - 27y^3$; е) $a^3 + 1$; є) $125 - m^3$.

269. а) $0{,}001 - p^3$; б) $p^3 + 0{,}008$; в) $0{,}001y^3 - x^3$;

г) $0{,}125x^3 - 0{,}064$; ґ) $\frac{1}{8}x^3 + \frac{27}{64}$; д) $\frac{27}{64}x^6 + \frac{8}{125}y^6$;

е) $64x^3 + 125y^3$; є) $y^2 - y^6$; ж) $a^9 + b^3$.

Заповніть пропущені місця одночленами так, щоб утворилися тотожності (270–271):

270. а) $(p - k)(... + ... + ...) = p^3 - k^3$;

б) $(m + n)(... - ... + ...) = m^3 + n^3$;

в) $(... - ...)(... + ... + ...) = x^3 - y^3$;

г*) $(x - ...)(... + ... + y^2) = ... - y^3$.

271. а) $c^3 - p^3 = (... - ...)(c^2 + ... + ...)$;

б*) $(x - ...)(... + xy + ...) = ... - y^3$;

в) $(x + 2)(x^2 - 2x + ...) = ... + 8$;

г*) $8m^3 + ... = (... + ...)(... - ... + n^2)$.

272*. Розкладіть на множники двочлен $a^6 - 1$:

а) як різницю квадратів; б) як різницю кубів.

Розв'яжіть рівняння (273–274):

273°. а) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 2x + x^3$;

б) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16) = 4x + x^3$;

в) $(x - 0,1)(x^2 + 0,1x + 0,01) = x^3 - 0,1x$.

274. а) $(4 - x)(16 + 4x + x^2) - 16x = -x^3$;

б) $(x + 5)(25 - 5x + x^2) - 25x = x^3$;

в) $(16 - 4x + x^2)(4 + x) = x^3 + 4x$.

275. Доведіть, що:

а) $431^3 + 134^3$ ділиться на 565;

б) $21^6 + 19^3$ ділиться на 460;

в) $21^6 - 19^3$ ділиться на 422;

г) $44^6 + 8^6$ ділиться на 2000.

276. Доведіть, що три останні цифри числа $4987^3 + 13^3$ — нулі.

277*. Доведіть, що коли різниця двох натуральних чисел ділиться на яке-небудь число, то й різниця їх кубів ділиться на те саме число.

278*. Розкладіть на множники вирази:

а) $(p - 3)^3 - 27$; б) $8 + (x + 2)^3$; в) $(a + 4)^3 + 1$;

г) $64 - (5 - b)^3$; ґ) $(6 - b)^3 - 1$; д) $(m + 7)^3 - 125$.

2.8. Застосування кількох способів перетворення виразів

У попередніх параграфах були розглянуті тотожні перетворення одночленів і многочленів. Систематизуємо їх, попарно згрупувавши взаємно обернені перетворення.

Перетворення добутку одночлена і многочлена у многочлен (I)

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки (I′)

Перетворення добутку двох многочленів у многочлен (II)

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Розкладання многочлена на множники способом групування (II′)

Перетворення добутку різниці двох виразів та їх суми у многочлен (III)

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів (III′)

Перетворення добутку двох однакових двочленів у многочлен (IV)

$$(a + b)(a + b) = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Розкладання на множники тричлена, що дорівнює сумі квадратів двох виразів та їх подвоєного добутку (IV′)

Перетворення добутку суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці у многочлен (V)

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3.$$

Розкладання на множники суми кубів двох виразів (V′)

Перетворення добутку різниці двох виразів і неповного квадрата їх суми у многочлен (VI)

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3.$$

Розкладання на множники різниці кубів двох виразів (VI′)

Ці перетворення використовувалися для спрощення виразів, обчислення їхніх значень, доведення тотожностей, розв'язування рівнянь тощо. Зазвичай треба було застосувати якесь одне перетворення. Але часто доводиться вдаватися відразу до кількох перетворень.

Приклад 1. Розкласти на множники вираз $2x^5 - 2x$.

Розв'язання. Розкладаючи многочлен на множники, насамперед потрібно встановити, чи не мають усі його члени спільного множника.

Якщо такий виявиться, то його можна винести за дужки. У даному випадку таким множником є $2x$:

$$2x^5 - 2x = 2x(x^4 - 1).$$

Далі з'ясовуємо, чи не можна утворений у дужках многочлен розкласти на множники, користуючись однією з наведених вище тотожностей.

Вираз $(x^4 - 1)$ є двочленом, який можна записати як різницю квадратів двох виразів: x^2 і 1, і подальші його перетворення здійснювати, користуючись тотожністю (III').

Отже,

$$2x^5 - 2x = 2x(x^4 - 1) = 2x((x^2)^2 - 1^2) =$$
$$= 2x(x^2 - 1)(x^2 + 1) = 2x(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1).$$

Приклад 2. Розкласти на множники вираз $x^2 - 2xy + y^2 - 4$.

Розв'язання. Аналізуючи даний вираз, помічаємо, що перший його тричлен можна записати у вигляді квадрата двочлена: $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$.

Одержаний вираз $(x - y)^2 - 4$ можна перетворити в добуток як різницю квадратів виразів $x - y$ і 2.

Маємо:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4 = (x - y)^2 - 2^2 = (x - y - 2)(x - y + 2).$$

Приклад 3. Довести, що різниця між кубом будь-якого цілого числа і цим числом ділиться на 6.

Розв'язання. Позначимо дане число, наприклад, буквою n і запишемо відповідну різницю: $n^3 - n$. Перетворимо її:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1).$$

Бачимо, що добуток складається з трьох послідовних цілих чисел (у порядку зростання): $n - 1$, n і $n + 1$.

Як ви знаєте, з трьох послідовних цілих чисел принаймні одне — парне (тобто ділиться на 2) і одне ділиться на 3. Якщо ж добуток одночасно ділиться на 2 і на 3, то він ділиться і на 6.

Інколи для спрощення виразів одне й те саме перетворення доводиться використовувати кілька разів.

Приклад 4. Спростити вираз $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$.

Розв'язання. Добуток перших двох множників на основі тотожності (III) дорівнює:

$$(a-1)(a+1)=a^2-1.$$

Далі скористаємося тотожністю (III) ще раз для перетворення добутку одержаного виразу і (a^2+1):

$$(a^2-1)(a^2+1)=(a^2)^2-1=a^4-1.$$

І, нарешті, на основі тієї самої тотожності отримуємо остаточний результат:

$$(a^4-1)(a^4+1)=(a^4)^2-1=a^8-1.$$

Отже,

$$(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)=(a^2-1)(a^2+1)(a^4+1)=$$
$$=(a^4-1)(a^4+1)=a^8-1.$$

Історична довідка

Георгій Вороний

Розкладанням многочленів на множники захоплювався в шкільні роки видатний український математик Георгій Вороний (1868–1908). Пізніше юнак вирішив випробувати свої сили у розв'язуванні складніших завдань, одним із яких було знаходження цілих додатних розв'язків рівняння $x^2+y^2+z^2+2=mxy$, де m — ціле число.

Народився Г. Вороний у с. Журавка (нині Чернігівської області). Садиба його батьків збереглася до наших днів і знаходиться в мальовничому куточку України. Вже у сорок років він досягнув видатних успіхів у математиці і здобув високий авторитет у науковому світі.

Задачі та вправи

279°. Розкладіть на множники:

а) $81p^2-k^2$;   б) px^2-py^2;   в) $7p^2-7k^2$;

г) $m^2x - n^2x$;   ґ) $a^3 - a$;   д) $b^5 - b^3$;
е) $18x^3 - 2x$;   є) $18c^2d - 8d$;   ж) $0{,}5a^2 - 4{,}5$;
з) $0{,}25x^2 - 2{,}25$;   и) $27c^2 - 48$;   і) $2d^4 - 16d$;
ї) $x^4 + x$;   й) $a^5 - a^2$;   к) $2b^3 + 16$.

280°. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 - 9x = 0$;   б) $25y - y^3 = 0$;   в) $x^3 - 16x = 0$;   г) $2x^3 - 18x = 0$.

281*. Доведіть, що значення виразу $3a^3 - 3a$ за будь-якого натурального a ділиться на 9.

282°. Запишіть у вигляді добутку двох множників:

а) $a^2 + 2ab + b^2$;   б) $x^2 - 4x + 4$;
в) $4m^2 + 4mn + 1$;   г) $9c^2 + 12cd + 4d^2$.

Запишіть у вигляді добутку трьох множників (283–284):

283. а) $2a^2 + 4ab + 2b^2$;   б) $3x^2 - 12x + 12$;
в) $bx^2 + 2bxy + by^2$;   г) $3b^2 - 6b + 3$.

284*. а) $\frac{1}{2}m^2 + mn + \frac{1}{2}n^2$;   б) $\frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{4}c^2$;

в) $2a^3 - 0{,}5a$;   г) $3x^2 - \frac{1}{3}$.

285. Знайдіть значення виразів раціональним способом:

а) $x^3 - 2x^2y + xy^2$, якщо $x = 2{,}4$, $y = -7{,}6$;

б) $(x^2 + 1)^2 - (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$, якщо $x = \frac{1}{4}$;

в) $\frac{1}{2}a^2 + ab + \frac{1}{2}b^2$, якщо $a = 6{,}4$, $b = 3{,}6$;

г) $ax^2 + 2axy + ay^2$, якщо $a = 0{,}4$, $x = 7{,}1$, $y = 2{,}9$.

286. Розкладіть на множники:

а) $(x + 3)^2 - 4x^2$;   б) $3(x + 3)^2$;
в) $4 - (p - 2)^2$;   г) $20 - 5(p - 2)^2$;
ґ) $a^2 + 2ab + b^2 - 4$;   д) $m^2 + 14m + 49 - b^2$.

287. Запишіть у вигляді добутку трьох множників:

а) $a^3 + a^2 - ab^2 - b^2$;   б) $9b + a^3 - a^2b - 9a$;
в) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$;   г) $ab^2 - a - b^3 - b$;
ґ) $x^3 - 4y + x^2y - 4x$;   д) $x^3 - 3y^2 + 3x^2 - xy^2$.

288*. Розкладіть на множники:

а) $a^4 + a^3 + a + 1$; б) $m^5 - m^3 + m^2 - 1$;

в) $3d^4 + 3d^3 - 3d - 3$; г) $m^3 - 8 + 6m^2 - 12m$.

289*. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$; б) $y^3 - y^2 - 16y + 16 = 0$;

в) $2x^3 + 16 - x^2 - 32x = 0$; г) $2x^3 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$.

290*. Розкладіть тричлени на множники:

а) $x^2 + 8x + 15$; б) $x^2 + 10x + 24$;

в) $x^2 - 6x + 5$; г) $x^2 - 8x + 12$.

Зразок. $x^2 + 8x + 15 = (x^2 + 8x + 16) - 1 = (x + 4)^2 - 1 =$
$= (x + 4 + 1)(x + 4 - 1) = (x + 5)(x + 3)$.

291*. Розкладіть многочлени на множники заміною середнього його члена сумою двох одночленів:

а) $x^2 - 5x + 6$; б) $x^2 + 6x + 8$; в) $x^2 - 7xy + 12y^2$;

г) $x^2 - 7xy + 10y^2$; ґ) $x^2 - x - 12$; д) $x^2 - 3xy - 10y^2$.

Зразок. $x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) =$
$= (x - 3)(x - 2)$.

292. Спростіть вирази і знайдіть їхні числові значення:

а) $(6x - 1)(6x + 1) - (12x - 5)(3x + 1)$, якщо $x = 0{,}2$;

б) $(5 + 2x)^2 - (5 + 3x)(5 - 3x)$, якщо $x = -3$;

в) $(4 - 0{,}5x)^2 - (5 + 0{,}5x)(6 + 0{,}5x)$, якщо $x = -2$;

г) $(2x + 3)(2x - 3) - (2x + 1)^2$, якщо $x = -2{,}5$.

Завдання для самоперевірки

I – II рівні

1. Зведіть подібні члени многочленів:

а) $17x + 4x - 23x - 7x$; б) $8a - 3 + 4a - 20$;

в) $4m + 2n - 5m - n$; г) $9x^3 - 4x^2 + 6x^2 - 16x^3$.

2. Розкрийте дужки і спростіть:

а) $(2a - 3d) + (4a + 7d)$; б) $4x - 3y + 2 + (5y - 3x)$;

в) $4m + 5n - (m + 3n)$; г) $m^2 - 5n^2 - (8m^2 - 5n^2 + 3)$.

3. Знайдіть суму і різницю многочленів:

а) $6a^2 - 3b^2$ і $18a^2 - 4b^2$; б) $12x - 4xy - 1$ і $9x - 2xy + 3$;

в) $2{,}5x^2 + 3{,}2y^4$ і $4{,}3x^2 - 0{,}3y^4$; г) $5{,}4c^2 + d^2 + 5{,}7$ і $4{,}4c^2 - d^2 - 5{,}7$.

4. Обчисліть значення виразів, спочатку їх спростивши:

а) $3a^2 - 2b - (4b + 3a^2)$, якщо $b = \frac{1}{6}$;

б) $8m + 1 - (3 - 2m)$, якщо $m = 0{,}5$;

в) $-5(a - 2) + 3(a + 1)$, якщо $a = 2\frac{3}{4}$;

г) $3x - 5{,}8 - (2{,}2x - 4{,}2)$, якщо $x = 4{,}5$.

5. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:

а) $3(a + b + c)$; б) $7(a + b) + (a - b) \cdot 7$;

в) $a(2a^2 - a) - 3(a - 5)$; г) $m(2m - 3n) + 2n(m - 4n)$.

6. Розкладіть многочлени на множники, винісши за дужки спільний множник:

а) $4a^2b - 6a^2$; б) $2c^3 + 16cd$;

в) $3mn^2 + 9m^3n - 12mn$; г) $5x^2y - 10x^2y^2 + 15x^3y^3$.

7. Знайдіть числове значення виразів, спочатку розклавши їх на множники:

а) $a^2 - ab$, якщо $a = 7{,}6$; $b = 2{,}6$;

б) $3{,}66 \cdot 0{,}12 + 6{,}34 \cdot 0{,}12$;

в) $2x^2y + 4xy^2$, якщо $x = 2$; $y = -0{,}5$;

г) $464 \cdot 12{,}8 - 264 \cdot 12{,}8$.

8. Розв'яжіть рівняння:

а) $7(12x + x) + 4 = 6(x - 3)$; б) $5(4 - 8{,}2x) - 2(6{,}5x + 6) = 16$;

в) $2(3x - 1) - 4(x + 2) = 8$; г) $4(2{,}4y + 3) - 6 = 2(1{,}8y + 1{,}5)$.

9. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:

а) $(2m + 1)(4m - 3)$; б) $(x - 3y)(x + 3y)$;

в) $5a^2 + (a - 1)(2a + 3)$; г) $6c - (c - 4)(c + 1)$.

10. Розкладіть на множники:

а) $px + py + kx + ky$; б) $2a^2 + 2a + 3ab + 3b$;

в) $ax - ay - bx + by$; г) $8a + 8b - ax - bx$.

11. Обчисліть значення виразів, спочатку розклавши їх на множники:

а) $2xy - 30x - 7y + 105$, якщо $x = 8{,}5$, $y = 19$;

б) $a^2b + 3ab - 2a - 6$, якщо $a = 2$, $b = 5$.

12. Запишіть вирази у вигляді добутків:

а) $m^2 - n^2$; б) $c^2 - 4$; в) $4c^2 - 1$;

г) $16a^2 - 25b^2$; ґ) $0{,}36 - b^2$; д) $64x^2 - 36y^2$;

е) $0{,}49 - y^4$; є) $0{,}81m^2 - 0{,}01n^2$.

13. Розв'яжіть рівняння, розклавши ліву частину на множники:

а) $x^2 - 3x = 0$; б) $x^2 - 16 = 0$;

в) $0{,}16 - y^2 = 0$; г) $2{,}25 - p^2 = 0$.

14. Обчисліть значення виразів, спочатку спростивши їх:

а) $(3x + 2)(3x - 2) - 9x^2 + 2x$, якщо $x = 0{,}5$;

б) $m^2 + (5 - m)(5 + m)$, якщо $m = 8{,}15$.

15. Запишіть вирази у вигляді многочленів:

а) $(2x + 1)^2$; б) $(x - 34)^2$; в) $(4m + 5n)^2$; г) $(4 - 2d)^2$.

16. Обчисліть зручним способом:

а) $4a^2 - 4a + 1$, якщо $a = 0{,}275$;

б) $9b^2 + 6b + 1$, якщо $b = 2{,}6$;

в) $m^2 + 2mn + n^2$, якщо $m = 2{,}13$, $n = 7{,}87$;

г) $4x^2 - 4xy + y^2$, якщо $x = 0{,}75$, $y = 0{,}5$.

III рівень

1. Спростіть вирази:

а) $7x - 3{,}5y - (2{,}5y + 6{,}2x)$; б) $3a + 4{,}3b + (5{,}7a - 6{,}7b)$;

в) $0{,}5m^3 - 4 + (7m - 0{,}5m^3 - 7)$; г) $2{,}5a^2 + 4a - (2a - 3{,}5a^2 - 6)$.

2. Перетворіть вирази у многочлени стандартного вигляду:

а) $a(3b + a) + b(4a - b)$; б) $4xy(x - 2y) - 3x(xy + 5y^2)$;

в) $2m(3m^2 + 1) - 3n(m + n)$; г) $2y(xy^2 - 4) - 3(y + x)$.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $6(0{,}8x + 4) + 3(0{,}4x - 8) = 3$;

б) $4(1{,}2 - 5x) - 0{,}6(8 - 8x) = 15{,}2$;

в) $4(0{,}4y + 2) + 2(0{,}2y - 4) = 2$;

г) $6(0{,}6y - 2{,}5) - 9(4 - 4y) = 29{,}2$.

4. Доведіть тотожності:

а) $5a^2 - 3(a + 1)(a - 1) = 2a^2 + 3$;

б) $7(n^2 - 2) - 4(n + 3)(n - 3) = 3n^2 + 22$;

в) $x - 2y(x + 2y) + 4y^2 = x(1 - 2y)$;

г) $b^2 + 2a - b(2a + b) = 2a(1 - b)$.

5. Доведіть, що значення виразів не залежить від c:

а) $5c(4{,}8c^2 - 6c) - 8(3c^3 - 3{,}75c^2 + 2)$;

б) $3(5{,}2c^2 - 1{,}3c + 4) - 2{,}6c(6c - 1{,}5)$.

6. Доведіть, що:

а) сума трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3;

б) сума натурального числа і його квадрата є парним числом.

7. Розв'яжіть рівняння:

а) $3x^2 - 4x = 0$;

б) $2y^3 + y^2 = 0$;

в) $(x - 3)(x - 5) - x^2 = -1$;

г) $(4x - 3)(x + 1) - (2x - 1)(2 + 2x) = 0$.

8. Обчисліть значення виразів:

а) $(3m - 2n)(4m + n) - (2m + n)(6m - 2n)$, якщо $m = -\frac{4}{7}$, $n = 0{,}25$;

б) $a(a + b)^2 - b(a - b)^2 + 2b(a^2 + b^2)$, якщо $a = 2{,}5$, $b = 0{,}5$;

в) $2x^2 \cdot 7xy^2 - 4x^2y(-xy) - 3x \cdot 5x^2y^2$, якщо $x = 3$, $y = 5$;

г) $5x^3(-3y^2) - 2x^2y^2 \cdot 8x + 6xy^2 \cdot 3x^2$, якщо $x = -2$, $y = 4$.

9. Якщо одну сторону квадрата збільшити на 3 см, а другу — зменшити на 2 см, то дістанемо прямокутник, площа якого на 4 см² більша за площу квадрата. Обчисліть довжину сторони квадрата.

10. Запишіть вирази у вигляді добутків:

а) $a^3 - 4a^2 - 25a + 100$; б) $2y - 26y^2 - 13y + 1$;

в) $a^2c^2 + a^2d^2 - bc^2 - bd^2$; г) $2mk^2 + n^2k^2 - 2mp - n^2p$.

11. Обчисліть зручним способом:

а) $43 \cdot 29 + 27 \cdot 11 + 43 \cdot 11 + 27 \cdot 29$;

б) $93 \cdot 52 - 38 \cdot 43 \cdot 43 \cdot 52 + 93 \cdot 38$;

в) $109 \cdot 9{,}17 - 6{,}37 \cdot 72 \cdot 9 \cdot 9{,}17 \cdot 3{,}63 \cdot 72$;

г) $123 \cdot 1{,}32 - 28 \cdot 0{,}148 \cdot 123 \cdot 0{,}468 + 151 \cdot 0{,}148$.

12. Доведіть, що значення виразів не залежать від значення змінної:

а) $(x-10)(x+10)-(x+15)(x-15)$;

б) $(4y-x)(x+4y)+(2x-4y)(2x+4y)-3x^2$;

в) $(a-9)^2+(8-a)(a+6)+16a$;

г) $(x-7)^2+2(x-7)(1-x)+(1-x)^2$.

13. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x+7)^2+3=(x-2)(x+2)$; б) $9x^2-(3x-5)^2=20$;

в) $(x+6)^2-(x-5)(x+5)=79$; г) $(x-7)^2-8x(x-7)=0$.

14. Обчисліть значення виразів:

а) $(x^2+0{,}2x+0{,}04)(x-0{,}2)-x^3$, якщо $x=\frac{3}{71}$;

б) $0{,}01a^3-(0{,}1a+2)(0{,}01a^2-0{,}2a+4)$, якщо $a=10$.

15. Розкладіть вирази на множники:

а) $2+x^2(x-2)-x$; б) $x+x^3(x-2)-2$;

в) $2x^3-8x-12+3x^2$; г) x^4-2x+x^3-2.

IV рівень

1. Дано многочлен x^4-2x^3+8x-4. Який многочлен потрібно:

а) додати до нього, щоб дістати многочлен $1+4x^4-2x^2-3{,}5x^3$;

б) відняти від нього, щоб дістати многочлен $9x+3+2x^4$?

2. Доведіть, що:

а) різниця двоцифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 9;

б) сума двоцифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 11.

3. Обчисліть зручним способом:

а) $6{,}9\cdot 75+37{,}5\cdot 21{,}4+37{,}5\cdot 4{,}8$;

б) $12{,}62+12{,}6\cdot 17{,}2-6{,}3\cdot 140{,}4$.

4. Кількість десятків двоцифрового числа вдвічі більша за кількість його одиниць. Якщо від цього числа відняти суму його цифр, то дістанемо 54. Знайдіть це число.

5. Розв'яжіть рівняння:

а) $(2x-3)(3x-1)-(6x+2)(x-5)=25$;

б) $x(4x+11)-7(x^2-5x)=57x$;

в) $2(3x - 1)(2x + 5) - 6(2x - 1)(x + 2) = 46$;

г) $x(2x + 3) - 5(x^2 - 3x) = 3x(7 - x)$.

6. Обчисліть значення виразів:

а) $30ax + 45bx - 45by - 30ay$, якщо $2a + 3b = 7{,}5$ і $x - y = 4$;

б) $2ax - by - bx + 2ay$, якщо $2a - b = 3$ і $x + y = 5$.

7. За якого значення a значення виразу $a^2 + 7a$ втричі більше за значення виразу $7 + a$?

8. Розкладіть на множники:

а) $x^3 + 7x^2 - x - 7$;　　　б) $(4 - x^2)^2 - 9x^4$.

9. Доведіть, що значення двочлена $x^3 - x$ за всіх цілих значень x кратне 6.

10. Доведіть, що значення виразів не залежать від значення змінної:

а) $(x - 7)^2 + 2(8x - x^2 - 7) + (1 - x)^2$;

б) $(2x + 7)^2 - 2(4x^2 + 8x - 21) + (2x - 3)^2$.

11. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних парних натуральних чисел дорівнює подвоєній сумі цих чисел.

12. Якого найменшого значення набуває кожний вираз і за яких значень x:

а) $(x - 3)^2 + 5$;　　　б) $(x + 2)^2 - 3$;

в) $x^2 - 10x + 26$;　　　г) $x^2 + 6x + 7$?

13. Виправте помилки, якщо вони допущені:

а) $(3a + 4)(9a^2 - 12a + 16) = 27a^3 + 64$;

б) $0{,}08 - 27x^3 = (0{,}2 - 3x)(0{,}04 + 1{,}2x + 9x^2)$.

14. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 - 10x^2 + 25x = 0$;　　　б) $x^3 - 1 = 0$;

в) $x^3 + 10x^2 + 25x = 0$;　　　г) $x^3 + 1 = 0$.

Здійснюємо самооцінку навчальних досягнень

У результаті засвоєння матеріалу цього розділу ви маєте

знати:

— що таке числове значення алгебраїчного виразу і як його знайти;

— які вирази називають тотожно рівними;

— способи доведення тотожностей;

— властивості степеня з натуральним показником;

— що таке одночлен (многочлен);

— як звести одночлен до стандартного вигляду;

— як знайти суму, різницю многочленів;

— як знайти добуток: одночлена і многочлена; двох многочленів;

— формули скороченого множення;

— способи розкладання многочленів на множники;

розуміти і вміти пояснити:

— чим відрізняється одночлен (многочлен) стандартного вигляду від одночлена (многочлена), не зведеного до стандартного вигляду;

— на основі яких математичних законів: а) зводять подібні члени многочлена; б) знаходять добуток одночлена і многочлена;

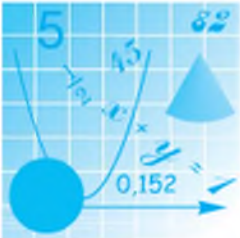
— який взаємозв'язок існує між: а) множенням многочлена на одночлен і розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки; б) множенням многочлена на многочлен і розкладанням многочлена на множники способом групування;

вміти обґрунтувати:

— властивості степеня з натуральним показником;

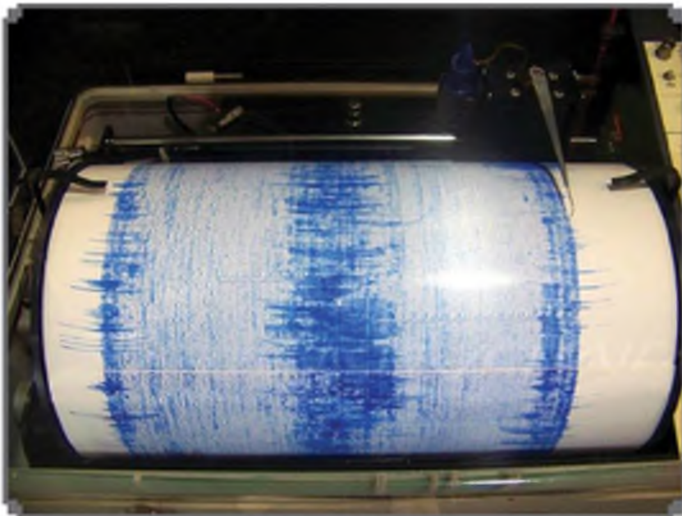
— формули скороченого множення;

успішно розв'язувати задачі і вправи, подібні до вміщених у цьому розділі.



Розділ II

ФУНКЦІЯ



§3. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО ФУНКЦІЮ

3.1. Поняття функції. Область визначення і область значень функції

① **Що таке функція.** Аналізуючи різні процеси, явища, можна помітити, що у багатьох випадках величини, які їх характеризують, перебувають у певній залежності одна від одної, коли зміна значень однієї величини спричиняє зміну значень іншої. Наприклад, зміна швидкості v автомобіля спричиняє зміну часу t, необхідного для подолання відстані, скажімо, 300 км, між двома населеними пунктами (зі збільшенням швидкості такий час зменшується і навпаки). Тому його (час) називають ***залежною змінною***, а швидкість, яка може змінюватися довільно, — ***незалежною змінною***. До того ж у даному випадку можна не лише вказати загальний характер залежності між зазначеними величинами, але і для кожного значення швидкості руху автомобіля знайти відповідне значення часу, необхідного для подолання відстані 300 км, за формулою $t = \frac{300}{v}$. Зокрема, якщо $v = 60$ км/год, то

$t = \dfrac{300}{60} = 5$ (год); якщо $v = 75$ км/год, то $t = \dfrac{300}{75} = 4$ (год) і т.д. Зверніть увагу, що кожного разу певному значенню швидкості відповідає лише одне значення часу.

Приклад 1. Площа S квадрата залежить від довжини його сторони a: збільшення (зменшення) довжини сторони квадрата зумовлює збільшення (зменшення) його площі. У даному випадку незалежною змінною є довжина сторони a квадрата, а залежною — його площа S. Формула, яка описує цю залежність, як відомо, має вигляд: $S = a^2$. Підставляючи в неї замість a довільні значення довжин сторони квадрата, кожного разу діставатимемо по одному відповідному значенню його площі.

Приклад 2. Значення атмосферного тиску p залежить від висоти h над рівнем моря, на якій його вимірюють: зі збільшенням висоти тиск зменшується, що можна прослідкувати за таблицею:

h (метри)	0	105	420	1220	2100	3675
P (мм ртутного стовпчика)	760	750	720	640	560	410

Крім з'ясування характеру залежності атмосферного тиску від висоти таблиця дає також змогу для кожного вміщеного тут значення висоти однозначно вказати відповідне значення тиску.

Усі розглянуті залежності стосуються зміни величин різного характеру, але їх об'єднує спільна ознака: ***кожному значенню однієї величини (незалежної змінної) відповідає лише одне значення іншої (залежної змінної), яке можна знайти за певним правилом***. Такі залежності називаються ***функціональними***, а саме правило називається ***функцією***.

У перших двох розглянутих прикладах зазначене правило подано у вигляді відповідної формули, у третьому — у вигляді таблиці.

Характеристичною ознакою функціональної залежності між змінними величинами є існування у кожному випадку **лише одного** значення залежної змінної, відповідного даному значенню незалежної змінної (кажуть, між значеннями незалежної і залежної змінних існує однозначна відповідність). Якщо ця умова порушена, то залежність не є функціональною. Зокрема, не є такою залежність номера місця у глядачевій залі театру від вартості купленого квитка, бо одній і тій самій вартості може відповідати декілька десятків місць у різних рядах глядачевої зали.

З розглянутих прикладів видно, що у функціональних залежностях змінні величини можуть позначатися різними буквами латинського алфавіту, що зумовлено їхнім змістом. У першому випадку v — незалежна змінна, t — залежна змінна, у другому — відповідно a і S, у третьому — h і p. Коли йдеться про функціональну залежність у загальному вигляді, то незалежну змінну зазвичай позначають буквою x, залежну — буквою y, а саме правило (функцію), за яким за даним значенням x знаходять відповідне значення y — буквою f. Тоді факт функціональної залежності y від x записують так: $y = f(x)$ (читають: «ігрек дорівнює еф від ікс»).

Незалежну змінну у функціональній залежності ще називають ***аргументом***.

② **Область визначення функції.** Незалежна змінна у кожній функціональній залежності може набувати певних значень, які визначаються змістом цієї залежності, сутністю тих процесів або явищ, яких вона стосується, тощо. Так, довжина сторони квадрата у формулі $S = a^2$ може виражатися будь-яким додатним числом. А ось, якщо розглядати функцію, яка задає залежність вартості m куплених зошитів ціною 3 грн за зошит від їх кількості n, що виражається формулою $m = 3n$, то тут незалежна змінна n може набувати лише натуральних значень.

Сукупність усіх значень (або інакше, множину значень), яких набуває незалежна змінна (аргумент), називають ***областю визначення функції***.

Кожному значенню аргументу з області визначення функції відповідає певне значення залежної змінної, яке ще називають ***значенням функції***. Усі ці значення утворюють множину, яку називають ***областю значень функції***.

Схематичне зображення функції f подано на рисунку 18.

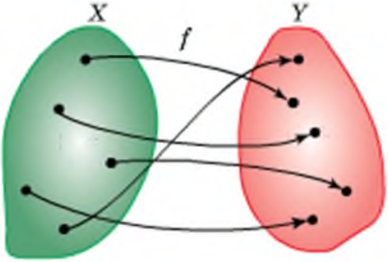


Рис. 18

На ньому умовно зображено дві множини: X — область визначення функції та Y — область значень функції, де кожна точка множини X зображує певне значення аргументу x, а кожна точка множини Y — певне значення функції. Лінії зі стрілками задають правило f, яке для кожного значення аргументу з області визначення функції вказує відповідне значення функції.

Розглянемо ще дві залежності, зображені на рисунках 19, 20. Чи є вони функціональними? Щоб з'ясувати це, скористаємось означенням функціональної залежності, а саме — перевіримо, чи відповідає *кожному* значенню незалежної змінної x *лише одне* значення залежної змінної y.

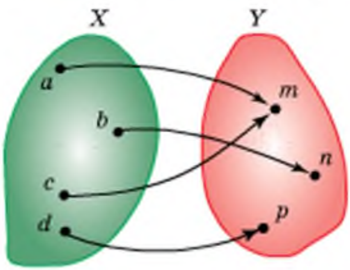


Рис. 19

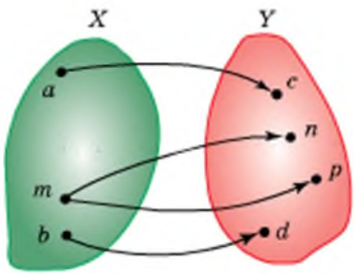


Рис. 20

Очевидно, що у випадку, зображеному на рисунку 19, ця умова виконується, а на рисунку 20 — ні, бо значенню m незалежної змінної відповідають два різних значення n і p залежної змінної. Отже, залежність, зображена на рисунку 19, є функціональною, а залежність, зображена на рисунку 20, не є функціональною.

Запитання для самоперевірки

1. Яку залежність між двома змінними називають функціональною? Наведіть приклади функціональних залежностей.
2. Як називаються змінні, які перебувають у функціональній залежності?
3. Як називають правило, за яким для кожного значення незалежної змінної можна знайти єдине значення залежної змінної?
4. Як у загальному вигляді позначають функціональну залежність між змінними x і y?
5. Що називають областю визначення функції?
6. Що таке область значень функції?

Задачі та вправи

293°. Поясніть, чому залежність периметра P квадрата від довжини a його сторони є функціональною.

а) Назвіть аргумент і залежну змінну у цій залежності;

б) запишіть формулу, що виражає відповідну функцію;

в) знайдіть значення функції для таких значень аргументу: 3; 4,5; 5,75; 7,25.

294°. Запишіть за допомогою формули залежність об'єму V куба від довжини a його ребра.

а) Поясніть, чому ця залежність є функціональною;

б) назвіть аргумент і залежну змінну відповідної функції;

в) обчисліть значення функції для таких значень аргументу: 2; 5; 4,1; 12.

295°. Запишіть формулу для обчислення площі круга. Залежність між якими двома змінними вона виражає? Чи є ця залежність функціональною? Відповідь обґрунтуйте.

296. Периметр прямокутника дорівнює 16 одиниць довжини. Виразіть залежність довжини a сторони прямокутника від довжини b суміжної сторони. Обчисліть значення a для таких значень b: 2,5; 4; 6; 3. Поясніть, чому ця залежність є функціональною; вкажіть аргумент відповідної функції.

297°. Задайте формулою залежність градусної міри y кута від градусної міри x суміжного з ним кута. Поясніть, чому правило, за допомогою якого за даним значенням градусної міри кута знаходять градусну міру суміжного з ним кута, є функцією. Знайдіть область значень цієї функції, якщо область її визначення утворюють такі градусні міри: а) 16°; б) 40°; в) 90°; г) 110°; ґ) 150°.

298. На рисунках 21–26 схематично зображено шість залежностей між змінними x і y. Укажіть, які з них є функціональними. Запишіть числа, позначені буквами, що утворюють область визначення і окремо область значень кожної з відповідних функцій.

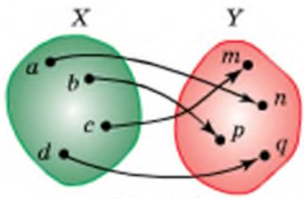


Рис. 21

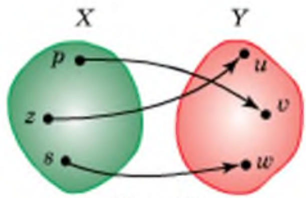


Рис. 22

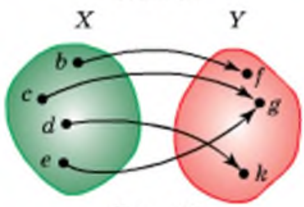


Рис. 23

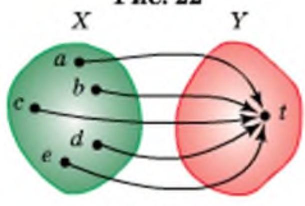


Рис. 24

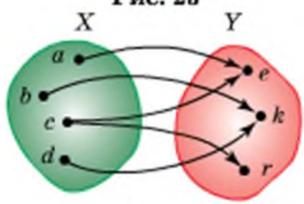


Рис. 25

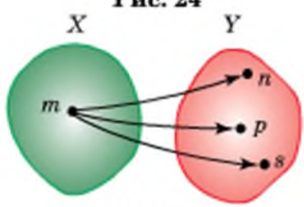


Рис. 26

299. 1) Кожному з чисел 1; 4; 25; 49; 100 поставлено у відповідність числа, квадрати яких дорівнюють даним числам. Чи є таке правило функцією?

2) Кожному з невід'ємних чисел відповідають числа, модулі яких дорівнюють даним числам. Чи є правило, яке встановлює таку відповідність, функцією?

300*. Знайдіть неточності у твердженнях і поясніть їхню сутність. Залежність між змінними x і y є функцією, якщо:

а) кожному значенню змінної x відповідає значення змінної y;

б) одному значенню змінної x відповідає одне значення змінної y.

Проілюструйте за допомогою схематичних зображень хибність наведених тверджень.

3.2. Способи задання функції

① Що **означає «задати функцію»**. ***Задати функцію*** — *означає вказати область її визначення, тобто множину значень, яких набуває аргумент, і правило, за яким для кожного з цих значень знаходять відповідне значення функції.*

Є кілька способів задання функції, які відрізняються один від одного передусім характером правила, що встановлює відповідність між значеннями аргументу і функції.

② **Аналітичний спосіб.** У цьому випадку правило записане у вигляді ***формули***. Розглянемо приклади.

Приклад 1. Область визначення функції — множина цілих чисел від –3 до 4 включно. Правило знаходження за даним значенням аргументу відповідного значення функції виражено формулою $y = 2x^2$.

За цими даними для кожного значення x із множини чисел –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3; 4, які утворюють область визначення функції, можна знайти відповідне значення функції. Для цього потрібно у формулу замість x підставити числове значення і виконати обчислення. Зокрема:

якщо $x = -3$, то $y = 2 \cdot (-3)^2 = 2 \cdot 9 = 18$;

якщо $x = -2$, то $y = 2 \cdot (-2)^2 = 2 \cdot 4 = 8$;

якщо $x = -1$, то $y = 2 \cdot (-1)^2 = 2 \cdot 1 = 2$ і т. д.

Можливий і такий запис виконання цього завдання.

Позначимо дану фнкцію буквою f. Тоді $f(x) = 2x^2$. $f(-3) = 2 \cdot (-3)^2 = 2 \cdot 9 = 18$; $f(-2) = 2 \cdot (-2)^2 = 2 \cdot 4 = 8$ і т.д.

Приклад 2. Область визначення функції — множина парних чисел першого десятка. Правило обчислення значення функції за даним значенням аргументу виражає формула $y = x + 2$.

Маючи ці дані, можна, як і в попередньому випадку, для кожного значення аргументу x з області визначення функції (а це числа 2, 4, 6, 8, 10) знайти відповідне значення функції y, послідовно підставляючи значення x у дану формулу:

$x = 2$, $y = 2 + 2 = 4$;

$x = 4$, $y = 4 + 2 = 6$;

$x = 6$, $y = 6 + 2 = 8$ і т.д.

Або інша форма запису:

$f(x) = x + 2$;

$f(2) = 2 + 2 = 4$;

$f(4) = 4 + 2 = 6$ і т.д.

У багатьох випадках, задаючи функцію аналітично, вказують лише формулу і нічого не кажуть про область її визначення. У такому разі областю визначення функції вважають множину значень змінної, для яких вираз, що стоїть у правій частині формули, має смисл.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y = 3x + 2$.

Областю її визначення є множина всіх раціональних чисел, бо вираз $3x + 2$ має смисл для будь-якого значення x.

Приклад 4. Для функції $y = \frac{3x}{x-4}$ областю визначення є множина всіх раціональних чисел, крім $x = 4$, бо, якщо $x = 4$, вираз $\frac{3x}{x-4}$ не має смислу (знаменник дробу дорівнює 0).

Приклад 5. Областю визначення функції $y = \frac{x+3}{x(x-1)}$ є множина всіх чисел, крім $x = 0$ та $x = 1$. Поясніть, чому.

Зрозуміло, що в прикладах 3–5 й аналогічних випадках область визначення функції складається з безлічі чисел, на відміну від наведених у прикладах 1 і 2 функцій, де області визначення містять скінченний набір значень аргументу.

③ **Табличний спосіб.** Це найпростіший спосіб задання функції. Суть його в тому, що в одному рядку таблиці записують усі значення аргументу (тобто зазначають область визначення функції), а під ними — відповідні значення функції.

Наприклад, до таблиці занесли результати вимірювань атмосферного тиску (у мм ртутного стовпчика), що здійснювалися через кожні 2 год з 6 до 18 год одного дня.

Час	6	8	10	12	14	16	18
Тиск	748	750	751	751	750	749	749

Ця таблиця задає функцію, область визначення якої — множина парних чисел від 6 до 18 включно, що відповідають значенням часу, кожному з яких відповідає одне значення атмосферного тиску. У даному випадку область значень функції — множина натуральних чисел від 748 до 751.

Прикладами табличного задання функції є різні таблиці, зокрема квадратів чисел, кубів чисел тощо.

Зручність табличного способу полягає в тому, що не потрібно проводити обчислення — усе задано відразу: і множина значень аргументу, і множина відповідних значень функції. Зрозуміло, що цим способом можна задати лише таку функцію, область визначення якої містить обмежену кількість значень аргументу (кажуть: множина значень аргументу скінченна).

④ Функцію можна задати **способом словесного опису**. Однією з відомих таких функцій є функція *антьє* (ціла частина числа), назва якої походить від французького слова entier — цілий. Областю визначення цієї функції є множина всіх чисел. Правило знаходження відповідних значень функції таке: кожному з чисел області визначення ставиться у відповідність найбільше ціле число, яке не перевищує даного. Наприклад, для 3,5 відповідним числом (значенням функції) є 3, для 5,9 — число 5, для 4 — число 4, для –6,8 — число –7, для –0,3 — число –1 і т.д.

Запитання для самоперевірки

1. Що означає поняття «задати функцію»?
2. Які способи задання функції ви знаєте? Проілюструйте кожен із них прикладами.
3. Як знайти область визначення функції, заданої формулою, якщо немає ніяких додаткових зауважень щодо цього?
4. Школа має 2000 грн, які витрачає на закупівлю підручників з певного предмета за ціною 20 грн за один примірник. Неважко встановити, що залежність між сумою S грошей, які в неї залишаються, і кількістю n закуплених підручників виражається формулою $S = 2000 - 20n$. Чи є ця залежність функціональною?

Задачі та вправи

301°. Функцію f задано формулою $f(x) = 2x + 5$. Яка область визначення цієї функції? Знайдіть значення функції для таких значень аргументу:

а) 4; б) –6,5; в) 0; г) –2,5.

302. Знайдіть область визначення функцій:

а°) $y = x - 4$; б°) $y = \dfrac{6}{x-4}$; в°) $y = \dfrac{2}{x}$; г) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$;

ґ) $y = \dfrac{1}{x(x+1)}$; д*) $y = \dfrac{5}{|x|-2}$; е*) $y = \dfrac{x}{x^2-16}$.

303. Знайдіть значення кожної із функцій, указаних у попередньому завданні, для таких значень аргументу:

а) 3;   б) –3;   в) 5;   г) 1.

304°. Функцію задано формулою $y = \frac{4x-2}{5}$, де x набуває цілих значень від –1 до 5. Запишіть числа, що утворюють область визначення цієї функції. Знайдіть числа, що утворюють область її значень.

305. 1) Функцію, областю визначення якої є всі непарні числа першого десятка, задано формулою $y = x^2 + 3$. Знайдіть область значень цієї функції. Задайте цю функцію таблицею.
2) Областю визначення функції f є множина натуральних чисел першого десятка. Для знаходження відповідного значення функції від потроєного числа з області визначення віднімають 12. Задайте цю функцію формулою і знайдіть її область значень.

306*. Знайдіть найбільше значення функції $y = x^2 - x - 3$, областю визначення якої є всі цілі числа від –2 до 3 включно.

307. Залежність між змінними x і y задано таблицею:

x	–3	5	–6	8	6	1	9	8
y	0	4	1	2	7	3	5	6

Чому ця залежність не є функціональною?

308. Які з таблиць а)–г) задають функцію?

а)

x	0	–3	5	2	4	0	4	1
y	2	1	4	7	–9	3	8	5

б)

x	–6	–4	–3	–1	0	2	6	10
y	–1	0	2	7	5	4	9	0

в)

x	1	2	3	4,5	6	7	8	9
y	1	2	5	8	11	13	14	15

г)

x	–5	0	2	7	12	15	16	17
y	4	4	4	4	4	4	4	4

309*. Складіть дві таблиці, що задають залежності між змінними x і y, одна з яких є функціональною, а друга — ні.

3.3. Графік функції. Графічний спосіб задання функції

Пригадайте

1. Що вам відомо про координатну площину, зокрема:
   а) як називаються координатні осі;
   б) скільки координат визначає положення точки на координатній площині і як вони називаються;
   в) що означає запис $A(-3; 2)$?
2. Зобразіть координатну площину і поясніть:
   а) як знайти координати будь-якої точки на ній;
   б) як побудувати точку за її координатами.

① **Графік функції.** Складемо таблицю квадратів перших п'яти натуральних чисел x.

x	1	2	3	4	5
$y = x^2$	1	4	9	16	25

Ця таблиця задає функцію, бо кожному з даних у ній значень змінної x відповідає одне значення змінної y.

Побудуємо на координатній площині точки, координатами яких є відповідні значення x і y із таблиці: (1; 1), (2; 4), (3; 9), (4; 16), (5; 25). Одержали п'ять точок, множину яких називають ***графіком*** даної ***функції*** (рис. 27).

Отже,

графік функції — це множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, що утворюють область визначення функції, а ординати — відповідним значенням функції.

Якщо функцію задано табличним способом, то побудова її графіка не викликає труднощів, бо координати всіх його точок містяться в таблиці. Крім того, кількість таких точок завжди виражається певним числом.

Інша річ — побудова графіка функції, заданої аналітично.

Приклад 1. Побудувати графік функції $y = x^2 - 2$, областю визначення якої є цілі числа від –3 до 3 включно.

Розв'язання. На відміну від попереднього випадку нам відомі лише абсциси точок графіка: –3; –2; –1; 0; 1; 2; 3. Відповідні ординати цих точок знайдемо, підставляючи у формулу $y = x^2 - 2$ дані значення x і виконуючи відповідні обчислення; значення x і y занесемо до таблиці.

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	7	2	–1	–2	–1	2	7

Тепер побудуємо на координатній площині точки з координатами (–3; 7), (–2; 2), (–1; –1), (0; –2), (1; –1), (2; 2), (3; 7) (рис. 28). Множина цих семи точок і є графіком даної функції.

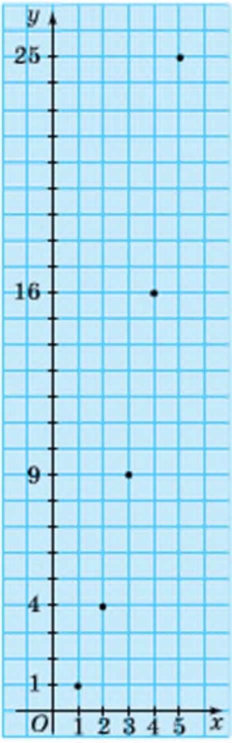


Рис. 27

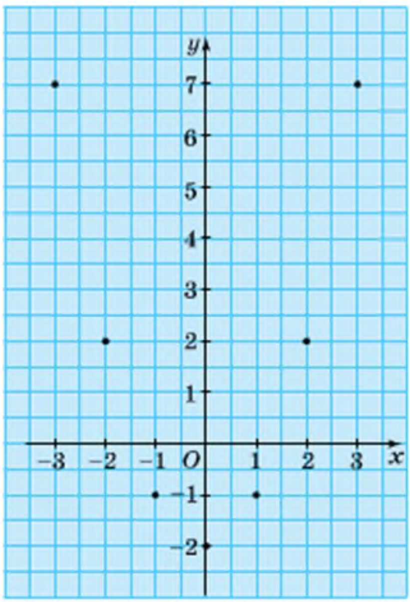


Рис. 28

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x^2 - 2$.

Розв'язання. Областю визначення даної функції є множина всіх чисел, бо вираз $x^2 - 2$ має смисл для будь-якого значення x. Отже, якщо в прикладі 1 графік функції утворювали лише сім точок, то тут таких точок буде безліч. Усі їх, звичайно, побудувати неможливо. У таких випадках обмежуються побудовою кількох точок графіка, через які потім проводять відповідну лінію.

Оскільки x — будь-яке число, то можна довільно обирати його значення і знаходити відповідне значення y. Наприклад, якщо $x = 0$, то $y = x^2 - 2 = -2$. Щоб не виконувати зайвих обчислень, скористаємося точками, побудованими під час розгляду попереднього прикладу. Провівши через них і точку $(0; -2)$ суцільну лінію, дістанемо графік функції $y = x^2 - 2$ (рис. 29).

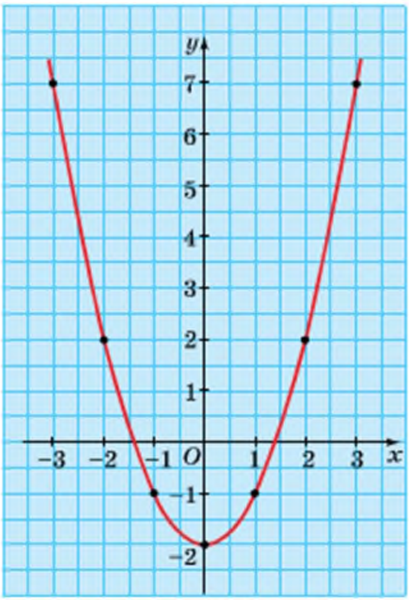


Рис. 29

Побудований графік утворюють безліч точок, але всі вони мають спільну властивість: підставивши координати будь-якої з них у формулу, що задає функцію, дістанемо тотожність.

На основі цієї властивості встановлюють, чи належить точка графіку функції, чи ні.

З'ясуємо, наприклад, чи належить побудованому графіку функції $y = x^2 - 2$ точка $A(3; 5)$.

У даному випадку $x = 3$, $y = 5$. Підставивши ці значення у формулу $y = x^2 - 2$, маємо: $5 = 32 - 2$; $5 = 9 - 2$; $5 = 7$. Остання рівність неправильна, отже, точка A графіку даної функції не належить.

А ось точка $B(-2; 2)$ належить цьому графіку, бо $y = x^2 - 2 = (-2)^2 - 2 = 2$, що відповідає умові (ордината даної точки за умовою теж дорівнює 2).

② **Графічний спосіб задання функції.** На рисунку 30 зображено частину стрічки термографа (приладу для безперервного автоматичного запису температури) з графіком зміни температури повітря в певній місцевості протягом доби. По горизонтальній осі (осі абсцис) тут відкладено значення часу вимірювання, а по вертикальній осі (осі ординат) — значення температури повітря. За цим графіком досить просто знайти температуру повітря в певний час доби. Щоб це зробити, наприклад, для 8 год ранку, достатньо знайти на графіку точку з абсцисою 8 і за допомогою того ж таки графіка визначити її ординату. Таким чином, о 8 год ранку температура повітря становила наближено –2,7 °C.

Залежність між температурою повітря і часом її вимірювання, яку задає накреслений самописцем термографа графік, є функціональною, бо кожному значенню часу від 0 до 24 год відповідає лише одне значення температури. Отже, зображений на рисунку 30 графік задає певну функцію, оскільки він указує на область

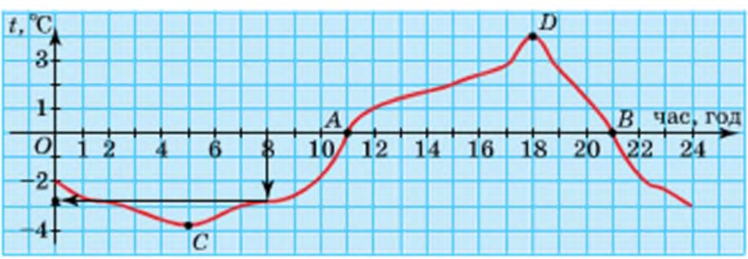


Рис. 30

її визначення (множина чисел від 0 до 24) і дає можливість для кожного значення незалежної змінної (часу вимірювання) знайти відповідне значення залежної змінної (температури повітря).

Спосіб задання функції за допомогою її графіка називається ***графічним способом***.

Графік функції може багато «розповісти» про неї. Так, за даним графіком можна знайти час, коли температура повітря протягом доби опускалася нижче від нуля, була вищою за нуль, дорівнювала нулю, коли вона підвищувалася, знижувалася тощо.

Оскільки значення температури дорівнює ординаті (y) відповідної точки графіка, то, щоб визначити, коли температура була нульовою, потрібно на графіку знайти точки, ординати яких дорівнюють нулю. Як відомо, усі такі точки лежать на осі абсцис (Ox), тому шуканими є точки перетину графіка з віссю абсцис. У даному випадку їх дві: A і B; одна відповідає часу 11 год, друга — 21 год. Отже, нульова температура фіксувалася двічі — об 11 год і о 21 год.

Щоб визначити період доби, коли температура повітря була вищою від нуля (додатною), слід знайти точки графіка з додатними ординатами, тобто ті, що розміщені над віссю абсцис. Із рисунка бачимо, що частина графіка, яка лежить над віссю абсцис, знаходиться у проміжку між 11 і 21 годинами, не включаючи цих крайніх значень (тоді температура дорівнювала нулю). Відповідно нижчою від нуля (від'ємною) температура повітря була від початку доби до 11 год та між 21 і 24 годинами.

Найнижча температура, зафіксована термометром протягом доби, становила наближено –3,8 °C (ордината найнижчої точки C графіка), а найвища становила 4 °C тепла (ордината найвищої точки D графіка).

Підвищенню (зростанню) температури відповідає та частина графіка, яка піднімається вгору, якщо рухатися вздовж його кривої зліва направо. У даному випадку — це частина графіка між точками C і D, що відповідає періоду доби приблизно від 5 год до 18 год. Відповідно у період від 0 год до 5 год та з 18 год до 24 год температура повітря знижувалася.

Отже, аналізуючи розглянутий графік функції, нам удалося встановити багато характеристик того процесу (у нашому випадку — стану температури повітря протягом доби), який описує дана функція. Тобто реальний природний процес ми характеризували на основі його ***математичної моделі***, якою є дана функція. Подібним чином вивчають багато інших процесів, явищ за допомогою математики. Спочатку утворюють математичну модель об'єкта вивчення (відповідну функцію, хоча такою моделлю може бути не лише функція), а потім специфічними математичними методами досліджують цю функцію, співвідносячи здобуті результати з об'єктом вивчення. З окремими методами дослідження функцій ви познайомитеся у процесі подальшого вивчення математики.

Цікаво знати

Прилади-самописці, що фіксують значення певних величин і автоматично креслять графіки залежностей між ними, широко використовуються в різних галузях людської діяльності, зокрема в геології, медицині тощо. Так, спеціальні прилади — сейсмографи — автоматично записують у вигляді ліній (сейсмограм) коливання земної кори. Сейсмограми дають можливість визначати, коли і де був землетрус, яка була його сила.

Електрокардіограми, які фіксують роботу серця і дають змогу судити про порушення в його роботі, теж можна вважати своєрідними графіками. Наприклад, на рисунку 31 зображено кардіограму серця здорової людини. На ньому коротка «хвиля» (1) характеризує скорочення передсердь, пік (2) свідчить про скорочення шлуночка, «хвиля» (3) показує, наскільки добре серце наповнене кров'ю. На рисунку 32 — кардіограма людини, яка перенесла серцевий напад. Аналізуючи зміни, що відбули-

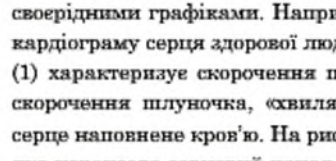


Рис. 31

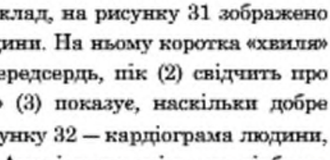


Рис. 32

ся в роботі серця і відображені на графіку, лікар-кардіолог установлює діагноз та визначає режим лікування хворого.

Історична довідка

Першими координатами, які застосовувалися систематично, були географічні (широта і довгота), а також астрономічні координати. Ідеєю координат володіли давньогрецькі вчені Архімед і Аполлоній ще у III ст. до н. е.

Рене Декарт

Французький математик Н. Орем (1323–1382) вперше застосовував координати на площині. Для побудови графіків він користувався термінами «довгота» і «широта», що відповідають сучасним поняттям абсциси й ординати. Метод координат майже одночасно розробили й застосували для дослідження ліній французькі вчені П. Ферма (1601–1665) і Р. Декарт (1596–1650).

Оскільки Р. Декарт першим опублікував опис цього методу (у книзі «Геометрія» в 1637 р.), то математики часто користуються термінами «декартові координати», «декартова система координат».

Надзвичайно велику роль відіграло запровадження методу координат у геометрії, що дало можливість застосувати алгебраїчний апарат до дослідження геометричних образів. Цим займається спеціальна математична дисципліна — *аналітична геометрія*.

Ґотфрід Лейбніц

У наш час координати широко застосовуються не лише в математиці, а й у фізиці, астрономії тощо. Ідеєю координат користуються, записуючи розміщення фігур на шахівниці. Матеріалізованою координатною сіткою є канва для вишивання.

Терміни *абсциса* й *ордината* в їхньому сучасному розумінні ввів у кінці XVII ст. німецький учений

Ґ. Лейбніц (1646–1716). Щоб підкреслити рівноправність абсциси й ординати, Лейбніц застосував термін координати, що походить від латинських слів «co» — *з, разом,* і «ordinatus» — *упорядкований, визначений.* Цей термін означає *«взяті в певній послідовності числа, що визначають положення точки на площині»*.

Слово *графік* походить від грецького — *креслю, пишу.* Подання функції за допомогою графіка допомагає наочно встановити ряд її властивостей.

? Запитання для самоперевірки

1. Що таке графік функції?
2. Як побудувати графік функції, яку задано таблицею?
3. Як побудувати графік функції, заданої аналітично:
   а) із зазначенням області визначення функції;
   б) без додаткових зауважень щодо області визначення?

Задачі та вправи

310°. Побудуйте графік функції, заданої таблицею:

а)

x	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	–1	0	3	5	4	3	3	2

б)

x	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6
y	0	1	2	3	2	1	0	1	2	3

311°. Функцію задано формулою $y = \frac{3x - 2}{2}$, де x набуває цілих значень від 0 до 8 включно. Яка область визначення цієї функції? Складіть таблицю всіх відповідних значень змінних x і y та побудуйте графік даної функції.

312. Функцію задано формулою $y = (x - 1)^2$. Областю її визначення є множина цілих чисел від –2 до 4 включно. Задайте цю функцію табличним способом і побудуйте графік.

313°. Функцію задано формулою $y = 3 - 2x$. Знайдіть координати чотирьох довільних точок її графіка.

314°. Які з точок $A(1;\ 2)$, $B(3;\ -3)$, $C(-1;\ 1)$, $D(5;\ -4)$, $E(0;\ 1{,}5)$, $F(6;\ -0{,}75)$ належать графіку функції $y = \dfrac{3}{2-x}$?

315°. На рисунках 33, 34 зображено графіки деяких функцій. Користуючись ними, знайдіть:

1) значення y, якщо x дорівнює: а) -5; б) -3; в) 0; г) 2; ґ) 3; д) 6;

2) значення x, якщо y дорівнює: а) 1; б) -2.

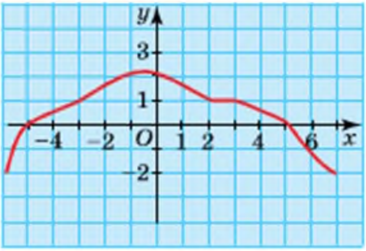


Рис. 33

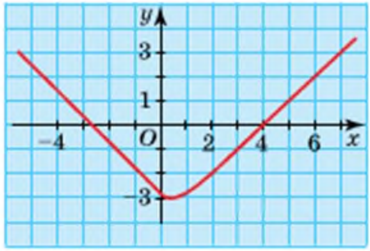


Рис. 34

316. Функції задано графічно (рис. 35, 36). Задайте їх за допомогою таблиць.

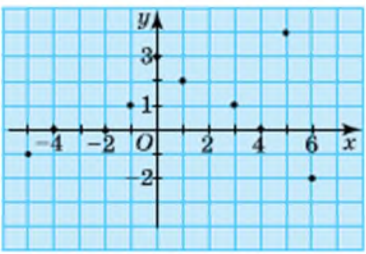


Рис. 35

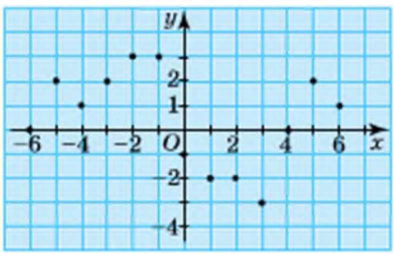


Рис. 36

317. Які із зображених на рисунках 37–40 графіків є графіками функцій? Відповідь поясніть.

318. За графіками функцій, зображеними на рисунках 41, 42, установіть, при яких значеннях аргументу значення функції:

а) дорівнює нулю; б) додатне; в) від'ємне.

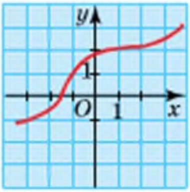


Рис. 37

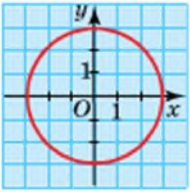


Рис. 38

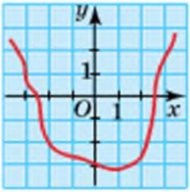


Рис. 39

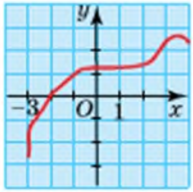


Рис. 40

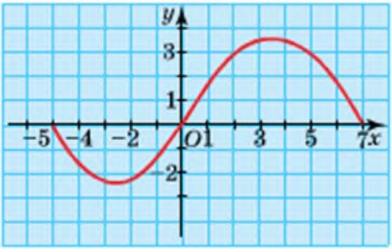


Рис. 41

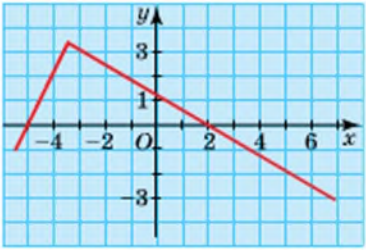


Рис. 42

319. Не будуючи графіків функцій, знайдіть координати точок їх перетину з віссю абсцис:

а) $y = 2x - 4$; б) $y = 9 + 3x$; в) $y = x^2 - 1$.

320*. Свічка завдовжки 27 см за кожну хвилину горіння стає коротшою на 0,3 см.

а) Яку довжину матиме свічка через 10 хв; 30 хв; 40 хв; x хвилин?

б) Виразіть за допомогою формули залежність між довжиною (y) свічки й часом (x) її горіння.

в) Через скільки годин згорить свічка?

Завдання для самоперевірки

I – II рівні

1. Залежність між змінними x і y задано таблицями:

а)

x	2	4	6	–3	5	–4	0
y	4	8	10	0,8	4	–2	3

б)

x	–3	6	0	8	6	7	2
y	–4	0	2	5	0,3	8	3

Яка із цих залежностей не є функціональною? Відповідь поясніть.

2. Залежність між шляхом s км, пройденим пішоходом, що рухається зі сталою швидкістю 5 км/год, і часом t год його руху виражається формулою $s = 5t$.

а) Чи є ця залежність функціональною? Поясніть, чому.

б) Яка змінна тут є незалежною (аргументом), а яка залежною?

в) Знайдіть шлях, пройдений пішоходом за 1 год, 2 год, 3 год, 4 год, 5 год, 6 год після початку руху.

г) Складіть таблицю відповідних значень змінних t і s.

3. Функцію задано таблицею:

x	–3	–2	–1	0	2	3
y	5	0	–3	–4	0	2

а) Скільки точок утворюють графік цієї функції?

б) Позначте ці точки буквами й запишіть їхні координати.

в) Побудуйте графік цієї функції.

г) Вкажіть найбільше й найменше значення функції.

4. Функцію задано формулою $y = -x + 2$, де аргумент x набуває цілих значень від –3 до 4 включно.

а) Запишіть числа, що утворюють область визначення цієї функції.

б) Знайдіть відповідні їм значення функції та складіть таблицю відповідних значень x і y.

в) Скільки точок утворюють графік цієї функції? Позначте їх буквами і запишіть координати кожної з них.

г) Побудуйте графік даної функції.

5. На рисунку 43 зображено графік деякої функції.

а) Запишіть абсциси і ординати його точок.

б) Вкажіть область визначення і область значень функції.

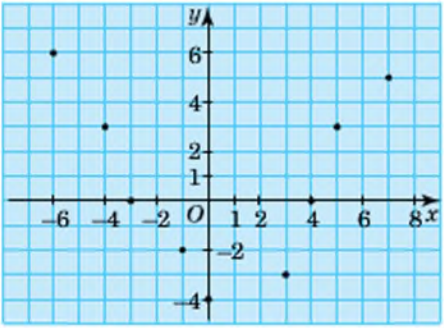


Рис. 43

6. На рисунку 44 зображено графік деякої функції. Користуючись цим графіком, знайдіть значення функції, що відповідають таким значенням аргументу:

а) $x = 0$; б) $x = -2$; в) $x = 3$; г) $x = 5$.

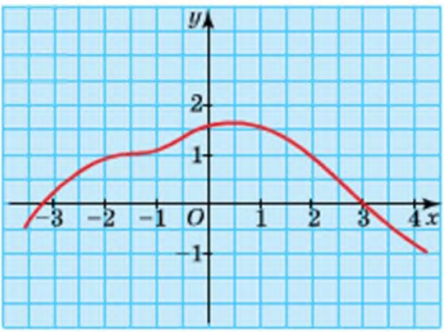


Рис. 44

III рівень

1. Яка із залежностей, заданих схематично на рисунках 45, 46, не є функціональною? Відповідь обґрунтуйте.

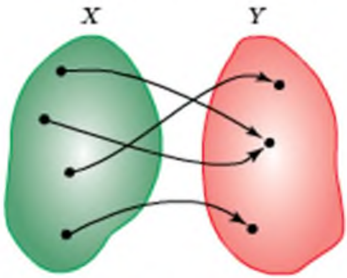


Рис. 45

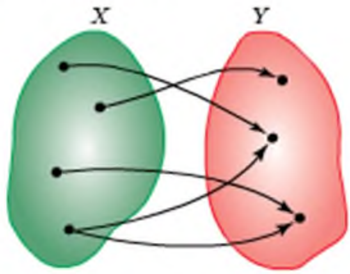


Рис. 46

2. Задайте таблицею залежність між двома змінними, яка не є функціональною.

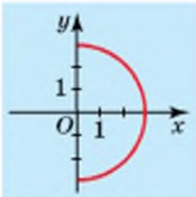


Рис. 47

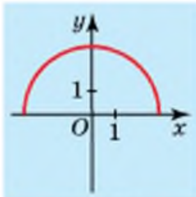


Рис. 48

3. Яке з півкіл, зображених на рисунках 47, 48, може бути графіком функції, а яке — ні? Відповідь поясніть.

4. Побудуйте графік функції $y = x^2 - 3x$, областю визначення якої є множина цілих чисел від -2 до 5 включно.

5. Побудуйте графік функції $y = 2 - x$, визначивши координати шести його довільних точок.

6. Установіть, які з точок $A(2;\ 7)$, $B(1;\ 4)$, $C(-2;\ 5)$, $D(3;\ 11)$, $E(0{,}5;\ 3{,}25)$, $F(0;\ 3)$ належать графіку функції $y = x^2 + 3$.

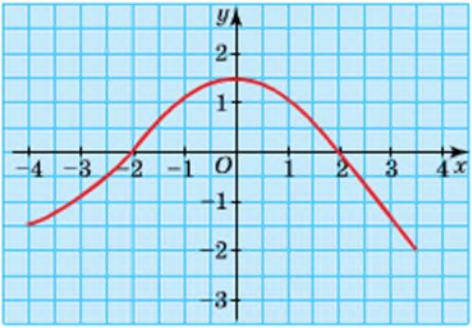


Рис. 49

7. На рисунку 49 зображено графік деякої функції. Користуючись цим графіком, знайдіть:

а) значення функції для таких значень аргументу: $x = 2$, $x = -1$, $x = 3{,}5$;

б) значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 0; –2; 1,5.

в) область визначення функції;

г) область значень функції.

IV рівень

1. Функцію задано таблицею:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	25	16	9	4	1	0	1	4	9	16

Задайте цю функцію аналітично.

2. Накресліть графік залежності між змінними x і y, яка не є функціональною. Поясніть рисунок.

3. Знайдіть області визначення функцій:

а) $y = \dfrac{1}{x-1}$; б) $y = (x-2)(x+1)$;

в) $y = \dfrac{7}{x^3 - x}$; г) $y = x(x+1)$.

4. Установіть, які з точок $A(0; 2)$, $B(-1; 4)$, $C(2; 4)$, $D(-2; 20)$, $E(-3; 10)$, $F(3; 14)$ належать графіку функції $y = 3x^2 - 5x + 2$.

5. Побудуйте вісім довільних точок графіка функції $y = |x|$, а потім і весь графік.

6. На рисунку 50 зображено графік деякої функції. Користуючись цим графіком, дайте відповіді на такі запитання:
а) яка область визначення цієї функції;
б) якого найбільшого значення набуває функція;
в) якого найменшого значення набуває функція;
г) за яких значень аргументу функція досягає цих значень;
ґ) за яких значень аргументу значення функції дорівнюють нулю.

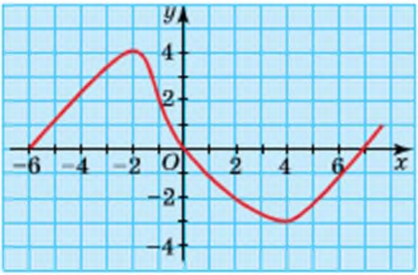


Рис. 50

7. Знайдіть область визначення і область значень функції:
а) $y = x^2 + 4$; б) $y = 4 - x^2$; в) $y = x^2 - 4x + 4$.

§4. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

4.1. Поняття лінійної функції. Графік лінійної функції

① **Що таке лінійна функція.**

Функцію, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де k і b — дані числа, а x — незалежна змінна, називають *лінійною функцією*.

Наприклад: $y = 2x - 3$ (тут $k = 2$, $b = -3$); $y = -x + 2$ ($k = -1$, $b = 2$); $y = -0{,}7x$ ($k = -0{,}7$, $b = 0$). Рівність $y = 5$ теж задає лінійну функцію, бо її можна записати у вигляді $y = 0x + 5$, що відповідає формулі $y = kx + b$. Тут $k = 0$, $b = 5$.

② **Як побудувати графік лінійної функції.** Характерною особливістю лінійної функції є те, що її ***графік — пряма лінія***.

Це твердження буде строго обґрунтовано у старших класах. А зараз переконаємось у цьому, побудувавши кілька точок графіка функції, наприклад, $y = 2x - 1$. Надамо незалежній змінній x послідовно значень -2; -1; 0; 1; 2; 3, підставимо кожне з них у формулу $y = 2x - 1$, знайдемо відповідні значення y. Результати занесемо до таблиці.

x	–2	–1	0	1	2	3
$y = 2x - 1$	–5	–3	–1	1	3	5

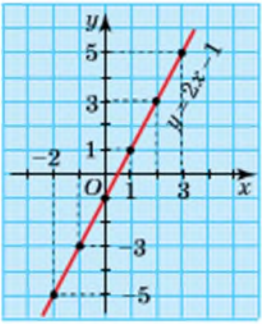


Рис. 51

Побудуємо на координатній площині точки з координатами (–2; –5), (–1; –3), (0; –1), (1; 1), (2; 3), (3; 5). Приклавши до них лінійку, помічаємо, що вони лежать на одній прямій (рис. 51). Точок можна побудувати безліч, бо областю визначення функції $y = 2x - 1$ є множина всіх чисел. Усі такі точки лежатимуть на тій самій прямій. Пряма, проведена через ці точки, і є графіком функції $y = 2x - 1$.

Із курсу геометрії відомо, що для побудови прямої достатньо мати лише дві її точки. Отже, для побудови графіка лінійної функції достатньо побудувати дві його точки і провести через них пряму.

Ці точки обирають довільно, але для спрощення обчислень зручно взяти точки перетину графіка з осями координат.

Приклад. Побудувати графік функції $y = 3x - 6$.

Побудова. 1) Знайдемо координати точки перетину графіка функції з віссю Ox. Оскільки всі точки, які лежать на осі Ox, мають ординату, що дорівнює нулю, підставимо у дану формулу значення $y = 0$ і знайдемо відповідне значення x. Маємо: $0 = 3x - 6$, $3x = 6$, $x = 2$. Отже, координати шуканої точки $A(2; 0)$.

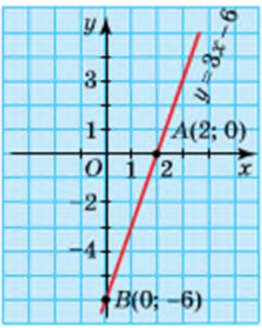


Рис. 52

2) Знайдемо тепер координати точки перетину графіка даної функції з віссю Oy. Абсциси (x) усіх точок, що лежать на осі Oy, дорівнюють нулю. Тому підставимо значення $x = 0$ у формулу $y = 3x - 6$ і знайдемо відповідне значення y. Маємо: $y = 3 \cdot 0 - 6 = -6$. Отже, координати другої точки графіка $B(0; -6)$.

3) Побудуємо на координатній площині ці точки і проведемо через них пряму, яка й буде графіком даної функції (рис. 52).

Якщо точки A і B виявляться розміщеними надто близько одна від одної, то будують ще одну точку, так звану контрольну, з довільною абсцисою, через яку проходить графік даної функції.

Запитання для самоперевірки

1. Яку функцію називають лінійною? Наведіть приклади.
2. Що є графіком лінійної функції?
3. Як побудувати графік лінійної функції?

Задачі та вправи

321°. Визначте k і b для даних лінійних функцій:

а) $y = 2x - 4$; б) $y = -0,5x + 2$; в) $y = x - \frac{1}{2}$;

г) $y = -x + 8$; ґ) $y = x$; д) $y = -0,7x - 7$.

322. Доведіть, що дані функції є лінійними:

а) $y = 2 - 3x$; б) $y = -4 - x$; в) $y = \frac{2x-5}{4}$;

г) $y = 2$; ґ) $y = -x$; д) $y = \frac{1}{3}x$.

Вказівка. Запишіть формулу, що задає кожну функцію, у вигляді $y = kx + b$.

Побудуйте графіки функцій (323–325):

323°. а) $y = 3x + 1$; б) $y = 2x - 2$;

в) $y = \frac{1}{2}x + 2$; г) $y = 0,3x - 1$.

324°. а) $y = -x + 3$; б) $y = -0,5x - 1$;

в) $y = -2x + 1$; г) $y = -\frac{1}{3}x + 1,5$.

325. а) $y = 2 - x$; б) $y = -x - 1$;

в) $y = 1 - \frac{1}{3}x$; г) $y = \frac{x+4}{2}$.

326. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій і визначте координати точки їх перетину:

а) $y = x - 1$ і $y = -x - 1$; б) $y = 2 - x$ і $y = 0{,}5x - 1$;
в) $y = x + 3$ і $y = 2x + 2$; г) $y = 2x$ і $y = -x - 3$.

327°. Запишіть координати точки перетину з віссю Oy графіків функцій:

а) $y = 4x + 5$; б) $y = 0{,}4x - 1{,}5$; в) $y = 7x - 1$;
г) $y = 4 - x$; ґ) $y = -3x - 7$; д) $y = -3 - 6x$.

328. Знайдіть абсциси точок перетину з віссю Ox графіків функцій:

а) $y = 2x - 6$; б) $y = 3x + 3$; в) $y = 4x - 2$; г) $y = 5x + 7$.

329. Знайдіть значення b, якщо графік функції $y = 4x + b$ проходить через точку:

а) $M(2; 1)$; б) $N(0; 6)$; в) $P(-2; 5)$; г) $R(-3; -8)$.

330. Знайдіть значення k, якщо графік функції $y = kx - 1$ проходить через точку:

а) $A(1; 3)$; б) $B(-2; 5)$; в) $C(3; 0)$; г) $D(5; 2)$.

331. Графік функції $y = 2x + b$ перетинає вісь ординат у точці $(0; 5)$. Знайдіть значення b.

332. Відомо, що коли $x = 4$, лінійна функція $y = 3x + b$ набуває значення, що дорівнює 11. Знайдіть b.

333*. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої перетинає осі координат у точках:

а) $(0; 8)$ і $(7; 0)$; б) $(0; -6)$ і $(5; 0)$; в) $(0; 0)$ і $\left(1; \frac{1}{3}\right)$.

334*. Одна таксомоторна компанія вимагає за посадку пасажирів 2,5 грошових одиниць та за кожен кілометр проїзду 0,5 грошових одиниць. Друга таксомоторна компанія вимагає за посадку 1,5 грошових одиниць та за кожен кілометр 0,6 грошових одиниць.

а) Запишіть функцію витрат $f(x)$, де x вимірюється у кілометрах, а $f(x)$ — у грошових одиницях для кожної компанії.

б) Зобразіть залежності графічно.

в) Для якого x тарифи однакові?

4.2. Окремі види лінійної функції

① **Пряма пропорційність.** Розглянемо випадок лінійної функції, коли $b = 0$. Тоді формула, що задає функцію, має вигляд $y = kx$.

Для всіх $k \neq 0$ цю функцію називають ***прямою пропорційністю***, бо за будь-яких відмінних від нуля значень x і y їхнє відношення дорівнює одному й тому самому числу k:

$$\frac{y}{x} = k.$$

Оскільки пряма пропорційність — окремий вид лінійної функції, то її графіком є пряма.

Очевидно, що для будь-якого k, коли $x = 0$, значення y також дорівнює 0: $y = k \cdot 0 = 0$. Тобто, ***графік прямої пропорційності проходить через точку O(0; 0) — початок координат***. Тому для його побудови достатньо мати лише одну відмінну від початку координат точку. Її координати знаходять, надавши аргументу x довільного значення і обчисливши відповідне значення y.

Приклад. Побудувати графік функції $y = 3x$.

Побудова. Одна точка, через яку проходить графік функції, — початок координат. Побудуємо ще одну точку графіка. Нехай $x = 2$, тоді $y = 3 \cdot 2 = 6$. Друга точка графіка має координати (2; 6). Через точки з координатами (0; 0) і (2; 6) проводимо пряму, яка і є графіком даної функції (рис. 53).

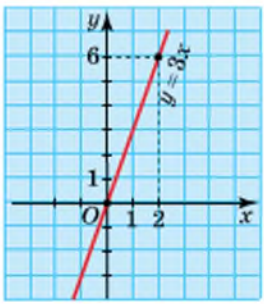


Рис. 53

З'ясуємо, як впливає значення коефіцієнта k на розміщення графіка прямої пропорційності. Зробимо це спочатку для додатного k ($k > 0$). Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = \frac{1}{4}x$, $y = x$ та $y = 3x$ (рис. 54).

Бачимо, що:

1) усі графіки розміщені у першій і третій координатних чвертях;

2) зі збільшенням коефіцієнта k збільшується кут між прямою графіка і віссю Ox (додатний напрям).

Зазначимо також, що пряма $y = x$ є бісектрисою першого і третього координатних кутів (спробуйте довести це самостійно).

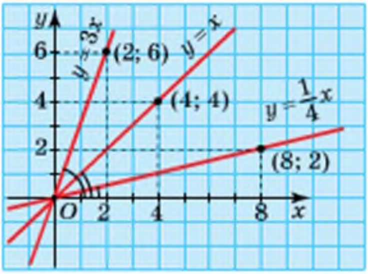


Рис. 54

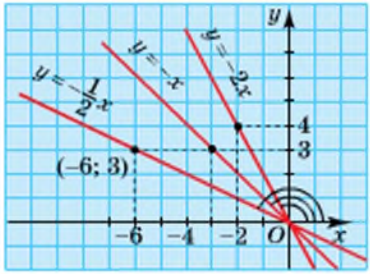


Рис. 55

Розглянемо тепер випадок, коли коефіцієнт k від'ємний ($k < 0$).

На рисунку 55 зображено графіки функцій $y = -\frac{1}{2}x$, $y = -x$, $y = -2x$.

Бачимо, що:

1) усі вони розміщені у другій і четвертій координатних чвертях;

2) зі збільшенням коефіцієнта k (наприклад, $-\frac{1}{2} > -2$) кут між прямою графіка і віссю Ox (додатний напрям) теж збільшується.

Отже, градусна міра кута між графіком і віссю Ox залежить від значення коефіцієнта k. Тому його називають ***кутовим коефіцієнтом*** прямої $y = kx$.

Областю визначення функції $y = kx$ є множина всіх чисел.

Якщо цю функцію розглядають у конкретній ситуації, то її область визначення може звужуватися. Наприклад, $y = 7{,}8x$ виражає залежність маси залізного бруска y від його об'єму x. Зрозуміло, що тут маємо справу з прямою пропорційністю, областю визначення якої є множина додатних чисел (об'єм бруска виражається додатним числом). Графіком цієї функції є промінь OA без початкової точки O (рис. 56).

② **Як впливає на розміщення графіка лінійної функції коефіцієнт k.** Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 2x - 4$, $y = 2x$, $y = 2x + 3$ (рис. 57).

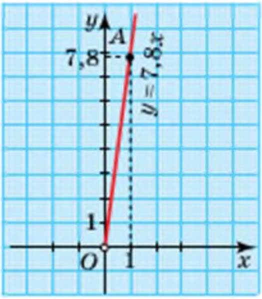


Рис. 56

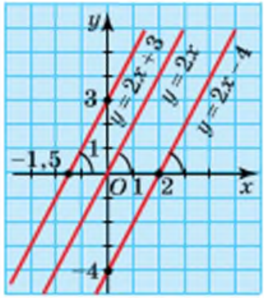


Рис. 57

Помічаємо, що всі графіки паралельні між собою. Це слід було передбачити. Адже у формулах, що задають ці функції, коефіцієнт k один і той самий і дорівнює 2. Вище було встановлено, що від кутового коефіцієнта k залежить кут між прямою $y = kx$ і віссю абсцис. Ця залежність зберігається і для лінійної функції $y = kx + b$ (приймемо це поки що без доведення). У даному випадку, коли кутові коефіцієнти рівні між собою, то рівними будуть і позначені на рисунку кути. За відомою з курсу геометрії теоремою, доходимо висновку, що всі зображені прямі паралельні, оскільки відповідні кути рівні.

Отже, ***графіки лінійних функцій з одним і тим самим кутовим коефіцієнтом паралельні між собою***.

③ **Як впливає на розміщення графіка лінійної функції доданок b.** Аналізуючи рисунок 57, помічаємо, що пряма $y = 2x - 4$ ($b = -4$) перетинає вісь Oy у точці з координатами (0; –4); пряма $y = 2x$ ($b = 0$) — у точці з координатами (0; 0); пряма $y = 2x + 3$ — у точці з координатами (0; 3). Порівнюючи значення b у формулах, які задають лінійні функції, з ординатами точок перетину їхніх графіків з віссю Oy, помічаємо, що ці ординати дорівнюють b.

Отже, пряма $y = kx + b$ перетинає вісь ординат у точці з координатами $(0; b)$.

Це неважко встановити. Оскільки абсциса будь-якої точки осі Oy дорівнює 0, то, щоб знайти ординату точки перетину графіка лінійної функції з цією віссю, потрібно у формулу, що задає функцію, замість x підставити 0 і обчислити значення y. Маємо: $y = k \cdot 0 + b$; $y = b$.

Наприклад, графіки функцій $y = 3x + 5$, $y = -x + 2$, $y = 0{,}3x - 1$ перетинають вісь Oy відповідно в точках $(0; 5)$, $(0; 2)$, $(0; -1)$.

Розглянуті властивості графіків лінійних функцій використовують для їхньої побудови.

Якщо, наприклад, маємо графік функції $y = 3x - 2$ і потрібно побудувати графік функції $y = 3x + 5$, то достатньо через точку $(0; 5)$ провести пряму, паралельну прямій $y = 3x - 2$. Поясніть самостійно, які твердження тут використовуються.

④ **Інші окремі випадки лінійної функції.** За означенням лінійної функції у формулі $y = kx + b$, що її задає, k і b — довільні числа, отже, вони можуть дорівнювати будь-якому числу, в тому числі й нулю.

З'ясуємо, якого вигляду набирає формула, що задає лінійну функцію, якщо k або b, або обидва ці параметри одночасно дорівнюють нулю, і яким буде відповідний графік функції.

1) $b = 0$, $k \neq 0$. Формула $y = kx$. Це — пряма пропорційність, графік якої розглянуто вище.

2) $k = 0$, $b \neq 0$. Формула $y = 0 \cdot x + b$, тобто $y = b$.

Це означає, що значення y не залежить від x і за будь-якого значення x дорівнює b. Як розміщена пряма, що є графіком такої функції? Розглянемо приклад.

Побудуємо дві довільні точки графіка $y = 0 \cdot x + 2$, тобто $y = 2$. Якщо $x = 0$, то $y = 2$; якщо $x = 3$, $y = 2$.

Через точки $A(0; 2)$ і $B(3; 2)$ проводимо пряму (рис. 58). Бачимо, що ця пряма паралельна осі абсцис. Це випливає з формули, яка задає функцію, оскільки за всіх значень змінної x значення функції дорівнює 2, тобто всі точки графіка віддалені від осі Ox на одну й ту саму відстань, яка дорівнює двом одиницям.

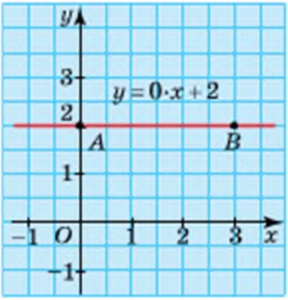


Рис. 58

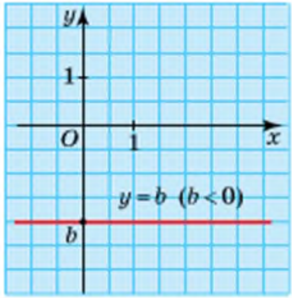


Рис. 59

Враховуючи цю властивість, для побудови графіка функції $y = b$ через точку його перетину з віссю Oy, яка має координати $(0; b)$, проводять пряму, паралельну осі Ox.

На рисунку 59 зображено графік функції $y = b$, коли b — від'ємне число.

3) $k = 0$, $b = 0$. Формула, що задає функцію, має вигляд $y = 0 \cdot x + 0$, тобто $y = 0$ за будь-якого x. Множина точок із координатами $(x; 0)$, де x — будь-яке число, утворює вісь Ox. Отже, графіком функції у цьому випадку є вісь Ox.

? Запитання для самоперевірки

1. Яка функція називається лінійною?
2. У якому випадку лінійна функція називається прямою пропорційністю?
3. Як найпростіше побудувати графік прямої пропорційності?
4. Чому параметр k у формулах $y = kx$ та $y = kx + b$ називають кутовим коефіцієнтом?
5. Чим відрізняються формули, що задають лінійні функції, графіки яких паралельні прямі?

Задачі та вправи

335°. Яке твердження правильне:

а) будь-яка пряма пропорційність є лінійною функцією;

б) будь-яка лінійна фунція є прямою пропорційністю?

Побудуйте графіки функцій (336–337):

336°. а) $y = 4x$; б) $y = 3x$; в) $y = \frac{1}{3}x$; г) $y = \frac{x}{4}$.

337°. а) $y = -2x$; б) $y = -0{,}25x$; в) $y = \frac{1}{5}x$; г) $y = \frac{x}{2}$.

338°. Не будуючи графіка функції $y = -1{,}5x$, визначте, чи належать цьому графіку точки: $A(2; -3)$, $B(0; -1{,}5)$, $C(-1; 1{,}5)$, $D(-1{,}5; 1)$, $E(-10; 15)$, $F(6; 9)$, $K\left(\frac{2}{3}; -1\right)$.

339°. Графік прямої пропорційності $y = kx$ проходить через точку $A(2; 4)$. Знайдіть k.

340. Задайте формулою пряму пропорційність, графік якої проходить через точку:

а) $A(2; 3)$; б) $B(-1; 5)$; в) $C(4; 4)$; г) $D(-5; 10)$.

341*. Побудуйте пряму, що проходить через початок координат і точку:

а) $M(1; 3)$; б) $N(2; 5)$; в) $P(-1; -1)$; г) $Q(-4; -3)$.

Задайте формулою функцію, графіком якої є ця пряма.

342*. Задайте аналітично функції, графіки яких зображено на рисунку 60.

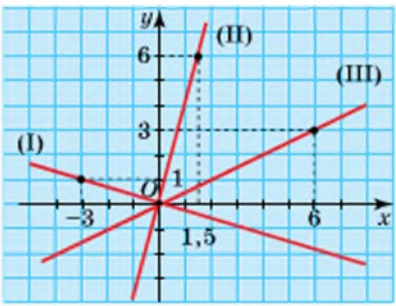


Рис. 60

343. Побудуйте графік функції $y = -1{,}5x - 3$. Використовуючи побудовану пряму, побудуйте в цій самій системі координат графіки функцій $y = -1{,}5x$; $y = -1{,}5x + 3$; $y = -1{,}5x - 1$.

344. Знайдіть і запишіть формули, що задають функції, графіки яких паралельні:

а) $y = -x + 2$; б) $y = 1{,}5x + 4$; в) $y = 5x$; г) $y = -x - 4$;
ґ) $y = 5 + 1{,}5x$; д) $y = 4 - 8{,}5x$; е) $y = 4x - 2$; є) $y = 5x - 6$;
ж) $y = 1{,}5 + 4x$; з) $y = 1{,}5$.

345. Задайте три лінійні функції, графіки яких паралельні графіку функції $y = 1{,}6x - 1{,}5$.

346*. Задайте формулами лінійні функції, графіки яких паралельні графіку функції $y = -2x$ і перетинають вісь ординат у точках:

а) $A(0; 3)$; б) $B(0; -2)$; в) $C(0; 6{,}5)$; г) $D(0; -10)$.

347*. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої перетинає осі координат у точках:

а) $M(0; 1{,}5)$ і $N(-4; 0)$; б) $P(0; -8)$ і $Q(5; 0)$;

в) $R\left(0; \frac{1}{3}\right)$ і $S(2; 0)$; г) $K(0; -4{,}5)$ і $L(-3; 0)$.

348*. На рисунку 61 в одній системі координат побудовано графіки чотирьох лінійних функцій. Задайте кожну із цих функцій аналітично.

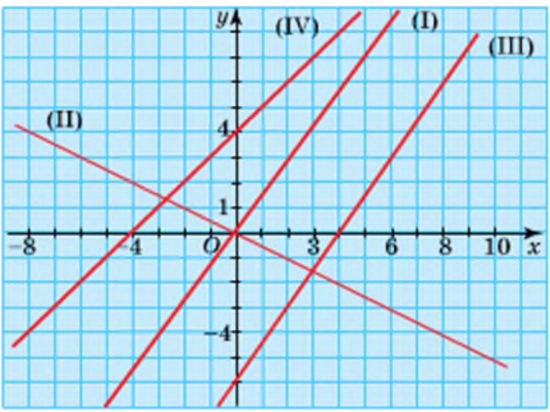


Рис. 61

349*. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $M(2; 3)$ і $N(-5; -4)$. Знайдіть значення k і b та побудуйте графік функції.

350*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = x$ та $y = -x$. Використавши ці графіки та означення модуля числа, побудуйте графік функції $y = |x|$.

351*. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = 2|x|$; б) $y = -2|x|$; в) $y = |x - 3|$; г) $y = |x + 1|$.

352*. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

а) $y = x$, якщо $0 \le x \le 2$, і $y = -x$, якщо $-2 \le x \le 0$;
$y = 4 - x$, якщо $0 < x < 2$, і $y = 4 + x$, якщо $-2 \le x \le 0$;

б) $y = |x|$, якщо $-2 \le x \le 2$, і $y = 4 - |x|$, якщо $|x| \le 2$;

в) $y = 1 + 0{,}5|x|$, якщо $|x| \le 4$ і $y = 5 - 0{,}5|x|$, якщо $|x| \le 4$.

? Завдання для самоперевірки

I–II рівні

1. Запишіть формули, що задають лінійні функції, у вигляді $y = kx + b$ і визначте у кожному випадку значення k і b:

   а) $y = 5x - 4$; б) $y = 2 + 3x$; в) $y = -7 + 0{,}5x$;
   г) $y = 5 + x$; ґ) $y = 3x$; д) $y = x$.

2. Від чого залежить кут нахилу прямої $y = kx + b$ до осі Ox?

3. Знайдіть і запишіть формули, що задають функції, графіки яких паралельні:

   а) $y = 2x - 3$; б) $y = 4 + 3x$; в) $y = 2x + 5$; г) $y = 0{,}5x$;
   ґ) $y = 3x - 2$; д) $y = 1 + 0{,}5x$; е) $y = 3x - 1$; є) $y = 5x - 7$.

4. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої паралельний графіку функцій:

   а) $y = 0{,}5x - 3$; б) $y = -2x + 4{,}5$;
   в) $y = -0{,}5x + 4$; г) $y = 2x - 4$.

   Скільки таких функцій у кожному випадку можна задати?

5. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = 0{,}4x$; б) $y = -x$; в) $y = 2x - 4$; г) $y = -2x + 2$.

6. Знайдіть координати точок перетину з осями координат графіків функцій, не будуючи цих графіків:

а) $y = x + 4$; б) $y = 3x + 12$; в) $y = -4x + 8$; г) $y = 5x$.

III рівень

1. Побудуйте графік функції $y = 0{,}4x - 2$. Задайте формулою пряму пропорційність, графік якої паралельний графіку даної функції.

2. Графік лінійної функції $y = ax + 2$ проходить через точку $(-4; -1)$. Знайдіть a.

3. Побудуйте графік лінійної функції, що перетинає вісь абсцис у точці $B(2; 0)$ і паралельний графіку функції $y = -2x$. Задайте цю функцію формулою.

4. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої перетинає вісь ординат у точці $(0; 5)$ і паралельний графіку функції $y = -3x - 1$.

5. Як розміщена відносно осей координат пряма $y = 2 + 0 \cdot x$?

6. Задайте аналітично лінійну функцію, графік якої проходить через точку $(2; 5)$ і паралельний осі Ox.

IV рівень

1. Дано лінійну функцію $y = kx + b$. За яких k і b її графік:

а) проходить через початок координат;

б) проходить через початок координат і точку $M(-1; 3)$;

в) паралельний графіку функції $y = 3x - 5$ і проходить через точку $A(2; 2)$;

г) не проходить через точки, координати яких мають однакові знаки;

ґ) є бісектрисою координатних кутів другої і четвертої чвертей;

д) відтинає на осях координат рівні відрізки?

2. Ордината усіх точок графіка функції $y = kx + b$ дорівнює 2. Знайдіть k і b.

3. Побудуйте графіки функцій:

а) $y = -4|x|$; б) $y = |2x+1|$;

в) $y = 3|x| - 1$; г) $y = |x+1| - 1$.

! Здійснюємо самооцінку навчальних досягнень

У результаті засвоєння матеріалу цього розділу ви маєте

знати:

— що таке функція;

— що таке аргумент;

— що таке область визначення і область значень функції;

— що таке графік функції;

— яку функцію називають лінійною, що є її графіком;

— що таке пряма пропорційність;

розуміти і вміти пояснити:

— що означає «задати функцію» і якими способами це можна зробити;

— як будують графік функції, заданої: а) аналітично; б) таблицею;

— як за графіком функції знайти значення однієї змінної за даним значенням іншої змінної;

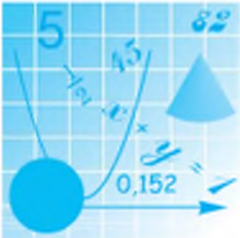
— як побудувати графік: а) лінійної функції; б) прямої пропорційності;

— як впливає значення коефіцієнта k на розміщення графіка лінійної функції $y = kx + b$ (прямої пропорційності $y = kx$);

— у якому випадку графіки двох лінійних функцій є паралельними прямими;

— як впливає на розміщення графіка лінійної функції значення доданка b;

успішно розв'язувати задачі і вправи, подібні до вміщених у цьому розділі.



Розділ III

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХНІ СИСТЕМИ

§5. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ І ДВОМА ЗМІННИМИ

5.1. Лінійне рівняння з однією змінною

! Пригадайте

1. Яка рівність називається рівнянням?
2. Що таке корінь (розв'язок) рівняння?
3. Як перевірити, чи є дане число коренем рівняння?
4. Якими властивостями рівнянь користуються, розв'язуючи їх?

Рівняння широко застосовуються при вивченні математики та інших наук. Певні відомості про рівняння і розв'язування найпростіших із них ви вже маєте ледве не з першого класу. Поступово вони розширювалися. У 7–9 класах (вивчаючи алгебру) ви ознайомитеся з багатьма новими видами рівнянь і навчитеся їх розв'язувати. Черговий крок у цьому напрямку буде зроблено в цьому розділі.

① **У чому полягає процес розв'язування рівняння.** Розв'яжемо рівняння $5(x - 4) + 1 = 3x - 7$ і простежимо хід розв'язування:

$$5(x-4)+1=3x-7, \tag{1}$$
$$5x-20+1=3x-7, \tag{2}$$
$$5x-3x=20-1-7, \tag{3}$$
$$2x=12, \tag{4}$$
$$x=6. \tag{5}$$

Розв'язуючи рівняння (1), ми послідовно замінювали його рівняннями (2), (3), (4), аж поки не дістали шукану відповідь (5). Така заміна здійснювалася на основі відомих правил тотожних перетворень виразів та властивостей рівнянь. Так, рівняння (2) дістали з рівняння (1), записавши добуток $5(x-4)$ у вигляді многочлена. Рівняння (3) дістали з рівняння (2), перенісши в останньому члени, що містять невідомі, з правої частини в ліву, а відомі — з лівої у праву, змінивши при цьому знак кожного з них на протилежний. Звівши в лівій і правій частинах рівняння (3) подібні члени, дістали рівняння (4). Остаточну відповідь, якою є рівняння (5), дістали, поділивши на 2 обидві частини рівняння (4) на основі відповідної властивості рівнянь.

Ланцюжок подібних замін у процесі розв'язування рівняння $\frac{5x+4}{2}=\frac{10x+7}{4}$ має такий вигляд:

$$\frac{5x+4}{2}=\frac{10x+7}{4}, \tag{1}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{5x+4}{2}\cdot 4=\frac{10x+7}{4}\cdot 4, \quad 2(5x+4)=10x+7, \tag{2}$$

$$\downarrow$$

(обидві частини рівняння (1) помножили на 4, щоб позбутися дробів)

$$\downarrow$$

$$10x+8=10x+7, \tag{3}$$

$$\downarrow$$

$$10x-10x=-8+7, \tag{4}$$

$$\downarrow$$

$$x(10-10)=-1, \tag{5}$$

$$\downarrow$$

$$0\cdot x=-1. \tag{6}$$

Бачимо, що рівняння розв'язку не має.

③ Лінійне рівняння і рівняння першого степеня з однією змінною: у чому відмінність між ними? Аналізуючи розглянуті приклади, бачимо, що в процесі розв'язування ми приходимо до рівняння виду $ax = b$, де a і b — довільні числа, а x — змінна. Такі рівняння називаються ***лінійними рівняннями з однією змінною***.

Лінійним рівнянням із однією змінною називають рівняння виду $ax = b$, де a і b — довільні числа, а x — змінна.

У першому прикладі дістали лінійне рівняння $2x = 12$ (тут $a = 2$, $b = 12$), у другому — $0 \cdot x = -1$ ($a = 0$, $b = -1$).

Ще кілька прикладів лінійних рівнянь з однією змінною:

$5x = 3$ ($a = 5$, $b = 3$);

$-3x = 21$ ($a = -3$, $b = 21$);

$0 \cdot x = 8$ ($a = 0$, $b = 8$);

$0 \cdot x = 0$ ($a = b = 0$).

Якщо в лінійному рівнянні $ax = b$, $a \neq 0$, то таке рівняння називається ***рівнянням першого степеня з однією змінною***. Воно завжди має один розв'язок: $x = \dfrac{b}{a}$.

З наведених чотирьох останніх прикладів лінійних рівнянь два перших — рівняння першого степеня. Їхні розв'язки відповідно дорівнюють $\dfrac{3}{5}$ і $\dfrac{21}{-3} = -7$.

Якщо в лінійному рівнянні $ax = b$, $a = 0$, то можливі два випадки:

1) $a = 0$, $b \neq 0$, наприклад, $0 \cdot x = 8$.

Зрозуміло, що таке рівняння не має розв'язку, бо за будь-якого x у лівій частині дістанемо 0, тоді як права частина нулю не дорівнює.

2) $a = 0$, $b = 0$, тобто $0 \cdot x = 0$.

Це рівняння задовольняє будь-яке значення x, оскільки добуток двох множників, один з яких дорівнює 0, незалежно від значення другого множника теж дорівнює 0. Тобто, це рівняння має безліч розв'язків.

Отже, **лінійне рівняння** $ax = b$:

а) має ***один розв'язок***, якщо $a \neq 0$: $x = \frac{b}{a}$. Тоді це рівняння першого степеня з однією змінною;

б) має ***безліч розв'язків***, якщо $a = b = 0$ (перетворюється у рівняння $0 \cdot x = 0$);

в) ***не має розв'язків***, якщо $a = 0$, $b \neq 0$ (перетворюється у рівняння $0 \cdot x = b$).

? Запитання для самоперевірки

1. Які перетворення рівняння можна виконувати у процесі його розв'язування? Проілюструйте прикладами.
2. Яке рівняння називається лінійним рівнянням з однією змінною?
3. Яке рівняння називається рівнянням першого степеня з однією змінною?
4. Яке твердження правильне:

   а) будь-яке лінійне рівняння з однією змінною є рівнянням першого степеня з однією змінною;

   б) будь-яке рівняння першого степеня з однією змінною є лінійним рівнянням з однією змінною?
5. Чи завжди рівняння першого степеня з однією змінною має один розв'язок?
6. Скільки розв'язків може мати лінійне рівняння з однією змінною? Наведіть приклади.

Задачі та вправи

353°. Розв'яжіть рівняння:

а) $5x + 3(3x + 7) = 35$; б) $8x - (7x + 8) = 9$;

в) $2x - 3(2x - 4) = 20$; г) $(x - 3)^2 - x^2 = 6x - 9$;

ґ) $4 - (x - 2)(x + 2) = 4x - x^2 + 6$; д) $6 - (3 - x)^2 = 3 - x^2$.

Поясніть, які перетворення рівнянь ви виконували у процесі розв'язування кожного з них.

354. За яких значень a значення виразу $\frac{1+a}{2}$ дорівнює значенню виразу $3a-5$?

355. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{x}{3}-\frac{x}{5}=8$;

б) $\frac{y}{3}+\frac{y}{4}=14$;

в) $\frac{6x+7}{7}-3=\frac{5x-3}{8}$;

г) $\frac{8-y}{6}-\frac{5-4y}{3}=\frac{y+6}{2}$;

ґ) $\frac{4x-3}{2}-\frac{5-2x}{3}=\frac{3x-4}{3}$;

д) $\frac{x-4}{5}=9+\frac{2x-4}{9}$.

356°. Дано рівняння:

а) $3{,}5x=-7$; б) $0{,}3x=0{,}3$; в) $0\cdot x=7$;

г) $2{,}1x=7+1{,}2x$; ґ) $0\cdot x=0$; д) $2{,}1x+7=2{,}1x+7$;

е) $2{,}1x+7=7$; є) $2x=0$; ж) $5x+2=2+5x$.

Які з цих рівнянь:

1) мають один розв'язок; 2) не мають розв'язку;

3) мають безліч розв'язків; 4) мають нульовий розв'язок?

357. Знайдіть помилку в розв'язанні рівнянь, якої припустився один із учнів:

а) $0{,}71x+1{,}98=0{,}37x-1{,}76$;

I учень	*II учень*
$0{,}71x-0{,}37x=-1{,}76-1{,}98$,	$0{,}71x-0{,}37x=1{,}98-1{,}76$,
$0{,}34x=-3{,}74$,	$0{,}34x=0{,}22$,
$x=-11$.	$x=\frac{22}{34}=\frac{11}{17}$.

б) $3(4x-13)=12x-39$;

I учень	*II учень*
$12x-39=12x-39$,	$12x-39=12x-39$,
$12x-12x=0$,	$12x-12x=39-39$,
$x\cdot 0=0$.	$0=0$.
Рівняння має безліч коренів.	Рівняння не має коренів.

в) $3(4x - 13) = 12x + 5$;

I учень	*II учень*
$12x - 39 = 12x + 5$,	$12x - 39 = 12x + 5$,
$12x - 12x = 39 + 5$,	$12x - 12x = 39 + 5$,
$0 = 44$.	$0 \cdot x = 44$,
Рівняння не має розв'язків.	$x = 0$.

г) $3(4x - 13) = 10x - 39$;

I учень	*II учень*
$12x - 39 = 10x - 39$,	$12x - 39 = 10x - 39$,
$12x - 10x = 39 - 39$,	$12x - 10x = 39 - 39$,
$2x = 0$, $x = 0$.	$2x = 0$, x — будь-яке число.

Розв'яжіть рівняння (358–359):

358°. а) $8x - 3(5 - 7x) = 5x - 15$; б) $7x - 2(3,5 + x) = 5x - 7$;
в) $17 + 3x = 18 + 4(x - 0,25)$; г) $0,3(1 - 4x) = (-x + 0,03) \cdot 1,2$.

359°. а) $x^2 + 1 = x + 0,2x(4 + 5x)$; б) $-72 + 12x^2 = 12(0,5 - x)^2$;
в) $-10,04 - 4x^2 = -4(x - 0,1)^2$; г) $8 + 4(x - 5)^2 + x = -9 + 4x^2$.

За даною умовою складіть і розв'яжіть рівняння (360–361):

360. а) Яке число потрібно додати до 14,7, щоб одержати 20,17?
б) Яке число слід відняти від 4,5, щоб одержати –2,7?
в) До якого числа потрібно додати 2,3, щоб сума дорівнювала 0,7?
г) Від якого числа слід відняти 5,7, щоб різниця дорівнювала $-\frac{1}{2}$?

361. а) Яке число потрібно помножити на 8, щоб одержати 10,8?
б) На яке число потрібно помножити $1\frac{4}{5}$, щоб одержати 120?
в) На яке число слід поділити 7, щоб частка дорівнювала 0,9?
г) На яке число треба поділити –24, щоб мати 4,8?

Історична довідка

Мухаммед бен-Муса аль-Хорезмі

Загальне правило для розв'язування рівнянь першого степеня з одним невідомим сформулював у IX ст. узбецький математик Мухаммед бен-Муса аль-Хорезмі. У своєму творі «Кітаб аль-джебр аль-мукабала» він дає два способи розв'язування таких рівнянь.

Появу цього визначного твору можна вважати початком виокремлення алгебри як самостійної галузі математики. Доречно зауважити, що слово «алгебра» пішло від назви цього твору.

5.2. Рівняння, що зводяться до лінійних

Пригадайте

1. Які ви знаєте способи розкладання многочленів на множники?
2. У якому випадку добуток кількох множників дорівнює нулю?
3. Чому дорівнює модуль:
   а) невід'ємного числа;
   б) від'ємного числа?

До рівняння виду $ax = b$ приводить розв'язування багатьох рівнянь, які у заданому вигляді не є лінійними. Розглянемо окремі приклади таких рівнянь.

① Рівняння, **ліва частина яких є добутком кількох множників, а права дорівнює 0.**

Приклад 1. Розв'язати рівняння $(2x-3)(x+1)(0,5x+7)=0$.

Розв'язання. Якщо добуток кількох множників дорівнює нулю, то хоча б один із них дорівнює нулю. Тобто

$$2x-3=0 \text{ або } x+1=0, \text{ або } 0,5x+7=0.$$

Отже, розв'язування даного рівняння звелось до розв'язування трьох лінійних рівнянь:

$$2x=3;\ x=-1;\ 0,5x=-7.$$

Звідси $x=1,5$; $x=-1$; $x=-14$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $4x^3-9x=0$.

Розв'язання. Це рівняння можна звести до рівняння попереднього виду, розклавши його ліву частину на множники:

$$4x^3-9x=x(4x^2-9)=x(2x-3)(2x+3).$$

Отже,

$$x(2x-3)(2x+3)=0.$$

Маємо: $x=0$ або $2x-3=0$, або $2x+3=0$.

Звідси $x=0$; $x=1,5$; $x=-1,5$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $4x^2-20x+25=0$.

Розв'язання. Перетворимо ліву частину рівняння за формулою квадрата двочлена. Маємо:

$$(2x-5)^2=0, \text{ або } (2x-5)(2x-5)=0.$$

Звідси $2x-5=0$, $x=2,5$.

② Рівняння, що містять невідоме під знаком модуля.

Приклад 4. Розв'язати рівняння $|x|=2$.

Розв'язання. Відомо, що один і той самий модуль мають протилежні числа. У даному випадку це числа 2 і –2.

Отже, $x=2$; $x=-2$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|x-4|=9$.

Розв'язання. 9 — це значення модуля двох чисел: 9 і –9. Отже, $x-4=9$ або $x-4=-9$.

Звідси $x=13$ або $x=-5$.

Приклад 6. Розв'язати рівняння $2|4x+5|-7=21$.

Розв'язання. $2|4x+5|=28$, $|4x+5|=14$.

Отже, $4x + 5 = 14$ або $4x + 5 = -14$.

Розв'яжемо кожне з цих рівнянь.

$$4x = 9,\ x = 2{,}25;\ 4x = -19,\ x = -4{,}75.$$

Приклад 7. Розв'язати рівняння $3|3 - x| + 16 = 7$.

Розв'язання. $3|3 - x| = -9$, $|3 - x| = -3$. Оскільки модуль будь-якого числа від'ємним бути не може, дане рівняння розв'язків не має.

? Запитання для самоперевірки

1. Як розв'язати рівняння, ліва частина якого є добутком кількох множників, що містять змінну, а права дорівнює 0?
2. Як розв'язати рівняння виду $|x| = a$, де a – додатне число?
3. Скільки розв'язків має рівняння виду $|x| = a$, де a – від'ємне число?

Задачі та вправи

Розв'яжіть рівняння (362–366):

362°. а) $x^2 - 3x = 0$; б) $2y^2 + 5y = 0$; в) $2x^2 - 0{,}4x = 0$;
г) $y^3 - 3y^2 = 0$; ґ) $x^2 - 25 = 0$; д) $4y^2 - 5y = 0$.

363. а) $x^3 + 16x^2 = 0$; б) $x^3 - 36x = 0$; в) $x^3 + x^2 = x + 1$;
г) $y^3 + 9 = 9y + y^2$; ґ) $4x^2 - x = 0$; д) $y^3 + y = 0$.

364*. а) $3x^2 - x^3 + 6 - 2x = 0$; б) $x^3 - 2 - x + 2x^2 = 0$;
в) $14x^2 - 2x^3 = x - 7$; г) $x^6 + 3x^2 + 2x^4 + 6 = 0$;
ґ) $x^2 - 10x + 25 = 0$; д) $9x^2 + 16 = 24x$.

365. а°) $|x| = 4$; б°) $|x| - 5 = 0$; в°) $|2x| = 7$;
г°) $|3x| = -6$; ґ°) $|5x| = 0$; д°) $|x - 3| = 0$;
е°) $|x + 2| = -1$; є) $|x + 1| = 2$; ж) $|3 - x| = 8$;
з) $|2x + 5| = 10$; и) $|7 - 3x| = 16$; і) $|10 + 4x| = 17$.

366*. а) $|x + 4| + 14{,}3 = 15$; б) $14{,}3 + |4 - x| = 15$;
в) $19 - |x - 7| = 7$; г) $19 - |7 - x| = 7$;
ґ) $5 + 2|x - 3| = 21$; д) $5|2x - 1| - 15 = 8$.

5.3. Застосування лінійних рівнянь до розв'язування задач

Метод рівнянь застосовують для розв'язування задач не лише в математиці, а й в інших науках. Він полягає в тому, що за умовою задачі встановлюють відношення між даними та невідомими значеннями величин і записують його у вигляді рівняння. Розв'язуючи складене рівняння, дістають значення одного з невідомих, а потім, у разі потреби, користуючись установленими відношеннями, визначають інші невідомі величини.

Щоб успішно користуватися методом рівнянь, потрібно володіти певними вміннями. Розглянемо їх.

① Запис **за допомогою рівності відношення «більше» або «менше» між двома числами.** Запишемо, наприклад, за допомогою рівності відношення між числами a і b, що виражається твердженням: «число a більше за число b на 6 одиниць».

Міркуємо так: щоб із даних чисел утворити рівні між собою числа, можна менше число b збільшити на 6 або більше число a зменшити на 6. Маємо такі рівності:

1) $a = b + 6$; 2) $b = a - 6$.

Третій варіант запису може бути таким:

3) $a - b = 6$.

Такі самі рівності є записом відношення, що виражається твердженням: «число b менше від числа a на 6 одиниць».

Аналогічно відношення «число a більше за число b у 3 рази» теж має три варіанти запису у вигляді рівності:

1) $a = 3b$; 2) $b = \frac{a}{3}$; 3) $\frac{a}{b} = 3$.

② **Вираження за даними умови задачі одних числових значень через інші.** Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 1. Сума двох чисел дорівнює 15. Одне із цих чисел x. Запишіть друге число.

Очевидно, друге число дорівнює $15 - x$ — різниці суми і першого числа.

Приклад 2. В одному ящику a кг яблук, а в другому — на 4 кг більше. Яка маса яблук в обох ящиках?

За умовою задачі, у другому ящику $(a + 4)$ кг яблук, а в обох ящиках — $(a + a + 4) = (2a + 4)$ кг.

Приклад 3. Власна швидкість човна x км/год, швидкість течії ріки — 3 км/год. З якою швидкістю човен рухається за течією і яку відстань він при цьому долає за 5 год?

Швидкість руху човна за течією складається із власної швидкості човна і швидкості течії, тобто становить $(x + 3)$ км/год. Рухаючись з такою швидкістю протягом 5 год, човен подолає відстань $(x + 3) \cdot 5 = 5(x + 3)$ (км).

3 Як скласти рівняння за умовою задачі.

Один із основних етапів розв'язування задач за допомогою рівнянь — складання рівняння за умовою задачі, що, по суті, означає своєрідний переклад цієї умови на мову математики. Складене таким чином рівняння ще називають ***математичною моделлю*** даної задачі.

Складання рівняння передбачає:

1) *вибір основного невідомого і позначення його буквою*;

2) *вираження за допомогою цієї букви і даних у задачі чисел інших невідомих, про які йдеться в задачі*;

3) *утворення або відшукання двох виразів, які відповідно до умови задачі перебувають у відношенні «більше», «менше» або «дорівнює»*;

4) *запис цього відношення за допомогою рівності.*

Проілюструємо кожен із названих етапів на прикладі розв'язування задач.

Задача 1. На верхній полиці вдвічі більше книг, ніж на нижній. Якщо з верхньої полиці зняти 6 книг, а на нижню поставити 9 книг, то на обох полицях стоятиме однакова кількість книг. Скільки книг на кожній полиці?

Розв'язання.

1) *Вибір і позначення основного невідомого.*

За основне невідоме, як правило, приймають те, про що запитується в умові задачі (хоча бувають інші випадки, які розглянемо пізніше). У даному випадку в запитанні йдеться про два невідомих числа, що відповідають кількості книг на кожній полиці. Одне з них можна позначити буквою x. Вибір цього числа принципового значення не має, проте якщо числа перебувають у кратному відношенні (у кілька разів більші чи менші одне від одного), то, щоб уникнути дробів, за основне невідоме приймають менше з чисел. У даному разі це кількість книг на нижній полиці. Отже, x — кількість книг на нижній полиці.

2) *Вираження інших невідомих чисел.*

На нижній полиці було x книг, а на верхній — удвічі більше, ніж на нижній, тому кількість книг на верхній полиці можна записати у вигляді виразу $2x$.

3) *Складання двох виразів, що знаходяться у певному відношенні.*

Такими є вирази, що позначають кількість книг на кожній полиці після їх перестановок.

Після того, як з верхньої полиці зняли 6 книг, на ній залишилося $(2x - 6)$ книг. Коли ж на нижню полицю поставили 9 книг, то на ній стало $(x + 9)$ книг.

4) *Запис відношення між утвореними виразами за допомогою рівняння.*

За умовою задачі, утворені вирази позначають однакову кількість книг. Це можна записати у вигляді рівняння:

$$2x - 6 = x + 9.$$

Склавши рівняння, розв'язують його, тобто знаходять значення основного невідомого, а потім, у разі потреби, — значення інших невідомих.

$$2x - 6 = x + 9,$$
$$2x - x = 6 + 9,$$
$$x = 15.$$
$$2x = 2 \cdot 15 = 30.$$

Одержані числа (30 і 15) виражають кількість книг відповідно на верхній і нижній полицях.

Корінь складеного рівняння слід співвіднести з умовою задачі. Залежно від того, що позначає невідоме, на його значення можуть накладатися певні обмеження. Так, кількість предметів не може виражатися від'ємним або дробовим числом. Від'ємними не можуть бути також відстань, час тощо.

Коли б у нашому випадку корінь рівняння виявився дробовим числом, то висновок був би такий: за даної умови задача не має розв'язку.

Для зручності розв'язування задачі часто використовують табличні записи.

Задача 2. Швидкий поїзд, швидкість якого на 20 км/год більша за швидкість пасажирського, за 8 год проходить на 60 км більше, ніж пасажирський поїзд за 10 год. З якою швидкістю рухаються швидкий і пасажирський поїзди?

Розв'язання. Таблиця, в якій виражено дані в умові величини, може мати такий вигляд:

Поїзди	Швидкість, км/год	Час, год	Відстань, км
Швидкий	x	8	$8x$
Пасажирський	$x - 20$	10	$10(x - 20)$

З умови задачі випливає, що значення виразу $8x$ більше від значення виразу $10(x - 20)$ на 60.

Складемо рівняння: $8x - 60 = 10(x - 20)$.

Розв'яжемо його: $8x - 60 = 10x - 200$,

$8x - 10x = 60 - 200$,

$2x = 140$,

$x = 70$,

$x - 20 = 70 - 20 = 50$.

Відповідь. Швидкість пасажирського поїзда 50 км/год, а швидкого — 70 км/год.

Запитання для самоперевірки

1. У якій послідовності складають рівняння за умовою задачі?
2. Яке відношення між числами a і b виражає рівність:
   а) $a - 3 = b$; б) $a + 5 = b$?
3. Які рівності виражають одне і те саме відношення між числами m і n:
   а) $m - 10 = n$; б) $m + 10 = n$; в) $m + n = 10$;
   г) $m = n + 10$; ґ) $m - n = 10$; д) $n - 10 = m$?

Задачі та вправи

367°. Запишіть у вигляді трьох рівностей кожне з тверджень:
а) число m менше від числа n на 20;
б) число x більше за число y на 5;
в) число a більше за число b у 2 рази;
г) число a менше від числа b у 2 рази.

Запишіть вирази, складені за умовами задач (368–375):

368°. В одному кошику c яблук. У другому — у 2 рази, а в третьому — у 4 рази більше, ніж у першому. Скільки яблук у другому кошику; у третьому кошику; у трьох кошиках разом?

369°. У п'ятому класі x учнів, у шостому — на 3 учні більше, ніж у п'ятому, а в сьомому — на 2 учні менше, ніж у шостому. Скільки учнів у сьомому класі? Скільки учнів у трьох класах разом?

370°. На верхній полиці було x книжок, а на нижній — удвічі більше. З верхньої полиці зняли 6 книжок, а на нижню поставили 4 книжки. Скільки книжок стало на верхній та нижній полицях?

371°. У двох класах по x учнів. З одного класу перевели до другого двох учнів. Скільки учнів стало в кожному класі?

372°. В одній пачці a зошитів, у другій — у 2 рази більше. Скільки зошитів стане у кожній пачці, якщо з більшої перекласти в меншу 20 зошитів?

373°. Швидкість катера в стоячій воді — x км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год. Знайдіть швидкість катера за течією та проти течії; обчисліть відстань, яку подолає катер за 4 год, рухаючись проти течії.

374°. Відстань між двома містами 620 км. З одного міста в друге вирушає поїзд зі швидкістю x км/год. На якій відстані від кінцевого пункту перебуватиме поїзд через 6 год після початку руху?

375°. Два автомобілі одночасно починають рухатися назустріч один одному і зустрічаються через 3 год. Один рухається зі швидкістю a км/год, а другий — на 10 км/год швидше. Виразіть шлях, пройдений першим автомобілем до зустрічі; швидкість другого автомобіля; шлях, пройдений ним до зустрічі; відстань між автомобілями перед початком руху.

Розв'яжіть задачі (376–437):

376°. У двох автопарках 84 автобуси. В одному з них на 16 автобусів менше, ніж у другому. Скільки автобусів у кожному автопарку?

377°. Периметр прямокутника дорівнює 38 см. Знайдіть довжину його сторін, якщо одна з них на 3 см коротша від другої.

378°. У трьох бригадах працює 130 робітників. У першій бригаді на 8 робітників більше, ніж у другій, а в третій — на 15 менше, ніж у першій. Скільки робітників працює у кожній бригаді?

379. Сторони прямокутника відносяться, як 2 : 3. Знайдіть довжини цих сторін, якщо одна з них на 3 м довша за другу.

380°. Сума двох чисел дорівнює 48. Одне з них у 3 рази більше за друге. Знайдіть ці числа.

381°. Периметр прямокутника дорівнює 64 см, а його сторони пропорційні числам 5 і 3. Знайдіть довжини сторін прямокутника.

382°. У шкільному саду 120 плодових дерев. Груш — на 5 дерев більше, ніж слив, а яблунь — у три рази більше, ніж груш. Скільки яблунь, груш і слив росте в саду?

383°. На трьох полицях лежать 95 книжок. На другій полиці на 5 книжок більше, ніж на першій, а на третій — удвічі більше, ніж на другій. Скільки книжок на кожній полиці?

384. Периметр трикутника дорівнює 106 см. Одна його сторона на 6 см довша за другу, а третя — удвічі довша за першу. Знайдіть довжини сторін трикутника.

385. На заводі у трьох цехах працює 1008 робітників. У першому цеху робітників утричі менше, ніж у другому, а в третьому — стільки, скільки у перших двох разом. Скільки робітників працює в кожному цеху?

386°. Учень купив 3 ручки і 9 зошитів й заплатив за це 55 грн 20 коп. Яка ціна однієї ручки і одного зошита, якщо ручка на 8 коп. дешевша від зошита?

387. Маса вершків становить 21 % від маси молока, а маса масла становить 20 % від маси вершків. Скільки треба взяти молока, щоб мати 4,2 кг масла?

388. Протягом першого дня турист пройшов $\frac{3}{8}$ шляху, протягом другого — $\frac{2}{5}$ всього шляху, а протягом третього — решту 18 км. Який шлях пройшов турист за три дні?

389°. У кошику вдвічі менше яблук, ніж у ящику. Якщо з ящика перекласти у кошик 10 яблук, то у кошику і в ящику їх виявиться порівну. Скільки яблук у кошику і в ящику окремо?

390°. В одному бідоні втричі більше молока, ніж у другому. Якщо з першого у другий бідон перелити 8 л молока, то в обох бідонах його стане порівну. Скільки молока було в кожному бідоні?

391°. На одному складі 350 т зерна, а на другому — 420 т. З другого складу вивезли зерна вдвічі більше, ніж з першого, після чого зерна на складах стало порівну. Скільки зерна вивезли з кожного складу?

392. В одній цистерні 50 т бензину, а в другій — 7 т. Скільки тонн бензину потрібно перелити з першої цистерни у другу, щоб у першій його стало вдвічі більше, ніж у другій?

393*. Відстань між двома пристанями катер, рухаючись за течією, проходить за 6 год, а повертається назад за 8 год. Яка власна швидкість катера, якщо швидкість течії 2,5 км/год?

394. У сьомих класах 103 учні. Їх потрібно розподілити на три класи так, щоб у 7-А було на 3 учні більше, ніж у 7-Б, і на 4 менше, ніж у 7-В. Скільки учнів має бути у кожному класі?

395. Знайдіть три послідовні непарні натуральні числа, сума яких дорівнює 999.

396. Для виготовлення каркаса прямокутного паралелепіпеда маємо дріт завдовжки 96 см. Які розміри повинен мати прямокутний паралелепіпед, щоб його ширина була в 3 рази більшою за висоту і на 3 см меншою від довжини?

397. На склад привезли 30 мішків борошна і крупів загальною масою 2118 кг. Маса мішка борошна 64 кг, а крупів — 75 кг. Скільки мішків борошна і крупів окремо привезли на склад?

398. Задумане число помножили на –3,5. Добуток збільшили на 10,5. Знайдену суму поділили на 7 і дістали –1,5. Яке число було задумано?

399°. Учень задумав число. Якщо його помножити на –4, до добутку додати 8,8 і одержану суму поділити на 2, то дістанемо –10,8. Яке число задумав учень?

400. Зі сталевого дроту з діаметром 5 мм треба виготовити гвинтову циліндричну пружину висотою 122 мм. Визначте кількість витків такої пружини, якщо зазор між витками ненавантаженої пружини повинен становити 8 мм.

401. Брус завтовшки 23,6 см потрібно розпиляти на дошки завтовшки 2 см. Ширина розпилу 4 мм. Скільки дощок можна виготовити із цього бруса?

402*. Довжина обводу переднього колеса трактора 2 м, а заднього — 3 м. На якій відстані переднє колесо зробить на 10 обертів більше, ніж заднє?

403*. Заднє колесо трактора зробило на 30 обертів менше, ніж переднє. Скільки обертів зробило кожне колесо, якщо довжина обводу переднього колеса 1,5 м, а заднього — 2 м?

404. В одній цистерні 47 т бензину, а в другій — 26 т. Після того, як з першої цистерни взяли бензину вдвічі більше, ніж налили в другу, в обох цистернах бензину стало порівну. Скільки бензину налили в другу цистерну?

405. На одному складі 365 т вугілля, а на другому — 323 т. Перший відпускав щодня по 10 т, а другий — по 8 т вугілля. Через скільки днів на складах вугілля стане порівну?

406. На одному елеваторі 1500 т зерна, а на другому — 2800 т. З другого елеватора щодня відпускали по 50 т зерна, а в перший привозили по 80 т. Через скільки днів зерна на елеваторах стане порівну?

407. Якщо на кожну лавку спортзалу посадити по 5 учнів класу, то четверо залишаться без місця; якщо ж на кожну лавку сяде по 6 учнів, то на останній залишаться два вільних місця. Скільки учнів у класі і скільки лавок у спортзалі?

408. У кошику на 12 яблук менше, ніж у ящику. Якщо з кошика взяти 4 яблука, а в ящик покласти 5 яблук, то в ящику виявиться вдвічі більше яблук, ніж у кошику. Скільки яблук було у кошику і скільки в ящику спочатку?

409. Батькові 31 рік, а сину 4 роки. Через скільки років батько буде вчетверо старший за сина?

410. В одному сараї сіна у 2 рази більше, ніж у другому. Коли з першого взяли 12 т сіна, а в другий привезли 10 т, то в першому стало на 5 т сіна більше, ніж у другому. Скільки тонн сіна було в кожному сараї?

411. У кошику вдвічі менше яблук, ніж у ящику. Якщо з ящика перекласти в кошик 8 яблук, то у кошику стане в 1,5 разу менше яблук, ніж у ящику. Скільки яблук було в кошику і скільки в ящику спочатку?

412. В одній школі на 80 учнів більше, ніж у другій. Коли з другої школи перейшло до першої 10 учнів, то виявилося, що кількість учнів другої школи становить половину їхньої кількості у першій школі. Скільки учнів було в кожній школі?

413. Вантажний автомобіль, рухаючись із швидкістю на 15 км/год меншою, ніж легковий автомобіль, за 10 год проїжджає той самий шлях, що легковий за 8 год. З якими швидкостями рухаються автомобілі?

414. Весняна сівба мала тривати 15 днів. Але фактично щодня засівали на 30 га більше, ніж передбачалося, тому сівбу завершили на 3 дні раніше. Яку площу мали засівати щодня і яка площа засіяного поля?

415. Весняна сівба мала закінчитися за 13 днів. Оскільки щодня засівали на 4 га більше, ніж передбачалося, то за 3 дні до наміченого терміну залишилися незасіяними всього 5 га. Скільки гектарів у день засівали фактично?

416. Теплохід пройшов відстань між містами за 3 год 36 хв, а в протилежному напрямі — за 3 год. Знайдіть відстань між цими містами, якщо середня швидкість течії річки дорівнює 2,1 км/год.

417. Від станції до турбази туристи йшли зі швидкістю 4 км/год, а назад – із швидкістю 5 км/год, тому на той самий шлях витратили на 1 год менше. Знайдіть відстань від станції до турбази.

418. Відстань між станціями Перемишль – Львів (перша залізниця на Україні, збудована в 1861 р.) поїзд може пройти зі швидкістю 50 км/год на 24 хв швидше, ніж із швидкістю 42 км/год. Знайдіть цю відстань.

419. З пункту A до пункту B вирушив моторний човен зі швидкістю 20 км/год. Через 2 год слідом за ним із пункту A до пункту B відправився другий човен зі швидкістю 24 км/год. Обидва човни в пункт B прибули одночасно. Знайдіть відстань між пунктами.

420. Мотоцикліст виїхав із міста в село зі швидкістю 50 км/год. Через півгодини йому назустріч виїхав автомобіль, швидкість якого 60 км/год. Через який час після виїзду мотоцикліста вони зустрінуться, якщо відстань між містом і селом 168 км?

421. З Києва до Суботова, що на Черкащині, о 7 год зі швидкістю 60 км/год вирушив автобус із туристами. Через годину слідом за ним зі швидкістю 80 км/год виїхав легковий автомобіль, який прибув до Суботова одночасно з автобусом. Яка відстань від Києва до Суботова? О котрій годині туристи прибули до Суботова?

422. Якщо одну сторону квадрата зменшити на 1,2 м, а другу — на 1,5 м, то площа утвореного прямокутника буде на 14,4 м² меншою, ніж площа даного квадрата. Знайдіть сторону квадрата.

423*. Якщо в кожний пакет насипати по 2 кг крупи, то для всієї крупи не вистачить 10 пакетів, а якщо в пакет насипати по 3 кг крупи, то залишиться 20 вільних пакетів. Знайдіть масу крупи і кількість пакетів.

424*. Останній кошовий отаман Запорізької Січі Петро Калнишевський був звільнений із Соловецької тюрми на 110-му році життя. Через два роки він помер і був похований під соборною стіною Соловецького монастиря. Назвіть роки народження і смерті П. Калнишевського, якщо у XVII ст. він прожив у 3 рази більше, ніж у XIX ст.

Петро Калнишевський

425*. З дроту завдовжки 84 см потрібно виготовити каркас прямокутного паралелепіпеда, розміри якого мають бути пропорційні числам 1, 2 і 3. Визначте розміри та площу поверхні прямокутного паралелепіпеда.

426*. Задумане число помножили на –0,3. Добуток зменшили на 15. Знайдену різницю поділили на 0,3 і до результату додали задумане число. Поясніть, чому в результаті завжди маємо –50.

427*. Якщо в кожний пакет насипати по 2 кг крупів, то для всіх крупів не вистачить 10 пакетів, а якщо насипати по 3 кг, то залишиться 20 незаповнених пакетів. Скільки було кілограмів крупів і скільки пакетів?

428*. Поїзд проїжджає повз телеграфний стовп за 20 с, а міст завдовжки 80 м долає за 25 с. Яка довжина і яка швидкість поїзда?

429*. Автомобіль проїхав відстань між двома пунктами зі швидкістю 75 км/год, а повертався назад зі швидкістю 50 км/год. Якою була середня швидкість його руху?

430*. Поїзд долає відстань між містами A і B за 12 год. Вирушивши з міста A на 2 год пізніше, ніж передбачалося, машиніст змушений був збільшити швидкість на 12 км/год, щоб вчасно прибути в місто B. З якою швидкістю мав рухатися поїзд за розкладом?

431*. Продуктивність праці на заводі підвищилася на 40 %, тому за 5 днів завод не тільки виконав шестиденне завдання, а й виготовив додатково 40 виробів. Скільки виробів завод виготовляв раніше за день?

432*. Автомобіль проїхав відстань від міста до села зі швидкістю 80 км/год. Повертаючись назад, 75 % шляху він їхав з попередньою швидкістю, а решту шляху проїхав зі швидкістю 60 км/год і тому витратив на зворотний шлях на 10 хв більше. Знайдіть відстань від міста до села.

433*. Щоб дістатися до вокзалу, можна замовити таксі, яке доведеться чекати 24 хв, і їхати зі швидкістю 30 км/год. Можна йти пішки зі швидкістю 6 км/год. Як краще вчинити, якщо відстань від дому до вокзалу: а) 2 км; б) 3 км; в) 5 км?

434. Основа прямокутника вдвічі більша від його бічної сторони. Бічну сторону прямокутника збільшили на 3 м, тому площа його збільшилася на 24 м². Знайдіть початкову довжину сторін прямокутника.

435*. У погоні за лисицею собака біжить зі швидкістю 8 м/с, а лисиця утікає зі швидкістю 6 м/с. Початкова відстань між ними була 360 м, а лисиці залишилося бігти до своєї нори ще 1 км. Чи встигне вона сховатися у норі?

436*. З пункту A до пункту B вирушив товарний поїзд зі швидкістю 48 км/год. Через 20 хв з пункту A в тому самому напрямі вирушив пасажирський поїзд зі швидкістю 60 км/год. Через який час після його виходу товарний поїзд має зробити зупинку, щоб пропустити пасажирський, якщо відстань між поїздами на момент зупинки має становити 10 км?

437*. Якщо більшу сторону прямокутника зменшити на 0,7 дм, а меншу збільшити на 4 см, то дістанемо квадрат, площа якого на 10 см^2 більша за площу прямокутника. Знайдіть сторону квадрата.

Історична довідка

Письмові пам'ятки свідчать, що задовго до нашої ери вавилонянам, єгиптянам, індійцям та іншим стародавнім народам були відомі способи розв'язування рівнянь з однією змінною і задач за допомогою рівнянь.

Так, єгипетський папірус, який був написаний за 2000 років до нової ери, містить задачі на знаходження невідомого числа, яке називали «хау» (купа) і позначали спеціальним значком (ієрогліфом). Ось кілька прикладів задач із цього папірусу.

Задача 1. Невідоме, його сьома, його ціле 16.

Користуючись сучасною символікою, за умовою цієї задачі можна скласти рівняння першого степеня з одним невідомим:

$$x+\frac{1}{7}x=16.$$

Задача 2. $\frac{2}{3}$ додано і $\frac{1}{3}$ віднято: остача 10.

З огляду на розв'язування цієї задачі, наведене у папірусі, умову її слід розуміти так: «Коли до невідомого числа додали $\frac{2}{3}$ його і відняли $\frac{1}{3}$ знайденої суми, то дістали 10. Знайти невідоме число».

Маємо таке рівняння: $x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\left(x+\frac{2}{3}x\right)=10.$ Звідси $x=9$.

У творах давньогрецького математика Діофанта (III ст.) можна знайти, наприклад, таку задачу: «Числа 20 і 100. Треба одне й те саме число додати до меншого й відняти від більшого; відношення суми до різниці дорівнює 4».

Розв'язування задачі зводиться до розв'язування рівняння з однією змінною: $\frac{20+x}{100-x}=4.$ Як розв'язують такі рівняння, ви дізнаєтесь у наступному класі.

Індійські рукописи VII–VIII ст., що є копією з більш ранніх рукописів (III–IV ст.), містять таку задачу: «З чотирьох жертводавців другий пожертвував удвічі більше від першого, третій — утричі більше від другого, четвертий — учетверо більше від третього, а всі разом пожертвували 132. Скільки пожертвував перший?»

У сучасного учня задача не викликає особливих труднощів: склавши рівняння $x + 2x + 6x + 24x = 132$, маємо, що $x = 4$.

Індійці цю задачу розв'язували інакше, міркуючи так: «Якби перший дав 1, другий — 2, третій — 6, а четвертий 24, то всі разом вони дали б 33. Але всього було 132, що вчетверо більше. Тому і кожен пожертвував учетверо більше, тобто 4, 8, 24 і 96».

5.4. Лінійне рівняння з двома змінними

! Пригадайте

1. Який загальний вигляд має лінійне рівняння з однією змінною?
2. Що є розв'язком лінійного рівняння з однією змінною?
3. Як знайти розв'язок рівняння $ax + b = 0$, якщо $a \neq 0$? Яку назву має таке рівняння?
4. Скільки розв'язків може мати лінійне рівняння з однією змінною? Наведіть приклади.

① **Скільки змінних може входити до рівняння.** Крім однієї змінної, рівняння може містити дві, три і будь-яку іншу кількість змінних. Наприклад, рівняння $2x - 3y = 6(x + 4) + 7y$ містить дві змінні — x і y, тому його називають ***рівнянням із двома змінними***.

$6xy + z^2 = 5x - 1$ — рівняння з трьома змінними x, y і z. Що є розв'язком таких рівнянь і як розв'язати окремі їхні види, ми зараз з'ясуємо. Зауважимо, що всі відомі властивості рівнянь з однією змінною, на основі яких їх розв'язують, поширюються і на рівняння з будь-якою кількістю змінних.

② Лінійне рівняння з двома змінними і його розв'язки.

Задача. Сума двох чисел дорівнює 7. Знайдіть ці числа.

Розв'язання. Можна назвати кілька пар таких чисел, наприклад, 3 і 4; 5 і 2; 6,5 і 0,5; 0 і 7; –2 і 9; 1 і 6; 7 і 0. Кожна із цих пар є розв'язком задачі, бо сума чисел кожної пари дорівнює 7.

Цікаво, скільки взагалі розв'язків має ця задача? Очевидно, що безліч. Щоб знайти будь-який із них, можна довільно обрати одне із чисел, наприклад, 1 і за даною сумою 7 і відомим доданком знайти друге число: $7 - 1 = 6$. Дістанемо один із розв'язків: 1 і 6.

Узагалі, якщо позначити одне з невідомих чисел буквою x, а друге — буквою y, то розв'язування цієї задачі зведеться до розв'язування рівняння $x + y = 7$. Це ***рівняння з двома змінними x і y. Розв'язок*** цього рівняння — ***пара значень x і y, що задовольняє рівняння.*** Кожен такий розв'язок записують у вигляді пари чисел, що стоять у дужках: на першому місці значення x, на другому — y. Враховуючи одержані вище розв'язки нашої задачі, можна стверджувати, що розв'язками даного рівняння є пари: (3; 4), (5; 2), (6,5; 0,5), (0; 7), (–2; 9), (1; 6), (7; 0).

Рівняння $x + y = 7$ належить до рівнянь, які мають назву ***лінійні рівняння з двома змінними***.

Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — дані числа, а x і y — змінні.

Наприклад: $4x + 9y = -3$ (тут $a = 4$, $b = 9$, $c = -3$);

$3x - 5y = 1$ ($a = 3$, $b = -5$, $c = 1$);

$x - 6y = 0$ ($a = 1$, $b = -6$, $c = 0$);

$0 \cdot x - 2,5y = 0$ ($a = 0$, $b = -2,5$, $c = 0$).

Розв'язком такого рівняння, як уже зазначалося, є ***пара значень x і y, що задовольняє його***.

③ Як розв'язати лінійне рівняння з двома змінними. Розглянемо рівняння $3x - 5y = 1$ і знайдемо кілька його розв'язків. Для цього одній із змінних (наприклад, x) надамо довільного значення, наприклад, 7, $x = 7$. Підставимо це значення замість x у дане рівняння і знайдемо відповідне значення y. Маємо:

$$3 \cdot 7 - 5y = 1, \quad 21 - 5y = 1, \quad 5y = 20, \quad y = 4.$$

Отже, розв'язком даного рівняння є пара чисел (7; 4). Аналогічно можна знайти інші розв'язки цього рівняння. Очевидно, що їх безліч.

Для розв'язування рівняння $3x - 5y = 1$ можна було виразити з нього змінну y через змінну x:

$$-5y = 1 - 3x, \qquad y = \frac{1-3x}{-5}.$$

За цією формулою для довільного значення x завжди можна знайти відповідне значення y.

Наприклад, якщо $x = 3$, то $y = \dfrac{1-3\cdot 3}{-5} = \dfrac{8}{5} = 1{,}6$. Маємо розв'язок (3; 1,6). Якщо $x = -8$, то $y = \dfrac{1-3\cdot(-8)}{-5} = \dfrac{25}{-5} = -5$. Отже, (–8; –5) — ще один розв'язок даного рівняння.

Якщо в лінійному рівнянні $ax + by = c$ $a \neq 0$ і $b \neq 0$, то таке рівняння називається рівнянням першого степеня з двома змінними.

Наприклад: $3x - 8y = 10$; $x + 7{,}5y = 0$; $\dfrac{3}{7}x - 12{,}8y = 0{,}4$.

Усі такі рівняння мають безліч розв'язків, які знаходять розглянутим вище способом.

А от лінійні рівняння $0 \cdot x - 2y = 6$; $5x + 0 \cdot y = 10$; $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$; $0 \cdot x + 0 \cdot y = -3$ не є рівняннями першого степеня з двома змінними, бо в першому з них $a = 0$, у другому $b = 0$, а в двох останніх $a = b = 0$. Розглянемо особливості розв'язків таких рівнянь.

1) $0 \cdot x - 2y = 6$ $(a = 0,\ b \neq 0)$.

Значення лівої частини рівняння не залежить від x, бо $0 \cdot x = 0$ за будь-якого значення x. Отже, x у даному випадку може бути будь-яким числом. Значення y тут єдине: $y = -3$, що випливає з рівняння $-2y = 6$. Отже, розв'язок даного рівняння має вигляд

$(m; -3)$, де m — будь-яке число. Очевидно, що таких розв'язків безліч, наприклад: $(3; -3)$, $\left(-\frac{2}{3}; -3\right)$, $(0; -3)$ і т. д.

Взагалі, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$, то рівняння $ax + by = c$ $(0 \cdot x + by = c)$ має безліч розв'язків виду $\left(m; \frac{c}{b}\right)$, де m — будь-яке число.

2) $5x + 0 \cdot y = 10$ $(a \neq 0, b = 0)$.

У даному випадку значення лівої частини рівняння не залежить від y, тому y може бути будь-яким числом. З рівняння випливає, що $5x = 10$, тобто $x = 2$. Отже, розв'язок рівняння має вигляд $(2; n)$, де n — будь-яке число. Таких розв'язків безліч, їх дістають, надаючи n довільного значення.

Взагалі, якщо $a \neq 0$ і $b = 0$, то рівняння $ax + by = c$ $(ax + 0 \cdot y = c)$ має безліч розв'язків виду $\left(\frac{c}{a}; n\right)$, де n — будь-яке число.

3) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$ $(a = b = c = 0)$.

Очевидно, що це рівняння задовольняє будь-яка пара значень x і y. Тому воно має безліч розв'язків, наприклад: $(3; -1)$, $(0{,}8; 4)$, $(0; 17{,}5)$ і т. д.

Взагалі, якщо $a = b = c = 0$, то рівняння $ax + by = c$ $(0 \cdot x + 0 \cdot y = 0)$ має безліч розв'язків виду $(m; n)$, де m і n — довільні числа.

4) $0 \cdot x + 0 \cdot y = -3$ $(a = b = 0, c \neq 0)$.

Оскільки ліва частина рівняння за будь-яких значень x і y дорівнює нулю, а права відмінна від нуля, то це рівняння розв'язків не має.

Взагалі, якщо $a = b = 0$, $c \neq 0$, то рівняння $ax + by = c$ $(0 \cdot x + 0 \cdot y = c)$ не має розв'язків.

До рівнянь, що мають вигляд розглянутих, може привести розв'язування рівнянь, які попервах не схожі на них. Для прикладу розв'яжемо рівняння $4x + 3y = 8 + 3(y - 2)$. Маємо:

$4x + 3y = 8 + 3y - 6,$

$4x + 3y - 3y = 8 - 6,$

$4x + 0 \cdot y = 2,$

y — довільне число, $4x = 2$, $x = 0{,}5$.

Відповідь. $(0{,}5; n)$, де n — довільне число.

Узагальнимо розглянуті випадки щодо розв'язків лінійних рівнянь з двома змінними у таблиці.

Рівняння	Значення *a*, *b*, *c*	Розв'язки
$ax + by = c$	$a \neq 0,\ b \neq 0$	Безліч пар чисел, які знаходяться так: x надають довільного значення і, підставивши його в рівняння замість x, знаходять відповідне значення y.
$ax + by = c$	$a = 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$	Безліч пар чисел $\left(m; \frac{c}{b}\right)$, де m — довільне число.
$0 \cdot x + by = c$	$a = 0,\ b \neq 0,\ c = 0$	Безліч пар чисел $(m;\ 0)$, де m — довільне число.
$0 \cdot x + by = 0$	$a \neq 0,\ b = 0,\ c \neq 0$	Безліч пар чисел $\left(\frac{c}{a}; n\right)$, де n — довільне число.
$ax + 0 \cdot y = c$	$a \neq 0,\ b = 0,\ c = 0$	Безліч пар чисел $(n;\ 0)$, де n — довільне число.
$0 \cdot x + 0 \cdot y = c$	$a = 0,\ b = 0,\ c \neq 0$	Розв'язків немає.
$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$	$a = b = c = 0$	Безліч пар чисел $(m;\ n)$, де m і n — довільні числа.

? Запитання для самоперевірки

1. Який загальний вигляд має лінійне рівняння з двома змінними? Наведіть приклади.
2. Що є розв'язком лінійного рівняння з двома змінними?
3. Як знайти розв'язок лінійного рівняння з двома змінними? Проілюструйте на прикладі.
4. Яке твердження правильне:

   а) будь-яке лінійне рівняння з двома змінними є рівнянням першого степеня з двома змінними;

б) будь-яке рівняння першого степеня з двома змінними є лінійним рівнянням із двома змінними?

5. Скільки розв'язків може мати рівняння першого степеня з двома змінними?

6. Яке з рівнянь із двома змінними — першого степеня чи лінійне — може не мати розв'язків? Наведіть приклади.

Задачі та вправи

438°. Запишіть рівняння у вигляді $ax + by = c$ і вкажіть у кожному випадку значення a, b, c:

а) $3x - 7y - 9 = 0$; б) $4x + 2 = 0$; в) $6x = -8y$;
г) $5 + x = 0$; ґ) $x = 0$; д) $y = 2$.

439°. З даних рівнянь виберіть і запишіть лінійні рівняння з двома змінними або ті, які можна звести до них:

а) $(x - y)(y + 2) = 4$; б) $3x + 2 = 0$; в) $xy + 3 = 0$;
г) $y = 5x - 10$; ґ) $x - 2y + 5 = 0$; д) $4 - 2y = 5x$.

440°. Серед пар чисел $\left(0; 1\frac{1}{3}\right)$, $(-2; 1)$, $(-10; -2)$, $(-4; 0)$ знайдіть розв'язки рівняння $-x + 3y = 4$.

441°. Які з пар чисел $(3; 4)$, $(0; 4)$, $(0; 3)$, $(2; 1)$, $(1; 7)$, $(-3; -4)$ є розв'язками рівнянь:

а) $x + y = 5$; б) $2x + y = 10$; в) $xy = 12$;
г) $x + 2y = 6$; ґ) $x + y = 25$; д) $x + y = 31$;
е) $x + 0 \cdot y = 0$; є) $x - y = 1$; ж) $0 \cdot x + y = 1$?

Які з цих рівнянь лінійні? Які — першого степеня?

442. Заповніть пропуски так, щоб кожна з пар чисел була розв'язком рівняння $0{,}5x - 4y = 5$:

а) $(0; \ldots)$; б) $(2; \ldots)$; в) $(\ldots ; -1)$; г) $(\ldots ; 0{,}5)$.

443. Заповніть праву частину рівнянь так, щоб їх розв'язками були відповідні пари чисел:

а) $-2{,}5x + 6y = \ldots$, $(-4; 2)$; б) $x - 3{,}2y = \ldots$, $(1; -5)$;
в) $6x + y = \ldots$, $\left(\frac{1}{3}; 3{,}5\right)$; г) $0 \cdot x - 4y = \ldots$, $(17; 2)$.

444. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, що має розв'язком пару чисел:

а) (2; 1); б) (–1; 3); в) (0; 5); г) $\left(\frac{1}{3}; 4\right)$.

445. Знайдіть m, якщо (m; m) є розв'язком рівняння:

а) $3x - 5y = 10$; б) $-x + 2y = 4$;

в) $5x + 3y = 12$; г) $x + y = 1$.

446. Знайдіть розв'язок рівняння $10x - 7y = 4{,}5$, якщо відомо, що ним є пара однакових чисел.

447*. Заповніть у рівності $3x - ... = 2$ пропуск так, щоб утворилося лінійне рівняння з двома змінними, яке має розв'язок:

а) (–4; 7); б) (0; 2); в) (6; 4); г) $\left(\frac{1}{3}; -2\right)$.

448*. Скільки розв'язків мають рівняння:

а) $2x - 3y = 6$; б) $0 \cdot x + 4y = 8$; в) $3x + 0 \cdot y = -6$;

г) $0 \cdot x + 0 \cdot y = -5$; ґ) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$?

Запишіть по два розв'язки тих рівнянь, які їх мають.

449. Ви повинні заплатити за куплену в магазині книжку 31 грн. У вас одні лише п'ятірки, а у касира — тільки двійки. Чи можете ви за наявності таких грошей розплатитися з касиром і як саме?

1) Складіть відповідне рівняння з двома змінними.

2) Назвіть три розв'язки задачі.

5.5. Графік лінійного рівняння з двома змінними

! Пригадайте

1. Яка функція називається лінійною?
2. Що є графіком лінійної функції?
3. Як побудувати графік лінійної функції?

① **Що таке графік лінійного рівняння з двома змінними.** Повернемося до рівняння $x + y = 7$. Як уже зазначалося, воно має безліч розв'язків, кожен з яких є парою чисел — значень відповідно x і y, що задовольняють рівняння. Занесемо знайдені розв'язки до таблиці:

x	3	5	6,5	0	–2	1	7
y	4	2	0,5	7	9	6	0
$x + y$	7	7	7	7	7	7	7

Побудуємо на координатній площині точки, координатами яких є наведені в таблиці розв'язки даного рівняння: $A(3; 4)$, $B(5; 2)$, $C(6,5; 0,5)$, $D(0; 7)$, $E(–2; 9)$, $F(1; 6)$, $G(7; 0)$ (рис. 62).

Приклавши до побудованих точок лінійку, бачимо, що всі вони лежать на одній прямій (рис. 63).

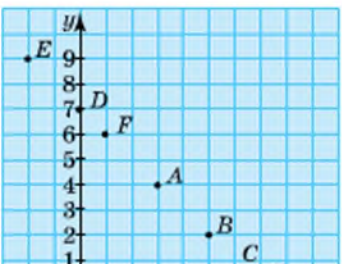


Рис. 62

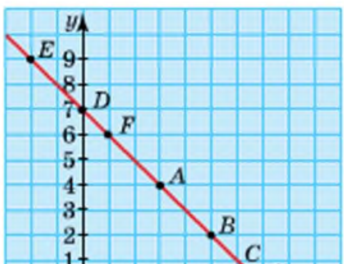


Рис. 63

Маючи інші розв'язки цього рівняння, можна аналогічно побудувати відповідні точки координатної площини. Таких точок, як і розв'язків рівняння $x + y = 7$, безліч. Цікаво, що всі вони лежатимуть на тій самій прямій, яку називають *графіком* даного *рівняння*.

Графіком лінійного рівняння з двома змінними називається множина всіх точок координатної площини, координати яких є розв'язками даного рівняння.

Взагалі, графіком лінійного рівняння $ax + by = c$, крім випадку $a = b = 0$, є пряма лінія. Для рівняння $ax + by = c$, де $b \neq 0$, ми це зараз обґрунтуємо — для всіх інших випадків обмежимося ілюстрацією у підпункті 4.

Виразивши з рівняння $ax + by = c$ змінну y через змінну x, матимемо: $by = -ax + c$; $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (ділити на b можна, бо $b \neq 0$).

Дістали не що інше, як лінійну функцію, графіком якої, як відомо, є пряма.

② **Як побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними.** Оскільки графіком лінійного рівняння з двома змінними є пряма, то для його побудови достатньо на координатній площині побудувати дві точки, які йому належать, і провести через них пряму. Координати цих точок знаходять як розв'язки даного рівняння. При цьому для спрощення обчислень, як і у випадку лінійної функції, такими точками можна обирати точки перетину графіка з осями координат. Нагадаємо, що в будь-якої точки, яка лежить на осі Oy, абсциса x дорівнює 0, а у всіх точок, що лежать на осі Ox, ордината y дорівнює 0.

Приклад. Побудувати графік рівняння $4x - 5y = 20$.

Побудова. Знайдемо координати точки A перетину графіка з віссю Oy. Її абсциса $x = 0$. Щоб знайти ординату цієї точки, у рівняння замість x підставляємо 0 і обчислюємо значення y:

$$4 \cdot 0 - 5y = 20, \quad -5y = 20, \quad y = -4.$$

Отже, координати точки $A(0; -4)$.

Ордината точки B перетину графіка з віссю Ox дорівнює 0: $y = 0$. Щоб знайти абсцису точки B, у рівняння підставляємо це значення y і обчислюємо значення x:

$$4x - 5 \cdot 0 = 20, \quad 4x = 20, \quad x = 5.$$

Отже, координати точки $B(5; 0)$.

Будуємо на координатній площині точки A і B та проводимо через них пряму, яка і є графіком даного рівняння (рис. 64).

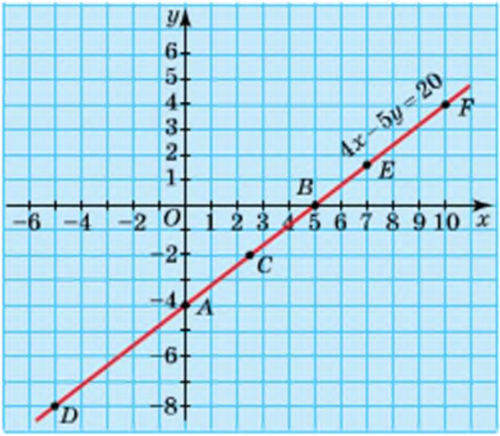


Рис. 64

③ **Як за графіком лінійного рівняння знайти його розв'язок.** Щоб за графіком лінійного рівняння знайти будь-який його розв'язок, потрібно взяти на графіку довільну точку і визначити її координати. Адже всі точки графіка рівняння мають ту властивість, що їхні координати задовольняють це рівняння.

Спосіб розв'язування рівняння з використанням його графіка називають ***графічним способом***.

Проілюструємо його на прикладі розв'язування рівняння $4x - 5y = 20$, графік якого зображено на рисунку 64. Візьмемо на графіку довільну точку, наприклад, C і знайдемо її координати. Маємо: $x = 2{,}5$, $y = -2$, тобто $C(2{,}5; -2)$. Пара чисел $(2{,}5; -2)$ є розв'язком даного рівняння. Інші розв'язки знаходять як координати інших точок графіка (зробіть це для позначених на графіку точок D, E, F та виконайте перевірку).

Очевидно, що графічний спосіб розв'язування рівнянь не завжди дає точне значення розв'язку.

④ Графіки окремих видів лінійних рівнянь із двома змінними.

У п. 5.4 йшлося про розв'язування лінійних рівнянь $ax + by = c$, у яких один із коефіцієнтів a або b чи обидва одночасно дорівнюють нулю.

З'ясуємо особливості графіків таких рівнянь.

1) $a = 0$, $c \neq 0$.

Розглянемо конкретний приклад. Побудуємо графік рівняння $0 \cdot x - 2y = 6$. Воно має безліч розв'язків виду $(m; -3)$, де m — будь-яке число (див. с. 171). Запишемо кілька з них: $(-1; -3)$, $(0; -3)$, $(1; -3)$, $(2; -3)$, $(3; -3)$. Побудувавши за цими координатами точки на координатній площині і провівши через них лінію, одержимо графік даного рівняння, зображений на рисунку 65.

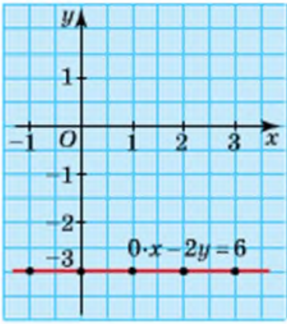


Рис. 65

Помічаємо, що це пряма, паралельна осі Ox. Це легко пояснити: адже ордината будь-якої її точки дорівнює -3. А отже, всі точки графіка однаково віддалені від осі Ox. Тому він паралельний цій осі.

Таку властивість мають графіки всіх рівнянь виду $0 \cdot x + by = c$ (або, інакше, $by = c$). Тому для їх побудови через будь-яку точку координатної площини з ординатою $y = \dfrac{c}{b}$ достатньо провести пряму, паралельну осі Ox. Як правило, таку точку обирають на осі Oy.

Наприклад, для побудови графіка рівняння $0 \cdot x + 6y = 30$ знаходимо ординату точки його перетину з віссю Oy ($y = \dfrac{30}{6} = 5$) і через цю точку проводимо пряму, паралельну осі Ox.

2) $a = 0$, $c = 0$. У цьому випадку рівняння набирає вигляду $0 \cdot x + by = 0$.

Розв'язок цього рівняння має вигляд $(n; 0)$, де n — будь-яке число. Всі точки з такими координатами лежать на осі Ox. Отже, графік рівняння $0 \cdot x + by = 0$ (або $by = 0$, $y = 0$) збігається з віссю абсцис.

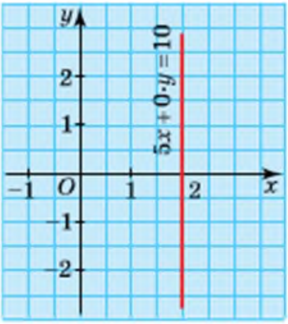


Рис. 66

3) $b = 0$, $c \neq 0$. Приклад: рівняння $5x + 0 \cdot y = 10$. Його розв'язок має вигляд $(2; n)$, де n — будь-яке число (с. 172). Запишіть кілька довільних розв'язків цього рівняння і побудуйте його графік. Якщо ви не помилились, то він має вигляд, як на рисунку 66.

Зробіть самостійно висновок щодо розміщення його відносно осі Oy. Вкажіть на основі цього висновку найпростіший спосіб побудови графіка будь-якого рівняння виду $ax + 0 \cdot y = c$ (або, інакше, $ax = c$).

4) $b = 0$, $c = 0$. Рівняння набирає вигляду $ax + 0 \cdot y = 0$ (інакше, $ax = 0$, або $x = 0$). Його графіком є пряма, що збігається з віссю Oy. Обґрунтуйте це самостійно.

5) $a = b = c = 0$. Рівняння має вигляд $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. Його задовольняє будь-яка пара чисел $(x; y)$. Якщо побудувати відповідні точки на координатній площині, то вони «покриють» усю площину. Отже, графіком цього рівняння є сама координатна площина.

6) $a = b = 0$, $c \neq 0$. Рівняння $0 \cdot x + 0 \cdot y = c$ розв'язків не має, тому його графік побудувати неможливо.

Для зручності подамо розглянуті види графіків лінійних рівнянь з двома змінними у таблиці.

Рівняння	Значення a, b, c	Розв'язки
$ax + by = c$	$a \neq 0$, $b \neq 0$, c — будь-яке число	Пряма виду $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.
$0 \cdot x + by = c$	$a = 0, b \neq 0, c \neq 0$	Пряма, паралельна осі абсцис, що перетинає вісь ординат у точці $\left(0; \frac{c}{b}\right)$.
$0 \cdot x + by = 0$	$a = 0, b \neq 0, c = 0$	Вісь абсцис.
$ax + 0 \cdot y = c$	$a \neq 0, b = 0, c \neq 0$	Пряма, паралельна осі ординат, що перетинає вісь абсцис у точці $\left(\frac{c}{a}; 0\right)$.
$ax + 0 \cdot y = c$	$a \neq 0, b = 0, c = 0$	Вісь ординат.
$0 \cdot x + 0 \cdot y = c$	$a = 0, b = 0, c \neq 0$	Графік побудувати неможливо.
$0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$	$a = b = c = 0$	Координатна площина.

? Запитання для самоперевірки

1. Що є графіком рівняння першого степеня з двома змінними?
2. Як побудувати графік рівняння першого степеня з двома змінними?
3. Як за графіком лінійного рівняння з двома змінними знайти його розв'язок?
4. Що є графіком рівняння:
   а) $0 - x + 3y = 9$ $(3y = 9)$;
   б) $5x + 0 - y = 10$ $(5x = 10)$?
5. Графік якого лінійного рівняння збігається з віссю:
   а) абсцис; б) ординат?

Задачі та вправи

450°. Які з точок належать графіку рівняння $-2x - y = 6$:

а) $A(-2; 5)$; б) $B(4; -4)$; в) $C(0; 6)$; г) $D(-3; 0)$;
ґ) $E(-1{,}5; -3)$; д) $F(1{,}5; -3)$; е) $K(2; 2)$; є) $M(-0{,}5; -5)$?

451°. Знайдіть координати двох точок, що належать графіку рівняння:

а) $5x - 2y = 4$; б) $x + 3y = 6$; в) $x + y = 8$; г) $4x = 5$;
ґ) $-2y = 7$; д) $3 - 2x = 4y$; е) $x - 6 = 3y$; є) $y - 5x = 0{,}5$.

452°. Знайдіть координати точок перетину з осями координат графіків рівнянь, не будуючи їх:

а) $x + y = 5$; б) $2x + y = 2$; в) $4x - 2y = 7$; г) $5y = 8$;
ґ) $-x - 3y = 6$; д) $3x - 2y = 0$; е) $-x = y + 4$; є) $7x = 21$.

453°. Побудуйте графіки рівнянь:

а) $x - 3y = 6$; б) $2y - 5x = 10$; в) $0{,}5x + y = 0$;
г) $2x = 3$; ґ) $-5y - 15 = 0$; д) $5y - 2x = 10$.

454. Знайдіть значення a в рівнянні $ax + 2y = 9$, коли відомо, що пара чисел $x = 1$, $y = 3$ є розв'язком цього рівняння.

455. Знайдіть значення b у рівнянні $3x + by = 9$, якщо графік цього рівняння проходить через точку $A(2; 3)$.

456. Побудуйте графіки рівнянь і знайдіть координати точок їх перетину:

а) $x + y = 6$ і $x - y = 2$; б) $x - y = 3$ і $x + y = 7$;
в) $x + 2y = 7$ і $x - 2y = -1$; г) $2x + y = 13$ і $x - y = 2$.

457. Знайдіть графічним способом спільні розв'язки рівнянь:

а) $x + 2y = 6$ і $-2x + y = -7$; б) $x - y = 0$ і $2x + y = 6$;
в) $3x - 5y = 10$ і $x = 0$; г) $x + y = 7$ і $2x - y = 5$.

458*. За якого значення c графіки рівнянь $x - 2y = -6$ і $x + y = c$ перетинаються в точці, що лежить на:

а) осі Ox; б) осі Oy?

459*. Чи проходить графік рівняння $x + y = 7$ через точку перетину прямих:

а) $x - y = 1$ і $2x + y = 11$; б) $0 \cdot x + y = 3$ і $x + 2y = 10$;
в) $x - 2y = 1$ і $2x + y = 12$; г) $3x - 0 \cdot y = 12$ і $y - x = -1$?

460*. Із дроту завдовжки 4 дм потрібно виготовити рамку прямокутної форми. Які розміри може мати рамка?

1) Складіть відповідне рівняння з двома змінними, побудуйте його графік.

2) Позначте ту частину графіка, де знаходяться точки, координати яких є розв'язками задачі.

461*. Швидкість човна проти течії 6 км/год. Якою може бути власна швидкість човна і швидкість течії? Розв'яжіть задачу графічно, вказавши хоча б чотири розв'язки.

462*. Дерев'яні бруски завдовжки 1,9 м треба розпиляти на заготовки по 30 см і 40 см. Знайдіть усі можливі варіанти розпилювання брусків.

463*. Дерев'яні бруски завдовжки 2 м треба розпиляти на заготовки по 20 см і 30 см. Знайдіть усі можливі розв'язки задачі, склавши лінійне рівняння з двома змінними. Чи можна розпиляти брусок так, щоб дістати однакову кількість заготовок обох розмірів?

? Завдання для самоперевірки

I – II рівні

1. Серед чисел 1, 6, 2, 4, 5 знайдіть розв'язки рівнянь:

а) $2(x + 5) - 7 = 3x - 2$; б) $4 - 2x = 3(2x - 1) - 9$;

в) $12 + 3x - (x + 4) \cdot 5 = -7x$; г) $2x - 5 = 3(x + 1) - 13$.

2. Які з пар чисел (0; –25), (1; –1), (4; –0,5), (6; 0), (7; 1), (0; 0) є розв'язками рівнянь:

а) $x - 2y = 3$; б) $3x - 17y = 18$;

в) $21x - 2y = 50$; г) $x - 2y = 5$?

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $3{,}5x + 1 = 0{,}5x - 2$; б) $2x - 4(3x + 6) = 9$;

в) $\frac{x}{2} - \frac{x}{5} = 6$; г) $x(x - 7{,}1) = 0$.

4. Скільки розв'язків мають рівняння:

а) $2x - y = 4$; б) $3x - 2y = 18$?

Знайдіть два з них.

5. Побудуйте графік рівняння $-2x + y = 6$. Знайдіть за графіком два його розв'язки.

Розв'яжіть задачі (6 – 9):

6. В одному бідоні втричі більше молока, ніж у другому. Коли з нього перелили у другий бідон 14 л молока, то в обох бідонах молока стало порівну. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?

7. Основа рівнобедреного трикутника на 3 см довша за бічну сторону. Обчисліть довжини сторін трикутника, якщо його периметр дорівнює 27 см.

8. За 6 зошитів і 5 олівців заплатили 5 грн 60 коп. Яка ціна одного зошита і одного олівця, якщо олівець дешевший від зошита на 20 коп.?

9. Один із суміжних кутів утричі більший за другого. Обчисліть градусну міру кожного із суміжних кутів.

III рівень

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $2(3 - 5x) - 3(x - 5) = 5$; б) $6x - 3(2x - 1) = 4$;

в) $\frac{5x-4}{2} - \frac{x+5}{4} = -1$; г) $|3 - x| = 7$.

2. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(1; -2)$.

3. Графік рівняння $ax + 5y = 6$ проходить через точку $M(-2; -4)$. Знайдіть значення a.

4. Знайдіть координати точок перетину графіка рівняння $0{,}5x - 3y = 3$ з осями координат і побудуйте цей графік.

5. Серед розв'язків рівняння:

а) $5x + 2y = 14$; б) $2x + 3y = 40$

знайдіть таку пару чисел, яка б складалася із двох однакових чисел.

Розв'яжіть задачі (6 – 9):

6. О 12 год із селища вийшов турист, а через 4 год із цього самого селища слідом за ним виїхав велосипедист, який наздогнав туриста о 18 год. Знайдіть швидкість руху туриста і велосипедиста, якщо швидкість туриста на 12 км/год менша від швидкості велосипедиста.

7. Бічна сторона прямокутника дорівнює 26 см. Якщо його основу зменшити на 10 см, а бічну сторону збільшити в 1,2 разу, то площа прямокутника зменшиться на 130 см^2. Обчисліть периметр прямокутника.

8. Фірма за 15 днів мала реалізувати певну кількість комп'ютерів. Але вже за 2 дні до запланованого терміну вона не тільки впоралася із завданням, але й реалізувала на 6 комп'ютерів більше, бо щодня продавала на 2 комп'ютери більше, ніж передбачалося. Скільки комп'ютерів мала реалізувати фірма?

9. В одному мішку було 60 кг цукру, а в другому — 80 кг. Коли з другого мішка взяли цукру втричі більше, ніж із першого, у першому мішку залишилося вдвічі більше цукру, ніж у другому. Скільки цукру взяли з кожного мішка?

IV рівень

1. Складіть лінійне рівняння з однією змінною, яке:

а) має розв'язки; б) не має розв'язків.

2. Розв'яжіть рівняння:

а) $4(x-2)^2 - 9(x^2 - 2x + 1) = 0$; б) $3 - 2|5 - x| = 4$.

3. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку (2; 7) і паралельний:

а) осі ординат; б) осі абсцис.

4. З'ясуйте графічно, скільки спільних розв'язків мають рівняння:

а) $y - 2x = 6$ і $-x + 0{,}5y = 3$; б) $x + y = 5$ і $2x = 5 - 2y$;

в) $x - y = 4$ і $2x - 5 = 2y$; г) $2y - 2x = 7$ і $x + y = 3$.

Розв'яжіть задачі (5 – 8):

5. Кількість десятків двоцифрового числа втричі більша за кількість одиниць. Число, записане тими самим цифрами, але у зворотному порядку, на 36 менше від даного числа. Знайдіть це число.

6. Відстань від табору до лісу туристи сподівалися пройти за 5 год, рухаючись зі сталою швидкістю. Однак через дві години від початку руху вони збільшили її на 0,5 км/год, а тому прийшли до табору на 45 хв раніше, ніж передбачалося. З якою швидкістю туристи йшли спочатку?

7. Поїзд проходить повз семафор за 6 с і за 27 с з тією самою швидкістю проїжджає повз ряд платформ завдовжки 378 м. Яка довжина поїзда?

8. 80% одного числа дорівнюють 60% іншого числа. Знайдіть ці числа, якщо їхня різниця дорівнює 20.

9. Із труб завдовжки 6 м і 8 м потрібно прокласти трубопровід завдовжки 84 м. Скільки розв'язків може мати задача? Побудуйте графік складеного рівняння.

§6. СИСТЕМИ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

6.1. Поняття системи рівнянь

! Пригадайте

1. Скільки розв'язків може мати лінійне рівняння з двома змінними?
2. Як графічно розв'язати лінійне рівняння з двома змінними?
3. Як можуть бути розміщені дві прямі на площині одна відносно одної?

① **Що таке система рівнянь та її розв'язок.** Нехай потрібно знайти два числа, сума яких дорівнює 3, а різниця дорівнює 7.

Складемо математичну модель цієї задачі, використавши рівняння. Для цього позначимо одне з чисел через x, а друге — через y. За умовою, $x + y = 3$, а $x - y = 7$. Ці два співвідношення між числами x і y мають виконуватися одночасно. У такому випадку кажуть, що дані рівняння утворюють ***систему рівнянь***.

Систему рівнянь позначають за допомогою фігурної дужки, яка ніби об'єднує записані одне під одним рівняння і розміщена зліва від них. Зокрема, для нашого випадку це має такий вигляд:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 7. \end{cases}$$

Система рівнянь, як правило, передбачає знаходження спільного розв'язку всіх рівнянь, що її утворюють. Такий спільний розв'язок називають ***розв'язком системи***.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти всі її розв'язки або показати, що їх немає.

Неважко пересвідчитися, що розв'язком записаної вище системи є пара чисел (5; –2), яка задовольняє обидва рівняння системи.

Чи має ця система інші розв'язки? Спробуємо відповісти на це запитання.

② **Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними.** Для з'ясування можливої кількості розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома змінними вдамося до графічного способу її розв'язування.

Відомо, що графіком лінійного рівняння $ax + by = c$, крім випадку, коли $a = b = 0$, є пряма лінія, а його розв'язком — координати будь-якої точки цієї прямої. Очевидно, спільні розв'язки двох лінійних рівнянь із двома змінними, тобто розв'язки системи, слід шукати як координати спільних точок двох прямих, що є графіками відповідних рівнянь системи, побудованими в одній координатній площині.

Отже, питання про кількість розв'язків системи двох лінійних рівнянь з двома змінними зводиться до питання про кількість спільних точок, які можуть мати дві прямі, що лежать в одній площині.

Відомі три випадки взаємного розміщення двох прямих на площині:

1) *прямі перетинаються* (мають одну спільну точку);

2) *прямі паралельні* (не мають спільних точок);

3) *прямі збігаються* (мають безліч спільних точок).

Так само і ***графіки рівнянь системи*** можуть:

а) ***перетинатися***; тоді система має ***один розв'язок*** — координати точки перетину;

б) ***бути паралельними***; тоді система ***не має розв'язків***;

в) ***збігатися***; тоді система має ***безліч розв'язків***.

Проілюструємо це на прикладах.

③ **Система має один розв'язок.** Розв'яжемо графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ x - y = 7. \end{cases}$$

Знайдемо координати точок перетину графіків кожного рівняння з осями координат і побудуємо відповідні прямі (рис. 67).

$x + y = 3$: $x = 0$, $y = 3$, $A(0; 3)$; $y = 0$, $x = 3$, $B(3; 0)$.

$x - y = 7$: $x = 0$, $y = -7$, $C(0; -7)$; $y = 0$, $x = 7$, $D(7; 0)$.

Графіки рівнянь перетинаються — мають одну спільну точку $M(5; -2)$, а система — один розв'язок: координати цієї точки $(5; -2)$.

④ **Система не має розв'язків.** Розв'яжемо графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ -6x + 3y = 12. \end{cases}$$

$2x - y = 2$: $x = 0$, $y = -2$, $A(0; -2)$; $y = 0$, $x = 1$, $B(1; 0)$.

$-6x + 3y = 12$: $x = 0$, $y = 4$, $C(0; 4)$; $y = 0$, $x = -2$, $D(-2; 0)$.

Бачимо, що графіки рівнянь — паралельні прямі, отже, спільних точок не мають. Тому й система не має розв'язків (рис. 68).

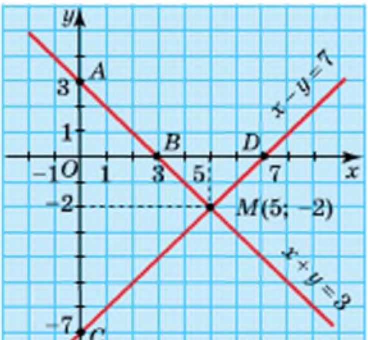


Рис. 67

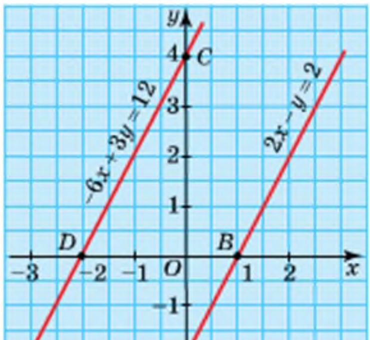


Рис. 68

До такого висновку можна було дійти, не будуючи графіків рівнянь. Справді, неважно помітити, що ліву частину другого рівняння системи дістали множенням лівої частини першого рівняння на –3. Числа ж, що стоять у правих частинах обох рівнянь, не перебувають у такому відношенні.

Винісши у лівій частині другого рівняння за дужки множник –3, дістанемо:

$$\begin{cases} 2x - y = 2, \\ -3(2x - y) = 12; \end{cases} \text{або} \begin{cases} 2x - y = 2, \\ 2x - y = -4. \end{cases}$$

З останньої системи зрозуміло, що один і той самий вираз $2x - y$ не може одночасно набувати значень 2 і –4 ні при яких значеннях x і y. Тому система розв'язків не має.

Звідси неважко пояснити, як скласти систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, яка не має розв'язку. Для цього утворюємо довільне рівняння, наприклад, $4x - 5y = 7$. Щоб дістати друге рівняння потрібної системи, множимо ліву частину записаного рівняння на довільне число, наприклад, на 3, а праву — на будь-яке інше число, крім 3, наприклад, на 2. Одержали систему, яка не має розв'язків: $\begin{cases} 4x - 5y = 7, \\ 12x - 15y = 14. \end{cases}$

Подібних систем можна утворити безліч.

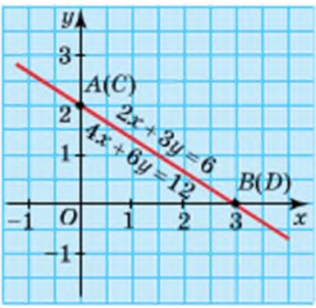


Рис. 69

⑤ **Система має безліч розв'язків.** Розв'яжемо графічно систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6, \\ 4x + 6y = 12. \end{cases}$$

$2x + 3y = 6$: $x = 0$, $y = 2$, $A(0; 2)$; $y = 0$, $x = 3$, $B(3; 0)$.

$4x + 6y = 12$: $x = 0$, $y = -2$, $C(0; 2)$; $y = 0$, $x = 3$, $D(3; 0)$.

Графіки рівнянь системи — прямі, що збігаються, отже, мають безліч спільних точок (рис. 69). Тому система має безліч розв'язків, які є координатами точок прямої AB.

Встановити, що дана система має безліч розв'язків, можна було й інакше. Якщо винести у лівій частині другого рівняння системи за дужки спільний множник 2, дістанемо:

$$\begin{cases} 2x+3y=6, \\ 2(2x+3y)=12; \end{cases} \text{ або } \begin{cases} 2x+3y=6, \\ 2x+3y=6. \end{cases}$$

Тепер очевидно, що розв'язками системи є всі розв'язки рівняння $2x + 3y = 6$.

Спробуйте встановити самостійно, як утворити систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, яка має безліч розв'язків.

Цікаво знати

Розглянемо випадки, коли принаймні в одному з рівнянь системи (тобто в одному або в обох) $a = 0$ і $b = 0$.

Відомо, що рівняння $ax + by = c$, коли $a = b = 0$:

а) має безліч розв'язків, якщо $c = 0$ (тоді його графіком є координатна площина і координата будь-якої її точки є розв'язком рівняння);

б) не має розв'язку, якщо $c \neq 0$ (графік рівняння не існує).

Розглянемо всі можливі випадки системи.

1. $a = b = 0$ лише в одному рівнянні системи.

а) $a = b = 0$, $c = 0$. Графіком цього рівняння є координатна площина, графіком другого — пряма, що лежить у цій площині. Спільні точки цих графіків — усі точки прямої. Отже, система має безліч розв'язків, які є розв'язками другого рівняння.

б) $a = b = 0$, $c \neq 0$. Це рівняння розв'язків не має, і система теж, бо розв'язки системи — це спільні розв'язки її рівнянь.

2. $a = b = 0$ в обох рівняннях системи.

а) $a = b = 0$, $c = 0$. Графіком обох рівнянь є координатна площина, тому система має безліч розв'язків (будь-яка пара чисел).

б) $a = b = 0$, $c \neq 0$. Рівняння розв'язків не мають, тому і система теж їх не має.

? Запитання для самоперевірки

1. У якому випадку рівняння утворюють систему рівнянь? Наведіть приклад системи двох лінійних рівнянь із двома змінними.
2. Наведіть приклад системи двох рівнянь із двома змінними, одне з яких або обидва не є лінійними.
3. Що називають розв'язком системи рівнянь? Що є розв'язком системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
4. Як графічно розв'язати систему двох лінійних рівнянь із двома змінними?
5. Чи кожна система двох лінійних рівнянь із двома змінними має розв'язок? Наведіть приклад системи двох лінійних рівнянь із двома змінними, яка не має розв'язку.
6. Чи кожна система двох лінійних рівнянь із двома змінними має тільки один розв'язок? Утворіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, яка має безліч розв'язків.

Задачі та вправи

464°. Знайдіть, яка з пар чисел (1; 2), (–2; 1), (2; 2) є розв'язком системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x - y = -3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - y = -7, \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

465°. Розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x + y = a, \\ 3x - 2y = b \end{cases}$ є пара чисел (3; –1).

Знайдіть a і b.

466°. Сума двох чисел дорівнює 5, а їхня різниця дорівнює 1. Знайдіть ці числа. Запишіть математичну модель цієї задачі у вигляді системи рівнянь.

467°. Складіть систему рівнянь, що має розв'язок (1; 3). Скільки можна скласти систем рівнянь, розв'язком яких є пара чисел (1; 3)? Запишіть три системи рівнянь, розв'язком яких є пара чисел (1; 3).

468°. Розв'яжіть графічно системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x - y = 0; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} x + 2y = 1, \\ x - y = 4; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x - y = 5. \end{cases}$

469. Поясніть, чому системи рівнянь мають безліч розв'язків:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ 2x + 2y = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 1, \\ 3x - 3y = 3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 4x - 4y = 8; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 1{,}5x + 1{,}5y = 4, \\ 3x + 3y = 8; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} 2x - 3y = -4, \\ 5x - 7{,}5y = -10; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 1{,}5x + y = -2, \\ -3x - 2y = 4. \end{cases}$

Проілюструйте висновок стосовно систем а) і в) графічно.

470. Поясніть, чому системи рівнянь не мають розв'язків:

а) $\begin{cases} x + y = 2, \\ x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x - y = 5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 4, \\ 2x - 2y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ 3x + y = -5; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} 2x - 3y = 5, \\ x - 1{,}5y = 5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} -x + 2y = 3, \\ 2x - 4y = 6. \end{cases}$

Проілюструйте висновок стосовно систем б) і в) графічно.

471*. Скільки розв'язків мають системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ x + 1{,}5y = 3{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x - 5y = 12, \\ -x + 2{,}5y = -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 5y = 14, \\ 2x - 10y = 28? \end{cases}$

Знайдіть будь-які три розв'язки.

472*. Маємо рівняння $x + 2y = 3$. Складіть нове рівняння так, щоб воно разом із даним утворило систему, яка:

а) має безліч розв'язків; б) не має розв'язків.

473*. Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, що:

а) має безліч розв'язків; б) не має розв'язків;

в) має один розв'язок.

474*. Дано системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 3, \\ kx + 2y = p; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x - ky = p. \end{cases}$

Знайдіть такі значення для k і p, щоб система рівнянь:
а) мала один розв'язок; б) мала безліч розв'язків;
в) не мала розв'язків.

6.2. Спосіб підстановки

Розв'язувати систему рівнянь графічним способом не завжди зручно. Він громіздкий і часто дає наближені результати. Крім графічного, є й інші способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними. Основна ідея, що лежить в їхній основі, полягає в тому, що систему намагаються перетворити так, щоб одне з її рівнянь містило лише одну змінну. Це можна зробити кількома способами. Один із них має назву *способу підстановки*.

① **Суть способу підстановки.** Нехай потрібно розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x + 4y = 5, \\ x - 2y = -3. \end{cases}$ Виразимо, наприклад, з другого рівняння змінну x через y. Маємо: $x = 2y - 3$. Оскільки шукані значення x і y, що є розв'язками системи, мають задовольняти обидва рівняння, можемо замість x у перше рівняння підставити вираз $2y - 3$. Будемо мати: $(2y - 3) + 4y = 5$.

Дістали рівняння з однією змінною y. Розв'яжемо його:

$2y + 4y = 5 + 3$,

$6y = 8$, $y = \frac{4}{3}$.

Значення x знаходимо з рівності $x = 2y - 3$:

$$x = 2 \cdot \frac{4}{3} - 3 = \frac{8}{3} - 3 = 2\frac{2}{3} - 3 = -\frac{1}{3}.$$

Отже, розв'язком системи є пара чисел $\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}\right)$.

Перевірте самостійно, що це справді так.

Отже, *щоб розв'язати систему рівнянь способом підстановки, потрібно*:

1) *з одного рівняння виразити одну змінну через другу*;

2) *знайдений вираз підставити замість цієї змінної у друге рівняння*;

3) *розв'язати утворене рівняння з однією змінною*;

4) *знайти значення другої змінної, скориставшись її вираженням через знайдену змінну*;

5) *записати відповідь*.

Приклад 1. Розв'язати способом підстановки систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1, \\ 5x + y = 11. \end{cases}$$

Розв'язання. Тут, очевидно, зручно (коефіцієнт при змінній y дорівнює 1) з другого рівняння виразити змінну y через x і знайдений вираз підставити в перше рівняння. Маємо:

$$y = 11 - 5x;$$

$$2x - 3(11 - 5x) = 1,$$

$$2x - 33 + 15x = 1,$$

$$17x = 34,\ x = 2;$$

$$y = 11 - 5 \cdot 2 = 1.$$

Відповідь. (2; 1).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 4x - 5y = 10, \\ 3x + 4y = -8. \end{cases}$

Розв'язання. Для даної системи не має значення, з якого рівняння одну змінну виражати через іншу, бо в обох рівняннях коефіцієнти при змінних відмінні від 1. Зробимо це, наприклад, для змінної x з першого рівняння. Маємо:

$$4x = 10 + 5y,\ x = \frac{10 + 5y}{4}.$$

Підставимо у друге рівняння замість x знайдений вираз:

$$3 \cdot \frac{10 + 5y}{4} + 4y = -8,\ \frac{30 + 15y}{4} + 4y = -8.$$

Звільнимось від дробу, помноживши обидві частини рівняння на 4. Маємо:

$$30 + 15y + 16y = -32,$$
$$31y = -62,\ y = -2;$$
$$x = \frac{10 + 5 \cdot (-2)}{4} = 0.$$

Відповідь. (0; –2).

? Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає суть способу підстановки в розв'язуванні системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
2. Яка послідовність розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки?

Задачі та вправи

Розв'яжіть системи рівнянь (475–481):

475°. а) $\begin{cases} y = x + 2, \\ y - 2x = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3y - 5, \\ x - y = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = 3 + 2x, \\ y + 5x = 10; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 2 + y, \\ x + 2y = 8. \end{cases}$

476°. а) $\begin{cases} x = 2 + y, \\ 3x - 2y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 3 + 2y, \\ 5x + y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y = 11 - 2x, \\ 5x - 4y = 8; \end{cases}$ г) $\begin{cases} y = 2 - 4x, \\ 8x + 3y = 5. \end{cases}$

477°. а) $\begin{cases} x - 3y = 12, \\ 2x + 3y = 90; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ 3x - 2y = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 11, \\ 5x - 3y = 3; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 5x + 2y = 23. \end{cases}$

478. а) $\begin{cases} 3x + 5y = 2x - 5, \\ 4x - 3y = 3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x + y = 5x - y + 8, \\ 2y - 3x = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2(3x + 1) - 4y = 5x - 4, \\ 6x - 5y = 8 - 3x; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3(x - 2y) = 4(x - y) + 8, \\ 5x - 6y = 5 - y. \end{cases}$

479. а) $\begin{cases} \dfrac{7x-y}{2}=-2, \\ \dfrac{y+14x}{2}=4{,}5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{4x+3y}{4}=y+3, \\ x-5y=\dfrac{5x-3}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{5x}{2}+\dfrac{y}{5}=-4, \\ \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}=\dfrac{1}{6}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{y}{2}-\dfrac{4x}{5}=\dfrac{4}{5}, \\ \dfrac{x}{6}-\dfrac{2y}{3}=-\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

480*. а) $\begin{cases} \dfrac{x+3y}{4}+\dfrac{y+8}{2}=8, \\ \dfrac{5x}{2}-4y=7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{4}=8, \\ \dfrac{x+y}{3}+\dfrac{x-y}{4}=11; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{5x-3y}{4}=\dfrac{x-5y}{3}, \\ 7x+y=12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{11+x}{2}=\dfrac{y+13}{3}+2, \\ 5x=3y+8. \end{cases}$

481*. а) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ x-2=0{,}5y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-2y=5, \\ y+2{,}5=2x; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x+5y=15, \\ 3x+8y=-1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x+3y=-1, \\ 5x+6y=-7. \end{cases}$

482*. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x+ky=11, \\ 4x+6y=38, \end{cases}$ якщо одним із розв'язків першого рівняння є пара чисел (0; 1).

6.3. Спосіб додавання

Розв'язуючи системи рівнянь способом підстановки, помічаємо, що його найзручніше використовувати у випадках, коли коефіцієнт при одній із змінних у рівнянні системи дорівнює 1 або –1. У цьому випадку таку змінну найпростіше виразити через іншу. В інших випадках доводиться мати справу з дробами, що ускладнює розв'язування.

Існує ще один спосіб розв'язування системи рівнянь, який ґрунтується на такій властивості: *будь-яке рівняння системи можна замінити сумою рівнянь цієї системи.*

Розглянемо цей спосіб на прикладі системи рівнянь:

$$\begin{cases}5x + 4y = 800,\\7x - 4y = 400.\end{cases}$$

Замінимо, наприклад, перше рівняння цієї системи сумою даних рівнянь. Маємо:

$$\begin{cases}(5x + 4y) + (7x - 4y) = 800 + 400,\\7x - 4y = 400;\end{cases} \quad \begin{cases}12x = 1200,\\7x - 4y = 400.\end{cases}$$

Як бачимо, така заміна призвела до того, що одне з рівнянь системи містить одну змінну: $12x = 1200$. Знайдемо з нього значення x, а потім, підставивши його у друге рівняння, знайдемо значення y:

$$x = 100;$$
$$7 \cdot 100 - 4y = 400,$$
$$700 - 4y = 400,$$
$$4y = 300,\ y = 75.$$

Відповідь. (100; 75).

Такий спосіб розв'язування системи двох рівнянь із двома змінними називають ***способом додавання.***

Цей спосіб зручно використовувати, коли коефіцієнти при одній із змінних в обох рівняннях є протилежними числами. Оскільки сума протилежних чисел дорівнює нулю, то цим користуються, додаючи рівняння системи, в результаті чого дістають рівняння з однією змінною.

Якщо коефіцієнти при однойменних змінних не є протилежними числами, то дані рівняння перетворюють так, щоб досягти цього на основі відомої властивості рівнянь, яка дозволяє множити обидві його частини на одне й те саме число, відмінне від 0.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases}3x - 4y = 7,\\5x + 2y = 3.\end{cases}$

Розв'язання. У даному рівнянні коефіцієнти при жодній змінній не є протилежними числами. Але цього легко досягти стосовно коефіцієнтів при змінній y, помноживши обидві частини другого рівняння на 2. Зробимо це, а потім розв'яжемо утворену систему відомим уже способом. Записують це так:

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7, \\ 5x + 2y = 3; \end{cases}\Big| 2 \qquad + \begin{cases} 3x - 4y = 7, \\ 10x + 4y = 6; \end{cases} \quad 13x = 13; \; x = 1.$$

Підставивши знайдене значення x в одне з рівнянь системи, наприклад, у перше, знайдемо значення y. Маємо: $3 \cdot 1 - 4y = 7$, $4y = -4$, $y = -1$.

Відповідь. (1; –1).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} 6x + 5y = 21, \\ 4x - 3y = -5. \end{cases}$

Розв'язання. 1-й спосіб. Перетворимо рівняння системи так, щоб, наприклад, коефіцієнти при змінній y в обох рівняннях стали протилежними числами. Для цього знайдемо найменше спільне кратне чисел 5 і 3 та помножимо обидві частини рівнянь на відповідні додаткові множники. Таким кратним є число 15. Отже, для першого рівняння таким множником є число 3, а для другого — число 5. Утворимо нову систему і розв'яжемо її. Маємо:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 21, \Big| 3 \\ 4x - 3y = -5; \Big| 5 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 18x + 15y = 63, \\ 20x - 15y = -25; \end{cases}$$
$$\overline{38x \qquad = 38;} \qquad x = 1.$$

Для знаходження значення y знайдене значення x підставляють, як правило, у найпростіше з рівнянь системи, тобто у рівняння з найменшими коефіцієнтами. У даному випадку таким рівнянням є друге рівняння даної системи. Маємо:

$$4 \cdot 1 - 3y = -5, \qquad 3y = 9, \qquad y = 3.$$

Відповідь. (1; 3).

2-й спосіб. Рівняння даної системи можна було перетворювати й так, щоб коефіцієнти при змінній x стали протилежними числами. Оскільки найменше спільне кратне чисел 6 і 4 дорівнює 12, то обидві частини першого рівняння слід помножити на 2, а другого — на –3, або першого на –2, а другого — на 3. Скористаємось першим варіантом. Маємо:

$$\begin{cases} 6x + 5y = 21, & |2 \\ 4x - 3y = -5; & |-3 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} 12x + 10y = 42, \\ -12x + 9y = 15; \end{cases}$$

$$\overline{\qquad 19y = 57;} \qquad y = 3.$$

Підставивши знайдене значення y у друге рівняння з даної системи (воно простіше), знайдемо x: $x = 1$.

Відповідь. (1; 3).

Як бачимо, в обох випадках дістали одну й ту саму відповідь.

Отже, *щоб розв'язати систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання, потрібно*:

1) *з'ясувати, чи немає при одній із змінних в обох рівняннях протилежних коефіцієнтів*;

якщо є, то:

2) *додати почленно рівняння системи*;

3) *розв'язати рівняння з однією змінною, що утворилося;*

4) *знайдене значення цієї змінної підставити в одне з рівнянь системи і знайти значення другої змінної, розв'язавши утворене рівняння*;

5) *записати відповідь.*

якщо немає, то:

2) *знайти найменше спільне кратне модулів коефіцієнтів при одній із змінних, визначити до кожного рівняння додатковий множник і помножити на нього члени відповідного рівняння; знаки додаткових множників дібрати так, щоб коефіцієнти при обраній змінній у новій системі стали протилежними числами*;

3) *далі діяти відповідно до пп.* 2)–5) *лівої колонки.*

Запитання для самоперевірки

1. У чому полягає суть способу підстановки в розв'язуванні системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
2. Яка послідовність розв'язування системи лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки?

Задачі та вправи

483°. Продовжіть розв'язування систем рівнянь:

а) $+\begin{cases} 2x + y = 14, \\ x - y = 1; \end{cases}$
$\overline{3x \quad = 15;}$
$x = \ldots; \ \ldots$

б) $+\begin{cases} -2x + 3y = -6, \\ 2x - y = 2; \end{cases}$
$\overline{\quad 2y = -4;}$
$y = \ldots; \ \ldots$

в) $\begin{cases} 3x - y = 5, \mid 2 \\ 5x + 2y = 23; \end{cases}$
$+\begin{cases} 6x - 2y = 10, \\ 5x + 2y = 23; \end{cases}$
$\overline{11x \quad = 33;}$
$x = \ldots; \ \ldots$

г) $\begin{cases} 3x - 2y = 11, \mid -5 \\ 4x - 5y = 3; \mid 2 \end{cases}$
$+\begin{cases} -15x + 10y = -55, \\ 8x - 10y = 6; \end{cases}$
$\overline{-7x \quad = -49;}$
$x = \ldots; \ \ldots$

Розв'яжіть системи рівнянь (484–489):

484°. а) $\begin{cases} 2x + y = 11, \\ 3x - y = 9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ x - 3y = -1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - y = 9, \\ 5x + y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - 3y = 4, \\ 5x + 3y = -1; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} 4x + 3y = 6, \\ -4x - y = 2; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 2x + 5y = 5, \\ 4x + 3y = 15. \end{cases}$

485°. а) $\begin{cases} 4x - 7y = 30, \\ 4x - 5y = 90; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 7x - 6y = 32, \\ 7x + 5y = 230; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 11y = 15, \\ -10x + 11y = -9; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 40x + 3y = -10, \\ 20x - 7y = -5; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} x + 3y = -7, \\ 2x + 15y = -17; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 5x + 2y = 1, \\ 15x + 3y = 3. \end{cases}$

486°. а) $\begin{cases} 5x+2y-1=0, \\ 15x+3y-3=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 12x+16y+1=0, \\ 3x+4y+2=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3y-7x+32=0, \\ 2x-3y+3=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3y-4x+6=0, \\ 5x-9y+10=0. \end{cases}$

487. а) $\begin{cases} 3(x-1)=4y+1, \\ 5(y-1)=x+1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4(k+2)=1-5p, \\ 3(p+2)=3-2k; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4(p+2c)-8=5p-2, \\ 3(2p-c)+6=24c+12; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5(k-3c)-6=2k+1, \\ 3(k+6c)+4=9c+19. \end{cases}$

488*. а) $\begin{cases} (x-3)(x+3)=(x+4)^2+y, \\ (2+x)^2+y=(x-4)(x+4); \end{cases}$ б) $\begin{cases} (4-x)^2=y+(x-2)(3+x), \\ (4-x)(4+x)=y-(x-3)^2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (3-x)(x+5)=y-(x+5)^2, \\ (y+1)^2+x=(y-2)(2+y); \end{cases}$ г) $\begin{cases} (y-6)^2+x=(y-4)(4+y), \\ (x-6)^2+y=(x-4)(4+x). \end{cases}$

489*. а) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1, \\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{2y}{3}=8; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{3x}{4}-\dfrac{y}{3}=4, \\ \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{2y}{3}=\dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{3x}{2}+4y=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{2}-\dfrac{y-2}{3}=2, \\ \dfrac{x-1}{4}+\dfrac{y+1}{3}=4. \end{cases}$

490*. При яких значеннях коефіцієнтів k і p графік рівняння $kx + py = 4$ проходить через точки (1; 2), (2; 1)? Запишіть це рівняння.

491*. Графік рівняння $kx + py = 4$ проходить через точки (–1; 2) і (–2; 0). Знайдіть числові значення коефіцієнтів. Запишіть це рівняння.

492*. Чи існують такі значення змінних x і y, щоб сума виразів $(x-2)^2+y$ і $-(x-2)(2+x)$ дорівнювала 10, а різниця виразів $(x+1)^2$ і x^2+y дорівнювала 3?

493*. Чи існують такі значення змінних x і y, щоб сума виразів x^2-y і $(5-x)(5+x)+x$ дорівнювала 5, а сума виразів $(3-y)(3+y)$ і $(y+1)^2+x$ дорівнювала 8?

6.4. Застосування систем лінійних рівнянь до розв'язування задач

Розв'язування задач з використанням систем двох лінійних рівнянь із двома змінними полягає у складанні математичної моделі задачі у вигляді системи рівнянь, яку потім розв'язують і тлумачать одержані розв'язки.

Процес складання системи рівнянь передбачає етапи, аналогічні до тих, що мали місце під час розв'язування задач із застосуванням лінійних рівнянь з однією змінною.

Нагадаємо їх, розв'язавши таку старовинну задачу.

Задача 1. Кінь і мул ішли поруч з важкою поклажею на спинах. Кінь скаржився мулу на свій непомірний вантаж. «Даремно ти скаржишся, — відповів йому мул. — Адже якщо я візьму в тебе один мішок, то моя поклажа стане вдвічі важчою за твою, а ось якби ти взяв з моєї спини один мішок, твоя стала б однаковою з моєю». Скажіть же, мудрі математики, скільки мішків ніс кінь і скільки їх ніс мул? (Задача IV ст.)

Розв'язання. Спочатку *оберемо і позначимо невідомі*. У даному випадку це кількість мішків, які ніс кінь, — x і кількість мішків, які ніс мул, — y.

Далі *утворимо вирази*, які за умовою задачі *знаходяться у певному відношенні.*

Якщо мул візьме один мішок у коня, то в нього залишиться $(x - 1)$ мішок, а у мула стане $(y + 1)$ мішок. Якщо ж кінь візьме мішок у мула, то в нього стане $(x + 1)$ мішок, а в мула залишиться $(y - 1)$ мішок.

Запишемо тепер співвідношення між одержаними виразами у вигляді рівнянь. У першому випадку вантаж мула — $(y + 1)$ мішок — удвічі важчий від вантажу коня — $(x - 1)$ мішок. За допомогою рівняння це можна записати так:

$$y + 1 = 2(x - 1).$$

У другому випадку вантажі коня і мула однакові, тобто $y - 1 = x + 1$.

Оскільки в обох рівняннях одні й ті самі невідомі позначено одними й тими самими буквами і потрібно знайти значення цих невідомих, які одночасно задовольняють обидва рівняння, то маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y+1=2(x-1), \\ y-1=x+1. \end{cases}$$

Тепер залишається *розв'язати одержану систему рівнянь* і витлумачити розв'язки.

$$\begin{cases} y+1=2(x-1), \\ y-1=x+1; \end{cases} \quad \begin{cases} 2x-y=3, \\ x-y=-2; \end{cases} \Big| -1 \quad \begin{array}{l} \begin{cases} 2x-y=3, \\ -x+y=2; \end{cases} \\ \hline \quad x \qquad =5. \end{array}$$

$-5+y=2$, $y=7$.

Отже, кінь ніс 5 мішків, а мул — 7 мішків.

Слід зауважити, що багато задач, які розв'язуються за допомогою рівняння з однією змінною, можна розв'язати і за допомогою системи рівнянь. Проілюструємо це на прикладі такої задачі.

Задача 2. Периметр прямокутника дорівнює 40 см. Знайдіть його сторони, якщо одна з них на 4 см довша від другої.

Розв'язання.

За допомогою рівняння з однією змінною	За допомогою системи рівнянь з двома змінними
x см — довжина більшої сторони прямокутника; $(x-4)$ см — довжина меншої сторони; $40 : 2 = 20$ (см) — півпериметр прямокутника. Рівняння: $x+x-4=20$, $2x-4=20$, $2x=24$, $x=12$; $x-4=12-4=8$. *Відповідь.* 12 см і 8 см.	x см — довжина більшої сторони прямокутника; y см — довжина меншої сторони; $40 : 2 = 20$ (см) — півпериметр прямокутника. Система рівнянь: $+\begin{cases} x+y=20, \\ x-y=4; \end{cases}$ $\overline{2x \quad =24,}$ $x=12$; $12+y=20$, $y=8$. *Відповідь.* 12 см і 8 см.

У таких задачах вибір способу розв'язування – справа уподобань кожного. Але є задачі, які за допомогою одного рівняння з однією змінною не можна розв'язати, тому в таких випадках без системи рівнянь не обійтися. Серед задач, які пропонується вам розв'язати, переважну більшість становлять саме такі.

Задачі

494°. Сума двох чисел дорівнює 37, а їхня різниця дорівнює 7. Знайдіть ці числа.

495°. Швидкість моторного човна за течією річки 23 км/год, а проти течії – 17 км/год. Знайдіть швидкість течії і власну швидкість човна.

496*. На виготовлення 160 столових і 200 чайних ложок витратили 14 кг срібла. Яка маса однієї чайної ложки, якщо 3 столові ложки мають таку саму масу, як 5 чайних ложок?

497°. Відстань між двома пристанями дорівнює 90 км. Цю відстань за течією річки катер проходить за 3 год, а проти течії – за 4,5 год. Знайдіть швидкості катера і течії річки.

498°. За 4 зошити і 2 ручки заплатили 12 грн. Стільки ж коштують 3 зошити і 4 ручки. Яка ціна одного зошита і однієї ручки?

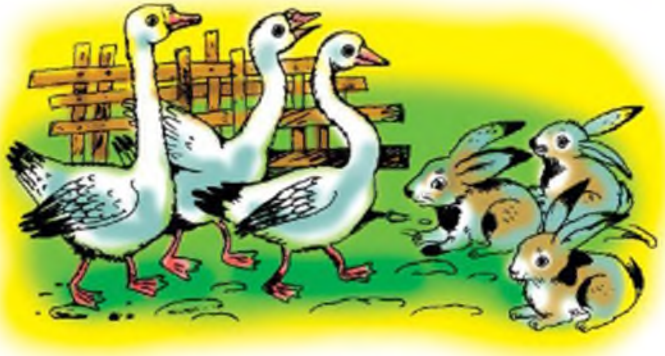
499°. За 3 пари ковзанів і 4 пари лиж заплатили 480 грн. Скільки окремо коштує пара лиж і пара ковзанів, якщо 2 пари ковзанів дорожчі за одну пару лиж на 15 грн?

500°. 10 корів щодня з'їдають сіна на 6 кг більше, ніж 6 коней, а 3 коні з'їдають в день сіна на 3 кг більше, ніж 4 корови. Скільки сіна з'їдає корова і скільки кінь щодня?

501°. Сума двох чисел дорівнює 500. Знайдіть ці числа, якщо 30 % одного числа дорівнюють 20 % другого.

502°. У двох сувоях 149,6 м тканини. Скільки тканини в кожному сувої, якщо $\frac{2}{3}$ кількості метрів тканини першого сувою становить 0,8 кількості метрів тканини другого?

503. Господарка мала гусей та кролів — у них усього 50 голів і 160 ніг. Скільки гусей і скільки кролів мала господарка?



504. Якщо всіх учнів, які прийшли на шкільну математичну олімпіаду, посадити в класі по одному за кожну парту, то не вистачить 11 парт, а якщо їх посадити по двоє, то 5 парт залишаться вільними. Скільки учнів прийшло на олімпіаду і скільки парт у класі?

505. Дві бригади зібрали разом 2514 ц жита. Перша бригада зібрала жито з 46 га, а друга — з 35 га. Скільки центнерів жита зібрала в середньому кожна бригада з 1 га, якщо перша збирала з кожних 8 га на 78 ц більше, ніж друга з 5 га?

506. Два трактористи заборонували разом 339 га ріллі. Перший тракторист працював 8 днів, а другий — 11 днів. Скільки гектарів боронував за день кожний тракторист, якщо перший за кожні 3 дні боронував на 11 га менше, ніж другий за 4 дні?

507. Якщо основу прямокутника збільшити на 2 дм, а бічну сторону зменшити на 1 дм, то його площа збільшиться на 3 $дм^2$. Якщо ж основу прямокутника зменшити на 3 дм, а бічну сторону збільшити на 2 дм, то його площа зменшиться на 5 $дм^2$. Знайдіть довжини основи і бічної сторони прямокутника.

508. Якщо мотоцикліст збільшить швидкість на 20 км/год, то в пункт призначення він прибуде на 1 год раніше. Якщо ж він зменшить швидкість на 10 км/год, то на годину запізниться. Знайдіть швидкість мотоцикліста і час його руху.

509. Розв'язуючи певну задачу, комп'ютер виконав 8 млн операцій типу A і 9 млн операцій типу B, затративши на це 8 хв 20 с. Другу задачу він розв'язав за 8 хв 45 с, виконавши 9 млн операцій типу A і 9 млн операцій типу B. Скільки операцій кожного типу виконує комп'ютер за 1 с?

510. Для ремонту будинку запросили кількох робітників. Якщо їх буде на 3 чоловіки менше, то термін виконання роботи збільшиться на 6 днів; якщо ж робітників буде на 2 чоловіки більше, то вони зможуть виконати роботу на 2 дні раніше терміну. Скільки було запрошено робітників і за скільки днів вони зможуть виконати роботу?

511°. Один із гострих кутів прямокутного трикутника більший від другого на 8°. Знайдіть ці кути.

512. Кут при вершині рівнобедреного трикутника на 12° більший за кут при основі. Знайдіть кути цього трикутника.

513. Периметр прямокутника на 40 см більший за одну з його сторін і на 50 см більший за другу сторону. Знайдіть сторони прямокутника.

514*. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника утворює з основою кут, що дорівнює куту між бічними сторонами. Знайдіть кути трикутника.

515*. Бісектриса кута при основі рівнобедреного трикутника утворює з бічною стороною кут, що дорівнює куту при вершині. Знайдіть кути трикутника. (Розгляньте можливі випадки.)

516*. Різниця двох чисел дорівнює 6, а різниця їхніх квадратів дорівнює 132. Знайдіть ці числа.

517*. Сума кутів A і B трикутника ABC дорівнює $110°$, а сума кутів A і C — $120°$. Знайдіть кути трикутника ABC.

518*. Якщо від двоцифрового числа відняти число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку, то дістанемо 18. Знайдіть дане число, якщо сума його цифр дорівнює 12.

519*. Одна частина сталевого брухту містить 5 % нікелю, а друга — 40 % . Скільки потрібно взяти брухту з кожної частини, щоб виплавити 140 т сталі, вміст нікелю в якій становитиме 30 %?

520*. На елеватор завезли 350 т пшениці двох сортів; перший сорт містить 2 % відходів, другий — 3 %. Після очищення залишилася 341 т чистої пшениці. Скільки пшениці кожного сорту завезли на елеватор?

521*. З 20-відсоткового і 15-відсоткового розчинів солі слід дістати 2 кг 18-відсоткового розчину. Скільки кілограмів кожного розчину потрібно взяти?

Завдання для самоперевірки

I – II рівні

1. Яка з пар чисел (6; 2), (3; –4), (5; 0), (0; –1,5) є розв'язком системи:

а) $\begin{cases} 3x - y = 15, \\ 2x + 3y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 2y = 3, \\ 2x + 3y = -4{,}5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - 2y = 4, \\ 2x + 3y = 18? \end{cases}$

2. Розв'яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 12, \\ y = 2x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 11, \\ 2x - y = -2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 3y = 16, \\ 4x - 3y = 14; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x + 2y = 16, \\ 3x - 4y = -6; \end{cases}$ ґ) $\begin{cases} 6x + 2y = 5, \\ 4x + 2y = 5; \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + 2y = 4, \\ 5x - 3y = 3. \end{cases}$

3. Розв'яжіть графічно системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 7. \end{cases}$

Розв'яжіть задачі (4 – 7):

4. Столяру потрібно розрізати дерев'яний брусок завдовжки 16 дм на дві частини так, щоб одна з них була на 4 дм довша за другу. Знайдіть довжини цих частин.

5. За книжку і 2 зошити заплатили 7,6 грн, а за 2 книжки і 3 зошити — 14,4 грн. Яка ціна книжки і зошита окремо?

6. Пароплав за 4 год пройшов за течією річки 100 км, а за 3 год проти течії — 57 км. Яка власна швидкість пароплава і течії річки?

7. Сума чисел, одне з яких на 4 більше за друге, дорівнює 16. Знайдіть ці числа.

III рівень

1. Складіть систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, для якої пара чисел (1; –3):

а) є розв'язком системи;

б) не є розв'язком системи.

2. Розв'яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases}(x+y)^2+y=x^2+3,\\(y-1)(y+1)+x=y(y+1);\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x-1,5(2y-2)=11,\\2(3,5x-5)-5y=-15;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\dfrac{3x-2y}{5}+\dfrac{5x-3y}{3}=x+1,\\\dfrac{2x-3y}{3}+\dfrac{4x-3y}{2}=y+1;\end{cases}$ г) $\begin{cases}\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{2(x-y)}{5},\\\dfrac{x-3}{4}-\dfrac{y-33}{3}=2y-x.\end{cases}$

3. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, що утворить з рівнянням $3x-4y=5$ систему рівнянь, яка:

а) не має розв'язків; б) має безліч розв'язків.

Розв'яжіть задачі (4 – 7):

4. Господарство засіяло пшеницею і ячменем 1000 га землі. Скільки гектарів землі засіяно пшеницею і ячменем окремо, якщо 0,3 площі, засіяної пшеницею, на 80 га більше за 0,8 площі, засіяної ячменем?

5. Половина одного числа на 4 більша за третину другого, а половина другого – на 18 більша за четверту частину першого числа. Знайдіть ці числа.

6. Батько старший за дочку на 26 років, а через 4 роки він буде старшим за неї у 3 рази. Скільки років батькові і скільки — дочці?

7. Якщо на кожну лавку у шкільному спортивному залі сяде по 5 учнів, то не вистачить 8 лавок; якщо ж на кожну лавку сяде по 6 учнів, то 2 лавки залишаться вільними. Скільки лавок у спортзалі і скільки було учнів?

IV рівень

1. Розв'яжіть системи рівнянь:

а) $\begin{cases}4(0,1x+1)+5=y,\\\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{4x+9}{20}-1,5;\end{cases}$ б) $\begin{cases}1-0,3(y-2)=\dfrac{x+1}{5},\\\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{4x+9}{20}-15;\end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x+1}{y+2} = 5, \\ 3(2x-5) - 4(3y+4) = 5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{2x+3}{3y-2} = 1, \\ x(2y-5) - 2y(x+3) = 2x+1. \end{cases}$

2. Знайдіть значення p і k з рівняння $px + ky = 6$, якщо його графік проходить через точки:

а) $A(4; 1)$ і $B(-4; 2)$; б) $M(5,6; 3,4)$ і $T(2,8; 2,2)$.

3. Знайдіть таке числове значення a, щоб система рівнянь
$\begin{cases} 7x + 2y = 11, \\ ax + 4y = 22: \end{cases}$

а) мала тільки один розв'язок;
б) мала безліч розв'язків;
в) не мала розв'язків.

Розв'яжіть задачі (4 – 7):

4. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 15. Якщо це число помножити на 7 і від добутку відняти двоцифрове число, записане тими самими цифрами, що й дане, але у зворотному порядку, то дістанемо 387. Знайдіть двоцифрове число.

5. В одній посудині 49 л води, а в другій — 36 л. Якщо долити доверху першу посудину з другої, то друга посудина буде наповнена тільки наполовину; якщо ж долити другу посудину доверху з першої, то перша буде наповнена тільки на третину. Яка місткість кожної посудини?

6. Два велосипедисти стартували одночасно і їдуть в одному напрямі по колу, що має довжину 900 м. Велосипедист, який їде швидше, наздоганяє другого велосипедиста через кожні 18 хв. Якщо ж вони стартуватимуть одночасно в протилежних напрямах, то зустрічатимуться через кожні 2 хв. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста.

7. Знайдіть масу і пробу зливка срібла і міді, знаючи, що, сплавивши його з 3 кг чистого срібла, дістають зливок 900-ї проби, а сплавивши його з 2 кг зливка 900-ї проби, дістають зливок 840-ї проби. (Проба визначається кількістю грамів благородного металу в 1000 г сплаву.)

Здійснюємо самооцінку навчальних досягнень

У результаті засвоєння матеріалу цього розділу ви маєте

знати:

— як розв'язати рівняння першого степеня з однією змінною;

— скільки розвязків має рівняння першого степеня з однією змінною;

— що таке: а) лінійне рівняння з однією змінною; б) лінійне рівняння з двома змінними;

— що таке розв'язок лінійного рівняння з двома змінними;

— як шукають розв'язки лінійного рівняння з двома змінними;

— що є графіком рівняння $ax + by = c$ у всіх випадках, крім $a = b = c = 0$;

— що таке розв'язок системи двох лінійних рівнянь із двома змінними;

— скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними;

розуміти і вміти пояснювати:

— чим відрізняється рівняння першого степеня з однією змінною від лінійного рівняння з однією змінною;

— скільки розв'язків може мати лінійне рівняння з однією змінною і від чого це залежить;

— які властивості рівнянь використовують під час розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною;

— чим відрізняється рівняння першого степеня з двома змінними від лінійного рівняння з двома змінними;

— як побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними;

— у якому випадку два лінійних рівняння із двома змінними утворюють систему рівнянь;

— способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними;

— як утворити систему двох лінійних рівнянь з двома змінними, яка: 1) має один розв'язок; 2) має безліч розв'язків; 3) не має жодного розв'язку;

успішно розв'язувати задачі і вправи, подібні до вміщених у цьому розділі.

ПОВТОРЕННЯ

§7. ВПРАВИ

522. Спростіть вирази:

а) $a(a + b) - b(a - b)$; б) $a(a - b) + b(a - b)$;

в) $a(a + b) - b(a + b)$; г) $(a + b)(a - b) - a(a - b)$;

ґ) $(a + b)^2 - (a + b)(a - b)$.

523*. Площі яких геометричних фігур, зображених на рисунках 70–74, можна обчислити за формулами із вправи 522?

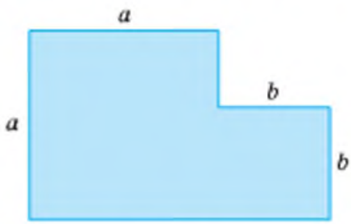


Рис. 70

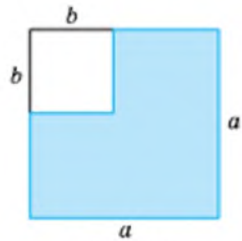


Рис. 71

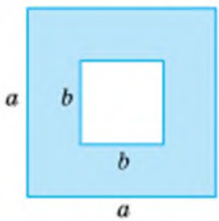


Рис. 72

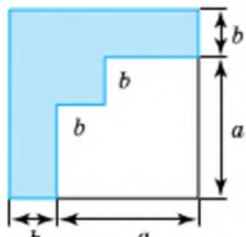


Рис. 73

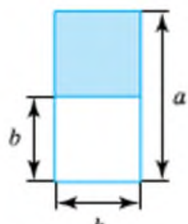


Рис. 74

Виконайте дії (524–529):

524°. а) $(p + k)(x + y)$; б) $(p - k)(x - y)$;
в) $(p + k)(x - y)$; г) $(p - k)(x + y)$.

525. а) $(a + 4b)^2$; б) $(a - 3b)^2$;
в) $(a - 4b)(a + 4b)$; г) $(a - 4b)(a - 5b)$.

526. а) $(3p + 4{,}5b)(0{,}5k + 2y)$; б) $(3p - 4{,}5k)(0{,}5c - 2d)$;
в) $(3p - 4{,}5c)(0{,}5k + 2y)$; г) $(3p + 4{,}5k)(0{,}5c - 2d)$.

527. а) $(p - k)(p^2 + pk + k^2)$; б) $(p + k)(p^2 - pk + k^2)$;
в) $(x^2 + 2xy + y^2)(x - y)$; г) $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.

528*. а) $(4x - 0{,}5x^2)(16x^2 + 2x^3 + 0{,}25x^4)$;
б) $(2{,}5x^2 + 4x)(6{,}25x^2 - 10x^3 + 64x^4)$;
в) $(7x - 0{,}3a)(49x^2 + 4{,}2ax + 0{,}9a)$;
г) $\left(\frac{81}{4}x^2 - 27x + 36\right)(4{,}5x - 6)$.

529*. а) $(7x^2y + 0{,}4xy)(8{,}4xy^3 + 0{,}9x^2y)$;
б) $(0{,}8x^2y - 0{,}5xy^2)(4xy - 12{,}5xy^2)$;
в) $8x(4 - 8xy)(4 + 7xy)$;
г) $(3{,}5x - 4x^2)(2xy - 4xy^2)$.

Перетворіть у многочлен (530–532):

530°. а) $(2a - 3b)^2 - (3b + 2a)^2$; б) $(2 - 4a)^2 + (5 - 4a)(5 + 4a)$.

531. а) $(a^2 + 1)^2 + (a - 1)(a^2 + 1) - a^2$;
б) $2(m - n)^2 - (m + n)^2 - 4(m + n)(m - n)$;
в) $(1 - a)(1 + a^2) + (1 + a)(1 + a^2) - 2(a + 1)(a - 1)$.

532*. а) $(2a - 3b)^2 - (3a - 2b)^2$;
б) $5x(x - y) - 2(y - x)^2$;
в) $(x^2 + 2)^2 - (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$;
г) $(x + 2)^2 - (x - 2)(x + 2) + (4 + x^2)$.

Розкладіть на множники вирази (533–537):

533°. а) $(p - k)^2$; б) $p^2 + 2pk + k^2$; в) $p^2 - 2pk + k^2$;
г) $p^3 - k^3$; ґ) $p^3 + k^3$; д) $(p + k)^2$.

534°. а) $k^2 - 4p^2$; б) $a^2 - 6a + 9$; в) $16 - 8p + p^2$;
г) $a^2 + 6a + 9$; ґ) $8 - k^3$; д) $p^3 + 8$.

535*. а) $(p + k)^2 - (p - k)^2$; б) $(a^2 + 1)^2 - 4a^2$;
в) $(x^2 + 4y)^2 - 16$; г) $36a^2 - (a^2 + 9)^2$;
ґ) $a^2 - 2ab + b^2 - c^2$; д) $m^2 + 2mn + n^2 - p^2$;
е) $a^2 - (9a^2 + 6a + 1)$; є) $25x^2 - (16x^2 - 8x + 1)$.

536*. а) $9(5k - 4p)^2 - 64k^2$; б) $100x^2 - 4(7x - 2y)^2$;
в) $81a^2 - 16(2a - 3b)^2$; г) $(a + 3b)^2 - 9(b - a)^2$.

537*. а) $p^3 - 3p^2k + 3pk^2 - k^3$; б) $p^3 + 3p^2k + 3pk^2 + k3$;
в) $8 - 12k + 6k^2 - k^3$; г) $k^3 - 6k^2 + 12k - 8$.

538. Доведіть, що:
а) $16^5 + 2^{15}$ ділиться на 33;
б) $5^{14} + 5^{13}$ ділиться на 30;
в) $7^{15} - 49^7$ ділиться на 42.

539. Доведіть, що:
а) $543^3 - 343^3$ ділиться на 99;
б) $543^3 + 343^3$ ділиться на 111.

Доведіть тотожності (540–541):

540. а) $a(a + b)^2 + b(a + b)^2 = (a + b)^3$;
б) $a(a + b)^2 - b(a + b)^2 = (a + b)^2(a - b)$;
в) $(a - b)(a^2 - b^2) = (a - b)^2(a + b)$;
г) $(a + b)(a^2 - b^2) = (a + b)^2(a - b)$.

541*. а) $a(a^2 - 6a + 8) = a(a - 4)(a - 2)$;
б) $a(a^2 + 6a + 8) = a(a + 4)(a + 2)$;
в) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;
г) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

542. Чи правильні рівності:
а) $(p + k)^2 - (p - k)^2 = 4pk$;
б) $(p + k)(p - k)(p^2 + k^2) = p^4 - k^4$?

543. Доведіть, що коли n — ціле число, то $n^3 - n$ ділиться на 6.

544. Доведіть тотожність Лагранжа:

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 = (ad - bc)^2.$$

545. Перетворіть у многочлен:
а) $(x + y + a)(x + y - a)$;
б) $(x^2 + a^2 - ax)(x^2 + a^2 + ax)$;
в) $(x - a)(x + a)(x^2 + ax + a^2)(x^2 - ax + a^2)$.

Розкладіть на множники (546– 548):

546*. а) $x^2 - 2xy + y^2 - 1$; б) $4 - x^2 - 2xy - y^2$;

в) $9 - x^2 + 2xy - y_2$; г) $1 - p^2 - 2pk - k^2$.

547*. а) $a^2 - b^2 - a + b$; б) $x^3 + x^2y - xy^2 - y^3$;

в) $x^5 - x^3 + x - 1$; г) $p^5 + p^3 - p^2 - 1$.

548*. а) $x^3 - 8 + 6x^2 - 12x$; б) $p^3 + 8 + 6p^2 + 12p$;

в) $x^4 + x^3 + x + 1$; г) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$.

549*. Чи ділиться $a^2 - c^2 + b(2a + b)$ на $a + b + c$?

550. Різниця квадрата непарного числа і одиниці ділиться на 8. Доведіть це.

551*. Якщо $a + b + c = 0$, то $a^3 + a^2c - abc + b^2c + b^3 = 0$. Доведіть це.

Знайдіть значення виразів (552–553):

552. а) $a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$, якщо $a = -2{,}5$, $b = \frac{1}{2}$;

б) $a^3 - a^2 + a - 1$, якщо $a = 11$;

в) $2x^3 + x^2y - 8xy^2 - 4y^3$, якщо $x = 2{,}4$, $y = -1{,}2$.

553*. а) $(4p - 1)(p^2 + p + 1) - p(2p - 3)^2$, якщо $p = -\frac{2}{5}$;

б) $a(a + 2)(a - 2) - (a - 3)(a^2 + 3a + 9)$, якщо $a = 0{,}25$;

в) $(m^3 + n^3)^2 - (m^2 + n^2)(m^4 - m^2n^2 + n^4)$, якщо $m = -\frac{1}{2}$; $n = -2$;

г) $(7x - 2)^2 - (5x - 3)(5x + 1) - (x + 7)(3 - x)$, якщо $x = 0{,}8$.

554. Покажіть, що за будь-якого значення a сума добутків $(2a - 3)(7 - a)$ і $(2a - 9)(a - 4)$ дорівнює 15.

555. Покажіть, що за будь-якого значення x добуток $(2x - 4)(x + 4)$ менший на $14\frac{7}{8}$ від добутку $\left(0{,}5x + 1\frac{1}{8}\right)(4x - 1)$.

556*. Доведіть, що коли до добутку двох послідовних натуральних чисел додати більше з них, то утвориться квадрат більшого числа.

557*. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних парних чисел ділиться на 4 без остачі. Наведіть два числових приклади, що ілюструють цю властивість.

558*. Для рівняння $5(... + 3x)(x + 1) - 4(1 + 2x)^2 = 80$ відомо, що $x = 2$. Знайдіть число в дужках, якого не вистачає.

559*. Розв'язуючи рівняння $3(2y + ...)(3y + 2) - 2(3y + 1) = 43$, другий доданок у перших дужках випадково пропустили. Знайдіть цей доданок, якщо $y = 1$.

Розв'яжіть рівняння (560–564):

560°. а) $x(x - 7{,}5) = 0$; б) $14x^2 - 21x = 0$;
в) $26x - 39x^2 = 0$; г) $(x - 3)(x + 4) = 0$;
ґ) $x(x - 7) + 12(x - 7) = 0$; д) $x(x - 9) - 15(9 - x) = 0$.

561. а) $8 - (x - 3)(x + 3) = 10 - (x - 1)^2$;
б) $(2x + 1)^2 - (2x - 3)^2 = 4(7x - 5)$;
в) $x(x - 6) + (x - 6) = 0$;
г) $x(x^2 - 16) + 4(x + 4) = 0$;
ґ) $x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = 0$;
д) $2x^3 + 7x^2 + 6x + 21 = 0$.

562*. а) $5(x + 3)^2 - 5(x - 4)(x + 8) = 3x$;
б) $\dfrac{(2x + 6)(x - 3)}{2} - x(x + 3) = -1$.

563*. а) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) - (3x - 17) = x^3 - 12$;
б) $5x - (4 - 2x + x^2)(x + 2) + x(x - 1)(x + 1) = 0$.

564*. а) $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 3)(x + 3) = 26$;
б) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 4x(2x^2 - 3) = 23$.

Розв'яжіть системи рівнянь (565–566):

565. а) $\begin{cases} 3x - y - 6 = 0, \\ 2x - 3y + 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x + 7y - 13 = 0, \\ 8x - 3y - 13 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} + y = 9, \\ \dfrac{x - y}{3} - x = -4; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{x + y}{2} = \dfrac{1}{3}, \\ x - y = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

566*. а) $\begin{cases} (x - 1)^2 - (x + 2)^2 = 9y, \\ (y - 3)^2 - (y + 2)^2 = 5x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} (7 + u)^2 - (5 + u)^2 = 6v, \\ (2 - v)^2 - (6 - v)^2 = 4u; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{y} = \dfrac{4}{5}. \end{cases}$

567°. Які з функцій є лінійними:

а) $y = \frac{x}{2}$; б) $y = \frac{2}{x}$; в) $y = 1 + \frac{2}{x}$;

г) $y = 1 - \frac{2}{x}$; ґ) $y = \frac{x-4}{2}$; д) $y = \frac{2}{x-4}$?

568°. Запишіть координати точок перетину з осями координат графіків функції:

а) $y = x + 3$; б) $y = 3 - x$; в) $y = x - 3$; г) $y = 3x$.

569°. Функцію задано формулою $y = 3x + 4$. Знайдіть: а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 1; б) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює 19.

570. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій:

а) $y = 2x - 3$ та $y = -2x + 1$;

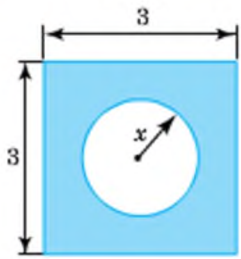
б) $y = 0{,}5x + 2$ та $y = -0{,}5x + 2$.

571. Побудуйте графік функції $y = 1 + |x|$. Знайдіть область визначення і область значень функції.

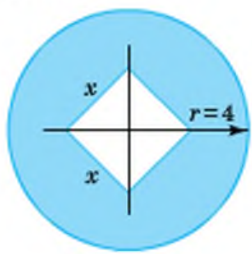
572*. Запишіть формулу, що задає функцію, за допомогою якої знаходять площу фігури, зображеної на рисунку 75. Знайдіть область визначення одержаної функції.

573*. При якому значенні k прямі $kx + 3y = 10$ і $x - 2y = 4$ перетинаються в точці, що лежить на осі Ox?

574*. При якому значенні k система $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}y = 2, \\ 5x + 2y = k \end{cases}$ не має розв'язків?



а)



б)

Рис. 75

§8. ЗАДАЧІ

575°. Вертоліт мав здійснити переліт довжиною 450 км. Після 2 год польоту через хуртовину він змушений був зробити посадку, не долетівши 130 км до призначеного місця. З якою швидкістю летів вертоліт?

576°. Для виготовлення фарфору беруть 25 частин білої глини, 2 частини піску і одну частину гіпсу. Скільки кожного з цих матеріалів потрібно взяти для виготовлення 2,8 ц суміші, з якої виготовляють фарфор?

577°. 400 т мінеральних добрив потрібно розподілити пропорційно між трьома господарствами, площі орної землі яких дорівнюють: 260 га, 320 га і 220 га. Скільки тонн мінеральних добрив має одержати кожне господарство?

578°. Довжини Дніпра, Південного Бугу і Псла відносяться, як 22 : 8 : 7. Дніпро довший від Псла на 1500 км. Знайдіть довжину кожної річки.

579. З міст A і B, відстань між якими 230 км, одночасно виїхали назустріч один одному два мотоциклісти. Через 3 год після початку руху їм залишилося до зустрічі 20 км. Знайдіть швидкості мотоциклістів, коли відомо, що швидкість одного з них на 10 км/год більша за швидкість другого.

580. Із села до елеватора одночасно вирушили два вантажні автомобілі з зерном: один зі швидкістю 60 км/год, а другий —

50 км/год. Перший прибув до елеватора о 12 год 30 хв, а другий — о першій годині. Яка відстань від села до елеватора?

581. Основа прямокутника втричі більша за його бічну сторону. Якщо бічну сторону прямокутника збільшити на 2 см, то площа його збільшиться на 126 см². Знайдіть довжини основи і бічної сторони прямокутника.

582. До кінців важеля завдовжки 50 см прикладено сили відповідно 1 Н і 1,5 Н. Якими мають бути плечі сил, щоб важіль перебував у стані рівноваги? (Н — ньютон — одиниця сили.)

583. На одному елеваторі було зерна вдвічі більше, ніж на другому. Коли з першого елеватора вивезли 750 т зерна, а в другий привезли 350 т, то на обох елеваторах зерна стало порівну. Скільки тонн зерна було на кожному елеваторі спочатку?

584. В одному баку було бензину вдвічі більше, ніж у другому. Якщо перелити з першого бака в другий 26 л бензину, то в кожному з них буде бензину порівну. Скільки літрів бензину було в кожному баку спочатку?

585. Батько сказав синові: «10 років тому я був у 10 разів старший за тебе, а через 22 роки я буду лише вдвічі старший за тебе». Скільки років батькові і скільки років синові тепер?

586. З одного гектара збирають по 30 т цукрових буряків, що містять 14 % цукру. Скільки гектарів землі потрібно засіяти цукровими буряками, щоб виробити 210 т цукру?

587. О 8 год ранку із села до міста вирушив велосипедист. Пробувши в місті 4,5 год, він поїхав назад і о 15 год того самого дня повернувся додому. Знайдіть середню швидкість велосипедиста, якщо відстань від села до міста 15 км.

588. Кожну сторону квадрата збільшили на 2,5 см, а тому його площа збільшилася на 43,75 см². Обчисліть сторону одержаного квадрата.

589. Повний бідон з молоком має масу 41,5 кг, а бідон, заповнений наполовину, — 21,75 кг. Яка маса бідона?

590. Якщо основу прямокутника збільшити на 3 см, а бічну сторону зменшити на 1 см, то площа прямокутника не зміниться. Не зміниться площа прямокутника також і тоді, коли його основу зменшити на 2 см, а бічну сторону збільшити на 1 см. Знайдіть сторони прямокутника і його площу. Накресліть три прямокутники, які задовольняли б умову задачі.

591. Протягом робочого дня робітники мали виготовити певну кількість деталей. Однак на роботу з'явилося на 2 робітники менше, тому кожному з них довелося виготовляти на 8 деталей більше. Якби на роботу не з'явився один робітник, то кожному працюючому довелося б виготовляти на 3 деталі більше. Скільки деталей потрібно було виготовляти за зміну?

592*. Туристи сподівалися подолати певну відстань за 6 год. Протягом 2 год вони йшли з наміченою швидкістю, а потім зменшили її на 0,5 км/год, тому запізнилися на турбазу на 30 хв. З якою швидкістю йшли туристи спочатку?

593*. Якщо кожному учню дати по 4 зошити, то залишиться 12 зошитів, якщо ж давати по 5 зошитів, то не вистачить зошитів для 7 учнів. Скільки було зошитів і скільки учнів?

594*. Для розв'язування задачі про рух двох автомобілів склали таке рівняння: $5x = (x - 10) \cdot 6$. Складіть задачу і розв'яжіть її.

595*. Складіть задачу про рух двох велосипедистів, яка б розв'язувалася за допомогою такого рівняння: $\frac{x}{10} - \frac{x}{15} = 1$.

596*. Як жердинами завдовжки 4 м і 3 м, не розрізаючи їх, обгородити прямокутну ділянку, периметр якої 140 м?

597*. У швейному цеху є 38 м тканини. На пошиття піжами потрібно 4 м тканини, а на пошиття халата — 3 м. Скільки піжам і халатів можна пошити із цієї тканини?

598*. Велосипедист мав проїхати дану відстань за певний час. Через негоду йому довелося їхати на 1 год довше зі швидкістю, меншою на 3 км/год. Цю відстань він проїхав би на 1 год швидше, якби швидкість його була на 5 км/год більшою. Яку відстань мав проїхати велосипедист?

599*. Поживність 1 кг сіна 0,42, а силосу — 0,20 кормових одиниць: сіно містить 85 %, а силос — 27 % сухої речовини. Скільки слід давати корові кожного дня сіна і скільки силосу, якщо вона має одержувати 6 кормових одиниць і 9 кг сухої речовини?

§9. ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

600. У першому сувої тканини на 10 % більше, ніж у другому, і на 30 % — ніж у третьому. Скільки метрів тканини в кожному сувої, якщо в першому сувої на 33 м більше, ніж у третьому?

601. Число a становить 75 % від числа b і 40 % — від числа c, яке на 21 більше за число b. Знайдіть ці числа.

602. На скільки відсотків зміниться площа прямокутника, якщо його:

а) одну сторону збільшити на 20 %, а суміжну — на 10 %;

б) одну сторону зменшити на 20 %, а суміжну — на 10 %;

в) одну сторону зменшити на 20 %, а суміжну збільшити на 10 %;

г) одну сторону збільшити на 20 %, а суміжну зменшити на 10 %?

603. Хлопчик за весну схуд на 20 %, потім за літо поповнішав на 20 %, восени знову схуд на 20 %, а за зиму поповнішав на 10 %. Поповнішав чи схуд хлопчик за рік і на скільки відсотків?

604. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x^2 - 2| = 2$; б) $|x^2 - 8| = x^2$; в) $|x^2 - x| = x^2$;

г) $|5x^2 - 6x| = -x^2$; ґ) $|2x^2 + x| = 0$; д) $|x^2 - 27| = 2x^2$.

605. У класі 40 учнів. Чи знайдеться такий місяць у році, в якому день народження відзначають не менше чотирьох учнів цього класу?

606. Доведіть, що для кожного натурального числа n знайдеться таке натуральне число, всі цифри якого п'ятірки і нулі і яке ділиться на n.

607. Доведіть, що існує таке натуральне число, останні чотири цифри якого 2002 і яке ділиться на 2001.

608. Дев'ятеро учнів із чотирьох різних класів принесли в бібліотеку 15 книжок, причому учні одного класу принесли однакову кількість книжок, а учні різних класів — різну кількість книжок. Скільки учнів принесли по одній книжці?

609. Для гербарію двадцять учнів із п'яти різних класів зібрали 30 рослин, причому учні одного класу зібрали однакову кількість рослин, а учні різних класів — різну кількість рослин. Скільки учнів принесли по дві рослини?

610. Запишіть вираз для всіх парних чисел, які не діляться на 4.

611. Запишіть вираз для всіх непарних чисел, кратних числу 5.

612. Одну цифру двоцифрового числа закреслили і дістали число, яке в 21 раз менше від нього. Яку цифру закреслили і в якому числі?

613. При діленні натурального числа a на натуральне число b дістали неповну частку c і остачу d. Доведіть, що числа a, b, c і d не можуть бути одночасно непарними.

614. Знайдіть двоцифрове число, яке вчетверо більше за суму його цифр.

615. Перша цифра трицифрового числа 8. Якщо її переставити на останнє місце в цьому числі, то утворене число збільшиться на 18. Знайдіть дане число.

616. До задуманого числа приписали справа нуль, від результату відняли 176 і дістали подвоєне задумане число. Яке число задумали?

617. До трицифрового числа зліва приписали цифру 8, до утвореного числа додали 619 і дістали число, яке в 40 раз більше за дане. Знайдіть це число.

618. Якою цифрою закінчується степінь:

а) 2^{2018}; б) 3^{2018}; в) 4^{2018}; г) 5^{2018};
ґ) 6^{2018}; д) 7^{2018}; е) 8^{2018}; є) 9^{2018}?

619. Якою цифрою закінчується запис результату:

а) $2001^{2018} - 1$; б) $2002^{2014} - 5$?

620. Доведіть, що значення виразу:

а) $74^{8} - 56^{5}$ ділиться на 10;

б) $96^{12} - 32^{5} - 28^{6}$ ділиться на 10;

в) $333^{555} + 555^{333}$ ділиться на 37;

г) $11^{11} + 12^{12} + 13^{13}$ ділиться на 10.

621. Що більше:

а) 10^{20} чи 29^{10}; б) 100^{20} чи 900^{10};
в) 2011^{2012} чи 2012^{2011}?

622. Розшифруйте записи:

а) $\text{Г}^{\text{Н}}$ = ДІЯ; б) $\text{ЯП}^{\text{О}}$ = НІЯ; в) АНГ = $\text{ОЛ}^{\text{А}}$;
г) $\text{СЕ}^{\text{Н}}$ = ЕГАЛ; ґ) МЕКС = $\text{ИК}^{\text{А}}$.

623. Виконайте множення:

а) $(-1{,}6a^{k-2}b^{4}c^{8-k})(-1{,}6a^{k-1}b^{6}c^{k-2})10a^{5-2k}c^{4}$;

б) $(-5{,}6a^{5}x^{n-7}y^{12-n})(-1{,}25a^{4-n}x^{n+2})(-2ax^{5})$.

624. Складіть многочлен шостого степеня зі змінною x, знаючи, що при будь-яких значеннях x його значення:

а) додатне; б) від'ємне.

625. Скоротіть дроби:

а) $\dfrac{131313}{252525}$; б) $\dfrac{31313131}{57575757}$.

626. Відомо, що $A = 5x^3 - 4x^2 - 7x + 10$, $B = 3x^3 + 5x^2 - 13x - 2$, $C = x^3 - 2x^2 + 8x - 9$ і $F = x^3 - 7x^2 + 7x - 1$. Обчисліть значення $M = A - \left|B - (C - F)\right|$, якщо $x = 0{,}5$.

627. Доведіть, що число:

а) $n^4 + n^2 + 1$, де n — натуральне число і не дорівнює 1, є складеним;

б) $n^7 - n$, де n — натуральне число, ділиться на 42.

628. Запишіть многочлен у вигляді різниці тричлена і суми двочленів:

а) $11a^6 - 10a^5 + 9a^4 - 8a^3 + 7a^2 - 6a + 5$;

б) $3b^6 + 4b^5 - 5b^4 + 6b^3 - 7b^2 + 8b - 9$.

629. Запишіть тричлен у вигляді різниці двох двочленів:

а) $a^2 - 5a + 7$;
б) $3y^2 - y + 1$;
в) $m^2 + m - 5$;
г) $2c^2 + c - 1$.

630. Розкладіть на множники: $m^4 + 2002m^2 + 2001m + 2002$.

631. Обґрунтуйте правило множення двоцифрового числа на 11.

632. Доведіть, що:

а) значення виразу $n^3 + 3n^2 + 5n + 3$ ділиться на 3 при будь-якому натуральному n;

б) модуль різниці трицифрового числа і числа, записаного тими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 9 і на 11;

в) модуль різниці квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел дорівнює подвоєній сумі цих чисел;

г) сума п'яти послідовних натуральних чисел не може бути простим числом.

633. Між цифрами двоцифрового числа вписали те саме число. Утворене таким чином чотирицифрове число в 66 раз більше за початкове двоцифрове число. Знайдіть ці числа.

634. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $6^{2n+1} - 2^{n+3} \cdot 3^{n+2} + 36$ ділиться на 900.

635. Нехай $m \neq n$. Очевидно, що тричлени $m^2 - 2mn + n^2$ і $n^2 - 2nm + m^2$ тотожно рівні, тому $m^2 - 2mn + n^2 = n^2 - 2nm + m^2$, або $(m - n)^2 = (n - m)^2$. Звідси $m - n = n - m$, або $2m = 2n$ і $m = n$. Маємо, що всі числа рівні між собою. Чому так трапилося?

636. Нехай a — довільне число. Очевидно, що $a^2 = a^2$ і $a^2 - a^2 = a^2 - a^2$. У правій частині рівності різницю квадратів розкладемо на множники, а в лівій — винесемо спільний множник a за дужки. Дістанемо, що $a(a - a) = (a - a)(a + a)$. Звідси $a = a + a$, або $a = 2a$. Отже, маємо, що будь-яке число вдвічі менше від самого себе. Чому так трапилося?

637. Доведіть, що:

а) $(n - 2)(n - 1)n(n + 1) + 1 = (n^2 - n - 1)^2$;

б) $n(n + 1)(n + 2)(n + 3) + 1 = (n^2 - 3n - 1)^2$.

638. Доведіть, що вирази $2b^5 + (a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)(a - b)$ і $(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)(a + b)$ тотожно рівні.

639. Розкладіть на множники:

а) $x^2 - 2x - 3$; б) $a^2 - 5a + 6$; в) $m^2 - 7m + 12$;

г) $n^2 - 7n + 10$; ґ) $y^2 + y - 12$; д) $c^2 - c - 2$.

640. Знайдіть усі натуральні розв'язки рівнянь:

а) $(a - 1)x = 18$; б) $(a - 2)x = 12$.

641. Побудуйте графіки рівнянь:

а) $(x - 3)(y + 2) = 0$; б) $y^2 + xy = 0$; в) $xy - y^2 = 0$;

г) $x^2 - xy = 0$; ґ) $x^2 + xy = 0$; д) $x^2 - y^2 = 0$.

642. У дві посудини місткістю 144 л і 100 л налито деяку кількість води. Коли більшу посудину повністю заповнили водою з меншої, то в меншій посудині залишилася $\frac{1}{5}$ початкової кількості води. Коли ж меншу посудину долили доверху водою з більшої, то в більшій посудині залишилося $\frac{7}{12}$ тієї води, яка була в ній спочатку. Скільки літрів води було спочатку в кожній посудині?

643. В одній посудині міститься 49 л, а в другій — 56 л води. Коли першу посудину повністю заповнили водою з другої, то в другій посудині залишилася половина того, що в ній було раніше. Коли ж другу посудину долили доверху водою з першої, то в першій посудині залишилася третина тієї води, яка була в ній спочатку. Скільки води вміщується в кожній посудині окремо?

644. Для утримання коней на деякий час зробили запас сіна. Коли б коней було на 2 менше, то цього запасу сіна вистачило б ще на 10 днів. Якби коней було на 2 більше, то запасу сіна не вистачило б на 6 днів, як передбачалося. Скільки було коней і на скільки днів зробили запас сіна?

645. З пункту A в пункт B, відстань між якими 27 км, вийшов пішохід. Через 1 год 24 хв у тому самому напрямі з A виїхав велосипедист, і через деякий час він був на відстані 1 км до пішохода, а ще через певний час велосипедисту залишалося проїхати до B удвічі меншу відстань, ніж пішоходу пройти. Знайдіть швидкості пішохода і велосипедиста.

646. З пункту A вийшов пішохід, а з пункту B одночасно з ним назустріч йому виїхав велосипедист. Після їхньої зустрічі пішохід продовжував іти у B, а велосипедист повернувся назад і теж поїхав у B. Відомо, що пішохід прибув у B на 2 год пізніше від велосипедиста, а швидкість його втричі менша від швидкості велосипедиста. Скільки часу пройшло від початку руху пішохода і велосипедиста до їхньої зустрічі?

647. Велосипедист, рухаючись із певною швидкістю, вчасно прибув із пункту A у пункт B. Коли б він збільшив цю швидкість на 3 км/год, то прибув би на місце призначення на годину раніше, а коли б він проїжджав за годину на 2 км менше, ніж в дійсності, то запізнився б на годину. Знайдіть відстань між пунктами A і B, швидкість велосипедиста і час його руху.

648. Шлях із пункту A в пункт B довжиною 11,5 км йде спочатку під гору, потім рівниною і нарешті з гори. Пішохід на шлях від A до B затратив 2 год 54 хв, а на зворотний — 3 год 6 хв. Швидкість пішохода під гору була 3 км/год, рівниною — 4 км/год і з гори — 5 км/год. Яка довжина шляху рівниною?

649. Шлях із села до міста спочатку йде горизонтально, а потім — під гору. Велосипедист горизонтальну частину шляху проїхав зі швидкістю 10 км/год, під гору йшов пішки зі швидкістю 3 км/год і прибув до міста через 1 год 40 хв. Назад він проїхав шлях з гори зі швидкістю 15 км/год, а горизонтальну частину шляху — 12 км/год і прибув додому через 58 хв після виїзду з міста. Яка відстань від села до міста?

650. О 13 год басейн почали наповнювати водою однією трубою з тим, щоб заповнити його до 14 год наступного дня. Через деякий час включили ще одну таку саму трубу, оскільки виникла необхідність заповнити басейн до 12 год дня. О котрій годині включили другу трубу?

651. Перша труба наповнює басейн за половину того часу, за який друга наповнює $\frac{2}{3}$ цього басейну. Друга труба окремо наповнює басейн на 6 год довше, ніж перша окремо. За який час кожна труба окремо може наповнити басейн?

652. Електропоїзд проїхав повз світлофор за 5 с, а повз платформу довжиною 150 м — за 15 с. Яка довжина електропоїзда та його швидкість?

653. Сплав міді і цинку містить міді на 640 г більше, ніж цинку. Після того, як із сплаву виділили $\frac{6}{7}$ міді, що була в ньому, і 60 % цинку, маса сплаву зменшилася на 440 г. Якою була маса сплаву спочатку?

654. Із колби в пробірку відлили $\frac{1}{5}$ частину розчину кухонної солі і випарювали до того часу, поки відсотковий вміст солі в пробірці не підвищився вдвічі. Після цього випарений розчин вилили назад у колбу. В результаті вміст солі в колбі збільшився на 3 %. Обчисліть початковий відсотковий вміст солі в колбі.

655. Зі 150 школярів марки збирають лише хлопчики. 60 учнів збирають марки України, 48 — марки Росії і 33 — марки Грузії, 11 учнів — тільки марки України, 7 — тільки марки Росії, 4 — тільки марки Грузії і лише один хлопчик збирає марки України, Росії і Грузії. Якою максимальною може бути кількість дівчаток?

656. Траву, що росте на луці, 9 корів з'їли за 4 дні. Якби на луці паслося 8 корів, то всю траву вони з'їли б за 6 днів. Скільки корів може пастися весь час, поки росте трава?

657. Знайдіть масу і пробу зливка срібла і міді, знаючи, що, сплавивши його з 3 кг чистого срібла, дістають зливок 900-ї проби, а сплавивши його з 2 кг зливка 900-ї проби, дістають зливок 840-ї проби. (Проба визначається числом грамів благородного металу в 1000 г сплаву.)

658. ***Задача Ісаака Ньютона.*** Три луки, покриті травою однакової густоти і швидкості росту, мають площі $3\frac{1}{3}$ га, 10 га і 24 га. Перша лука може прогодувати 12 корів протягом 9 тижнів, друга — 21 корову протягом 9 тижнів. Скількох корів змогла б прогодувати третя лука протягом 18 тижнів?

659. ***Задача Льюїса Керролла.*** Кур'єри з міст A і B рухаються кожний рівномірно, але з різними швидкостями назустріч один одному. Після зустрічі, щоб прибути на місце призначення, першому кур'єру потрібно ще 16 год, а другому — 9 год. Скільки часу потрібно кожному з кур'єрів, щоб подолати весь шлях від A до B?

§10. ВІДОМОСТІ З МАТЕМАТИКИ ЗА 5 – 6 КЛАСИ

1. Звичайні дроби

Зведення дробів до спільного знаменника

Щоб звести дроби до найменшого спільного знаменника, треба:

— знайти найменше спільне кратне знаменників даних дробів;

— знайти додаткові множники для кожного дробу, поділивши знайдене спільне кратне на знаменник кожного дробу;

— помножити чисельник і знаменник кожного дробу на додатковий множник і записати утворені дроби.

Приклад. Звести дроби $\frac{11}{15}$ і $\frac{7}{12}$ до найменшого спільного знаменника.

НСК(15,12) = 60; 60 : 15 = 4; 60 : 12 = 5. Маємо: 4 — додатковий множник для дробу $\frac{11}{15}$, 5 — для дробу $\frac{7}{12}$. Отже, $\frac{11}{15} = \frac{11 \cdot 4}{15 \cdot 4} = \frac{44}{60}$ і $\frac{7}{12} = \frac{7 \cdot 5}{12 \cdot 5} = \frac{35}{60}$.

Додавання і віднімання

Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками виконують за правилом: $\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{n}$.

Щоб додати або відняти звичайні дроби з різними знаменниками, треба звести їх до спільного знаменника і скористатися попереднім правилом.

Приклад. $\frac{11}{15} + \frac{7}{12} = \frac{44}{60} + \frac{35}{60} = \frac{44 + 35}{60} = \frac{79}{60} = 1\frac{19}{60}$.

Множення і ділення

Множення і ділення звичайних дробів виконують за такими правилами:

а) $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$; б) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Перетворення звичайного дробу в десятковий

Щоб перетворити звичайний дріб у десятковий, досить його чисельник поділити на знаменник.

2. Раціональні числа

Раціональні числа — це додатні і від'ємні цілі числа, додатні і від'ємні дробові числа і число 0.

Модуль числа

Модулем невід'ємного числа є це саме число, а модулем від'ємного — число, протилежне йому: $|a| = \begin{cases} a, & \text{якщо } a \geq 0, \\ -a, & \text{якщо } a < 0. \end{cases}$

Приклади. а) $|5| = 5$; б) $|-3{,}7| = 3{,}7$; в) $|0| = 0$.

Отже, модуль будь-якого числа не може бути від'ємним числом.

Додавання

Щоб додати два числа з однаковими знаками, треба додати їхні модулі і до результату дописати їхній знак.

Приклади. а) $+8 + (+7) = +15$; б) $-8 + (-7) = -15$.

Щоб додати два числа з різними знаками, треба знайти їхні модулі, від більшого модуля відняти менший модуль і до результату дописати знак числа з більшим модулем.

Приклади. а) $+10 + (-6) = +4$; б) $-10 + (+6) = -4$.

Віднімання

Щоб виконати віднімання двох раціональних чисел, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику, і далі знаходити результат за правилом додавання раціональних чисел.

Приклади. а) $8 - (-7) = 8 + (+7) = 15$; б) $-8 - 7 = -8 + (-7) = -15$.

Множення і ділення

Щоб помножити або поділити два раціональні числа, треба помножити або поділити їхні модулі і результат записати зі знаком «+», якщо числа одного знака, і зі знаком «–», якщо вони мають різні знаки.

Ділити на 0 не можна.

Приклади. а) $(-8) \cdot (-5) = 40$; б) $8 \cdot (-5) = -40$; в) $12 : (-4) = -3$; г) $(-12) : 4 = -3$.

3. Вирази та їх перетворення

Вирази та їх значення

За допомогою чисел, знаків дій і дужок можна утворити різні числові вирази.

Приклади. а) $3,5 - (8 \cdot 4 - 30)$; б) $\frac{16}{3,5 + 0,5}$; в) $6^2 \cdot 7$.

Виконавши зазначені дії, отримаємо число, яке називають ***значенням*** даного ***виразу***. Зокрема, $3,5 - (8 \cdot 4 - 30) = 3,5 - (32 - 30) = 3,5 - 2 = 1,5$. Отже, 1,5 — значення даного виразу.

Коли до виразу входять числа, позначені буквами, то знайти його значення можна, якщо є відомими числа, позначені буквами. Для цього дані числа підставляють замість букв у вираз і виконують зазначені дії.

Приклад. Значення виразу $3a - 5b$, якщо $a = 4$, $b = 0{,}8$, знаходять так:

$3a - 5b = 3 \cdot 4 - 5 \cdot 0{,}8 = 12 - 4 = 8.$

Розкриття дужок

Щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+», слід пропустити дужки і знак перед ними.

Приклади. а) $a + (b - c) = a + b - c$; б) $6 + (-5 + 12) = 6 - 5 + 12 = 13$.

Щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «–», слід пропустити дужки і знак перед ними, а знаки всіх доданків, які були в дужках, змінити на протилежні.

Приклади. а) $a - (b - c) = a - b + c$;
б) $3 - (5 - 4 + 8) = 3 - 5 + 4 - 8 = -6$.

Зведення подібних доданків

Подібними називаються доданки, які відрізняються лише числовими множниками або нічим не відрізняються.

Приклади. а) $4a$ і $7a$; б) $-0{,}5m^2$ і $2m^2$; в) b і b.

Щоб ***звести подібні доданки***, потрібно додати їхні числові множники і отриманий результат помножити на спільний буквений множник.

Приклади. а) $4a + 7a = (4 + 7)a = 11a$;
б) $-0{,}5m^2 - 2m^2 = (-0{,}5 - 2)m^2 = -2{,}5m^2$.

4. Рівняння

Рівняння і його розв'язок

Рівняння — це рівність, яка містить одне або кілька невідомих чисел, позначених буквами.

Приклади. а) $3x + 5 = 6$; б) $y - 4 = 7y + 3$.

Корінь, або ***розв'язок***, ***рівняння***, — значення невідомого, підставивши яке в рівняння і виконавши обчислення дістанемо правильну рівність.

Приклад. -3 — корінь рівняння $6x + 5 = -13$, бо $6 \cdot (-3) + 5 = -18 + 5 = -13$; $-13 = -13$ — правильна рівність.

Розв'язати рівняння — це означає знайти його корені або показати, що їх немає.

Властивості рівнянь

1. Будь-який член рівняння можна переносити з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

Приклади. а) $2x - 3 = x$, $2x - x = 3$, $x = 3$; б) $4x + 7 = 3x - 2$, $4x - 3x = -7 - 2$, $x = -9$.

2. Обидві частини рівняння можна множити або ділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

Приклади. а) $3x = 12$. Поділимо обидві частини рівняння на 3. Маємо: $x = 4$; б) $-\frac{1}{2}x = -5$. Помножимо обидві частини рівняння на -2. Маємо: $-\frac{1}{2}x \cdot (-2) = -5 \cdot (-2)$, $x = 10$.

5. Координатні пряма і площина

Координатна пряма — це пряма, на якій позначено точку O — початок відліку (початок координат), задано одиничний відрізок і додатний напрям відліку (рис. 76).

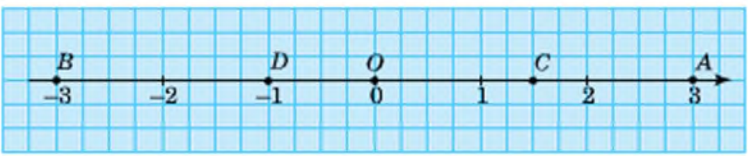


Рис. 76

Число, яке відповідає даній точці на координатній прямій, називають ***координатою*** цієї точки.

Приклади. Точка B має координату –3, записують це так: $B(-3)$. Відповідно $A(3)$, $C(1,5)$, $D(-1)$.

Взаємно перпендикулярні координатні прямі Ox і Oy зі спільним початком координат утворюють ***прямокутну систему ко-***

ординат. Горизонтальна координатна пряма Ox — ***вісь абсцис***, вертикальна координатна пряма Oy — ***вісь ординат***.

Координатна площина — це площина, на якій зображено систему координат. Осі координат ділять координатну площину на чотири частини, які називають ***координатними чвертями***. Їхню нумерацію зображено на рисунку 77.

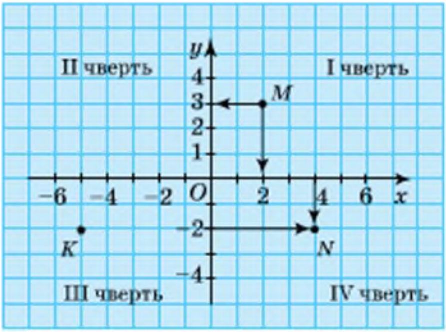


Рис. 77

Кожна точка координатної площини має дві координати — ***абсцису*** і ***ординату***.

Щоб знайти абсцису точки, треба провести через неї перпендикуляр до осі Ox і визначити координату утвореної точки перетину.

Щоб знайти ординату точки, треба через неї провести перпендикуляр до осі Oy і визначити координату утвореної точки перетину.

На рисунку 77 абсциса точки M дорівнює 2 ($x = 2$), а ордината дорівнює 3 ($y = 3$). Отже, точка M має координати 2 і 3. Записують це так: $M(2; 3)$. Координати точки K: $x = -5$, $y = -2$, тобто $K(-5; -2)$.

Ордината будь-якої точки, що лежить на осі Ox, дорівнює 0.

Абсциса будь-якої точки, що лежить на осі Oy, дорівнює 0.

Щоб побудувати на координатній площині точку за її координатами, треба через точки на осях координат, що відповідають даній абсцисі і ординаті, провести дві прямі: одну перпендикулярну до осі абсцис, а другу — до осі ординат. Точка перетину цих прямих є шуканою. На рисунку 77 показано побудову точки $N(4; -2)$.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ

Розділ I

§1. **2.** б) 5,8; в) $-\frac{1}{70}$; г) 360. **9.** в) 518 м². **24.** б) 143,75 дм². **29.** а) –0,6; б) 6,3. **30.** –7,75. **31.** –27,525. **32.** а) 48,6; б) 41,09. **33.** Другий вираз більший за перший на $\frac{41}{75}$. **82.** а) 4; б) 5; в) 640000; г) 128. **84.** а) 2,5; б) $\frac{1}{7}$; в) $\frac{1}{15}$; г) 20. **91.** д) 2 — найбільше значення. **94.** е) $0{,}45a^2b$; є) $-0{,}175a^4b^2$; ж) $8a^4b^2$. **97.** г) $\frac{144}{289}x^2y^2$; ґ) $\frac{225}{289}x^4y^2$. **99.** а) $-72x^5$; б) $\frac{144}{175}x^5y$; в) $-1\frac{5}{16}x^5y$. **105.** $0{,}08ab^2$ т.

§2. **127.** г) $-1{,}6xy - 1{,}1x - 3{,}3$. **128.** б) $\frac{3}{4}x - 3xy$. **129.** а) $7a^2 - 3b^2 + 2ab$; б) $b^2 - 5a^2$; в) $3a^2 + 7b^2 - 4ab$. **130.** а) $2x^2 + 4$; б) $a^2 + 3a + 6$. **132.** а) 0,32; б) 18; в) 12,75. **133.** а) 287; б) 7,9. **154.** а) $-6a - 21b$; б) $17a^2 - 53ab + 90b^2$. **155.** а) $0{,}4a^2x + 5x^2 - 10{,}4x$; б) $-9{,}2a^2 + 1{,}7a$; в) $-50ax - 32a + 18x$. **156.** г) $3\frac{1}{3}a^2 - 0{,}4a + 0{,}4$; б) $1{,}5a^2 - 0{,}3a$. **173.** в) 12; д) $12m$. **175.** а) 0; 1,5; г) 0; 1,5. **193.** а) 0,81; б) –1,92. **194.** а) 1,2. **195.** а) 16; б) –30; в) –64; г) 125. **209.** 144 м². **210.** 1024 м². **211.** 4 м². **212.** 360 см². **213.** 80 м². **224.** 1. **234.** Площа квадрата на 9 см² більша. **244.** *Вказівка.* б) (38,3 –

$-8{,}3)^2$. **251.** 5 і 6. **252.** 6 і 8. **253.** 7 і 9. **254.** а) $-0{,}88$; б) *Вказівка.* $(x-1{,}2)^2+x^2$. **256.** *Вказівка.* $20x(x+1)$ ділиться на 40. **273.** а) $-0{,}5$; в) 0,01. **274.** б) 5. **279.** д) $b^3(b-1)(b+1)$; ї) $x(x+1)(x^2-x+1)$. **280.** б) 0; 5; -5; в) 0; 4; -4. **283.** б) $3(x-2)^2$. **284.** в) $0{,}5a(2a-1)(2a+1)$. **285.** б) 2,125. **286.** г) $5p(4-p)$; д) $(m+7-b)(m+7+b)$. **287.** б) $(b-a)(3-a)(3+a)$; ґ) $(x-2)(x+2)(x+y)$. **288.** б) $(m-1)(m+1)^2(m^2-m+1)$; г) $(m-2)(m^2+8m+4)$. **289.** б) 1; 4; -4; г) 1; -1; $-1{,}5$. **291.** в) $(x-3y)(x-4y)$; д) $(x-5y)(x+2y)$. **292.** б) 57.

Розділ II

§3. **306.** 3, якщо $x=-2$ і $x=3$. **308.** Залежність б) і в). **311.** Від -1 до 11 включно. **314.** Даному графіку належать точки B, C, E і F. **317.** Графіками функцій є графіки на малюнках 37 і 39. **319.** а) (2; 0); б) (-3; 0); в) (1; 0), (-1; 0). **320.** б) $y=27-0{,}3x$.

§4. **321.** а) 2 і -4; б) $-0{,}5$ і 2; в) 1 і $-\frac{1}{2}$; г) -1 і 8; ґ) 1 і 0; д) $-0{,}7$ і -7. **327.** а) (0; 5); б) (0; $-1{,}5$); д) (0; -3). **328.** а) (3; 0); б) (-1; 0); в) (0,5; 0). **331.** $b=5$. **333.** а) $y=-1\frac{1}{7}x+8$. **334.** а) $f_1(x)=0{,}5x+2{,}5$, $f_2(x)=0{,}6x+1{,}5$; в) 10. **339.** $k=2$. **340.** б) $y=-5x$. **342.** (III) $y=0{,}5x$. **344.** Паралельні графіки: а) і г); б) і ґ); в) і є); е) і ж). **346.** а) $y=-2x+3$; в) $y=-2x+6{,}5$. **348.** 1) $y=\frac{4}{3}x$; 4) $y=x+4$.

Розділ III

§5. **354.** а) 2,2. **355.** г) 5; д) -421. **359.** б) 6,25; в) $-12{,}5$; г) 3. **363.** в) 1; -1; г) 1; 3; -3. **364.** а) 3; д) $1\frac{1}{3}$. **365.** в) 3,5; $-3{,}5$. **366.** в) -5; 19. **377.** 8 см, 11 см. **378.** 51, 43, 36. **379.** 6 м, 9 м. **380.** 12 і 36. **382.** 25 груш, 75 яблунь, 20 слив. **383.** 20, 25 і 50 книжок. **384.** 25 см, 31 см, 50 см. **385.** 126, 378 і 504 робітників. **386.** 4 грн, 4,8 грн. **387.** 100 кг. **388.** 80 км. **390.** 24 л, 8 л. **391.** 70 т, 140 т. **392.** 12 т. **393.** 17,5 км/год. **394.** 34 учні, 31 учень, 38 учнів. **395.** 331, 333, 335. **396.** 9 см, 3 см, 12 см. **397.** 12 мішків, 18 мішків. **398.** 6. **399.** 7,6. **400.** *Вказівка.* $5x+8(x-1)=122$, де x — кількість витків пружини.

401. 10 дощок. **402.** 60 м. **403.** 90 об., 120 об. **404.** 7 т. **405.** 21 день. **406.** 10 днів. **407.** 34 учні, 6 лавок. **408.** 25 і 37 яблук. **409.** Через 5 років. **410.** 54 т і 27 т. **411.** 40 і 80 яблук. **412.** 190 учнів, 110 учнів. **413.** 60 км/год, 75 км/год. **414.** 120 га, 1800 га. **415.** 19 га. **416.** 75,6 км/год. **417.** 20 км. **418.** 105 км. **419.** 240 км. **420.** 1 год 48 хв. **421.** 240 км, 11 год. **423.** 180 кг; 80 пакетів. **424.** 1691–1803 рр. **425.** 3,5 см, 7 см, 10,5 см, 269,5 см^2. **427.** 180 кг, 80 пакетів. **428.** 320 м, 16 м/с. **429.** 60 км/год. **430.** 60 км/год. **431.** 40 виробів. **432.** 160 км. **434.** 8 м, 4 м. **436.** 50 хв. **437.** 6 см. **440.** $\left(0; 1\frac{1}{3}\right)$; (–10; –2); (–4; 0). **445.** в) $m = = 1,5$. **446.** 1,5. **458.** а) $c = -6$. **462.** *Вказівка.* Слід розглянути рівняння $30x + 40y = 190$, де x і y — натуральні числа.

§6. **475.** а) (–1; 1); г) (4; 2). **476.** б) (1; –1); г) (0,25; 1). **477.** а) $\left(34; 7\frac{1}{3}\right)$; в) (3; 4). **478.** а) (0; –1) ; г) (–2; –3). **479.** а) $\left(\frac{1}{7}; 7\right)$; г) (–1; 0). **480.** б) (18,2; 4,6); г) (1; –1). **481.** а) Немає розв'язку; б) має безліч розв'язків. **482.** (11; –1). **484.** а) (4; 3); г) $\left(\frac{1}{2}; -1\frac{1}{6}\right)$. **485.** а) (60; 30); г) (–0,25; 0); д) (0,2; 0). **486.** а) (0,2; 0); б) немає розв'язків; в) $\left(7; 5\frac{2}{3}\right)$; г) $\left(4; 3\frac{1}{3}\right)$. **487.** а) (4; 2); г) $\left(4; \frac{1}{3}\right)$. **488.** а) (–1,25; –15); г) $\left(4\frac{8}{11}; 4\frac{8}{11}\right)$. **489.** а) (8; 9); г) (5; 8). **490.** $k = 1\frac{1}{3}$; $p = 1\frac{1}{3}$. **491.** $k = -2$; $p = 1$. **492.** (–2; 6). **493.** (–14; 6). **496.** 50 г, 30 г. **497.** 25 км/год, 5 км/год. **498.** 2,4 грн, 1,2 грн. **499.** 60 грн, 75 грн. **500.** 6 кг, 9 кг. **501.** 200, 300. **502.** 81,6 м, 68 м. **503.** 20 гусей, 30 кролів. **504.** 32 учні, 21 парта. **505.** 30 ц, 32,4 ц. **506.** 19 га, 17 га. **507.** 17 дм і 11 дм. **508.** 40 км/год, 3 год. **509.** 40 000 і 30 000 операцій. **510.** 8 робітників, 10 днів. **511.** 41° і 49°. **512.** 56°, 56°, 68°. **513.** 20 см, 10 см. **514.** 36°, 72°, 72°. **515.** 72°, 72°, 36°, або $\angle A = \angle C = \left(51\frac{3}{7}\right)^\circ$, $\angle B = \left(77\frac{1}{7}\right)^\circ$.

516. 14 і 8. 517. $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 70°$. 518. 75. 519. 40 т, 100 т. 520. 150 т, 200 т. 521. 1,2 кг, 0,8 кг.

Повторення

§7. 531. а) $a^4 + a^8 + a$; в) 4. 538. *Вказівка.* $16^5 = (2^4)^5$. 552. а) –12; б) 1220; в) 0. 558. 6. 559. 1,4. 561. а) 4; г) –4; 2. 563. а) $\frac{2}{3}$; б) 2. 564. а) 2; б) 2. 566. а) (–5; 3) ; б) $v = 4$; $u = 0$. 573. $k = 2{,}5$. 574. $k \neq 2{,}5$.

§8. 577. 130 т, 160 т, 110 т. 579. 40 км/год, 30 км/год. 580. 150 км. 581. 21 см, 63 см. 582. 20 см, 30 см. 585. 14 і 50 років. 586. 50 га. 587. 12 км/год. 588. 10 см. 589. 2 кг. 590. 12 см, 5 см. 591. 60 деталей. 593. 200 зошитів, 47 учнів. 596. *Вказівка.* Слід розглянути рівняння $4x + + 3y = 140$, де x і y — натуральні числа. 598. 60 км. 599. ≈ 3,2 кг, ≈ 23,3 кг.

§9. 600. 143 м, 130 м, 110 м. 604. а) –2; 0; 2; б) –2; 2; в) 0; 0,5; г) немає розв'язків; д) –3; 3. 605. Так. 608. 6 учнів. 610. $4n + 2$, де n — натуральне число. 612. 21, 42, 63, 84. 616. 22. 633.18. 642. 96 л, 60 л. 643. 63 л, 84 л. 644. 6 коней, 30 днів. 645. 5 км/год, 11 км/год. 646. 1 год. 650. О 10 год ранку. 651. 3 год і 9 год. 652. 75 м, 54 км/год. 653. 1 кг 40 г. 654. 27 %. 655. 69 дівчаток. 656. 6 корів. 658. 36 корів. 659. 21 год, 28 год.

ТЕРМІНОЛОГІЧНИЙ СЛОВНИК

Аналітичний спосіб задання функції — задання функції за допомогою формули.

Аргумент — незалежна змінна функціональної залежності.

Графік рівняння з двома змінними — множина всіх точок координатної площини, координати яких є його розв'язками.

Графік функції — множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, що утворюють область визначення функції, а ординати — відповідним значенням функції.

Графічний спосіб задання функції — спосіб задання функції за допомогою її графіка.

Двочлен — сума двох одночленів.

Зведення многочлена до стандартного вигляду — тотожне перетворення многочлена, яке полягає у запису кожного члена многочлена у стандартному вигляді і зведенні подібних членів.

Зведення подібних членів могочлена — заміна суми подібних членів многочлена одночленом.

Зведення одночлена до стандартного вигляду — тотожне перетворення одночлена, яке полягає у заміні його одночленом стандартного вигляду.

Коефіцієнт — числовий множник одночлена стандартного вигляду.

Лінійна функція — функція, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де k і b — дані числа, а x — незалежна змінна.

Лінійне рівняння з однією змінною — рівняння виду $ax = b$, де a і b — довільні числа, а x — змінна.

Лінійне рівняння з двома змінними — рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — дані числа, а x і y — змінні.

Многочлен — сума кількох одночленів.

Многочлен стандартного вигляду — многочлен, що містить лише одночлени стандартного вигляду, серед яких немає подібних.

Область визначення функції — множина всіх значень, яких набуває незалежна змінна.

Область значень функції — множина всіх значень, яких набуває функція.

Одночлен — вираз, що є добутком чисел, змінних та їхніх степенів.

Одночлен стандартного вигляду — одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці і до якого кожна змінна входить у відповідному степені тільки один раз.

Подібні члени многочлена — одночлени, які відрізняються між собою лише коефіцієнтом або однакові.

Правильна числова рівність — рівність, значення лівої і правої частин якої дорівнює одному й тому самому числу.

Пряма пропорційність — функція, задана формулою $y = kx$, де $k \neq 0$.

Раціональний алгебраїчний вираз — числовий вираз або вираз зі змінною, який містить лише арифметичні дії над числами.

Рівняння першого степеня з двома змінними — лінійне рівняння з двома змінними виду $ax + by = c$, де $a \neq 0$ і $b \neq 0$.

Рівняння першого степеня з однією змінною — рівняння виду $ax = b$, де $a \neq 0$.

Розв'язок рівняння першого степеня з однією змінною — число, що задовольняє дане рівняння.

Розв'язок лінійного рівняння з двома змінними — пара чисел, що задовольняють дане рівняння.

Розв'язування системи рівнянь — знаходження всіх її розв'язків або доведення, що їх немає.

Розв'язок системи рівнянь — спільний розв'язок усіх рівнянь, що утворюють систему.

Розкладання многочлена на множники — запис многочлена у вигляді добутку кількох множників.

Система двох лінійних рівнянь із двома змінними — сукупність двох лінійних рівнянь з одними і тими самими змінними, стосовно яких ставиться вимога знайти такі значення змінних, які одночасно задовольняють кожне рівняння.

Спосіб додавання — спосіб розв'язування системи двох рівнянь із двома змінними, коли коефіцієнти при одній і тій самій змінній в обох рівняннях зводять до протилежних чисел і додають почленно утворені рівняння.

Спосіб підстановки — спосіб розв'язування системи двох рівнянь із двома змінними, коли в одному з рівнянь одну із змінних виражають через другу і знайдений вираз підставляють у друге рівняння.

Степінь числа з натуральним показником n ($n \neq 1$) — добуток n множників, кожен із яких дорівнює даному числу.

Табличний спосіб задання функції — запис області визначення і області відповідних значень функції у вигляді таблиці.

Тотожне перетворення виразу — заміна виразу тотожно рівним йому виразом.

Тотожність — рівність, ліва і права частини якої є тотожно рівними виразами.

Тотожно рівні вирази — вирази, всі відповідні значення яких дорівнюють одне одному.

Тричлен — сума трьох одночленів.

Функціональна залежність — залежність між двома змінними, коли кожному значенню однієї (незалежної) змінної відповідає тільки одне значення другої (залежної) змінної.

Функція — правило, за допомогою якого для кожного значення незалежної змінної знаходять єдине відповідне значення залежної змінної.

Числова рівність — два числові вирази, сполучені знаком рівності.

Члени многочлена — одночлени, які утворюють многочлен.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Л

М

Н

О

П

Р

С

ЗМІСТ

Розділ II. Функція

Розділ III. Лінійні рівняння та їхні системи

Повторення

ЗАМОВЛЯЙТЕ КНИГИ ПОШТОЮ

"КНИГА ПОШТОЮ" А/С 529
м. Тернопіль, 46008
т. (0352) 287489, 511141
(067) 3501870, (066) 7271762
mail@bohdan-books.com

Навчальне видання

МАЛЬОВАНИЙ Юрій Іванович
ЛИТВИНЕНКО Григорій Миколайович
БОЙКО Григорій Михайлович

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу загальноосвітніх навчальних закладів

Головний редактор *Богдан Будний*
Редактор *Володимир Дячун*
Художник обкладинки *Володимир Басалига*
Дизайн та комп'ютерна верстка *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 18.01.2015. Формат 60×90/16. Папір офсетний.
Гарнітура Шкільна. Умовн. друк. арк. 16.
Умовн. фарбо-відб. 64.

Видавництво «Навчальна книга – Богдан»
Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців,
виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
ДК № 4221 від 07.12.2011 р.

Навчальна книга – Богдан, просп. С. Бандери, 34а, м. Тернопіль, 46002
Навчальна книга – Богдан, а/с 529, м. Тернопіль, 46008
тел./факс (0352)52-06-07; 52-19-66; 52-05-48
office@bohdan-books.com
www.bohdan-books.com