



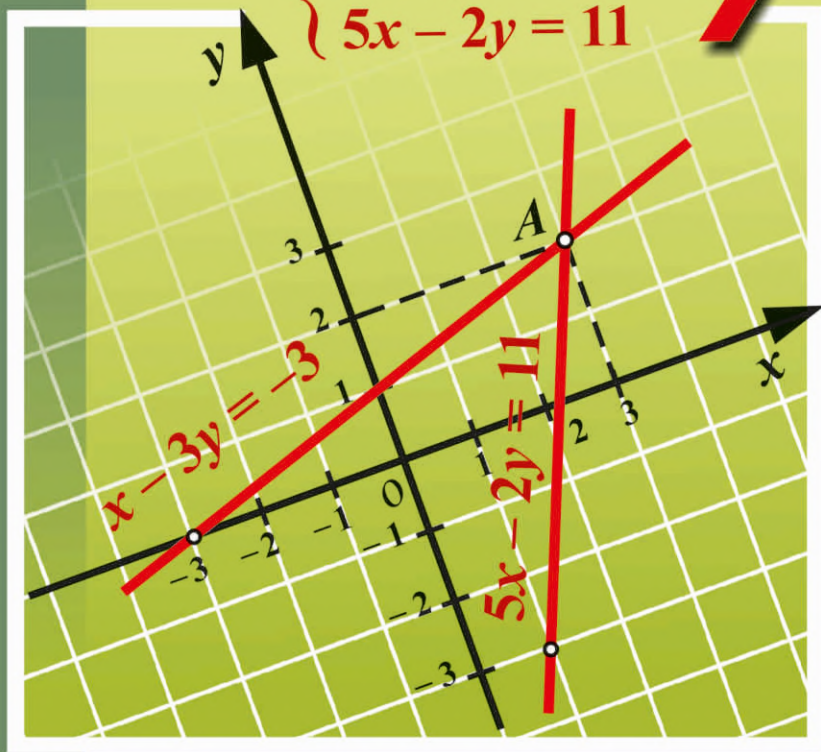
Василь Кравчук
Марія Підручна
Галина Янченко

АЛГЕБРА

КЛАС

7

$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$$



УДК 51 (075.3)
ББК 22.1я723
К 77

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України
(наказ МОН України від 20.07.2015 р. № 777)

Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено

Кравчук В. Р.

К 77 Алгебра : підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. /
В. Р. Кравчук, М. В. Підручна, Г. М. Янченко. — Тернопіль :
Підручники і посібники, 2015. — 224 с.

ISBN 978-966-07-2927-8

УДК 51 (075.3)
ББК 22.1я723

ISBN 978-966-07-2927-8

© Кравчук В. Р., Підручна М. В., Янченко Г. М., 2015
© Видавництво «Підручники і посібники»,
оригінал-макет, 2015

ЮНІ ДРУЗІ!

Ви розпочинаєте вивчення однієї з основних математичних дисциплін — алгебри. Сподіваємося, що підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе не загубитися в лабіринтах цієї поки що не пізної вами науки.

Щодо особливостей підручника, то матеріал, який ви вивчатимете, об'єднано у три розділи, сім параграфів, що складаються з пунктів.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу. Деякі пункти містять додатковий матеріал під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».

Далі — рубрика «Приклади розв'язання вправ». Це підказка. Вона допоможе вам ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв'язування та навчить правильно записувати розв'язання. Початок та закінчення розв'язання кожної вправи позначено кружечками «•».

Приклади розв'язання вправ



Прочитавши теоретичний матеріал та поміркувавши над зразками розв'язаних задач, варто спочатку розв'язувати усні вправи і простіші задачі (рівень А), відтак переходити до складніших (рівень Б). Задачі рівня В — для найкмітливіших — тих, хто хоче вміти та знати більше й отримувати найвищі оцінки. Для деяких задач цього рівня наведено розв'язання.

Рівень А



Рівень Б



Рівень В



Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено (наприклад, 345).

Рубрика «Вправи для повторення» допоможе періодично повторювати основні види вправ.

Наступна рубрика «Поміркуйте» пов'язана з особливим аспектом математичної підготовки. Основним для розв'язання задач цієї рубрики є вміння виходити з нестандартних ситуацій. Розв'язування таких задач розвиває гнучкість розуму, а це допоможе вам у майбутньому, незалежно від того, яку професію ви оберете.

Кожний параграф містить рубрику «Цікаво знати», у якій можна ознайомитися з історією розвитку математики, відомостями про визначних математиків.

Після вивчення параграфа ви зможете повторити й систематизувати матеріал, відповівши на запитання та розв'язавши задачі, вміщені наприкінці параграфа.

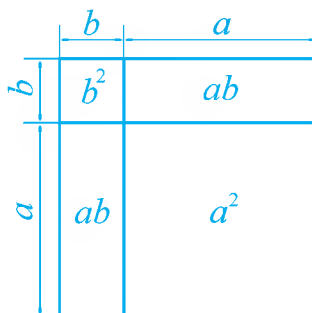
Свої знання можна перевірити, розв'язавши завдання для самоперевірки.

Щиро бажаємо успіху!

Розділ I. ЦІЛІ ВИРАЗИ

Розв'язування багатьох задач з математики, фізики, хімії пов'язане з необхідністю проводити певні перетворення виразів.

У даному розділі ми з'ясуємо, що таке вираз, цілий вираз, тотожне перетворення виразу; вивчимо основні формули, на основі яких можна здійснювати перетворення виразів.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

§ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

1. Вирази зі змінними. Цілі вирази

1. Вирази зі змінними. Розглянемо кілька задач.

Задача 1. Довжина прямокутної ділянки дорівнює 42 м, а ширина — на b м менша від довжини. Записати у вигляді виразу площу ділянки.

• Ширина ділянки дорівнює $(42 - b)$ м, а площа — $42(42 - b)$ м².

Відповідь. $42(42 - b)$ м². •

Вираз $42(42 - b)$ містить букву b , і такий вираз ми називали *буквеним виразом*.

Букві b можна надавати різні значення, b може дорівнювати 0,8; 5; 7,2; 10 тощо, тобто значення b можна *змінювати*. Тому b називають *змінною*, а вираз $42(42 - b)$ — *виразом зі змінною*.

Задача 2. Довжина прямокутної ділянки дорівнює a м, а ширина — на b м менша від довжини. Записати у вигляді виразу площу ділянки.

• Ширина ділянки дорівнює $(a - b)$ м, а площа — $a(a - b)$ м².

Відповідь. $a(a - b)$ м². •

Букви a і b також можуть набувати різних значень, тому a і b — змінні, а вираз $a(a - b)$ — вираз із двома змінними.

Вираз зі змінними утворюють зі змінних, чисел, знаків дій і дужок. Виразом зі змінною вважають й окремо взятую змінну.

Якщо у вираз $42(42 - b)$ замість змінної підставити певне число, наприклад, число 12, то одержимо числовий вираз $42 \cdot (42 - 12)$, значення якого дорівнює: $42 \cdot (42 - 12) = 42 \cdot 30 = 1260$. Одержане число 1260 називають *значенням виразу* $42(42 - b)$ для значення змінної $b = 12$.

Значення виразу $a(a - b)$ для $a = 30$, $b = 7$ дорівнює:

$$30 \cdot (30 - 7) = 30 \cdot 23 = 690.$$

Розглянемо вираз зі змінною: $\frac{5}{a+4}$. Значення цього виразу можна знайти для будь-якого значення a , крім $a = -4$. Якщо $a = -4$, то дільник (знаменник) $a + 4$ дорівнює нулю, а на нуль ділити не можна. Кажуть, що для $a \neq -4$

вираз $\frac{5}{a+4}$ має зміст, а для $a = -4$ він не має змісту.

2. Цілі вирази. Порівняємо вирази

$$a + b, \quad 7ac, \quad \frac{1}{3}b, \quad a - \frac{c}{2}, \quad \frac{a-b}{5}$$

з виразами

$$\frac{7}{ab}, \quad a : b, \quad b - \frac{a}{d+1}, \quad \frac{a+b}{c}.$$

Вирази першої групи не містять дії ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *цілими*.

Вирази другої групи містять дію ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *дробовими*, їх ми вивчатимемо у 8 класі.

У 7 класі розглядатимемо лише цілі вирази.

3. Формули. Вирази зі змінними використовують для запису формул. Наприклад:

$S = ab$ — формула для обчислення площі прямокутника;

$V = abc$ — формула для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда.

Формулою $n = 2k$ (де k — ціле число) задають парні числа, а формулою $n = 2k + 1$ — непарні.

Для тих, хто хоче знати більше



Формулами можна задати цілі числа, які при діленні на задане натуральне число дають ту саму остачу.

Розглянемо спочатку приклад ділення двох натуральних чисел. Поділимо 48 на 5 з остачею:

$$\begin{array}{r} 48 \quad | \quad 5 \\ -45 \quad | \quad 9 \\ \hline 3 \end{array}$$

Одержали: 9 — неповна частка, 3 — остача.

Поділивши 48 на 5, ми знайшли два числа — 9 і 3 (неповну частку та остачу), використовуючи які, число 48 можна записати у вигляді

$$48 = 5 \cdot 9 + 3.$$

Ділення будь-якого цілого числа на натуральне з остачею зводиться до знаходження подібної рівності.

Поділити ціле число m на натуральне число n з *остачею* означає знайти такі цілі числа k і r , щоб виконувалась рівність

$$m = nk + r, \text{ де } 0 \leq r < n.$$

За цих умов число k називають *неповною часткою*, а r — *остачею* від ділення m на n .

Остач від ділення цілих чисел на натуральне число n може бути n :

$$0, 1, 2, \dots, n-2, n-1.$$

Знайдемо для прикладу остачу від ділення числа -17 на число 3. Для цього запишемо число -17 у вигляді $-17 = 3k + r$, де k і r — цілі числа, до того ж $0 \leq r < 3$. Щоб число r лежало в межах від 0 до 2, потрібно взяти $k = -6$. Тоді легко знайти, що $r = 1$. Маємо правильну рівність $-17 = 3 \cdot (-6) + 1$. Отже, число -17 при діленні на 3 дає в остачі 1.

Цілі числа при діленні на 3 можуть давати в остачі 0, 1 або 2. Відповідно до цього їх можна поділити на 3 групи.

Цілі числа	Остача при діленні на 3	Вид чисел
... -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9; ...	0	$3k$
... -8; -5; -2; 1; 4; 7; 10; ...	1	$3k + 1$
... -7; -4; -1; 2; 5; 8; 11; ...	2	$3k + 2$

Отже, формулами $m = 3k$, $m = 3k + 1$ і $m = 3k + 2$, де k — довільне ціле число, задають усі цілі числа, які при діленні на 3 дають в остачі відповідно 0, 1, 2. Про число $m = 3k$ ще кажуть, що вони діляться (націло) на 3. Так, -9 ділиться на 3.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Записати у вигляді виразу:

- а) добуток числа a і суми чисел b та c ;
- б) частку різниці чисел m та n і числа 7;
- в) різницю числа a і добутку чисел m та n .
- а) $a(b + c)$; б) $(m - n) : 7$; в) $a - mn$. •

Зауваження. Читаючи словами числові вирази чи вирази зі змінними, першою називають останню по порядку виконання дію, далі передостанню і т. д.

Вправа 2. Знайти значення виразу $a^2(b + c)$, якщо $a = 4$, $b = -7$, $c = 2$.

- Якщо $a = 4$, $b = -7$, $c = 2$, то
- $$a^2(b + c) = 4^2 \cdot (-7 + 2) = 16 \cdot (-5) = -80.$$

Відповідь. -80 . •

Вправа 3. Знайти значення виразу $(m + n)^2 - 3n$, якщо $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{3}$.

- Якщо $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{3}$, то

$$(m + n)^2 - 3n = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1+2}{6}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{3}{4}$. •

Вправа 4. Записати у вигляді виразу число, яке має 9 сотень, c десятків, d одиниць.

- $9 \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 900 + 10c + d$. •

Усно

1. Серед записів укажіть числові вирази, вирази зі змінними та записи, що не є виразами:

- а) $7,2 : 3$; б) 5 ; в) $2x = 3$; г) $(18 - 3) : 5 = 3$;

д) $a - c$; е) $15 - 8a$; є) $\frac{19-8}{5}$; ж) abx^2 .

2. Прочитайте словами вирази зі змінними:

а) $5 + x$; б) $y : 7$; в) $2ab$; г) $(abc - 2) : 4$;

д) $(a - 3) : a$; е) $\frac{1}{4}z - 3,5$; є) $\frac{b-c}{4}$; ж) $\frac{37}{x}$.

Які з даних виразів є цілими виразами?

3. Складіть три вирази з числа 7 та змінних a і b .

4. Складіть два вирази з чисел 5 і 11 та змінної x .



Запишіть у вигляді виразу:

5. а) Суму чисел 12 і a ; б) частку чисел $-c$ і 7;
 в) куб числа a ; г) піврізницю чисел a і b .
6. а) Добуток числа 3 і суми чисел a та c ;
 б) потроєний добуток чисел b і c ;
 в) різницю числа a і квадрата числа c .
7. а) Різницю чисел b і 9; б) добуток чисел 3 і $-a$;
 в) квадрат числа x ; г) півсуму чисел m і n ;
 д) добуток різниці чисел 3 та c і числа 5.

Знайдіть значення виразу:

8. а) $7b - 3$, якщо $b = -9$; б) $0,11 - 4c^2$, якщо $c = 0,2$;
 в) $3a + b$, якщо $a = -3$; $b = 8$; г) $ab - 4c$, якщо $a = -0,4$; $b = 7$; $c = 0,12$.
9. а) $2,5 + \frac{a-2}{5}$, якщо $a = 4$; б) $\frac{2x-1}{0,1}$, якщо $x = -3$.
10. а) $-2a + 5,2$, якщо $a = -3$; б) $(1 - 4s)^2$, якщо $s = 2$;
 в) $12(3y - 5)$, якщо $y = 1,5$; г) $x - 2y$, якщо $x = 11$; $y = -5,5$;
 д) $3(a + b) - 2c$, якщо $a = 3,2$; $b = -7,7$; $c = 2,5$.

Заповніть таблицю:

11.

a	-4	-1	0	0,5	2	3
$4 - 3a$						

12.

x	-5	-3	0	1	1,5	2,5
$2x - 3$						

13.

x	5	7	1	-2	-4	10
y	2	-1	0	3	-0,5	-1
$x - 2y$						

14.

b	-2	0	0,5	1	3	3,5
$\frac{2b-5}{4}$						

15. Швидкість автомобіля дорівнює 75 км/год. Запишіть у вигляді виразу шлях, який автомобіль проїде за t год.
16. На склад завезли n мішків борошна по 50 кг у кожному. Запишіть у вигляді виразу масу всього завезеного борошна. Знайдіть значення цього виразу, якщо $n = 48$.
17. Робітник за день виготовляє 32 деталі. Запишіть у вигляді виразу кількість деталей, які робітник виготовить за k днів. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 5$.
18. З ділянки, площа якої дорівнює a га, господарство зібрало по 38 ц пшениці з гектара, а з ділянки, площа якої дорівнює b га, — по 42 ц. Запишіть у вигляді виразу масу пшениці, зібраної господарством з обох ділянок.
19. Майстерня закупила 50 м тканини по a грн за метр і 30 м тканини по b грн за метр. Запишіть у вигляді виразу вартість усієї тканини.



Знайдіть значення виразу:

20. а) $8,5 \cdot (a - 13,97) + 4\frac{3}{8}b$, якщо $a = 16,17$; $b = \frac{6}{7}$;
 б) $(3\frac{2}{9} - m - n) \cdot 36$, якщо $m = -12\frac{2}{3}$; $n = 1\frac{1}{6}$.
21. а) $(x - 9\frac{7}{9}) \cdot y + 0,5$, якщо $x = 16\frac{1}{2}$; $y = \frac{18}{33}$;
 б) $0,5a + 3\frac{1}{2}(b - 1\frac{1}{7})$, якщо $a = 3\frac{1}{5}$; $b = 2$.
22. За формулою $S = vt$ знайдіть шлях (у кілометрах), якщо:
 а) $v = 75$ км/год; $t = 0,6$ год; б) $v = 75$ км/год; $t = 20$ хв;
 в) $v = 20$ м/с; $t = 2$ год; г) $v = 900$ м/хв; $t = 25$ с.
23. За формулою $S = vt$ знайдіть шлях (у метрах), якщо:
 а) $v = 8$ м/с; $t = 5$ хв; б) $v = 15$ км/год; $t = 6$ хв.

24. Для яких значень x значення виразу $2x + 5$ дорівнює 10?
 25. Для яких значень x значення виразу $4 - 2x$ дорівнює 18?
 26. Для яких значень x значення виразів $3x - 12$ і $-4 - x$ дорівнюють одне одному?
 27. Відомо, що для деяких значень x та y значення виразу xy дорівнює 0,4. Якого значення для тих самих значень x та y набуває вираз:

- а) $10xy$; б) $0,1xy$; в) $\frac{xy}{2}$; г) $-1\frac{1}{3}xy$?

28. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 4 дають в остачі 1.
 29. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 5 дають в остачі 2.

Запишіть у вигляді виразу число, яке має:

30. а) a десятків і b одиниць; б) a сотень і c одиниць;
 в) a сотень, 7 десятків і b одиниць; г) a тисяч, b сотень і a одиниць.
 31. а) a сотень і b десятків; б) 5 сотень, a десятків і b одиниць.
 32. Запишіть у вигляді виразу площу поверхні прямокутного паралелепіпеда з вимірами a см, b см, c см.
 33. Запишіть у вигляді виразу площу поверхні куба з ребром a см.

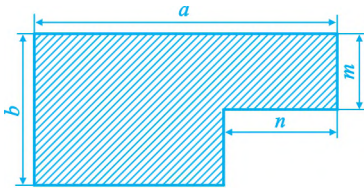


Рис. 1

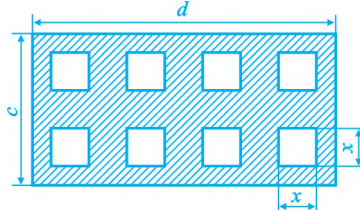


Рис. 2

34. Запишіть у вигляді виразу площу фігури, зображеної на рисунку 1.
 35. Запишіть у вигляді виразу площу фігури, зображеної на рисунку 2.
 36. На ділянці росло n кущів смородини. З цієї ділянки k кущів пересадили на іншу ділянку, а на ній посадили 30 нових кущів. Скільки кущів смородини стало на ділянці? Запишіть результат у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $n = 83$, $k = 35$.
 37. Оксана купила n олівців по 0,5 грн і 4 зошити по a грн, заплативши за зошити більше, ніж за олівці. На скільки більше заплатила Оксана за зошити, ніж за олівці? Запишіть результат у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $n = 3$, $a = 4$.
 38. Із двох міст одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі й зустрілися через 2 год. Один автомобіль рухався зі швидкістю 80 км/год, а інший — зі швидкістю v км/год. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами.

Рівень В



39. Число d є добутком перших n натуральних чисел: $d = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Знайдіть d , якщо $n = 5$; $n = 7$. Скількима нулями закінчується запис числа d , якщо $n = 10$; $n = 100$?
40. Знайдіть найменше значення виразу: $x^2 + 5$; $x^2 - 3$.
41. Знайдіть найбільше значення виразу: $1 - a^2$; $-3 - a^2$.
42. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 9 дають в остачі 2. Знайдіть кількість таких чисел у межах від 100 до 300.
43. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 2 дають в остачі 1, а при діленні на 3 дають в остачі 2.

Вправи для повторення

44. Для облаштування території новобудови на двох ділянках планують засіяти газонну траву. Відомо, що площа першої ділянки на 70%, або на 350 м^2 , більша, ніж площа другої. Скільки потрібно кілограмів насіння, щоб засіяти обидві ділянки, якщо на 1 м^2 землі засівати 20 г насіння?
45. Обчисліть раціональним способом:
- а) $0,25 \cdot (-11) \cdot 4$; б) $9 \cdot 1,25 \cdot (-8)$; в) $-\frac{2}{7} \cdot (-25) \cdot 3\frac{1}{2}$;
 г) $24 \cdot 8 - 28 \cdot 24$; д) $12 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)$; е) $5,4 \cdot 3 - 9 \cdot 5,4 + 6 \cdot 6,4$.
46. Зведіть подібні доданки:
- а) $2x + 6x - 4x + x$; б) $4a + 9b + 2b - 5a$; в) $3a - 7 + 5a - 10a$.
47. Розкрийте дужки:
- а) $4(a + 2b)$; б) $(a + b - c) \cdot 3$; в) $5(a - 1) - (b - c)$.
48. Візьміть у дужки два останні доданки, поставивши перед дужками знак «+»; знак «-»:
- а) $2x + y - 3$; б) $a - 3b + 4$; в) $m + n - 7 - mn$.

Поміркуйте

49. Є два букети троянд: у першому — 15 троянд, у другому — 17. Принц та Попелюшка грають у гру, роблячи по черзі ходи. За один хід потрібно розділити будь-який букет на два менші. Програє той, хто не зможе зробити хід (залишилися «букети» з однієї троянди). Принц хоче, щоб перемогла Попелюшка, а Попелюшка — щоб переміг принц. Хто з них може досягти своєї мети, якщо перший хід робить Попелюшка?

2. Тотожно рівні вирази. Тотожності

1. Тотожно рівні вирази. Знайдемо значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$, якщо $a = 4$, $b = 2$:

$$5a - 5b = 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 20 - 10 = 10; \quad 5(a - b) = 5 \cdot (4 - 2) = 5 \cdot 2 = 10.$$

Значення виразів для даних значень змінних дорівнюють одне одному (кажуть: якщо $a = 4$, $b = 2$, то відповідні значення виразів дорівнюють одне одному). З розподільної властивості множення стосовно віднімання випливає, що й для будь-яких інших значень змінних відповідні значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$ теж дорівнюють одне одному. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Означення

Два вирази називають тотожно рівними, якщо для будь-яких значень змінних відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному.

Розглянемо тепер вирази $5a + b$ і $a + 5b$. Якщо $a = 1$ і $b = 1$, то відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному:

$$5a + b = 5 \cdot 1 + 1 = 6; \quad a + 5b = 1 + 5 \cdot 1 = 6.$$

Якщо ж $a = 2$, $b = 1$, то відповідні значення цих виразів різні:

$$5a + b = 5 \cdot 2 + 1 = 11; \quad a + 5b = 2 + 5 \cdot 1 = 7.$$

Отже, значення виразів $5a + b$ і $a + 5b$ для одних значень змінних дорівнюють одне одному, а для інших — ні. Такі вирази не є тотожно рівними.

2. Тотожності. Якщо два тотожно рівні вирази $5a - 5b$ і $5(a - b)$ сполучити знаком « \Rightarrow », то одержимо рівність $5a - 5b = 5(a - b)$, яка є правильною для будь-яких значень змінних. Таку рівність називають *тотожністю*.

Означення

Рівність, яка є правильною для всіх значень змінних, називають тотожністю.

Прикладами тотожностей є рівності, які виражають основні властивості додавання і множення чисел:

переставна властивість: $a + b = b + a;$ $ab = ba;$

сполучна властивість: $(a + b) + c = a + (b + c);$ $(ab)c = a(bc);$

розподільна властивість: $a(b + c) = ab + ac.$

Тотожностями є також рівності, які виражають правила розкриття дужок:

$$a + (b + c) = a + b + c, \quad a - (b + c) = a - b - c, \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

Тотожностями є й такі рівності:

$$a - b = a + (-b), \quad a \cdot (-b) = -ab, \quad (-a) \cdot (-b) = ab;$$

$$a + 0 = a, \quad a + (-a) = 0, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a.$$

3. Тотожні перетворення виразів. У виразі $4a + 3a - 1$ зведемо подібні доданки $4a$ і $3a$:

$$4a + 3a - 1 = (4 + 3)a - 1 = 7a - 1.$$

Вираз $4a + 3a - 1$ замінили тотожно рівним йому виразом $7a - 1$.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають тотожним перетворенням виразу.

У математиці часто доводиться спрощувати вираз, тобто замінювати його тотожно рівним виразом, який має коротший запис або, як кажуть, є «більш компактним». Розглянемо приклади.

Приклад 1. Спростити вираз $7a + 23 + 2(-4a + 1)$.

$$\bullet 7a + 23 + 2(-4a + 1) = 7a + 23 - 8a + 2 = -a + 25. \bullet$$

Приклад 2. Спростити вираз $a + (2a - 3b) - (2 - 4b)$.

$$\bullet a + (2a - 3b) - (2 - 4b) = a + 2a - 3b - 2 + 4b = 3a + b - 2. \bullet$$

Спрощення виразів використовують під час розв'язування рівнянь. Розглянемо приклад.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2(x - 3) + 3x = 4$.

$$\bullet \text{Спростимо вираз у лівій частині рівняння: } 2x - 6 + 3x = 4; 5x - 6 = 4.$$

Перенесемо доданок -6 у праву частину рівняння. Тоді:

$$5x = 4 + 6; 5x = 10; x = 10 : 5; x = 2.$$

Відповідь. 2. \bullet

4. Доведення тотожностей. Тотожні перетворення використовують і для доведення тотожностей.

Щоб довести тотожність, можна використати один з таких способів:

- 1) ліву частину тотожності шляхом тотожних перетворень звести до правої частини;
- 2) праву частину звести до лівої частини;
- 3) обидві частини звести до того самого виразу;
- 4) утворити різницю лівої та правої частин і довести, що вона дорівнює нулю.

Розглянемо приклади.

Приклад 4. Довести тотожність $a - 3 - (4a + 7) = -3a - 10$.

\bullet Перетворюватимемо ліву частину рівності:

$$a - 3 - (4a + 7) = a - 3 - 4a - 7 = -3a - 10.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. \bullet

Приклад 5. Довести тотожність $15 = (27 - 5a) - (12 - 3a - 2a)$.

\bullet Перетворюватимемо праву частину рівності:

$$(27 - 5a) - (12 - 3a - 2a) = 27 - 5a - 12 + 3a + 2a = 15.$$

Спростіть вираз:

72. а) $2(3c + 5) + 4(3 + 5c) + 4 + 2c$; б) $0,2(x - 1) - 0,4(5 - 2x) - 2,3$;
в) $-(4x + y + 3z) + 3y - 2(x - 3z)$; г) $1\frac{1}{3}(2a - 7b) - \frac{2}{3}(3b + a) + 2a$;
д) $4(2(x + 2) - 4x) + 2(x + 1)$; е) $5(m + 3(n - 1) - 1) - 5m$.
73. а) $-(3a - 6) + 3(2 - 2a) + 15a$; б) $0,9(a - 3b) - 0,2(5b - 3a) - 1,7b$;
в) $4(5n - 2(n - 1)) + 10$; г) $\frac{2}{9} + \frac{2}{9}(2(x - y) - 4x) + \frac{2}{3}x$.

Доведіть тотожність:

74. а) $2(a + b + c) - (a + b - c) - (a - b + c) = 2(b + c)$;
б) $28 + 2(2(2(b - 2) - 2) - 2) = 8b$.
75. а) $2(a - b - 1) - (a + b - 1) - (a - b + 1) = -2(b + 1)$;
б) $1 - x - (1 - (1 - (1 - x))) = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

76. а) $2(3x - 1) - 3(2 - x) = 1$; б) $0,2(y - 2(y - 1) + 5) - 2y + 3 = 0$.
77. а) $-3(1 - y) + 3(1 - 2y) = 9$; б) $2((x - 2) - 2(x - 1)) + 4x = 1$.
78. Перший лижник пробіг a м, другий — на b м менше, ніж перший, а третій — 1200 м. На скільки метрів менше пробіг другий лижник, ніж перший і третій разом? Запишіть результат у вигляді виразу.
79. На першій полиці є x книжок, а на другій — удвічі більше, ніж на першій. З першої полиці забрали 10 книжок, а на другу поставили 3 книжки. Якою стала загальна кількість книжок на полицях? Запишіть результат у вигляді виразу.

Рівень В



80. Нехай m і n — деякі натуральні числа. Доведіть, що:
а) різниця чисел $11m + 3n$ і $7m + 7n$ ділиться на 4;
б) сума чисел $10m + 3n + 2$ і $2m - 7n + 6$ ділиться на 4.
81. Доведіть, що сума трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.
82. Доведіть, що сума чотирьох послідовних цілих чисел не ділиться на 4.
83. Доведіть: якщо два цілі числа при діленні на 4 дають в остачі 2, то сума і різниця цих чисел діляться на 4.
84. Двоцифрове число, яке має a десятків і b одиниць, позначають через \overline{ab} .
Отже, $\overline{ab} = 10a + b$. Доведіть, що сума $\overline{ab} + \overline{ba}$ ділиться на 11.
85. Доведіть, що різниця числа \overline{abc} і суми його цифр ділиться на 9.
86. Доведіть: якщо два цілі числа при діленні на 3 дають рівні остачі, то різниця цих чисел ділиться на 3.

Вправи для повторення

87. Обчисліть:

а) $15^2 - 6^3$;

б) $(1,2^2 - 1,84)^3$;

в) $(2 - \frac{3}{7})^2 - (\frac{6}{7})^2$.

88. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x - 7)(x + 9) = 0$;

б) $|x| = 5$;

в) $|x + 5| = -2$.

89. Український літак АН-225 («Мрія») — найбільший та найпотужніший у світі транспортний літак — увійшов до Книги рекордів Гіннеса, установивши ряд рекордів. Один з них — перевезення найбільшого в історії авіації моновантажу (генератора), маса якого дорівнює 174 т і становить 69,6 % маси літака. Знайдіть масу незавантаженого літака.

90*. Чоловік приїхав поїздом на станцію о 7 год 20 хв і пішки вирушив у село, розташоване в кількох кілометрах від станції. Ідучи зі сталою швидкістю, чоловік розрахував, що приїде в село о 8 год 44 хв. Однак о 7 год 44 хв він сів у попутний автомобіль і прибув у село на 55 хв раніше. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 55 км/год більша від швидкості чоловіка.

91. Рік тому пакет акцій фірми коштував 8000 грн, а сьогодні — 8400 грн. На скільки відсотків зросла вартість пакету акцій фірми за цей період?

92. Використовуючи тричі цифру 3, знаки дій і за потреби дужки, складіть числовий вираз, значення якого дорівнює: а) 18; б) 9; в) 4; г) 81; д) 0.

Поміркуйте

93. Скільки можна виготовити різних намист, маючи 12 білих і 2 чорні перлини?

Цікаво-знати

Записуючи вирази, рівняння, нерівності, ми користуємося математичними символами «+», «-», «=», «<», « a^2 » та багатьма іншими. Така єдина система умовних знаків, якою ми користуємося зараз, складалася в алгебрі поступово.

Ще у III ст. давньогрецький математик Діофант замість слова «рівний» використовував окремих знак — букву *i* — першу букву слова *isos*, тобто *рівний*. Подібні скорочення використовували й інші математики, проте запропоновані ними символи не були загальноновживаними.

Створення сучасної символіки відбулось у XIV–XVIII ст. Значну роль у цьому процесі відіграв французький математик **Франсуа Вієт**, який уперше за допомогою символів почав записувати рівняння.

Юрист за освітою, Ф. Вієт був радником французьких королів Генріха III і Генріха IV, славився як талановитий дешифрувальник. Під час війни з Іспанією Ф. Вієт знайшов ключ до дуже важливого шифру. Розшифрування французами секретних повідомлень іспанців спричинило те, що Іспанія раз у раз почала зазнавати поразок. За це іспанська інквізиція засудила Ф. Вієта до спалення на вогнищі, але, на щастя, здійснити цього не вдалося.

Незважаючи на велику службову завантаженість, Ф. Вієт написав багато математичних праць, головною з яких є «Вступ до мистецтва аналізу» (1591).

Найважливішим результатом наукової діяльності Ф. Вієта було те, що завдяки його працям алгебра стала наукою про алгебраїчні рівняння, яка ґрунтується на використанні символів (букв).



Франсуа Вієт
(1540 – 1603),

французький математик.

Першим увів єдину,
попередньо проведену систему
алгебраїчних символів

Запитання і вправи для повторення § 1

1. З чого утворюють вираз зі змінними?
 2. Що називають значенням виразу зі змінними?
 3. Які вирази називають цілими?
 4. Які два вирази називають тотожно рівними?
 5. Що таке тотожне перетворення виразу?
 6. Що називають тотожністю?
 7. Як доводять тотожність?
94. Запишіть у вигляді виразу:
- | | |
|---|-------------------------------------|
| а) різницю чисел $2,5$ і a ; | б) куб числа c ; |
| в) подвоєну суму чисел a і b ; | г) суму квадратів чисел m і n ; |
| д) різницю числа a і добутку чисел b та c . | |
95. Автомобіль проїхав S км зі швидкістю 75 км/год. Скільки часу автомобіль був у дорозі? Запишіть результат у вигляді виразу.

109. Три екскаватори вирили траншею. Перший екскаватор вирив x м траншеї, або $\frac{2}{9}$ довжини всієї траншеї, другий — на 20 м більше, ніж перший. Скільки метрів траншеї вирив третій екскаватор? Запишіть результат у вигляді виразу.
110. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 4 дають в остачі: 1; 3.
- 111*. Деякі три цілі числа при діленні на 3 дають різні остачі. Доведіть, що сума цих чисел ділиться на 3.
112. Знайдіть усі цифри a і b , для яких число $\overline{7ab}$ ділиться на 25.

Завдання для самоперевірки № 1

Рівень 1

- Який із записів є виразом зі змінними?
а) $2,5 : 5$; б) $3x = 9y$; в) $y > 3$; г) $2a + 3ab$.
- Книжка коштує a грн, а зошит — b грн. Запишіть у вигляді виразу вартість книжки і зошита разом.
а) ab грн; б) $(a + b)$ грн; в) $(a - b)$ грн; г) $(b - a)$ грн.
- Чому дорівнює значення виразу $2x - 4$, якщо $x = -3$?
а) 10; б) -10 ; в) 2; г) -2 .
- Укажіть вираз, тотожно рівний виразу $3y + 5 - 7y$:
а) y ; б) $5 + 4y$; в) $5 - 4y$; г) $3y - 2y$.
- Спростіть вираз $4(5a - 3b) - (-b + 2a)$ і вкажіть правильну відповідь:
а) $18a + 11b$; б) $22a + 11b$; в) $18a - 11b$; г) $22a - 13b$.

Рівень 2

- Кілограм цукерок коштує a грн, а кілограм печива — на b грн менше. Запишіть у вигляді виразу вартість 1 кг печива й 1 кг цукерок разом.
- Спростіть вираз $15a - 0,4(5a - 3) + 7$.
- Спростіть вираз $5(-4x + 0,6) + 17,5x - \frac{1}{4}$ і знайдіть його значення, якщо $x = 0,8$.
- Доведіть тотожність $3c - (5 - 11c) - 6c + 5 = 8c$.

Рівень 3

- Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки: $1,5(2a - 4b) - (2 - 3(2b + a))$.
- Знайдіть значення виразу $25x - 4(5x - 3y) - 2(5 + 3x - y)$, якщо $x = -7,6$, $y = 0,76$.
- У першій книжці є a сторінок, у другій — на b сторінок менше, ніж у першій, а у третій — удвічі більше сторінок, ніж у другій. Запишіть у вигляді виразу кількість сторінок у трьох книжках разом.

13. Доведіть, що вирази $0,3(a-3) - 0,5(a-1)$ і $0,2(a-6) - 0,4(a-2)$ є тожно рівними.

Рівень 4

14. Знайдіть значення виразу $\frac{a + \frac{a}{7} + \frac{a}{49} + \frac{a}{343}}{6 + \frac{6}{7} + \frac{6}{49} + \frac{6}{343}} : \left(-3\frac{8}{9}\right)$, якщо $a = 5$.
15. На першій полиці стоїть a книжок, на другій — утричі більше, ніж на першій, а на третій — на 17 книжок менше, ніж на першій і другій полицях разом. Запишіть у вигляді виразу кількість книжок на трьох полицях разом.
16. Натуральне число a при діленні на 5 дає в остачі 4, а натуральне число b при діленні на 4 дає в остачі 2. Доведіть, що число $4a + 5b$ не кратне 10.
17. Доведіть, що сума трицифрового числа і подвоєної суми його цифр ділиться на 3.

§ 2. ОДНОЧЛЕНИ

3. Степінь з натуральним показником

Нагадаємо, що добуток двох або трьох однакових множників, кожен з яких дорівнює a , — це відповідно квадрат або куб числа a . Наприклад:

$$5 \cdot 5 = 5^2; \quad 5^2 \text{ — квадрат числа } 5;$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3; \quad 5^3 \text{ — куб числа } 5.$$

Квадрат числа 5 називають ще другим степенем цього числа, а куб — третім степенем.

Відповідно добуток $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ позначають 5^4 і називають четвертим степенем числа 5. Читають: «п'ять у четвертому степені». У виразі 5^4 число 5 називають *основою степеня*, число 4 — *показником степеня*, а весь вираз 5^4 називають *степенем*.

Означення

Степенем числа a з натуральним показником n , більшим від 1, називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a . Степенем числа a з показником 1 називають саме число a .

Степінь з основою a й показником n записують так: a^n , читають: « a в степені n », або « n -й степінь числа a ».

Отже, за означенням

$$a^n = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ разів}}, \text{ якщо } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

З'ясуємо знак степеня з натуральним показником.

1) $a = 0$, тоді $0^1 = 0$, $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, ... — будь-який натуральний степінь числа 0 дорівнює 0.

2) $a > 0$, тоді $a^1 = a > 0$, $a^2 = aa > 0$, ... — будь-який натуральний степінь додатного числа є число додатне.

3) $a < 0$, тоді $a^1 = a < 0$, $a^2 = aa > 0$, $a^3 = aaa < 0$, $a^4 = aaaa > 0$, Степінь від'ємного числа з парним показником є число додатне, оскільки добуток парного числа від'ємних чисел додатний. Степінь від'ємного числа з непарним показником є число від'ємне, оскільки добуток непарного числа від'ємних чисел від'ємний.

Підносити числа до степеня з натуральним показником можна за допомогою калькулятора. Обчислити, наприклад, значення $3,5^6$ можна за схемою:

3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	=
-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

або за більш зручною схемою:

3,5	×	=	=	=	=	=
-----	---	---	---	---	---	---

Отримаємо значення степеня: 1838,265625.

Піднесення до степеня — дія третього ступеня. Нагадаємо: якщо вираз без дужок містить дії різних ступенів, то спочатку виконують дії вищого ступеня, відтак — нижчого. Так, щоб знайти значення виразу $2 \cdot 3^2 - 64$, дії потрібно виконувати в такій послідовності: 1) піднесення до степеня; 2) множення; 3) віднімання.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Обчислити: $4 \cdot (-5)^3 + 8 \cdot 0,5$.

• Виконуючи обчислення, можна:

а) записувати кожну дію окремо:

$$1) (-5)^3 = -125;$$

$$2) 4 \cdot (-125) = -500;$$

$$3) 8 \cdot 0,5 = 4;$$

$$4) -500 + 4 = -496;$$

б) записувати обчислення в рядок:

$$4 \cdot (-5)^3 + 8 \cdot 0,5 = 4 \cdot (-125) + 4 = -500 + 4 = -496.$$

Відповідь. -496. •

Усно

113. Прочитайте вирази, назвіть основи й показники степенів:

$$a^{12}; (-3)^4; (-0,05)^{20}; m^9; 3^m; \left(\frac{1}{3}\right)^3; \left(-\frac{2}{5}\right)^7.$$

114. Обчисліть: 1^7 ; 2^4 ; $(-2)^4$; 3^3 ; $(-3)^3$; $(-5)^2$; 4^3 ; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $0,1^2$.

115. Значення яких степенів є додатними; від'ємними:

$$(-7)^4; (-11)^3; 15^6; (-21)^2; 3^3; 17^{31}; (-1,5)^{20}; (-0,05)^{11}?$$

Рівень А



Запишіть добуток у вигляді степеня:

116. а) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$;

б) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{10 \text{ разів}}$;

в) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

г) $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ разів;

д) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$;

е) $(x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y)$.

117. а) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$;

б) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

в) $\underbrace{(-1,5) \cdot (-1,5) \cdot \dots \cdot (-1,5)}_{12 \text{ разів}}$;

г) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$.

118. Запишіть степені у вигляді добутку:

а) 6^4 ; $(-7)^6$; $1,2^5$;

б) a^5 ; $(2x)^3$; $(bc)^4$.

Знайдіть значення степеня:

119. а) 12^2 ;

б) 4^4 ;

в) $(-0,7)^3$;

г) $(-1,5)^4$;

д) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$;

е) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$;

є) $\left(2\frac{1}{3}\right)^4$;

ж) $(-0,02)^3$.

120. а) 2^5 ;

б) $(-3)^4$;

в) $(-1)^5$;

г) $0,4^3$;

д) $1,1^3$;

е) $0,04^3$;

є) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$;

ж) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4$.

Обчисліть:

121. а) $6 \cdot (-2)^4$;

б) $6 \cdot (-2^4)$;

в) $5 \cdot (-3)^3$;

г) $5 \cdot (-3^3)$;

д) $5^3 - 5^2$;

е) $(-6 \cdot 0,5)^5$;

є) $0,1^3 - 0,1^2$;

ж) $(15 - 16)^{10}$.

122. а) $(3 - 7)^4$;

б) $2 \cdot (-7^3)$;

в) $2^6 + (-3)^3$;

г) $(-4 + 3)^9$.

123. Знайдіть значення виразів:

а) a^2 ; $(-a)^2$; $-a^2$, якщо $a = 3$;

б) a^3 ; $(-a)^3$; $-a^3$, якщо $a = 10$.

124. Знайдіть значення виразу:

а) $2a^3 + 1$, якщо $a = -2$; $a = 0$; $a = 2$;

б) $(x + 1)^4$, якщо $x = -2$; $x = 2$.

Рівень Б



Заповніть таблицю:

125.	n	1	2	3	4	5
	n^4					
	4^n					

126.	n	1	2	3	4	5
	n^3					
	3^n					

Порівняйте значення виразів:

127. а) $(5 \cdot 2)^2$ і $5^2 \cdot 2^2$;

б) $(2 + 3)^3$ і $2^3 + 3^3$;

в) $7^4 - 6^4$ і 5^4 ;

г) $5^3 + 21^3$ і 26^3 .

128. а) $(7 - 5)^2$ і $7^2 - 5^2$;

б) $(10 : 2)^3$ і $10^3 : 2^3$;

в) $14^2 + 19^2$ і 33^2 ;

г) $12^4 - 3^5$ і $12^3 + 3^6$.

Знайдіть значення виразу:

129. $b^4 + b^3 + b^2 + b + 1$, якщо $b = -2$; $b = -1$; $b = 0$; $b = 1$; $b = 2$.

130. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x$, якщо $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.

Подайте у вигляді квадрата або куба числа:

131. 27; 144; -125; 216; 0,125; 0,001; $\frac{25}{81}$; $6\frac{1}{4}$; $-3\frac{3}{8}$.

132. 64; 1000; -8; 6,25; 0,008; $-\frac{27}{125}$; $1\frac{11}{25}$.

133. Доведіть, що вираз набуває лише додатних значень:

а) $a^2 + 1$; б) $a^{10} + 5$; в) $(a - 2)^2 + 2$; г) $(a + 4)^4 + 0,5$.



134. Знайдіть значення виразу, якщо $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$:

а) $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{99} + a^{100}$ (ця сума має 100 доданків, кожен з яких є степенем числа a ; показники степенів — усі натуральні числа від 1 до 100 включно);

б) $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{98} + a^{99}$; в) $aa^2a^3 \dots a^{99}a^{100}$; г) $aa^2a^3 \dots a^{98}a^{99}$.

135. а) Доведіть, що вирази $x^2 + (x + 1)^2$ і $x^4 + |x + 1|$ набувають лише додатних значень.

б) Розв'яжіть рівняння: $x^2 + (x + 1)^2 = 0$; $x^4 + |x + 1| = -1$.

136. Знайдіть останню цифру числа 987^{987} .



137. Розв'яжіть рівняння:

а) $5x - 3 = 3x + 17$;

б) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$.

138. Футбольна команда у 15 матчах набрала 23 очка, програвши 6 матчів. У скількох матчах команда здобула перемогу і скільки матчів зіграла внічию? (За перемогу команді нараховують 3 очка, за нічию — 1 очко, за поразку — 0 очок.)

139. Середнє арифметичне трьох чисел дорівнює -8 . Перше число на 5 більше від другого, а друге — на 1 менше від третього. Знайдіть ці числа.



140. На дереві сидять 15 мавп так, що попарні відстані між ними є різними. Кожна мавпа дивиться на найближчу до себе мавпу. Доведіть, що знайдуться дві мавпи, які дивляться одна на одну.

4. Властивості степеня з натуральним показником

1. Множення степенів з однаковими основами.

Розглянемо добутки двох степенів з основою a . Урахувавши, що $a^1 = a$, матимемо:

$$a^1 a^1 = aa = a^2 = a^{1+1}; \quad a^2 a^1 = (aa)a = aaa = a^3 = a^{2+1}.$$

Отже, $a^1 a^1 = a^{1+1}$, $a^2 a^1 = a^{2+1}$. У цих прикладах добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією ж основою і показником, який

дорівнює сумі показників степенів. Таку властивість має добуток будь-яких степенів з однаковими основами.

Властивість 1

Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

• **Доведення.** Ураховавши означення степеня, матимемо:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa\dots a)}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{(aa\dots a)}_{n \text{ разів}} = \underbrace{aa\dots a}_{m+n \text{ разів}} = a^{m+n}. \bullet$$

Із властивості 1, яку ще називають *основною властивістю степеня*, випливає *правило множення степенів*:

Щоб перемножити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів додати.

Наприклад:

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5; \quad 2^4 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2^1 = 2^{4+1} = 2^5; \quad b^7 \cdot b^8 = b^{7+8} = b^{15}.$$

Правило множення степенів поширюється на добуток трьох і більше степенів. Наприклад:

$$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{2+4+6} = 5^{12}; \quad b^5 \cdot b^3 \cdot b^7 \cdot b = b^{5+3+7+1} = b^{16}.$$

2. Ділення степенів з однаковими основами.

Розглянемо рівність $a^2 a^3 = a^5$, де $a \neq 0$. З цієї рівності за означенням частки маємо: $a^5 : a^3 = a^2$. Рівність $a^5 : a^3 = a^2$ можна переписати так:

$$a^5 : a^3 = a^{5-3}.$$

У цьому прикладі частка степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією ж основою й показником, який дорівнює різниці показника степеня діленого й показника степеня дільника. Сформулюємо й доведемо відповідну властивість у загальному випадку.

Властивість 2

Для будь-якого числа $a \neq 0$ та будь-яких натуральних чисел m і n , де $m > n$, справджується рівність

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

• **Доведення.** Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n} \cdot a^n = a^m$, то за означенням частки маємо: $a^m : a^n = a^{m-n}$. •

З доведеної властивості випливає *правило ділення степенів*:

Щоб поділити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника.

Наприклад: $3^7 : 3^2 = 3^{7-2} = 3^5$; $x^4 : x = x^4 : x^1 = x^{4-1} = x^3$.

3. Піднесення степеня до степеня.

Піднесемо степінь a^2 до куба:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3}.$$

Отже, $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3}$. Із прикладу видно: щоб піднести квадрат числа до куба, потрібно залишити ту ж основу й узяти показник, який дорівнює добутку показників. Сформулюємо й доведемо відповідну властивість у загальному випадку.

Властивість 3

Для будь-якого числа a та будь-яких натуральних чисел m і n справджується рівність

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

• Доведення.

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \dots \cdot a^m}_{n \text{ разів}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ разів}}} = a^{mn}. \bullet$$

Із властивості 3 випливає *правило піднесення степеня до степеня*:

Щоб піднести степінь до степеня, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів перемножити.

Наприклад: $(4^3)^5 = 4^{3 \cdot 5} = 4^{15}$; $(b^6)^4 = b^{6 \cdot 4} = b^{24}$.

4. Піднесення добутку до степеня.

Піднесемо добуток ab до куба:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3b^3$. Із прикладу видно: щоб піднести до куба добуток, потрібно піднести до куба кожний множник і результати перемножити. Сформулюємо й доведемо відповідну властивість у загальному випадку.

Властивість 4

Для будь-яких чисел a та b і будь-якого натурального числа n справджується рівність

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

• Доведення.

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ разів}} = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{bb \dots b}_{n \text{ разів}} = a^n b^n. \bullet$$

Маємо таке правило:

Щоб піднести до степеня добуток, досить піднести до цього степеня кожний множник і результати перемножити.

Це правило поширюється на добуток трьох і більше множників. Наприклад:

$$(5ab)^3 = 5^3 a^3 b^3 = 125a^3 b^3; \quad (abxy)^n = a^n b^n x^n y^n.$$

Зауваження. Доведені тотожності $a^m a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, які виражають властивості степеня, дозволяють не тільки замінювати вирази, що стоять у їхніх лівих частинах, виразами, що стоять у правих частинах, а й навпаки:

$$a^{m+n} = a^m a^n; \quad a^{m-n} = a^m : a^n; \quad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m; \quad a^n b^n = (ab)^n.$$

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Спростити вираз $(a^2 a)^3 \cdot (a^3 a^2)^2$.

$$\bullet (a^2 a)^3 \cdot (a^3 a^2)^2 = (a^3)^3 \cdot (a^5)^2 = a^9 a^{10} = a^{19}. \bullet$$

Вправа 2. Обчислити:

а) $0,3^6 : 0,3^4 + 0,1^4 : 0,1$;

б) $2,5^5 \cdot 2^6 \cdot 0,4^5$.

• а) $0,3^6 : 0,3^4 + 0,1^4 : 0,1 = 0,3^2 + 0,1^3 = 0,09 + 0,001 = 0,091$;

б) $2,5^5 \cdot 2^6 \cdot 0,4^5 = (2,5^5 \cdot 0,4^5) \cdot 2^6 = (2,5 \cdot 0,4)^5 \cdot 2^6 = 1^5 \cdot 2^6 = 64$. •

Вправа 3. Подати 4^{18} у вигляді степеня з основою 4^2 ; 4^3 ; 4^6 ; 4^9 .

• $4^{18} = 4^{2 \cdot 9} = (4^2)^9$; $4^{18} = (4^3)^6$; $4^{18} = (4^6)^3$; $4^{18} = (4^9)^2$. •

Вправа 4. Подати у вигляді степеня добуток $a^6 b^6$.

• $a^6 b^6 = (ab)^6$. •

Усно

141. Подайте у вигляді степеня добуток:

а) $b^4 b^3$; $c^3 c$; $7^2 \cdot 7^5$; $3^{10} \cdot 3$;

б) $a^2 a^3 a^4$; $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$.

142. Подайте у вигляді степеня частки:

а) $a^6 : a^2$; $b^8 : b^3$;

б) $7^{20} : 7^{17}$; $11^8 : 11$.

143. Піднесіть до степеня:

а) $(m^3)^4$; $(n^{10})^2$; $(b^{15})^4$;

б) $(pq)^2$; $(2b)^3$; $(abc)^4$.

Рівень А



Подайте у вигляді степеня добуток:

144. а) $a^5 a^2$;

б) $b^4 b^6$;

в) yy^7 ;

г) $x^{25} x^{73}$;

д) $2^8 \cdot 2^{12}$;

е) $0,3^{15} \cdot 0,3$;

є) $5^3 \cdot 5 \cdot 5^4$;

ж) $3^4 \cdot 3 \cdot 3^6 \cdot 3$.

160. а) Подайте z^{20} у вигляді степеня з основою z^2 ; z^4 ; z^5 ; z^{10} .

б) Подайте 2^{20} у вигляді степеня з основою 4; 16; 32.

161. а) Подайте c^{12} у вигляді степеня з основою c^2 ; c^3 ; c^4 ; c^6 .

б) Подайте 3^{12} у вигляді степеня з основою 9; 27; 81.

162. Подайте у вигляді степеня з основою a :

а) $a^m a^2$;

б) aa^k ;

в) $(a^m)^2$;

г) $(a^3)^k$.

Спростіть вираз:

163. а) $(a^3 a^4)^5$;

б) $(a^7 : a)^3$;

в) $(a^2)^3 \cdot (a^4)^4$;

г) $(a^5)^5 : (aa^4)^2$.

164. а) $(a^5 a^6)^2$;

б) $(a^8 : a^5)^5$;

в) $(a^4)^2 \cdot (a^2)^4$;

г) $(a^6)^3 : (a^3)^2$.

Рівень В



165. Подайте у вигляді степеня з основою a :

а) $(a^m \cdot a^3)^n$;

б) $(a^k \cdot a^k)^n$;

в) $(a^{n+2} : a)^k$;

г) $(a^2)^m \cdot (a^3)^k$.

166. Доведіть, що куб натурального числа, кратного 3, ділиться на 27.

167. Обчисліть: $\left(1\frac{1}{3}\right)^8 : \left(1\frac{7}{9}\right)^3 - \left(1\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \left(-\frac{27}{64}\right)^3$.

168. Доведіть, що значення виразу $43^{43} \cdot 42^{43} - 33^{33} \cdot 37^{33}$ ділиться на 5.

Вправи для повторення

169. Спростіть вираз:

а) $2x - 3 - (3x + 1)$;

б) $6a + 3 - 2(a - 2)$;

в) $-2(b - 1) + 3(5 - 2b) - 17$;

г) $5(-3c + 5) + 4(3 - c) - 4 + 19c$.

170. Знайдіть значення виразу $10xy + 2x - 5y$, якщо $x = 5$, $xy = 1$.

171. У коридорі завдовжки 36 м 40 см і завширшки 3 м 15 см хочуть викласти долівку однаковими плитками квадратної форми, не розрізаючи їх. Який найбільший можливий розмір такої плитки? Скільки потрібно плиток найбільшого розміру, щоб викласти ними долівку?

172. З басейну через дві труби випустили 450 м^3 води. Через першу трубу витекло води в 1,25 разу більше, ніж через другу. Скільки кубометрів води витекло через першу трубу?

Поміркуйте

173. Табло показує четвірку чисел. Через кожну хвилину числа a , b , c і d замінюються відповідно числами $a + b$, $b + c$, $c + d$, $d + a$. Чи могло табло в певні різні моменти часу показувати четвірки 1, 3, 5, 7 та 128, 256, 512, 358?

5. Одночлен і його стандартний вигляд

1. Одночлени. Розглянемо дві групи виразів:

$$a, b^3, 5, 3^2, 9ab^2, -2x^4y^3, \frac{3}{7}m^2n;$$

$$3 + 2a, a - b, 5 + x^2.$$

Яка особливість виразів першої групи? Чим вони відрізняються від виразів другої групи?

Вирази першої групи — це змінні, числа, їхні степені й добутки. Такі вирази називають *одночленами*.

Означення Одночленом називають добуток чисел, змінних та їхніх степенів.

Вирази другої групи не є одночленами, бо містять дії додавання або віднімання.

Розглянемо одночлен $-4a^2b^3$. Він містить тільки один числовий множник, який стоїть на першому місці, і степені різних змінних. Такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Означення Одночленом стандартного вигляду називають такий одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці, і степені різних змінних.

Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають *коефіцієнтом* одночлена. Коефіцієнт одночлена $-4a^2b^3$ дорівнює -4 . Вважають, що коефіцієнти одночленів a^3 і $-bc$ відповідно дорівнюють 1 і -1 , бо $a^3 = 1 \cdot a^3$ і $-bc = -1 \cdot bc$.

Одночлен $5a^3b^2a^4$ не є одночленом стандартного вигляду, бо містить два степені з основою a . Помноживши a^3 на a^4 , цей одночлен можна записати у вигляді одночлена стандартного вигляду: $5a^3b^2a^4 = 5(a^3a^4)b^2 = 5a^7b^2$.

2. Множення одночленів. Перемножимо одночлени $-3a^2b$ і $4ab^3$. Використовуючи властивості дії множення і властивості степенів, матимемо:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Отже, добутком одночленів $-3a^2b$ і $4ab^3$ є одночлен $-12a^3b^4$. Взагалі, добутком будь-яких одночленів є одночлен.

Рівень Б



Спростіть вираз:

186. а) $1,5a^4b^4 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^4b^4\right)$;

б) $(3a^2b)^3 \cdot 0,01b^2$;

в) $0,8xy^3 \cdot 2\frac{1}{2}x^3y^5 \cdot (-0,5x)$;

г) $(-4a^2b^3)^2 \cdot (-ab^3)^2$;

д) $\left(\frac{1}{3}mn^2\right)^4 \cdot (3m^3)^2 \cdot (-4,5)$;

е) $4,4(a^2bc)^3 \cdot \left(-\frac{1}{2}b^2c\right)^3 \cdot ac^5$;

187. а) $15m^3n \cdot \left(-1\frac{2}{3}mn^2\right)$;

б) $-\frac{1}{7}p^3q \cdot 2,1pq^2 \cdot \frac{1}{3}p$;

в) $(-a^2b)^3 \cdot (-3a^3b)^2$;

г) $\left(\frac{2}{3}xy^2z\right)^2 \cdot \left(-1\frac{1}{2}x^2z\right)^3 \cdot xyz$.

188. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону збільшити утричі?

189. Як зміниться об'єм куба, якщо його ребро збільшити удвічі?

190. Подайте одночлен $64a^6b^{18}$ у вигляді:

а) добутку двох одночленів стандартного вигляду;

б) добутку трьох одночленів стандартного вигляду;

в) добутку двох одночленів, одним з яких є $-4a^4b^6$;

г) квадрата одночлена стандартного вигляду;

д) куба одночлена стандартного вигляду.

191. Подайте одночлен $16x^{12}y^8$ у вигляді:

а) добутку трьох одночленів стандартного вигляду;

б) добутку двох одночленів, одним з яких є $-2x^3y^7$;

в) квадрата одночлена стандартного вигляду;

г) четвертого степеня одночлена стандартного вигляду.

192. Для деяких значень змінних значення виразу m^2n^3 дорівнює 2. Знайдіть для тих же значень змінних значення виразу:

а) $6m^2n^3$;

б) m^4n^6 ;

в) $4m^8n^{12}$;

г) $-3m^6n^9$.

Знайдіть значення виразу:

193. а) $(2a^2b)^2 \cdot ab^3$, якщо $a = 2$; $b = 5$;

б) $(xy^2z)^3 \cdot xzy^8$, якщо $x = \frac{1}{7}$; $y = -1$; $z = 7$;

в) $(a^2bc^2)^2 \cdot abc \cdot b^2$, якщо $a = 1\frac{1}{3}$; $b = -0,5$; $c = 3$.

194. а) $(-mn^2)^3 \cdot 10m^4n$, якщо $m = 4$; $n = 0,25$;

б) $(2abc^4)^2 \cdot 0,25(ab)^6$, якщо $a = 1\frac{3}{7}$; $b = 14$; $c = -0,1$.

Рівень В



195. Подайте одночлен у стандартному вигляді:

а) $4((x^2)^3)^4 \cdot (-2(x^4)^3)^2$; б) $((x^4)^n)^3 \cdot 2((x^2)^n)^5$;
 в) $(a^{n+1} \cdot b^{2n})^2 \cdot 2a^{2n} \cdot (2b)^2$; г) $((-x)^n)^3 \cdot ((-x)^{n+1})^5$.

196. Знайдіть значення виразу:

а) $(-4xy^2)^{2n} \cdot (4x^3y^2)^{2n}$, якщо $x = -\frac{1}{4}$; $y = 2$; $n = 80$;
 б) $(5^k a^{k+1} b^{k+2})^2 \cdot (5ab)^k$, якщо $a = 0,1$; $b = 2$; $k = 51$.

197. Мило має форму прямокутного паралелепіпеда. За тиждень користування всі його розміри зменшилися удвічі. У скільки разів зменшився об'єм мила?

Вправи для повторення

198. Розв'яжіть рівняння:

а) $2(x - 1) + 3(2 - x) = 2$; б) $4(x + 3) - 3(x - 3) = 20$.

199. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

а) $7c - 5 + (3c + 1 - 8c)$; б) $2a + 8 - (3a + 12 - 6a)$;
 в) $(-2b + 4) - (4b - 1) + 6b$; г) $(-3x + 5) - (3 - x) - (2 + 2x)$.

200. Для купівлі нового телевізора сім'я відкладала щомісяця ту саму суму грошей. Після того як через 10 місяців необхідна сума була зібрана, підраховували: якби щомісяця відкладали на 35 грн більше, то зібрати необхідну суму грошей можна було б на 2 місяці раніше. Скільки коштує телевізор?

201. З міста A до міста B вирушив поїзд і йшов зі швидкістю 60 км/год, а через 3 год назустріч йому з міста B вирушив другий поїзд і йшов зі швидкістю 75 км/год. Коли поїзди зустрілися, з'ясувалося, що перший пройшов на 105 км більше, ніж другий. Знайдіть відстань між містами A та B .

Поміркуйте

202. На майданчику хлопці нашого двору грають у футбол. У кожному матчі беруть участь по 5 хлопців у кожній команді. За місяць було зіграно 15 матчів, у яких загалом зіграли 30 хлопців. Доведіть, що серед них є хлопець, який зіграв не більше ніж 5 матчів.

Цікаво знати

Поняття степеня з натуральним показником виникло ще в античні часи у зв'язку з обчисленням площ і об'ємів. Тлумачення степенів a^2 і a^3 було геометричним: a^2 — це площа квадрата зі стороною a , a^3 — об'єм куба з ребром a . Звідси і назви «квадрат» і «куб» для степенів a^2 і a^3 , які використовують досі. Щоправда, така геометрична прив'язка в ті часи послужила гальмом для розвитку алгебри. Степені a^4 («квадрато-квадрат»), a^5 («кубо-квадрат») і т. д. залишалися ніби «поза законом», оскільки не мали відповідного геометричного підґрунтя.

Сучасне позначення степеня з натуральним показником у вигляді a^n увів у XVII ст. французький математик **Рене Декарт** (1596–1650).

Запитання і вправи для повторення § 2

- Що називають степенем числа з натуральним показником?
 - Наведіть приклад степеня з натуральним показником та назвіть його основу й показник.
 - Який знак має степінь з натуральним показником залежно від знака основи?
 - Сформулюйте й доведіть основну властивість степеня.
 - Сформулюйте й доведіть правила множення та ділення степенів з однаковими основами, піднесення добутку до степеня та піднесення степеня до степеня.
 - Наведіть приклади одночленів. З чого складається одночлен?
 - Який одночлен називають одночленом стандартного вигляду? Наведіть приклад такого одночлена.
 - Як знайти степінь одночлена?
- 203.** Знайдіть значення степеня:
- | | | | |
|---------------|-----------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| а) 10^4 ; | б) $(-3)^6$; | в) $(-0,5)^3$; | г) $(-2,4)^3$; |
| д) $1,02^4$; | е) $\left(\frac{2}{3}\right)^5$; | є) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$; | ж) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$. |
- 204.** Обчисліть:
- | | | | |
|-----------------------|-----------------------------|-------------------------|--------------------------------|
| а) $(-4) \cdot 2^4$; | б) $(-4) \cdot (-2^4)$; | в) $5^2 \cdot (-2)^3$; | г) $5^3 \cdot (-6^3)$; |
| д) $(7^2 - 3^2)^2$; | е) $(-4 \cdot 1,5 + 8)^5$; | є) $2^8 + (-2)^5$; | ж) $(-0,125 \cdot 2^3)^{15}$. |
- 205.** Знайдіть значення виразу:
- | |
|---|
| а) $a^4 - 81$, якщо $a = -3$; $a = 0$; $a = 3$; |
| б) $(2x - 3)^3$, якщо $x = -1$; $x = 3$. |

206. а) Подайте у вигляді квадрата число: 64; 169; 1,44; 0,0001; $\frac{49}{121}$; $7\frac{1}{9}$.

б) Подайте у вигляді куба число: 64; 1000; -27; 0,008; $-\frac{125}{216}$; $3\frac{3}{8}$.

Подайте вираз у вигляді степеня:

207. а) $a^3 a^5$; б) $b^9 : b^8$; в) yy^8 ; г) $a^5 aa^4$;
 д) $6^4 \cdot 6^{21}$; е) $(p^2)^5$; є) $(7^5)^4$; ж) $(5^3 : 5)^7$.

208. Подайте степінь 3^{24} у вигляді добутку двох степенів, одним з яких є: 3^2 ; 3^4 ; 3^9 ; 3^{15} .

209. а) Подайте степінь a^{36} у вигляді степеня з основою a^2 ; a^3 ; a^9 ; a^{12} .

б) Подайте степінь 4^{18} у вигляді степеня з основою 2; 16; 8.

210. Піднесіть одночлен до степеня:

а) $(xy)^4$; б) $(6a)^3$; в) $(-3x^2)^4$; г) $(-0,5a^4c^2)^2$.

211. Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь:

а) $-2a^4ba$; б) $0,5b^2 \cdot 2a^3b$; в) $-3x^3 \cdot \frac{1}{3}xy^2$;
 г) $-4a^2 \cdot 7a^5b \cdot 4b^3$; д) $2,5xz \cdot (-4x^3z^3) \cdot x^2z$; е) $(3a^3b^4c^5d^4)^3$;
 є) $1,2a^2b^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}a^3b^2\right)$; ж) $7\frac{1}{2}x^2y^4 \cdot \left(-\frac{1}{3}xy\right)$; з) $(-4m^2n^5)^3 \cdot (-2mn^3)^2$.

212. Подайте одночлен $49a^4b^{12}$ у вигляді:

а) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
 б) добутку двох одночленів, одним з яких є $-7a^3b^7$;
 в) квадрата одночлена стандартного вигляду.

213. Знайдіть значення виразу:

а) $(3x^2y)^3 \cdot y^3$, якщо $x = 2$; $y = 0,5$;

б) $(a^2bc)^2 \cdot 5abc^3$, якщо $a = 1\frac{1}{6}$; $b = -4$; $c = \frac{6}{7}$.

214*. Спростіть вираз:

а) $(a^4)^{2n} \cdot (a^4 a^{n+2})^2$; б) $(-2y^k)^8 \cdot (-y^3)^5$;
 в) $2^{2n} \cdot 3^n \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n$; г) $(2 \cdot (-1)^n)^3 \cdot (2 \cdot (-1)^{n+2})^5$.

215*. Знайдіть останню цифру числа 3^{81} .

216*. Що більше: 80^{20} чи 9^{40} ?

217*. Розв'яжіть рівняння:

а) $(2x)^2 + (256x)^8 = 0$; б) $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 0$; в) $x^6 + |3x| = 0$.

Завдання для самоперевірки № 2

Рівень 1

- Яка з рівностей є правильною:
а) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot 3$; б) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5^3$; в) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$?
- Укажіть правильну рівність:
а) $2^5 = 10$; б) $2^5 = 32$; в) $2^5 = 25$; г) $2^5 = 16$.
- Укажіть правильну рівність:
а) $2^4 \cdot 2^3 = 2^{12}$; б) $2^4 \cdot 2^3 = 4^{12}$; в) $(3^2)^3 = 6^3$; г) $(3^2)^3 = 3^6$.
- Подайте одночлен $-3x^2x^5$ у стандартному вигляді:
а) $-3yx^2x^5$; б) $-3x^{10}y$; в) $-3x^7y$; г) $-3(xy)^7$.
- Виконайте множення $2a^2b^3 \cdot 3a^4$ й укажіть правильну відповідь:
а) $6a^2b^7$; б) $6a^8b^3$; в) $5a^6b^3$; г) $6a^6b^3$.

Рівень 2

- Установіть відповідність між виразом і записом виразу у вигляді степеня з основою x :
а) $x^5 \cdot x^3$; б) $x^5 : x^3$; в) $(x^5)^3$; г) x^2 ; д) x^8 ; е) x^{15} .
- Обчисліть:
а) $4 \cdot 3^3 - 4^3$; б) $(2^5 - 4^2) \cdot 5$; в) $(3^2 + 1)^3$.
- Подайте одночлен у стандартному вигляді:
а) $2a^4 \cdot 3a$; б) $-0,3ab^3 \cdot 5a^4b^2$; в) $(2ac)^4$.
- Знайдіть значення виразу:
а) $(2xy)^3$, якщо $x = 2$; $y = 0,25$; б) $(a^2b)^2 \cdot ab^2$, якщо $a = 2$; $b = 5$.

Рівень 3

- Запишіть вираз у вигляді степеня:
а) $(6^3 \cdot 6^4)^5 \cdot 6$; б) $(3^5 \cdot 3)^3 \cdot (3^4)^7$; в) $2^8 \cdot 4^4 \cdot 16^2$.
- Спростіть вираз:
а) $3,6x^2y^2 \cdot (-5x^4y^5) \cdot (-2x^2y)$; б) $2\frac{1}{3}a^2c^3 \cdot (3a^2b^4c^3)^3$;
в) $(-m^7n^8)^5 \cdot (-0,2m^3n^5)^4$; г) $\left(-\frac{2}{3}a^3x^4\right) \cdot \left(-1\frac{2}{3}ax^2\right)^2 \cdot \left(-1\frac{1}{2}a^2x\right)^3$.
- Подайте одночлен $64a^{12}b^{18}$ у вигляді:
а) добутку трьох одночленів стандартного вигляду;
б) добутку двох одночленів, одним з яких є $-4a^5b^8$;
в) куба одночлена стандартного вигляду.

13. Знайдіть значення виразу:

а) $(a^4 c^2)^2 \cdot c^4$, якщо $a = 4$; $c = -0,5$;

б) $2(x^2 y z^3)^2 \cdot x^2 y^2$, якщо $x = 2\frac{2}{3}$; $y = -2$; $z = \frac{3}{8}$.

Рівень 4

14. Запишіть вираз у вигляді степеня з основою 2:

а) $2^{2n} \cdot 4^{n+1} \cdot (-16)^2$;

б) $(8 \cdot 2^{n+3})^3 \cdot (4^n \cdot 2^{n+2})^2$.

15. Знайдіть значення виразу:

а) $(8m^3 n^2)^2 \cdot n^2$, якщо $m = 20$; $n = -0,025$;

б) $(3^{k+1} a^k)^2 \cdot (3ab)^k \cdot (b^k)^2$, якщо $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{1}{2}$; $k = 18$.

16. Знайдіть останню цифру числа 4^{45} .

17. Розв'яжіть рівняння:

а) $(4x)^4 + (-8x)^8 = 0$;

б) $x^2 + |2x - 1| = 0$.

§ 3. МНОГОЧЛЕНИ

6. Многочлен. Степінь многочлена

1. Многочлени. Вираз $2a^2 - 3ab - 2b + 5$ є сумою одночленів $2a^2$, $-3ab$, $-2b$ і 5 . Такий вираз називають *многочленом*.

Означення | Многочленом називають суму кількох одночленів.

Одночлени, які складають многочлен, називають *членами* цього многочлена.

Наприклад, членами многочлена $2a^2 - 3ab - 2b + 5$ є $2a^2$, $-3ab$, $-2b$ і 5 .

Многочлен, який складається із двох членів, називають двочленом, многочлен, який складається із трьох членів, — тричленом і т. д. Так,

$a^2 + b$, $2x - 3$ — двочлени;

$a^2 - ab + b^2$, $x + 2y - 1$ — тричлени.

Вважають, що кожний одночлен є многочленом, який складається з одного члена.

2. Подібні члени многочлена. Розглянемо многочлен $4xy - 6 + y - 2xy + 3$. Два його члени $4xy$ та $-2xy$ є подібними доданками, бо відрізняються лише числовими множниками. Члени -6 і 3 не містять змінних. Вони також є подібними доданками. Подібні доданки многочлена називають *подібними членами* многочлена.

Зведемо у многочлені $4xy - 6 + y - 2xy + 3$ його подібні члени:

$$4xy - 6 + y - 2xy + 3 = (4xy - 2xy) + y + (-6 + 3) = 2xy + y - 3.$$

Зведення подібних членів многочлена можна записати так:

$$\underline{4xy} - \underline{6} + y - \underline{2xy} + \underline{3} = 2xy + y - 3.$$

3. Степінь многочлена. Многочлен $2x^2y^2 + y^3 - 2x$ не має подібних членів, і його утворюють одночлени відповідно четвертого, третього і першого степенів. Найбільший із цих степенів називають степенем даного многочлена. Отже, $2x^2y^2 + y^3 - 2x$ — многочлен четвертого степеня.

Означення | Степенем многочлена, який не має подібних членів, називають найбільший зі степенів одночленів, які утворюють даний многочлен.

За цим означенням $2a + 1$ і $3x - 4y + 3$ — многочлени першого степеня; $ab - 3a^2 + b$ — многочлен другого степеня; $-x^2y^4 + x^3 + 2y$ — многочлен шостого степеня.

Якщо деякий многочлен складається лише з одного одночлена, то степінь многочлена дорівнює степеню цього одночлена. Наприклад: $2a^3b$ —

многочлен четвертого степеня, 2 — многочлен нульового степеня, 0 — многочлен, степінь якого не визначений. Останній многочлен називають ще *нуль-многочленом*.

Члени многочлена можна записувати в довільній послідовності. Для многочленів, які містять одну змінну, члени, як правило, упорядковують за спаданням або зростанням показників степенів. Наприклад:

$$5x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x + 2; \quad 2 + 3x - 4x^2 + x^3 + 5x^4.$$

Кожний многочлен є цілим виразом. Однак не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $2(a + 5)$, $(a - b)^2$ — не многочлени, бо вони не є сумами одночленів.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Звести подібні члени многочлена:

а) $2x^2 + 3xy - 4x^2 + 1 - xy$; б) $a^2b - 2aba + 12 + 4a^2 \cdot 2b - 15$.

• а) $\underline{2x^2} + \underline{3xy} - \underline{4x^2} + \underline{1} - \underline{xy} = -2x^2 + 2xy + 1$;

б) $a^2b - 2aba + 12 + 4a^2 \cdot 2b - 15 = \underline{a^2b} - \underline{2a^2b} + \underline{12} + \underline{8a^2b} - \underline{15} = 7a^2b - 3$. •

Усно

218. Які з наведених виразів є многочленами:

а) $3a^3 + bc^2 - ab$; б) $3x + 5$; в) a ;

г) $a^2 + \frac{1}{2}a$; д) $m(2n - k)$; е) $(x - 3y)^3$;

є) $\frac{2a - 3b}{2c}$; ж) $-2k$; з) $4,5?$

219. Назвіть подібні члени многочлена:

а) $4a - 3 - a + 1,5$; б) $4xy + 4x + 4y$;
в) $3n^2 + 4n - 2n^2 + n - 1$; г) $a^2 + ab + b^2 + ba$.

220. Укажіть степінь многочлена:

а) $c^2 + 4c - 2$; б) $x + y + 1$; в) x ;
г) $4y^5 + 5y^8$; д) $bc - 3$; е) $x^2y^2z^3 - 3z^6$.

221. Зведіть подібні члени многочлена:

а) $4a + 3 + a - 2$; б) $2a^2b - 3a^2b$; в) $x + y + 2x - y$.

Рівень А



Зведіть подібні члени многочлена та знайдіть його степінь:

222. а) $3x - 2 + 2x - 5$; б) $1,2a + a + 3,5 - 2a - 4$;
 в) $4m + 3 + n - 3 - n + 2m$; г) $x^2 + x + 2x^2 - 3x + 3$;
 д) $-3a^3 + 5a^2 - 5a^3 - 3a^2 + 7a$; е) $-b^2 \cdot 5b - 3b^3 + 2b \cdot 3b - 2b^2$.
223. а) $5a + 6 - 3a - 4$; б) $10k + 5,5 - 2,5k - 4,5k$;
 в) $2x^2 + 3x + x^2 - 3x - 3 + 2x$; г) $-2b^3 + 3b + 2b^2 - 3b^3 + b$.
224. Розташуйте члени многочлена за спаданням показників степенів:
 а) $5x - 4x^3 + 5 + x^2 - 3x^4$; б) $3a^6 + 5a - 7a^2 - 2a^4 - 2a^7 - 4$.
225. Розташуйте члени многочлена за зростанням показників степенів:
 а) $6b^3 + 2b - 1 + 3b^4 + b^2$; б) $x^5 + 2x^6 - 3x - 3x^4 + 2 + 8x^8$.

Знайдіть значення многочлена:

226. а) $2a^2 + 3a - 2$, якщо $a = 2$;
 б) $3x - x^2 + 1 + 2x^2 - 3x$, якщо $x = -1, 1$;
 в) $5ab - a^2 + 4ab + a^2$, якщо $a = -0,5$; $b = 4$.
227. а) $4x^2 + 9x - 4x + 2$, якщо $x = 2$;
 б) $2bc + 2,5bc - 3 - 5bc$, якщо $b = 1,5$; $c = -4$.

Рівень Б



Зведіть подібні члени многочлена та знайдіть його степінь:

228. а) $4x^2y - 6x^2y - 3 + 0,3x^2y$; б) $1,2abc + \frac{5}{6}a^2b - 0,8abc - 1\frac{1}{3}a^2b$;
 в) $3x^2 \cdot 0,4x - 0,9x^3 + x \cdot 4y - 2xy$; г) $7a^5b - 4b^5a + 8a^5b - 3a^5 - 5ab^5$.
229. а) $-3,5ab - a^2b + 3 + ab + 3a^2b$; б) $-5c^3d - 2c^2dc + 4\frac{3}{7}c^3d - 1$.

Знайдіть значення многочлена:

230. а) $6x^4 - 4x^2 - 8x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 1$, якщо $x = -1, 2$;
 б) $-4a^2b^3 + 7ab^3 - ab^3a + b^2ab - 8ab^3$, якщо $a = -0,5$; $b = 2$.
231. а) $3a^7 - 3a^4 + 6 - 4a^7 + 5a^4 + a^7$, якщо $a = -3$;
 б) $2m^4n^2 + 4m^2n^2m^2 - 8nm^4n + 4m^2n$, якщо $m = -0,5$; $n = 4$.

Запишіть у вигляді многочлена число, яке має:

232. а) a сотень, b десятків і c одиниць; б) m тисяч, n сотень і k одиниць.
 233. а) a десятків і b одиниць; б) a тисяч, b десятків і c одиниць.

Рівень В



234. Чи існують такі цілі значення x , для яких значення многочлена $4x^2 + 2x + 11$ є парним числом?
235. Доведіть, що для цілих значень x значення многочлена $x^5 - 6x^2 + 1$ не дорівнює нулю.
236. Трицифрове число ділиться на 11. Крайні цифри цього числа поміняли місцями. Чи ділиться одержане число на 11?

Вправи для повторення

237. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:
- а) $4a - 3 + (3a + 5 - 2a)$; б) $2x + 12 - (4x + 12 - 3x)$;
 в) $(-3a + 4b) - (2a - 1) + 6b$; г) $(-4x + 4) - (3x - y) - (2 + 2y)$.
238. Кавові зерна у процесі смаження втрачають 12% своєї маси.
- а) Скільки кілограмів смажених зерен вийде із 20 кг свіжих?
 б) Скільки кілограмів свіжих зерен слід взяти, щоб отримати 22 кг смажених?
239. Човен проплив 84 км за 4,5 год, до того ж, протягом 2,5 год він плыв за течією річки і протягом 2 год — проти течії. Яка швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,4 км/год?

Поміркуйте

240. Кенгуру стрибає уздовж прямої. Довжина кожного стрибка дорівнює 1 м. Чи може кенгуру, перебуваючи в деякій точці прямої, за 101 стрибок знову повернутися у цю ж точку?

7. Додавання і віднімання многочленів

1. **Додавання многочленів.** Додамо многочлени $4a^2 - 6a + 5$ і $-2a^2 + 3a + 2$:

$$(4a^2 - 6a + 5) + (-2a^2 + 3a + 2) = \underline{4a^2} - \underline{6a} + 5 - \underline{2a^2} + \underline{3a} + 2 = 2a^2 - 3a + 7.$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, ми записали суму даних многочленів у вигляді многочлена. Отже, сумою многочленів $4a^2 - 6a + 5$ і $-2a^2 + 3a + 2$ є многочлен $2a^2 - 3a + 7$.

У такий же спосіб додають три й більше многочленів. Суму будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

2. Віднімання многочленів. Віднімемо від многочлена $4x^2 - 4x + 7$ многочлен $2x^2 - 3x + 5$:

$$(4x^2 - 4x + 7) - (2x^2 - 3x + 5) = \underline{4x^2} - \underline{4x} + 7 - \underline{2x^2} + \underline{3x} - 5 = 2x^2 - x + 2.$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, ми записали різницю даних многочленів у вигляді многочлена. Отже, різницею многочленів $4x^2 - 4x + 7$ і $2x^2 - 3x + 5$ є многочлен $2x^2 - x + 2$.

Різницю будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Знайти суму многочленів:

а) $-5x^2 + 2xy - 4$ і $4x^2 - 6xy$; б) $2a^2b - 2$; $5a^2b + 2a$ і $-3a^2b + 6a$.

• а) $(-5x^2 + 2xy - 4) + (4x^2 - 6xy) = \underline{-5x^2} + \underline{2xy} - 4 + \underline{4x^2} - \underline{6xy} =$
 $= -x^2 - 4xy - 4.$

б) $(2a^2b - 2) + (5a^2b + 2a) + (-3a^2b + 6a) =$
 $= \underline{2a^2b} - 2 + \underline{5a^2b} + \underline{2a} - \underline{3a^2b} + \underline{6a} = 4a^2b + 8a - 2. \bullet$

Вправа 2. Знайти різницю многочленів $5a^2 - 1 + 4ab$ і $8a^2 - 3ab$.

• $(5a^2 - 1 + 4ab) - (8a^2 - 3ab) = \underline{5a^2} - 1 + \underline{4ab} - \underline{8a^2} + \underline{3ab} = -3a^2 + 7ab - 1. \bullet$

Вправа 3. Розв'язати рівняння $4x^3 - 2x - (4x + 9 + 4x^3) = 0$.

• $4x^3 - 2x - 4x - 9 - 4x^3 = 0$; $-6x - 9 = 0$; $-6x = 9$; $x = -1,5$.

Відповідь. $-1,5. \bullet$

Вправа 4. Довести, що сума трьох послідовних непарних чисел ділиться на 3.

• Нехай із трьох послідовних непарних чисел найменшим є $2n + 1$, де n — деяке ціле число. Тоді наступні непарні числа — $2n + 3$ і $2n + 5$. Сума цих трьох чисел

$$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9 = 3(2n + 3)$$

ділиться на 3, бо має дільником число 3. \bullet

Усно

241. Знайдіть суму многочленів:

а) $2a^2 - a$ і $a^2 - 3a$; б) $4x + 1$ і $x^2 + 2x + 4$.

242. Знайдіть різницю многочленів:

а) $5a^2 + 4a$ і $4a^2 + 2a$; б) $5y^2 + 4y + 4$ і $4y^2 + 4y$.

Рівень А



243. Дано два многочлени: $3x^2 + 2x - 5$ і $2x^2 - 2x + 3$. Запишіть:

- а) суму цих многочленів;
 б) різницю першого і другого многочленів;
 в) різницю другого й першого многочленів.

244. Запишіть суму та різницю многочленів $6y^2 - 4y + 3$ і $5y^2 + 6y - 3$.

Знайдіть суму многочленів:

245. а) $2a^3 - 4a^2 + a$ і $a^3 + 3a^2 - 2a + 2$; б) $5x + 2$; $-x^2 + 4x - 3$ і $3x^2 - 4$;
 в) $a^2 - 2ab + b^2$ і $a^2 + 2ab + b^2$; г) $4xy - 6x$; $2x - 6xy$ і $-xy - x$.

246. а) $-3x^4 + 5x^2 - 5$ і $x^4 - 3x^2 + 4$; б) $-2b^2 - 3$; $3b^2 + 2$ і $-2b^2 + 1$.

Знайдіть різницю многочленів:

247. а) $3c^3 + 3c^2 - 4c + 1$ і $2c^3 - 3c^2 + c - 5$;
 б) $5x^3 - 4x^2 + 3x - 4$ і $7x^3 - 4x^2 + 3x + 11$;
 в) $2a^2 - 8a + 5$ і $2a^2 - 2a - 5$;
 г) $-a^4 + 3a^2 + 3$ і $2a^4 - 5 + 3a^3$.

248. а) $4x^3 + 3x^2 + x - 4$ і $2x^3 - x^2 + 2x + 7$;
 б) $-4m^3 + 4m^2 + m - 1$ і $-4m^3 + 4m^2 + m + 1$;
 в) $5a^2 + 3a + 6$ і $8a^3 + 2a^2 + 6$.

249. Знайдіть суму та різницю многочленів:

- а) $a + b$ і $a - b$; б) $a - b$ і $b - a$.

Спростіть вираз:

250. а) $4a - (5a^2 + 3a - 2)$; б) $4,5ab + 3a + (-2,6ab - 2,9)$;
 в) $(4m^2 - 3m + n) - (-5m + m^2 - 3n)$; г) $x^2 + y - (2x^2 - y) - (-3x^2 + y)$.
 251. а) $(-a + a^2) - (3a^2 - 2 + 2a)$; б) $(7x^3 - 4x) - (8x - 3x^3) - (x^3 + x)$.

Розв'яжіть рівняння:

252. а) $2x^2 - 3x - (2x - 4 + 2x^2) = 0$; б) $-x^3 - 4 - (4x - x^3 + 4) = 0$.
 253. а) $-5x + x^2 + 3 - (x + x^2) = 0$; б) $3x^2 + 4x + 6 - (-6x + 3x^2 - 2) = 0$.

Рівень Б



Спростіть вираз:

254. а) $(-2a^2b^3 + ab^3) - (a^2b^3 - 3ab^3) - (4ab^3 - 4a^2b^3)$;
 б) $3x^5 + x^4 - (2x - 3x^4 + 12) - (3x^5 + 2x^4 - 3) - (3x^4 + 2)$;
 в) $5xy - (x^2 + 4xy - (-x^2 + xy))$;
 г) $-4a^2 + b + (-7b - 2 + a^2 - (2a^2 - (b - 1)))$.

255. а) $7x^4 - (4x^2 - x^4 + 3x) - (-3x^2 + 8x^4 + 2x)$;
 б) $6ab + 3b^2 - (1 + 2b^2) - (-2ab - 3b^2) + 1$;
 в) $2n^2 + 3n - (-3n - 1 + 2n^2 - (n - 1 - n^2))$.
256. Знайдіть такий многочлен P , для якого рівність є тотожністю:
 а) $P + (2x^2 + x - 2) = -x^2 + 1$;
 б) $P - (x^2 - 3x + 3) = 3x - 1$;
 в) $(4x^2 - 2x + 1) - P = x^2 - 2x + 1$.
257. Знайдіть многочлен, який у сумі з многочленом $2x^2 + x - 4$ дає многочлен $3x + 2$.

Розв'яжіть рівняння:

258. а) $4x^2 - (5x - 10 + x^2) = 3x^2$; б) $-(x^4 - 1) - (3 - 5x^4 + 4x) = 4x^4 + 5$.
 259. а) $-(1 + 2x - x^2) - (3x + 5) = x^2$; б) $2 - (-6 + x - 4x^3) = 4x^3 + x + 4$.

Рівень В



260. Доведіть, що:
 а) сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6;
 б) сума чотирьох послідовних непарних чисел ділиться на 8.
261. Учитель задав на уроці цікаву задачу. Кількість хлопців, які розв'язали задачу, виявилась такою ж, як і кількість дівчат, які її не розв'язали. Кого у класі більше: тих, хто розв'язав задачу, чи дівчат?
262. Знайдіть такі числа a і b , щоб сумою многочленів $x^2 - abx + 3$ і $ax^2 + 2x - 4$ був многочлен $3x - 1$.

Вправи для повторення

263. Обчисліть, використавши розподільну властивість множення:
 а) $18 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$; б) $24 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$; в) $\left(0,5 - \frac{1}{3}\right) \cdot 30$.
264. Спростіть вираз:
 а) $a^2b^3 \cdot 2ab^2$; б) $(4a^2b)^2 \cdot 2ab^2$; в) $(-3xy^2)^3 \cdot 2(xy)^2$.
265. Сумарна довжина ходів печери Оптимістична дорівнює 240 км, а печери Озерна — 134 км. (Обидві печери знаходяться на Тернопільщині, перша з них занесена до книги рекордів Гіннеса як найдовша в світі гіпсова печера та як найдовша печера Євразії.) На скільки відсотків довжина ходів печери Оптимістична більша від довжини ходів печери Озерна? (Результат округліть до 0,1%.)
266. Із цукрових буряків у процесі переробки одержують 16% цукру. Скільки центнерів буряків потрібно взяти, щоб отримати 4 ц цукру?

Поміркуйте

267. Чотири футбольні збірні зіграли матчі групового турніру. Кожні дві команди зіграли між собою один раз, жодний матч не закінчився внічию і жодна з команд не програла усі матчі. Доведіть, що знайдуться такі три команди, що перша перемогла другу, друга перемогла третю, а третя перемогла першу.

8. Множення одночлена на многочлен

Помножимо одночлен $2a$ на многочлен $a^2 - 3a + 4$. Використовуючи розподільну властивість множення, матимемо:

$$2a(a^2 - 3a + 4) = 2a \cdot a^2 - 2a \cdot 3a + 2a \cdot 4 = 2a^3 - 6a^2 + 8a.$$

Отже, добутком одночлена $2a$ і многочлена $a^2 - 3a + 4$ є многочлен $2a^3 - 6a^2 + 8a$. Щоб знайти добуток, ми помножили одночлен на кожний член многочлена й одержані результати додали.

Маємо таке правило:

Щоб помножити одночлен на многочлен, потрібно одночлен помножити на кожний член многочлена й одержані добутки додати.

За цим правилом можна множити і многочлен на одночлен. Наприклад:

$$(3x^2 - x + 2) \cdot 3x = 3x^2 \cdot 3x - x \cdot 3x + 2 \cdot 3x = 9x^3 - 3x^2 + 6x.$$

Добуток будь-якого одночлена і будь-якого многочлена завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Виконати множення:

а) $2a^2b(-5b^2 + 2ab)$;

б) $(2a + b - 3c) \cdot (-4a)$.

• а) $2a^2b(-5b^2 + 2ab) = 2a^2b \cdot (-5b^2) + 2a^2b \cdot 2ab = -10a^2b^3 + 4a^3b^2$.

Скорочений запис: $2a^2b(-5b^2 + 2ab) = -10a^2b^3 + 4a^3b^2$.

б) $(2a + b - 3c) \cdot (-4a) = 2a \cdot (-4a) + b \cdot (-4a) - 3c \cdot (-4a) =$
 $= -8a^2 - 4ab + 12ac.$

Скорочений запис: $(2a + b - 3c) \cdot (-4a) = -8a^2 - 4ab + 12ac.$ •

Вправа 2. Спростити вираз $5x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(3x - 1)$.

• $5x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(3x - 1) = \underline{5x^3} + \underline{20x^2} - 10x - \underline{6x^3} + \underline{2x^2} =$
 $= -x^3 + 22x^2 - 10x.$ •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $2x(2x + 3) - 7 = 4x^2 - 4$.

• $4x^2 + 6x - 7 = 4x^2 - 4$; $4x^2 + 6x - 4x^2 = 7 - 4$; $6x = 3$; $x = 0,5$.

Відповідь. 0,5. •

Усно

268. Виконайте множення:

а) $a(a + 1)$;

б) $a(a^2 - 2a)$;

в) $x(x^2 + x - 4)$;

г) $(a + 4) \cdot a$;

д) $(b + 2a) \cdot b$;

е) $(y^2 + 4y + 4) \cdot y$.

Рівень А



Перемножте вирази:

269. а) $x(y + 2)$;

б) $a(2b - 3c + 1)$;

в) $-2m(n - k)$;

г) $(2x + y) \cdot 5z$.

270. а) $3a(b - c)$;

б) $(m - 2n + 1) \cdot k$.

271. а) $x(2x - 5)$;

б) $2a^2(5a + 3)$;

в) $b(4b^2 + 3b)$;

г) $-a^2(a^2 - 2a + 1)$;

д) $4c^2(2c^3 - c^2 + 5)$;

е) $-ab(2a - 3b - 2)$;

е) $(x^2 - 5x) \cdot x^2$;

ж) $(-y^3 + 5y^3) \cdot (-4y)$;

з) $(y^2 - x - 3) \cdot 2xy$.

272. а) $a(2a + 3)$;

б) $3x(x^2 - 4x + 3)$;

в) $-2b(b^2 + 2b - 3)$;

г) $3c^2(-2c^4 + c^2 + 3)$;

д) $(-3n^2 + 2n) \cdot 2n$;

е) $(2a^2 - 2a - 5) \cdot (-3a)$.

Спростіть вираз:

273. а) $a(2a + b) - ab$;

б) $4y(2x - y) - 8xy + 2y^2$;

в) $2(4m^2 - 3) + m(-8m - 3)$;

г) $-x(2x - y) - (-2x^2 + xy)$.

274. а) $c(c^2 + 3c) - 3c^2$;

б) $-5x(x^2 + 3x - 4) - 20x$;

в) $2a(3a - 4b) + 8ab - 2a^2$;

г) $-4ab + 2a(2b + 3) - 6a$.

Розв'яжіть рівняння:

275. а) $2(2x - 1) + 3 = x - 2$;

б) $9 - 4(1 - 2x) = 10x$;

в) $-1,5(6x + 1) + 3x = 3$;

г) $4x(1 - 2x) + 8x^2 = 24$.

276. а) $2 + 3(5x - 3) = 8x$;

б) $24 - 2(2x + 6) = x$.

Рівень Б



Спростіть вираз:

277. а) $2a(-a + 2a^2) - 4(a^3 + 2a - 2)$;

б) $5x^3(3x^3 - 2x + 1) - x^2(8x^2 + 5x)$;

в) $-8m^3n(mn^2 - mn - n^2) - (2mn)^3$;

г) $2xy^2 - \frac{1}{3}x(6x + 6y^2 - 1) + \frac{2}{3}x$;

д) $2ab(5c + 2a) - a(4ab - bc)$;

е) $-5x^3y(2x^2y + 4y^3x) - 4x^4(2xy^2 - 5y^4)$.

278. а) $a^2(1 + 2a + b^2) - (a^2b^2 + a^2)$;

б) $4xy(2x - y) - 2x(4xy - 1)$;

в) $-2m^2n^3(4mn^2 - 8m^2n) - (4m^2n^2)^2$;

г) $\frac{2}{3}ab(6a^2 - ab) - 4a^3(a + b)$.

279. Доведіть, що для всіх значень x вираз $x^2(x-2) - x(x^2+2) + 2x(1+x) + 3$ набуває того самого значення.
280. Доведіть, що значення виразу $x(x^2+2y) - y(y+x) + y(y-x)$ не залежать від значень y .
281. Доведіть, що для кожного від'ємного значення a значення виразу $a^2(a^3 - a^2 + a - 1) - a(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$ є додатним.
282. Доведіть, що для будь-яких значень x , y та z значення виразу $x(x-y+z) + y(y-z+x) + z(z-x+y)$ є невід'ємним.

Доведіть тотожність:

283. а) $a(b-c) + b(c-a) + c(a-b) = 0$;
 б) $a(b^2 - bc + c^2) + ab(c-b) + ac(b-c) = abc$;
 в) $x^4(x^3 - x^2) - x^3(x^4 - x^3) + x^2(x^5 - x^4) - x(x^6 - x^5) = 0$;
 г) $ab(c-ab) + bc(a-bc) + ca(b-ca) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3abc$.
284. а) $x(x-yz) + y(y-zx) + z(z-xy) + 3xyz = x^2 + y^2 + z^2$;
 б) $a(a^4 - 2a^3 + 3a^2) - a^2(a^3 - a^2 + 2a) + a^3(a-1) = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

285. а) $5(3x-6) + 4(3-2x) = 5x-8$; б) $0,4(2x-7) + 1,2(3x+0,7) = 1,6x$.
286. а) $-5(4x+3) + 3x = -12(x-5)$; б) $9(x-3) - 4(7-3x) - 3 = -8x$.
287. а) $x(3+2x+4x^2) - 2x^2(2x+1) = 9$; б) $2,5x - 2x(1,5x+1) = 1 - 3x^2$.
288. а) $3x^2(x+1) - (3x^3+3x^2+x-1) = 0$; б) $1,2x(x+2) - 3(0,4x^2+1) = 0,6$.
289. Сума двох чисел дорівнює 10, а сума їх добутку і квадрата меншого числа дорівнює 15. Знайдіть ці числа.
290. Знайдіть площу прямокутника за такими даними: його довжина у 2,4 разу більша від ширини; якщо ширину прямокутника збільшити на 2 см, то площа збільшиться на 24 см².
291. Дано три ділянки прямокутної форми. Довжина першої ділянки удвічі більша від її ширини. Друга ділянка має таку ж ширину, як перша, а довжину на 4 м більшу, ніж перша. Третя ділянка має таку ж довжину, як перша, а ширину на 4 м більшу, ніж перша. Знайдіть площу першої ділянки, якщо площа другої ділянки менша від площі третьої на 40 м².

Рівень В



292. Спростіть вираз (n — натуральне число):

- а) $x^{n+2}(x^{n+3} - 1) - x^n(x^{n+5} - x^2)$;
 б) $a^{n+1}(a^{n+1} - 4) - a^n(a^{n+2} - 4a + 1)$;
 в) $x^n(x^{n+1}(x^{n+2} + x^{n+1}(x^2 - x + 1)))$.

293. Доведіть тотожність

$$a(1 + a + a^2 + \dots + a^9 + a^{10}) - (1 + a + a^2 + \dots + a^9 + a^{10}) = a^{11} - 1.$$

294. Доведіть, що значення виразу

$$3x^{n+2}y^{n+1}(2x^2y^3 - 4xy + 6) - 2x^{n+1}y^n(3x^3y^4 - 6x^2y^2 + 9xy),$$

де n — натуральне число, не залежать від значень x та y .

295. Учні 7 класу прийшли до театру. В антракті всі вони побігли в буфет. Кожен хлопець купив пиріжок, а кожна дівчина — булочку. Якби кожна дівчина купила пиріжок, а кожен хлопець — булочку, то вони разом витратили б на 50 к. менше. Пиріжок дорожчий від булочки на 10 к. Кого і на скільки було більше — хлопців чи дівчат?

296. У банці було 3 л спирту. З неї відлили x л спирту і долили таку ж кількість води. Потім, коли спирт і вода змішалися, з банки відлили x л суміші. Скільки літрів спирту залишилося в банці?

Вправи для повторення

297. Перший автомобіль долає шлях між двома містами за 1,5 год, а другий — за 1,2 год. Швидкість другого автомобіля більша від швидкості першого на 15 км/год. Знайдіть відстань між містами.

298. З міста A до міста B одночасно виїхали легковий автомобіль й автофургон. Коли через 2,5 год легковий автомобіль прибув до міста B , автофургону залишалося їхати до міста B ще 30 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість легкового автомобіля в 1,2 разу більша від швидкості автофургона.

299*. Пірати захопили скриню із золотими монетами й вирішили поділити здобич порівну. Якби піратів було на 10 менше, то кожному дісталось б монет в 1,2 разу більше. Скільки було піратів?



300. Запишіть у вигляді виразу:

а) добуток двочленів $a - b$ і $2a + b$;

б) добуток суми виразів $2a$ і $3b$ та їх різниці.

Поміркуйте

301. 28 учнів 7-го класу писали контрольну роботу з алгебри. Кожний учень мав завдання, у якому було 3 задачі трьох різних рівнів складності. Розв'язок задачі 1-го рівня учитель оцінює 0, 1 або 2 балами, 2-го рівня — 0, 2 або 4 балами, 3-го рівня — 0, 3 або 6 балами. Чи правильно, що серед цих 28 учнів обов'язково знайдуться 2 учні, які одержать однакову кількість балів за першу задачу; за другу задачу; за третю задачу?

9. Множення многочлена на многочлен

Помножимо многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$. Зведемо множення цих многочленів до множення многочлена на одночлен. Для цього позначимо многочлен $c + d$ через x . Тоді:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx.$$

Повернувшись до заміни $x = c + d$, матимемо:

$$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Отже, добутком многочлена $a + b$ і многочлена $c + d$ є многочлен $ac + ad + bc + bd$:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Вираз $ac + ad + bc + bd$ ми одержали б одразу, якби помножили a на c і d , потім b на c і d й одержані добутки додали. Можна сказати й так: добуток $ac + ad + bc + bd$ можна одержати, якщо помножити кожний член многочлена на $a + b$ на кожний член многочлена $c + d$ й одержані добутки додати.

Маємо таке правило:

Щоб помножити многочлен на многочлен, досить кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена й одержані добутки додати.

Помножимо за цим правилом многочлен $2a^2 + b^2$ на многочлен $2a - b$:

$$\begin{aligned} (2a^2 + b^2)(2a - b) &= 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) = \\ &= 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3. \end{aligned}$$

Виконуючи множення многочленів, проміжні результати можна не записувати:

$$(2a^2 + b^2)(2a - b) = 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$$

У кожному з наведених прикладів добуток двох многочленів ми записували у вигляді многочлена. Взагалі, добуток будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Виконати множення:

а) $(2x^2 - xy + 4y^2)(2x - 3y)$;

б) $(a + b)(a + 1)(b - 1)$.

• **а)** $(2x^2 - xy + 4y^2)(2x - 3y) = 4x^3 - \underline{6x^2y} - \underline{2x^2y} + \underline{3xy^2} + \underline{8xy^2} - 12y^3 =$
 $= 4x^3 - 8x^2y + 11xy^2 - 12y^3.$

б) Знайдемо добуток перших двох многочленів, а потім одержаний добуток помножимо на третій многочлен:

$$(a + b)(a + 1)(b - 1) = (a^2 + a + ba + b)(b - 1) = \\ = a^2b - a^2 + \underline{ab} - a + b^2a - \underline{ba} + b^2 - b = a^2b - a^2 - a + ab^2 + b^2 - b. \bullet$$

Вправа 2. Розв'язати рівняння $(x - 2)(2x + 3) - x(2x + 4) = 3$.

$$\bullet 2x^2 + 3x - 4x - 6 - 2x^2 - 4x = 3; \quad -5x - 6 = 3; \quad -5x = 9; \quad x = -1,8.$$

Відповідь. $-1,8$. \bullet

Усно

302. Виконайте множення:

а) $(a + 2)(b + 1)$;

б) $(a + b)(c - d)$;

в) $(x + y)(a + b - c)$.

Рівень А



Перемножте многочлени:

303. а) $(x + 2)(y + z)$;

б) $(b + a)(c - 3)$;

в) $(m - 4)(n + k)$;

г) $(a - b)(x - y)$;

д) $(2a - 3b)(2c + 5)$;

е) $(4a + 6b)(3d - 2c)$;

є) $(x + y)(a - 5b + 2)$;

ж) $(2 - c)(a - b - 2)$;

з) $(m - n + 1)(k + l)$.

304. а) $(a + b)(c + 3)$;

б) $(2x + y)(3 - 3z)$;

в) $(a - 2b)(3x - 4y)$;

г) $(m + n)(a - b + 1)$;

д) $(a + b - 2)(c + 5)$;

е) $(2x - y - 1)(a - 3b)$.

305. а) $(a + 3)(4a - 3)$;

б) $(5b - 4)(3b - 2)$;

в) $(a^2 + 3a - 4)(3a - 2)$;

г) $(n - m)(n + 4m)$;

д) $(a - 6b)(2a - b)$;

е) $(4c - 3d)(3c + d)$.

306. а) $(a - 2)(a + 3)$;

б) $(3x + 2)(2x - 1)$;

в) $(a + 5b)(a - b)$;

г) $(4x - 3y)(x - 2y)$.

Спростіть вираз:

307. а) $(3a - 4)(2a + 1) + 5a$;

б) $(y + 3)(y - 4) - y(y - 1)$;

в) $(2x - 5)(2x + 3) - 4(x^2 - x)$;

г) $(a^2 + a - 2)(a + 3) + 6 - 4a^2$;

д) $(a + b)(a - 3b) + 2ab$;

е) $(-x + 4y)(2x - y) + 2x^2 - 9xy$.

308. а) $(x + 2)(2x + 3) - 2x^2$;

б) $(a - 4)(3a - 4) + 16a - 16$;

в) $(a + 2b)(3a - 4b) + 3ab - 3a^2$;

г) $-7mn + (m + 5n)(2m - 3n)$.

Розв'яжіть рівняння:

309. а) $(x - 1)(x + 2) - x^2 = 3$;

б) $(2y - 1)(2 - y) + 2y^2 = 1$.

310. а) $(x + 3)(x - 1) - x^2 = 5$;

б) $5x^2 + (1 - x)(5x + 2) = 5$.

Рівень Б



Перемножте многочлени:

311. а) $(-3a + 2)(2a^2 + 2a - 3)$;

в) $(n^2 - n + 3)(n^2 + 2n + 2)$;

д) $(c + 2)(c + 3)(c - 5)$;

е) $\left(\frac{2}{9}x - \frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)$;

б) $(3x^2 - 2x + 1)(2x^2 + 5x)$;

г) $(2b^2 - 3b - 2)(4b^2 + b - 4)$;

е) $(2x + 1)(2x - 5)(x^2 + 3x + 2)$;

ж) $\left(2\frac{2}{9}a + 3\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{19}a - \frac{9}{19}\right)$.

312. а) $(4a + 3)(a^2 - 4a + 2)$;

в) $(x - 2)(x + 5)(x - 4)$;

д) $\left(\frac{4}{9}b - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}b + 1\right)$;

б) $(b^2 - 2b + 3)(3b^2 - 2b + 1)$;

г) $(2y - 3)(y + 2)(4y^2 + 3y - 3)$;

е) $\left(1\frac{2}{7}x + 2\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{9}x\right)$.

313. а) $(a + b)(a^2 + 5ab - b^2)$;

в) $(3n^2 - 2nm - m^2)(3n - 2m)$;

б) $(4x^2 - 3xy + y^2)(2x - 7y)$;

г) $(3a - 2b)(a - 2b)(a^2 + 2ab)$.

314. а) $(2x + y)(x^2 + 2xy - 2y^2)$;

б) $(a - b)(a + 2b)(3a - 2b)$.

Спростіть вираз:

315. а) $(3a - 1)(2a + 5) + (2a - 5)(3a + 1)$;

б) $(x + 7)(8x - 1) - (2x + 3)(4x - 1)$;

в) $(a - 2)(1 - 2a + 2a^2) - 2(a^3 - 3a^2 - 1)$;

г) $(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b) - a^3 - b^3$;

д) $(3xy^2 - 7x^2y)(3xy^2 - 2x^2y) + (3xy)^3 - (3xy^2)^2$.

316. а) $(4x - 3)(3x + 4) + (2x - 3)(3x + 1)$;

б) $(2b - 7)(4b - 1) - (8b - 3)(b + 1)$;

в) $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) - 18y^3$;

г) $(a + b)(a + b - 1) - a(a - 1) - b(b - 1)$.

Розв'яжіть рівняння:

317. а) $(x - 1)(x - 3) = (x - 2)(x + 3)$;

б) $(2y - 1)(1 - y) + (y + 1)(2y - 3) = 0$;

в) $(0,5x - 3,5)(6x + 2) + 30x = 3x(x - 3) - 26$;

г) $\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)$.

318. а) $(x + 6)(x - 4) = (x - 5)(x + 4)$;

б) $(0,5x + 7)(4x - 1) - (x + 14)(2x - 1) = 9$;

в) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right)(2x + 3) = (3x - 1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)$.

334. Дві ділянки прямокутної форми мають рівні площі. Довжина другої ділянки на 2 м менша, ніж довжина першої, а ширина другої ділянки на 1 м більша, ніж ширина першої. Доведіть, що довжина першої ділянки удвічі більша від ширини другої.
335. Чому дорівнює сума коефіцієнтів многочлена, який є добутком многочленів $x^4 + 987x^3 - 876x^2 + 765x - 654$ і $9876x^4 - 9800x^2 - 75$?

Вправи для повторення

336. За день автомобіль витратив 4,5 л бензину і в його баку залишилося 85% початкового об'єму бензину. Скільки літрів бензину було в баку автомобіля зранку?
337. Моторний човен проплив 72 км, рухаючись 3 год проти течії річки і 2 год — за течією. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 15 км/год.
338. Від пристані A до пристані B катер плив на 20 хв довше, ніж від B до A . Знайдіть відстань між пристанями, якщо швидкість катера у стоячій воді дорівнює 19,2 км/год, а швидкість течії річки — 2,4 км/год.
339. Обчисліть:
 а) $37 \cdot 48 + 37 \cdot 52$; б) $9,3 \cdot 5,6 - 9,3 \cdot 5,5$; в) $1,6 \cdot 8,8 - 3,8 \cdot 1,6$.
340. Запишіть одночлен $24a^3b^4$ у вигляді добутку двох одночленів, одним з яких є:
 а) $3a^2b^2$; б) $8b^3$; в) $-4ab^4$; г) $-12a^3$.

Поміркуйте

341. На столі стоять 5 склянок догори дном. Дозволяється за один хід перевернути будь-які 2 склянки. Чи можна за кілька таких ходів поставити склянки дном донизу?

10. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки

1. У шостому класі ми розкладали на множники числа. Наприклад, число 60 можна записати у вигляді добутку двох чисел 12 і 5:

$$60 = 12 \cdot 5.$$

Кажуть, що число 60 розкладено на два множники 12 і 5.

Розкладати на множники можна і многочлени. Наприклад,

$$ab + ac = a(b + c).$$

Записавши многочлен $ab + ac$ у вигляді добутку $a(b + c)$, кажуть, що многочлен $ab + ac$ розкладено на два множники a і $b + c$. Кожний із цих множників є многочленом (перший многочлен складається лише з одного члена).

Розкласти многочлен на множники означає подати його як добуток кількох многочленів.

Порівняйте

$a(b + c) = ab + ac$	помножили одночлен на многочлен; результат — многочлен
$ab + ac = a(b + c)$	розклали многочлен на множники; результат — добуток одночлена і многочлена

2. Розглянемо один зі способів розкладання многочленів на множники.

Виконаємо множення одночлена на многочлен:

$$x(x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x^2 + xy.$$

Перепишемо ці рівності у зворотному порядку:

$$x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y = x(x + y).$$

Многочлен $x^2 + xy$ розклали на два множники x та $x + y$. Щоб розкласти многочлен $x^2 + xy$ на множники, досить у його членах x^2 та xy виділити спільний множник x : $x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y$, а потім на основі розподільної властивості множення записати одержаний вираз у вигляді добутку многочленів x та $x + y$.

Описаний спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом винесення спільного множника за дужки*.

Розкладемо на множники многочлен $12x^3y - 18x^2y^2$.

Спочатку знайдемо спільний числовий множник для коефіцієнтів 12 і -18 . Якщо коефіцієнтами є цілі числа, то за спільний числовий множник беруть, як правило, найбільший спільний дільник модулів цих коефіцієнтів. У нашому випадку це число 6. Степені з основою x входять в обидва члени многочлена. Оскільки перший член містить $x^3 = x^2 \cdot x$, а другий — x^2 , то спільним множником для степенів з основою x є x^2 (за дужки виносять змінну з меншим показником). У члени многочлена входять відповідно множники y та y^2 , за дужки можна винести y . Отже, за дужки можна винести одночлен $6x^2y$:

$$12x^3y - 18x^2y^2 = 6x^2y \cdot 2x - 6x^2y \cdot 3y = 6x^2y(2x - 3y).$$

Щоб винести у многочлені спільний множник за дужки, потрібно кожен член многочлена подати у вигляді добутку, який містить спільний множник, і винести його за дужки.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розкласти на множники многочлен $-2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2$.

$$\bullet -2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2 = -2ab(a + 4ab - 5b). \bullet$$

Вправа 2. Розкласти на множники: $5b(a - c) + 3(a - c)$.

• Даний вираз є сумою двох доданків, для яких спільним множником є вираз $a - c$. Винесемо цей множник за дужки:

$$5b(a - c) + 3(a - c) = (a - c)(5b + 3). \bullet$$

Вправа 3. Розкласти на множники: $2x(m - n) + y(n - m)$.

• Доданки мають множники $m - n$ і $n - m$, які відрізняються тільки знаками. У виразі $n - m$ винесемо за дужки -1 , тоді другий доданок матиме вигляд $-y(m - n)$ й обидва доданки матимуть спільний множник $m - n$.

$$\text{Отже, } 2x(m - n) + y(n - m) = 2x(m - n) - y(m - n) = (m - n)(2x - y). \bullet$$

Вправа 4. Знайти значення виразу $8,5a^2 + a^3$, якщо $a = 1,5$.

• Розкладемо спочатку многочлен $8,5a^2 + a^3$ на множники:

$$8,5a^2 + a^3 = a^2(8,5 + a).$$

$$\text{Якщо } a = 1,5, \text{ то: } a^2(8,5 + a) = 1,5^2 \cdot (8,5 + 1,5) = 2,25 \cdot 10 = 22,5. \bullet$$

Вправа 5. Розв'язати рівняння $4x^2 + 5x = 0$.

• Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x(4x + 5) = 0.$$

Добуток $x(4x + 5)$ дорівнює нулю лише тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю:

$$x = 0 \text{ або } 4x + 5 = 0, \text{ звідки } x = 0 \text{ або } x = -1,25.$$

Відповідь. 0; $-1,25$. •

Усно

342. Знайдіть спільний множник членів многочлена:

а) $8 + 4b$;

б) $15x - 10$;

в) $3a + 3ab$;

г) $a^2 - 2a$;

д) $mn - n^2 + n$;

е) $18a^4b^3 - 6a^2b^2$.

343. Чи правильно розкладено на множники многочлен:

а) $6a + 6 = 6(a + 0)$;

б) $6a + 6 = 6(a + 6)$;

в) $6a + 6 = 6(a + 1)$;

г) $4xy - 2y = y(4x - 2)$;

д) $4xy - 2y = -y(-4x + 2)$;

е) $4xy - 2y = 2y(2x - 1)$?

Рівень А



Винесіть за дужки спільний множник:

344. а) $3a + 3b$;

б) $3a + 6$;

в) $9a - 18b$;

г) $-6a + 6b$;

д) $3y^2 + 3y - 6$;

е) $-15c - 10$.

Знайдіть значення многочлена:

362. а) $\frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{5}y^2$, якщо $x = 3$; $y = 0,5$;

б) $\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}ab - 1\frac{1}{3}a$, якщо $a = 2\frac{3}{7}$; $b = 1\frac{2}{7}$.

363. а) $\frac{2}{9}m^2n + \frac{4}{9}m^2$, якщо $m = -0,5$; $n = 88$;

б) $\frac{1}{11}xy - \frac{2}{11}y^2 + 1\frac{1}{11}y$, якщо $x = \frac{2}{3}$; $y = 6\frac{1}{3}$.

Розв'яжіть рівняння:

364. а) $4y + 0,2y^2 = 0$;

б) $0,6x^2 - 0,24x = 0$;

в) $\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = 0$.

365. а) $0,4x - 2x^2 = 0$;

б) $1,5x^2 + 0,3x = 0$;

в) $\frac{3}{4}x - \frac{3}{7}x^2 = 0$.

Доведіть, що значення виразу:

366. а) $19^8 - 19^7$ ділиться на 18;

б) $49^9 + 49^{10}$ ділиться на 50;

в) $3 \cdot 7^6 - 7^5$ ділиться на 20;

г) $3^{10} + 2 \cdot 3^{12} + 3^{11}$ ділиться на 22.

367. а) $11^9 + 11^8$ ділиться на 12;

б) $5^{12} - 2 \cdot 5^{10}$ ділиться на 23.

Рівень В



368. Внесіть за дужки спільний множник:

а) $a^n + a^{n+2}$;

б) $2^{n+m} + 2^n$;

в) $4a^{2n} - 4a^n$;

г) $a^{2n}b^n + a^n b^{2n}$;

д) $x^n + 2x^{n+2} + 3x^{n+3}$;

е) $x^{2m} + 2x^m + x^{m+2}$.

369. Доведіть, що значення виразу:

а) $15 \cdot 16^7 - 4^{14}$ ділиться на 14;

б) $3 \cdot 2^{15} + 8^4 - 4^7$ ділиться на 21.

370. Доведіть, що коли:

а) $a + b = 4$, то $a^3b^2 + a^2b^3 - 4a^2b^2 = 0$;

б) $a^2 + b^2 = 3ab$, то $a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 = 4a^3b^3$;

в) $x + y + 2 = xy$, то $x^4y^4 - x^3y^4 - x^4y^3 = 2x^3y^3$.

371. Номер автобусного квитка складається із шести цифр. Квиток вважають «щасливим», якщо в його номері сума перших трьох цифр дорівнює сумі трьох останніх. Доведіть, що:

а) якщо квиток з номером \overline{abcdef} є «щасливим», то й квиток з номером \overline{defabc} — «щасливий»;

б) сума номерів «щасливих» квитків \overline{abcdef} і \overline{defabc} ділиться на 1001;

в) сума номерів усіх можливих «щасливих» квитків ділиться на 1001.

Вправи для повторення

372. Автомобіль мав проїхати деякий шлях, рухаючись зі швидкістю 70 км/год. Якби він їхав зі швидкістю на 5 км/год більшою, то здолав би цей шлях на 20 хв швидше. Який шлях мав проїхати автомобіль?
- 373*. Сквер має форму прямокутника. Дві взаємно перпендикулярні доріжки завширшки 2 м розділяють його на 4 рівні частини прямокутної форми. Сквер планують обгородити парканчиком по периметру, крім входів на доріжки. Скільки для цього потрібно метрів парканчика, якщо відомо, що на викладення доріжок витратили 1750 плиток, площа кожної з яких дорівнює $0,16 \text{ м}^2$?
374. Візьміть у дужки два останні доданки, поставивши перед дужками знак «+»; знак «-»:
- а) $2 + c + d$; б) $a + b - 4$ в) $x - y - 3$; г) $2m - 3n + k$.
375. Обчисліть:
- а) $2,3 \cdot 2,8 + 0,33 \cdot 10,78 + 2,3 \cdot 7,2 - 0,33 \cdot 0,78$;
 б) $7,7 \cdot 1,6 - 0,03 \cdot 500 + 1,8 \cdot 1,6 + 1,6 \cdot 0,5$;
 в) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} - 10\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} + 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + 1\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9}$.

Поміркуйте

376. Чи можна в прямокутній таблиці розміру 5×10 (5 рядків і 10 стовпців) розставити деякі 50 чисел так, щоб сума чисел кожного рядка дорівнювала 30, а сума чисел кожного стовпця — 10?

11. Розкладання многочленів на множники способом групування

Вивчення цього способу розкладання многочленів на множники почнемо із прикладу на множення многочленів. Виконаємо множення двочлена $a - b$ на двочлен $x + y$ так:

$$(a - b)(x + y) = a(x + y) - b(x + y) = ax + ay - bx - by.$$

Проводячи перетворення у зворотному порядку, многочлен $ax + ay - bx - by$ можна розкласти на два множники $a - b$ і $x + y$:

$$ax + ay - bx - by = (ax + ay) + (-bx - by) = a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b).$$

Проаналізуємо останні перетворення. Маємо многочлен, члени якого можна групувати так, щоб кожна група мала спільний множник: для групи

$ax + ay$ — спільний множник a , для групи $-bx - by$ — спільний множник $-b$. У кожній групі виносимо спільний множник за дужки. В утвореній різниці $a(x + y) - b(x + y)$ маємо спільний множник $x + y$. Виносимо його за дужки й одержуємо $(x + y)(a - b)$.

Описаний спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом групування*. Застосовуючи цей спосіб, потрібно *утворювати такі групи членів, щоб вони мали спільний множник*. Після винесення в кожній групі спільного множника за дужки має утворитися спільний множник для всіх груп, який знову ж таки потрібно винести за дужки.

Многочлен $ax + ay - bx - by$ можна розкласти на множники, групуючи його члени по-іншому:

$$ax + ay - bx - by = (ax - bx) + (ay - by) = x(a - b) + y(a - b) = (a - b)(x + y).$$

Порівняйте

$(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by$	помножили многочлен на многочлен; результат — многочлен
$ax + ay - bx - by = (a - b)(x + y)$	розклали многочлен на множники; результат — добуток многочленів

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розкласти на множники многочлен $3ax - 12bx + 9a - 4bx^2$.

$$\begin{aligned} \bullet 3ax - 12bx + 9a - 4bx^2 &= (3ax + 9a) - (4bx^2 + 12bx) = \\ &= 3a(x + 3) - 4bx(x + 3) = (x + 3)(3a - 4bx). \bullet \end{aligned}$$

Вправа 2. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 5x + 6$.

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Подамо другий член } -5x \text{ у вигляді } -3x - 2x. \text{ Тоді:} \\ x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2). \bullet \end{aligned}$$

Усно

377. Укажіть у кожному многочлені групи членів, які мають спільний множник, та назвіть цей множник:

а) $ax + ay + 5x + 5y$;

б) $2a - 2b + an - bn$.

Рівень А



Розкладіть на множники:

378. а) $ax + ay + 4x + 4y$;

б) $7x + by + 7y + bx$;

в) $6m - 6n + am - an$;

г) $6m - 6n - am + an$;

д) $ta - na + mb - nb$;

е) $5a - bx - 5b + ax$;

є) $a + 2nb - b - 2na$;

ж) $4ay + 3 - 3y - 4a$.

379. а) $2a + 2b + xa + xb$;
 в) $ka - kb - 5a + 5b$;
 д) $x + y - bx - by$;
380. а) $a^3 + a^2 + a + 1$;
 в) $b^2 - ab - 2b + 2a$;
 д) $3a - ax + 3x - x^2$;
381. а) $x^3 + 2x^2 + x + 2$;
 в) $a^2 + 2ab + 3a + 6b$;
- б) $ma - mb + 3a - 3b$;
 г) $6c - ac - ab + 6b$;
 е) $7am - 7m + 5ax - 5x$;
 б) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8$;
 г) $10x + xy + 10y + x^2$;
 е) $xya - xy + 5a - 5$;
 б) $a^6 + 5a^4 + 5a^2 + 25$;
 г) $x^2 + 3xa - 2x - 6a$.

Рівень Б



Розкладіть на множники:

382. а) $a^2 + b^2 - a^3y - ab^2y$;
 в) $3a^2c + 6a^2 - 10bc - 5bc^2$;
 д) $0,9ay + 1,2y^2 - 1,2ax - 1,6xy$;
383. а) $x^2y^2 + 2y^3 - ax^2 - 2ay$;
 в) $6x^3y + 12y^2z^2 + 9y^3 + 8x^3z^2$;
384. а) $xa - xb + xc + 3a - 3b + 3c$;
 в) $-5a - 5b + 3na + 3nb - ma - mb$;
385. а) $a^2b + a + ab^2 + b + 2ab + 2$;
 в) $2a^3 + 2a^2b + 2ab + 2b^2 - a - b$.
- б) $b^2n + y^2 - bny - by$;
 г) $12x^2 + 18y + 10x^3 + 15xy$;
 е) $\frac{3}{17}x^2yz - \frac{1}{17}x + \frac{12}{17}xy^2z^2 - \frac{4}{17}yz$;
 б) $2a^2b + 2c - 4abc - a$;
 г) $0,2mn^3 - 1,5m^2 + 0,6m^3n - 0,5n^2$;
 б) $ax^2 - ay^2 + 4az - 4bx^2 + 4by^2 - 16bz$;
 г) $bn^2 + cn^2 - bp + bp^2 - cp + cp^2$;
 б) $ca - cb + c + ad - bd + d$;

Знайдіть значення виразу:

386. а) $p^3 + pq^2 - p^2q - q^3$, якщо $p = 1,5$; $q = 0,5$;
 б) $2a^3 - 6ab + a^2b - 3b^2$, якщо $a = 8$; $b = 21$;
 в) $4x^3 + 4x^2y - 4x^2 + 3y^3 + 3xy^2 - 3y^2$, якщо $x = \frac{2}{7}$; $y = \frac{5}{7}$;
387. а) $2a^2 + ac - 2ac^2 - c^3$, якщо $a = 17$; $c = 4$;
 б) $m^3 + m^2n - 10m + n^3 + n^2m - 10n$, якщо $m = \frac{1}{3}$; $n = \frac{2}{3}$.

Рівень В



388. Розкладіть на множники: $a^3 - a^2 + b^3 - b^2 + a^2b + b^2a$.
389. Дано многочлен $x^3 - x^2 + 3x - 3$. Доведіть, що для $x > 1$ він набуває лише додатних значень.
390. Для яких значень x значення многочлена $3x^3 - 9x^2 + 4x - 12$ додатні, від'ємні?
391. Розкладіть на множники тричлен:
- а) $a^2 - 7a + 10$;
 в) $x^2 + 3xy + 2y^2$;
- б) $x^2 + 5x + 4$;
 г) $a^2 - 7ab + 12b^2$.

Розв'яжіть рівняння:

392. а) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $x^2 + 8x + 15 = 0$.

393. а) $(x - 2)^2 + 6(x - 2) + 8 = 0$;

б) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$.

394. $(x^2 - x)(6 + 5x + x^2) = x^3(x + 4) - 5$.

Вправи для повторення

395. Обчисліть:

а) $3^3 \cdot 9^3 - 27^3$;

б) $4^5 \cdot 0,25^5 + 2^3 \cdot 4^3 \cdot 0,25^3$;

в) $2^5(2^6 - 1) - 2^3(2^8 - 2^2)$;

г) $3^3(3^3 - 4) - 3^2(3^4 + 4)$.

396. На двох полицях було 95 книжок. Коли четверту частину книжок, які стояли на першій полиці, переставили на другу, то на другій полиці книжок стало на 5 більше, ніж на першій. Скільки книжок було на кожній полиці спочатку?

397. Площа першої ділянки дорівнює 63 га, а другої — 53 га. З першої ділянки господарство зібрало картоплі в $1\frac{1}{8}$ разу більше, ніж із другої. Яка врожайність картоплі на кожній ділянці, якщо врожайність на першій ділянці на 1,5 т менша, ніж на другій?

398. Прочитайте вираз словами:

а) $a + b$;

б) $a - b$;

в) $a^2 - b^2$;

г) $(a - b)(a + b)$.

Поміркуйте

399. Десять учнів, серед яких більше половини — хлопці, сидять за круглим столом так, що навпроти кожного учня сидить інший учень. Доведіть, що деякі два хлопці сидять один навпроти одного.

Запитання і вправи для повторення § 3

1. Що називають многочленом? Наведіть приклади многочленів.
2. Що називають степенем многочлена? Наведіть приклад многочлена другого степеня.
3. Знайдіть суму та різницю многочленів $2x + 4$ та $x + 2$.
4. Як помножити одночлен на многочлен?
5. Як помножити многочлен на многочлен?
6. Що означає розкласти многочлен на множники?
7. Як розкладають многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки? Поясніть це на прикладі многочлена $2a^2 + 4ab$.
8. На прикладі многочлена $2a - 2b + na - nb$ поясніть, як розкладають многочлен на множники способом групування.

400. Зведіть подібні члени многочлена та знайдіть його степінь:

- а) $4a^2 - 3a + 1 + a^2 - 5a + 7$; б) $2x^3 + 2 - 2x^3 + 5x - 3 + 3x^2$;
 в) $3aba - 2a^2b + b^2a^2 + ab \cdot 4a$; г) $x^2y - xy^2 + 2x - 6xy \cdot (-x) - 3x$.

401. Знайдіть суму многочленів:

- а) $2a + 3$ і $5a - 2$; б) $5x^3 - 3x^2 + 2x$ і $x^3 + 3x^2 - 2$;
 в) $2x^2 - 3xy + y^2$ і $x^2 + 2xy - y^2$; г) $-x^2 - 2x + 3$; $2x^2 - 5$ і $-2x + 2$.

402. Знайдіть різницю многочленів:

- а) $3c^2 - 4c + 1$ і $3c^2 + c - 5$; б) $3x^3 - 4x^2 + 3x - 4$ і $-3x^3 - 4x^2 + 11$;
 в) $2a^5 - 8a^4 + a^2 + 5$ і $-8a^4 + a^3 - 2a - 5$; г) $-ab + 3a^2b + 3$ і $2ab - 5 + 3a^2b$.

Виконайте множення:

403. а) $a(4a - 3)$; б) $2b(b^2 + 5b - 2)$;
 в) $(x^2 + 3x + 2) \cdot 2x$; г) $(3c^2 + 3c - 2) \cdot (-2c^2)$;
 д) $(a - 2)(3a - 4)$; е) $(n - 2m)(n + 2m)$;
 є) $(a - 6)(2a^2 - a + 3)$; ж) $(2c - d + 3)(3c + 2d)$.
 404. а) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 4)$; б) $(x + 2)(3x - 1)(2x + 7)$;
 в) $(m - 4n)(4m^2 + mn - n^2)$; г) $(-ab^2 + 4a^3)(4a^2b + b^3)$.
 405. Спростіть вираз:
 а) $(4 - 3b)(b - 3) + (5b - 4)(3b - 3)$; б) $(8 - 2x)(2 + x) + (x - 2)(4 + 2x)$;
 в) $ab(2a - b - 1) - (2a - 1)(ab - 1)$;
 г) $(n + 2)(n^2 - 2n - 3) - (n - 3)(n^2 + 3n + 2)$;
 д) $(a + b - c)(a - b + c) - (a - b - c)(a + b + c)$;
 е) $x^6(x^7 - (x^8 + x^7(x^2 - x + 1))) + x^{15}$.

406. Доведіть тотожність:

- а) $(a + 1)(a^2 - 4) = (a^2 - a - 2)(a + 2)$; б) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$;
 в) $b^8 + b^4 + 1 = (b^4 - b^2 + 1)(b^4 + b^2 + 1)$;
 г) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

407. Розв'яжіть рівняння:

- а) $4x(2x + 1) - 8x^2 = -4$; б) $(x + 3)(x - 1) + 6 = x^2$.

408. Доведіть, що значення виразу $(3n + 1)(2n - 1) + n + 7$ для кожного цілого значення n ділиться на 6.

409. Доведіть, що значення виразу $(5x + 1)(5x + 3) - 5x(5x + 4)$ не залежать від значень x .

410. Периметр прямокутника дорівнює 24 см. Якщо його довжину збільшити на 3 см, а ширину зменшити на 2 см, то площа зменшиться на 5 см^2 . Знайдіть довжину і ширину прямокутника.

411*. Розв'яжіть рівняння:

- а) $-(x - 1)(x - 3) + x(x + 1)(x^4 + 1) = x^6 + x^5$;
 б) $(2|x| - 3)(3|x| + 2) = (2|x| + 1)(3|x| - 2)$;
 в) $(x^n + x)(x^n + 1) - x^n(x^n + x + 1) = 2x + 1$, де n — натуральне число.

Розкладіть на множники:

412. а) $2ax - 2ay$;

в) $x^4 + 2x^3 - 3x^2$;

д) $-0,6a^3b^4 + 0,4a^2b^3$;

413. а) $2a + 2b + xa + xb$;

в) $x^3 + 2x^2 + x + 2$;

д) $5a^2b + 10a^2 - 20bc - 10b^2c$;

414*. а) $x^2 - 9x + 14$;

б) $8c^4 + 12c^2$;

г) $-8a^3 - 12a^2 + 8a$;

е) $\frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}xz + 2x^2$.

б) $3x - 3y - ax + ay$;

г) $0,1x - 0,2xy + 0,2y - 0,4y^2$;

е) $4x^2z + 25y^3 - 5x^2y - 20y^2z$.

б) $x^2 + 8x + 12$.

Розв'яжіть рівняння:

415. а) $y^2 - 3y = 0$;

в) $0,8x^2 + 2x = 0$;

б) $x^2 + 2x = 0$.

г) $1\frac{3}{8}x^2 = 3\frac{2}{3}x$.

416*. а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

б) $y^2 + 4y + 3 = 0$.

417. Знайдіть значення виразу:

а) $bc + c^2 - 5b - 5c$, якщо $b = 3,6$; $c = 1,4$;

б) $m^2 - mn - 4m + 4n$, якщо $m = 12,5$; $n = 2,5$;

в) $4ay - 4ax - 2x + 2y$, якщо $a = -2$; $x = 0,01$; $y = -6,99$.

418. Доведіть, що значення виразу:

а) $3^{14} - 3^{12}$ ділиться на 8;

б) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.

419*. Доведіть, що значення виразу $2^{42} + 4^{20} + 8^{15} - 16^{12}$ ділиться на 219.

420*. Сума чисел x та y дорівнює 1. Доведіть, що для цих чисел правильною є рівність $x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0$.

421*. Розв'яжіть рівняння $2x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$.

Завдання для самоперевірки № 3

Рівень 1

- Зведіть подібні члени многочлена $x^2 + 3x - x + 1 + 2x^2 - 2$ й укажіть правильну відповідь:
а) $3x^2 + 2$; б) $3x^2 - 2x + 1$; в) $3x^2 + 2x - 1$; г) $3x^2 - 2x - 1$.
- Спростіть вираз $2x^2 - 2x + 5 - (x^2 + 3x - 1)$ й укажіть правильну відповідь:
а) $x^2 + x + 4$; б) $3x^2 + x + 4$; в) $x^2 - 5x + 6$; г) $x^2 - 5x + 4$.
- Виконайте множення $c(3c - 4)$ й укажіть правильну відповідь:
а) $3c - 4c$; б) $3c^2 - 4c$; в) $3c^2 - 4$; г) $4c - 4$.
- Виконайте множення $(a - 1)(2a + 3)$ й укажіть правильну відповідь:
а) $2a^2 + a + 3$; б) $2a^2 - a - 3$; в) $2a^2 + 5a - 3$; г) $2a^2 + a - 3$.
- Розв'яжіть рівняння $2(x - 2) = x$ й укажіть правильну відповідь:
а) 2; б) -4; в) 4; г) $1\frac{1}{3}$.
- У виразі $3x - 3y$ винесіть спільний множник за дужки й укажіть правильну відповідь:
а) $3(x - 3y)$; б) $3(x - y)$; в) $3(x + y)$; г) $3(3x - y)$.

Рівень 2

- Спростіть вираз:
а) $3(4a - 1) - (12a + 3) + 2a$; б) $x^2 - 2x - 8 - (2x^2 + x - 7)$.
- Виконайте множення:
а) $2x^2(3x^2 - x + 1)$; б) $(3a - 2b)(2a - 5b)$.
- Винесіть за дужки спільний множник:
а) $4x - 12x^2$; б) $-20 - 10a$; в) $2a^2b + 4a^3b - 2a^4b$.
- Знайдіть значення виразу $2,5a + a^2$, якщо $a = 7,5$.
- Розв'яжіть рівняння:
а) $x - 2x^2 = 0$; б) $2x^2 + 8x = 0$.

Рівень 3

- Знайдіть різницю многочленів $5x^4 - 4x^3 + 3x - 4$ і $-4x^3 + 4x^2 - 4$.
- Виконайте множення:
а) $2x^3y^2(-1,6x^4y^3 + 3,4x^2y)$; б) $(a - 4b)(2a^2 + ab - 2b^2)$.
- Розв'яжіть рівняння:
а) $2x(x - 1) - x(2x - 3) = 6 - x$; б) $(2x - 3)(3x + 2) = (2x + 3)(x - 2)$.
- Розкладіть на множники:
а) $(m - n)(m - 2n) + 3m - 3n$; б) $a^2m + x^2 - amx - ax$.
- Доведіть, що значення виразу $(k + 5)(k^2 - k + 1) - 4k(k + 1) - k^3 + 3$ ділиться на 8 для кожного цілого значення k .

Рівень 4

17. Перемножте многочлени:

а) $\left(2\frac{1}{3}a^2 - 2\frac{4}{5}ab\right)\left(\frac{3}{7}ab - \frac{5}{7}b^2\right)$; б) $(x+y)(x+2y)(x+3y)$.

18. Обчисліть: $(2^{15} + 3)(2^{14} + 4^7 - 3) - 2^{30}$.

19. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^3 + 6x^2 + 2x + 12 = 0$; б) $(|x| - 1)(2|x| - 3) = 2x^2$.

20. Розкладіть на множники:

а) $\frac{2}{9}a - \frac{2}{9}b + (a-b)^2$; б) $x^2 + (a+2)x + 2a$.

21. Периметри двох прямокутників дорівнюють по 18 см. Ширина та площа першого прямокутника більші від ширини та площі другого прямокутника відповідно на 2 см і 6 см². Знайдіть площу кожного прямокутника.

§ 4. ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

12. Множення різниці двох виразів на їх суму

Помножимо різницю $a - b$ на суму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Одержана тотожність дозволяє множити різницю двох виразів на їх суму не за правилом множення двох многочленів, а скорочено: відразу записувати добуток у вигляді $a^2 - b^2$. Тому доведену тотожність називають *формулою скороченого множення*. Формулюють її так:

Добуток різниці двох виразів та їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Помножимо за цим правилом різницю $2x - 3y$ на суму $2x + 3y$:

$$(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2.$$

З переставної властивості множення випливає, що добуток суми двох виразів та їх різниці теж дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Виконати множення:

а) $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3)$; **б)** $(-a - 2b)(a - 2b)$; **в)** $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$.

• **а)** $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3) = (3a^2)^2 - (5b^3)^2 = 9a^4 - 25b^6$;

б) $(-a - 2b)(a - 2b) = -(a + 2b)(a - 2b) = -(a^2 - 4b^2) = 4b^2 - a^2$;

в) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x^2)^2 - 9^2 = x^4 - 81$. •

Вправа 2. Обчислити: $3,2 \cdot 2,8$.

• $3,2 \cdot 2,8 = (3 + 0,2)(3 - 0,2) = 3^2 - 0,2^2 = 9 - 0,04 = 8,96$. •

Усно

422. Укажіть правильну рівність:

а) $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 - 2b^2$;

б) $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 + 4b^2$;

в) $(a - 2b)(a + 2b) = (a - 2b)^2$;

г) $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 - 4b^2$.

Рівень А



Перемножте многочлени:

423. а) $(k - n)(k + n)$;

б) $(m - 4)(m + 4)$;

в) $(1 - b)(1 + b)$;

г) $(4a + 5b)(4a - 5b)$.

437. Доведіть, що значення виразу $(8n + 5)(8n - 5) - (7n - 5)(7n + 5)$ для кожного цілого значення n ділиться на 15.
438. Доведіть, що значення виразу $(4x + 3)(4x - 3) - (4x - 5)(4x + 5)$ не залежать від значень x .

Розв'яжіть рівняння:

439. а) $(y - 3)(y + 3) + y(2 - y) = 1$; б) $(2x - 0,5)(2x + 0,5) = x(4x - 0,5)$;
в) $x^2 + (-4 - x)(-4 + x) = 8(x + 1)$; г) $(-z^2 + 1)(z^2 + 1) = 1 - z(1 + z^3)$.
440. а) $2x(1 - 8x) + (4x - 1)(4x + 1) = 0$; б) $(2 - 3y)(2 + 3y) = (9y - 2)(2 - y)$.

Рівень В



441. Спростіть вираз:

- а) $(a + b - c)(a - b) + (b + c - a)(b - c) + (c + a - b)(c - a)$;
б) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})$.

442. Доведіть: якщо $a - b = 1$, то $(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) = a^{16} - b^{16}$.

443. Доведіть, що $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$.

444. Розв'яжіть рівняння $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 + x$.

445. Дано квадрат і прямокутник. Довжина прямокутника на 2 см більша, а ширина — на 2 см менша, ніж сторона квадрата. Що більше — площа квадрата чи площа прямокутника?

Вправи для повторення

446. Вкладник вніс до банку 4000 грн. За перший рік йому нарахували 8% річних, а потім банківський відсоток збільшився. У кінці другого року на рахунку вкладника було 4752 грн. Скільки відсотків річних почав нараховувати банк після збільшення ставки?
- 447*. Сплав міді й цинку, загальна маса якого дорівнює 3,6 кг, містить 45% міді. Скільки кілограмів міді потрібно додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, який містив би 60% міді?
448. Замініть степінь добутком і запишіть його у вигляді многочлена:
а) $(a + 1)^2$; б) $(2b - 1)^2$; в) $(5 - 2x)^2$.
449. Запишіть у вигляді виразу:
а) суму квадратів змінних x та y ; б) квадрат суми змінних x та y ;
в) різницю квадратів змінних a і c ; г) квадрат різниці змінних a і c .

Поміркуйте

450. Кожний із 7 гномів має не більше 5 цукерок. Доведіть, що деякі два гноми мають цукерок порівну.

13. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів

1. Квадрат суми двох виразів. Піднесемо до квадрата суму $a + b$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Одержану тотожність називають *формулою квадрата суми*. Вона є формулою скороченого множення, бо дозволяє підносити до квадрата суму довільних двох виразів не за правилом множення двох многочленів, а скорочено: відразу записувати квадрат у вигляді тричлена $a^2 + 2ab + b^2$. Формулюють формулу квадрата суми так:

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

Піднесемо до квадрата суму $2x + 3y$:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

Підносячи суму $2x + 3y$ до квадрата, проміжні перетворення можна виконувати усно:

$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

2. Квадрат різниці двох виразів. Піднесемо до квадрата різницю $a - b$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отже, маємо таку *формулу квадрата різниці*:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів ще називають *квадратом двочлена*.

Квадрати протилежних чисел дорівнюють один одному: $(-a)^2 = a^2$. Тому, підносячи до квадрата вирази $-a - b$ та $-a + b$, можна користуватися формулами:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Для тих, хто хоче знати більше



Щоб піднести суму або різницю двох виразів до куба, можна використовувати *формули куба суми або куба різниці*:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Виведемо ці формули.

$$1. (a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$2. (a - b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Формулюють формулу куба суми так:

Куб суми двох виразів дорівнює кубу першого виразу плюс потроєний добуток квадрата першого виразу і другого плюс потроєний добуток першого виразу і квадрата другого плюс куб другого виразу.

Формулу куба різниці формулюють аналогічно.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Піднести до квадрата вираз:

а) $xy - 2z^2$; **б)** $-3m - n$; **в)** $-x + 5y$; **г)** $a + b - c$.

• **а)** $(xy - 2z^2)^2 = (xy)^2 - 2 \cdot xy \cdot 2z^2 + (2z^2)^2 = x^2y^2 - 4xyz^2 + 4z^4$;

б) $(-3m - n)^2 = (3m + n)^2 = 9m^2 + 6mn + n^2$;

в) $(-x + 5y)^2 = (x - 5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$;

г) $(a + b - c)^2 = ((a + b) - c)^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 = \\ = a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2. \bullet$

Усно

451. Піднесіть до квадрата двочлен:

а) $x + y$; **б)** $x - y$; **в)** $a + 1$; **г)** $a - 1$.

Рівень А



Піднесіть до квадрата:

452. а) $(k + n)^2$;

б) $(b + 2)^2$;

в) $(c - 4)^2$;

г) $(3 + a)^2$;

д) $(5 - b)^2$;

е) $(a + 15)^2$;

е) $(x - 0,5)^2$;

ж) $(1,2 - c)^2$;

з) $(n + 2,5)^2$.

453. а) $(b - c)^2$;

б) $(x + 4)^2$;

в) $(a - 2)^2$;

г) $(3 - n)^2$;

д) $(0,3 + z)^2$;

е) $(1,5 - b)^2$.

454. а) $(2a + 1)^2$;

б) $(2c - 5)^2$;

в) $(3 - 4a)^2$;

г) $(4c - 0,5)^2$;

д) $(2b - 0,5c)^2$;

е) $(5x - 0,2)^2$.

455. а) $(3b - 1)^2$;

б) $(5z + 2)^2$;

в) $(6a + b)^2$;

г) $(4x - 5y)^2$;

д) $(0,3a + 10b)^2$;

е) $(8b - 0,5)^2$.

Спростіть вираз:

456. а) $(a + 1)^2 + (a - 1)^2$;

б) $(b + 2)^2 - 4(b + 1)$;

в) $(5 - 2x)^2 - 25 - 4x^2$;

г) $x^2 - 1 - (x - 1)^2$.

457. а) $(4-b)^2 + 8b - b^2$;

б) $(x+2)^2 + (x-2)^2$.

Розв'яжіть рівняння:

458. а) $(x+2)^2 - x^2 = 8$;

б) $(x-3)^2 - x^2 = 21$.

459. а) $(x-1)^2 - x^2 = 11$;

б) $(x+4)^2 - x^2 = 24$.

Рівень Б



Піднесіть до квадрата:

460. а) $(-b+c)^2$;

б) $(-x-y)^2$;

в) $(-2a+3)^2$;

г) $(-4x+5y)^2$;

д) $(-2m-10n)^2$;

е) $(-2,5a+4)^2$.

461. а) $(-m-n)^2$;

б) $(-b+5)^2$;

в) $(-3x+y)^2$;

г) $(-4c-3d)^2$;

д) $(-k-1,5)^2$;

е) $(-0,5z+2)^2$.

462. а) $(y^2+1)^2$;

б) $(2-x^3)^2$;

в) $(2m-m^2)^2$;

г) $(-4a^2+a)^2$;

д) $(4a^2-ac)^2$;

е) $(-4a^2-3b)^2$.

е) $(-m^2-0,5nk)^2$;

ж) $(3x^2-\frac{2}{3}x)^2$;

з) $(\frac{1}{4}ab+\frac{2}{5}ac)^2$.

463. а) $(a^2+2)^2$;

б) $(2b^3-4)^2$;

в) $(-2x-x^2)^2$;

г) $(-2a^2+5ab)^2$;

д) $(\frac{3}{4}xy-\frac{1}{3})^2$;

е) $(\frac{2}{7}x-2\frac{1}{3}x^2)^2$.

464. а) $(a-b+1)^2$;

б) $(3c-2a+3)^2$;

в) $(3-x-2x^2)^2$.

465. а) $(2-x+y)^2$;

б) $(-2m+1-3n)^2$;

в) $(a^2+5a+4)^2$.

Доведіть тотожність:

466. а) $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$;

б) $(2xy)^2 + (x^2-y^2)^2 = (x^2+y^2)^2$;

в) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

467. а) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$;

б) $(a-b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.

Спростіть вираз:

468. а) $(2a-1)^2 - (2a+1)^2$;

б) $(x^2+1)^2 - x^2(x^2+2)$;

в) $(2n-1)^2 + (2n)^2 + (2n+1)^2$;

г) $(a+b-4)^2 + 8(a+b-2)$.

469. а) $(-a+2b)^2 + (a+2b)^2$;

б) $(x^2-3)^2 + (3x-1)(2x+9)$;

в) $(a-b+1)^2 - 2(1-b)(1+a)$.

Розв'яжіть рівняння:

470. а) $(5x+4)^2 = (1-5x)^2$;

б) $(3x-5)(3x+5) = 7 + (3x-4)^2$;

в) $(2y+3)^2 - (4y-2)(y-6) = 16$;

г) $(3x-1)^2 + (4x-1)^2 = (5x-1)^2$.

471. а) $(2x-3)^2 - 3 = (2x+1)^2 - 11$;

б) $16y^2 - (4y-3)^2 = 15y-90$;

в) $3(x-1)^2 - (2-x)(2+x) = (2x-1)^2$.

Рівень В



472. Піднесіть до куба:

а) $(a + 1)^3$;

б) $(2x - y)^3$;

в) $(3m + 4n)^3$.

473. Спростіть вираз $(a^{10} - b^{10})^2(a^{10} + b^{10})^2 - (a^{20} + b^{20})^2$.

474. Доведіть, що для кожного натурального значення n значення виразу $(5^n + 2)^2 - 2(5^n + 2)(5^n - 2) + (5^n - 2)^2$ ділиться на 16.

475. Доведіть, що вираз $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x + y)^4 + 2xy(x + y)^2$ набуває лише невід'ємних значень.

476. Ціле число при діленні на 7 дає в остачі 3. Яку остачу при діленні на 7 дає квадрат цього числа?

477. Ціле число m не ділиться на 5. Доведіть, що число $m^4 - 1$ ділиться на 5.

478. Число a є квадратом деякого натурального числа. Чи може запис числа a закінчуватися двома пістками?

Вправи для повторення

479. З 10% площі всього поля зібрали 80 ц пшениці. Скільки центнерів пшениці зберуть з решти поля, якщо врожайність на всіх його ділянках однакова?

480. Одне з чисел на 80% більше від іншого. Якщо від більшого числа відняти 3,4, а до меншого додати 2,2, то одержимо однакові результати. Знайдіть ці числа.

481. Подайте у вигляді квадратів числа: 81; 441; 625; 3,24; 0,09; 0,36; $\frac{16}{49}$; $11\frac{1}{9}$.

482. Подайте вираз у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду:

а) $16x^2$;

б) $196c^4$;

в) $0,25b^2c^2$;

г) $\frac{9}{64}x^4y^6z^2$.

483. Розкладіть на множники:

а) $(2x - 3y)(2x + 3y) + 9y^2 + 4x$;

б) $a^6 + 2a^4 + 2a^2 + 4$.

Поміркуйте

484. На кожній клітинці дошки розміру 7×7 сидить жук. У певний момент кожний жук переповзає в одну із сусідніх по діагоналі клітинок. У деяких клітинках може опинитися більше, ніж один жук, а деякі клітинки виявляться порожніми. Доведіть, що порожніх клітинок буде не менше ніж 7.

14. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів

У тотожності $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b).$$

Одержану тотожність називають *формулою різниці квадратів* двох виразів. Формулюють її так:

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суми.

Формула різниці квадратів дає можливість розкласти на множники дво-член $a^2 - b^2$. Її використовують для розкладання на множники різниці квадратів двох довільних виразів. Наприклад:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3).$$

Порівняйте

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	помножили різницю двох виразів на їх суму; результат — многочлен (різниця квадратів двох виразів)
$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$	розклали на множники різницю квадратів двох виразів; результат — добуток різниці виразів та їх суми

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розкласти на множники:

а) $16x^4 - 2,25y^2z^2$;

б) $(4a - b)^2 - a^2$.

• а) $16x^4 - 2,25y^2z^2 = (4x^2)^2 - (1,5yz)^2 = (4x^2 - 1,5yz)(4x^2 + 1,5yz)$;

б) $(4a - b)^2 - a^2 = (4a - b - a)(4a - b + a) = (3a - b)(5a - b)$. •

Вправа 2. Обчислити: $75^2 - 65^2$.

• $75^2 - 65^2 = (75 - 65)(75 + 65) = 10 \cdot 140 = 1400$. •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $(x - 3)^2 - 36 = 0$.

• $(x - 3)^2 - 36 = 0$; $(x - 3)^2 - 6^2 = 0$; $(x - 3 - 6)(x - 3 + 6) = 0$;

$(x - 9)(x + 3) = 0$; $x - 9 = 0$ або $x + 3 = 0$; $x = 9$ або $x = -3$.

Відповідь. 9; -3. •

Усно

485. Розкладіть на множники:

а) $x^2 - y^2$;

б) $p^2 - 4$;

в) $16 - c^2$.

Рівень А



Розкладіть на множники:

486. а) $a^2 - 9$; б) $b^2 - 1$; в) $1 - x^2$; г) $16 - y^2$;
 д) $4z^2 - 36$; е) $49a^2 - 9b^2$; є) $100x^2 - 121y^2$; ж) $9 - a^2b^2$.
 487. а) $b^2 - 25$; б) $9c^2 - 1$; в) $25 - 64y^2$;
 г) $36m^2 - 49n^2$; д) $400 - z^2$; е) $81p^2 - 121q^2$.

Обчисліть:

488. а) $45^2 - 44^2$; б) $81^2 - 71^2$; в) $138^2 - 38^2$; г) $6,7^2 - 3,3^2$.
 489. а) $29^2 - 28^2$; б) $205^2 - 105^2$; в) $78^2 - 22^2$; г) $9,5^2 - 8,5^2$.

Знайдіть значення виразу:

490. $x^2 - y^2$, якщо $x = 42$ і $y = 32$; $x = 2,8$ і $y = 7,2$; $x = 54$ і $y = -46$.
 491. $m^2 - n^2$, якщо $m = 116$ і $n = 16$; $m = 5,7$ і $n = -4,7$.

Розв'яжіть рівняння:

492. а) $x^2 - 4 = 0$; б) $25x^2 - 16 = 0$.
 493. а) $y^2 - 36 = 0$; б) $100x^2 - 49 = 0$.

Рівень Б



Розкладіть на множники:

494. а) $a^4 - b^2$; б) $25m^2 - 64n^8$; в) $36 - 4a^6c^2$;
 г) $0,01 - 6,25x^8y^{10}$; д) $\frac{9}{49}a^2 - 16x^4y^8$; е) $2\frac{7}{9} - 0,81a^4b^8c^{12}$.
 495. а) $4a^8 - 25b^2c^2$; б) $1,96m^{20} - 0,09n^2$; в) $\frac{4}{9}a^8b^4c^2 - 2\frac{1}{4}x^6$.
 496. а) $(a + 2)^2 - 1$; б) $(3b - 1)^2 - 4$; в) $16 - (3b + 2)^2$;
 г) $(2a - 5)^2 - 25b^2$; д) $(4x + 3)^2 - (3x + 2)^2$; е) $(a - 3b)^2 - (3a + 5b)^2$.
 497. а) $(2x - 1)^2 - 9$; б) $4a^2 - (4a + 3)^2$; в) $(4x - y)^2 - (5x - 2y)^2$.

Знайдіть значення виразу:

498. $a^2 - 4b^2$, якщо $a = 3,28$ і $b = 3,36$; $a = 1\frac{4}{7}$ і $b = \frac{2}{7}$.
 499. $9p^2 - q^2$, якщо $p = 2,3$ і $q = -1,9$; $p = \frac{3}{14}$ і $q = \frac{5}{14}$.

Розв'яжіть рівняння:

500. а) $(x + 3)^2 - 1 = 0$; б) $(5y - 2)^2 - 9 = 0$;
 в) $(3z + 5)^2 - 4z^2 = 0$; г) $(2x - 3)^2 - (3x + 3)^2 = 0$.
 501. а) $(2x - 5)^2 - 1 = 0$; б) $(4y - 7)^2 - (y + 2)^2 = 0$.
 502. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:
 а) $4575^2 - 1425^2$ на 1000; б) $843^2 - 257^2$ на 200.

Рівень В



503. Візьмемо два числа a і b , що дорівнюють одне одному: $a = b$. Обидві частини рівності помножимо на a і потім віднімемо від обох частин b^2 . Матимемо:

$$a^2 = ab; \quad a^2 - b^2 = ab - b^2; \quad (a + b)(a - b) = b(a - b).$$

Звідси $a + b = b$. З одержаної рівності, урахувавши, що $a = b$, матимемо:

$$b + b = b; \quad 2b = b; \quad b = \frac{b}{2}.$$

Отже, отримали, що будь-яке число дорівнює своїй половині.

Знайдіть помилку в проведених міркуваннях.

504. Розкладіть на множники:

а) $a^8 - b^8$;

б) $1 - x^{16}$.

505. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4 - 16 = 0$;

б) $x^8 - 1 = 0$;

в) $(x^2 + 4x - 7)^2 - (x^2 + 4x + 7)^2 = 0$.

506. Доведіть, що різниця квадратів двох цілих чисел, одне з яких при діленні на 5 дає в остачі 3, а інше — 2, кратна 5.

Вправи для повторення

507. Обчисліть:

а) $1,8 \cdot \left(0,5 - \frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}\right)$;

б) $4\frac{7}{20} : 1\frac{9}{20} - 20 \cdot \left(3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4}\right)$.

508. Батькові 36 років, а синові — 12.

а) Через скільки років батько буде удвічі старший від сина?

б) Скільки років тому батько був у 5 разів старший від сина?

509. З міста A до міста B , відстань між якими дорівнює 250 км, виїхав автобус. Через 40 хв з міста B назустріч йому виїхав автомобіль, який через 1,5 год руху зустрів автобус. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 20 км/год більша від швидкості автобуса.

510. Піднесіть до квадрата:

а) $(m - 5)^2$;

б) $(3a + 1)^2$;

в) $(4b - 3)^2$;

г) $(-2a - 5b)^2$.

Поміркуйте

511. Кожна точка площини має червоний або чорний колір. Доведіть, що на цій площині знайдуться дві точки одного кольору, відстань між якими дорівнює 1 см.

15. Розкладання многочленів на множники з використанням формул квадрата суми і квадрата різниці

Запишемо формули квадрата суми і квадрата різниці двох виразів (квадрата двочлена), помінявши в них ліві та праві частини:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b);$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b).$$

Перша із цих формул дає розклад на множники тричлена $a^2 + 2ab + b^2$, а друга — тричлена $a^2 - 2ab + b^2$. Наприклад:

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 = (x + 5)^2.$$

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розкласти на множники тричлен $9a^2 - 24ab + 16b^2$.

• $9a^2 - 24ab + 16b^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = (3a - 4b)^2$. •

Вправа 2. Знайти значення виразу $x^2 + 8x + 16$, якщо $x = 16$; $x = -11$.

• Запишемо спочатку тричлен $x^2 + 8x + 16$ у вигляді квадрата двочлена:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2.$$

Якщо $x = 16$, то: $(x + 4)^2 = (16 + 4)^2 = 20^2 = 400$.

Якщо $x = -11$, то: $(x + 4)^2 = (-11 + 4)^2 = (-7)^2 = 49$. •

Усно

512. Розкладіть на множники:

а) $x^2 + 2xy + y^2$;

б) $x^2 - 2xb + b^2$;

в) $x^2 + 2x + 1$.

Рівень А



Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

513. а) $p^2 + 2pq + q^2$;

б) $c^2 - 2c + 1$;

в) $b^2 + 4b + 4$;

г) $x^2 - 6x + 9$;

д) $36 + 12b + b^2$;

е) $25 + z^2 - 10z$.

514. а) $4a^2 - 4a + 1$;

б) $16x^2 + 8x + 1$;

в) $1 - 14b + 49b^2$;

г) $4x^2 + 12x + 9$;

д) $25b^2 - 20b + 4$;

е) $-40b + 16 + 25b^2$.

515. а) $4x^2 + 4xz + z^2$;

б) $m^2 - 6mn + 9n^2$;

в) $16a^2 - 8ab + b^2$;

г) $4c^2 + 12ca + 9a^2$;

д) $49x^2 - 28xy + 4y^2$;

е) $25p^2 + 9q^2 - 30pq$.

516. а) $x^2 + 4x + 4$; б) $a^2 - 10a + 25$; в) $16 - 8b + b^2$;
 г) $9k^2 - 6k + 1$; д) $4b^2 + 16b + 16$; е) $64 - 80s + 25s^2$;
 є) $16a^2 + 8ab + b^2$; ж) $25m^2 - 20mn + 4n^2$; з) $9b^2 + 16c^2 - 24bc$.

Знайдіть значення виразу:

517. а) $x^2 - 4x + 4$, якщо $x = 12$; $x = 2,1$; $x = -18$;
 б) $9a^2 - 6a + 1$, якщо $a = 7$; $a = -33$.
 518. $4a^2 + 4a + 1$, якщо $a = 4,5$; $a = -5,5$.

Рівень Б



Розкладіть на множники:

519. а) $0,25m^2 + 2mn + 4n^2$; б) $0,36c^2 - 0,6cx + 0,25x^2$;
 в) $6,25x^2 + 1,5xyz + 0,09y^2z^2$; г) $196a^4x^4 - 2,8a^2b^2x^2y^4 + 0,01b^4y^8$;
 д) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; е) $a^2 - 2\frac{2}{3}a + 1\frac{7}{9}$.
 520. а) $0,01a^2 + 4ab + 400b^2$; б) $0,64x^2 - 0,32xy + 0,04y^2$;
 в) $1,44m^4n^2 - 1,2m^2nk^3 + 0,25k^6$; г) $p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{36}$.

Знайдіть значення виразу:

521. а) $4x^2 + 4xy + y^2$, якщо $x = \frac{1}{7}$; $y = \frac{5}{7}$;
 б) $a^2 - 3a + 2,25$, якщо $a = 11,5$; $a = -7,5$.
 522. $m^2 - 6mn + 9n^2$, якщо $m = \frac{2}{3}$; $n = \frac{1}{3}$.

Розв'яжіть рівняння:

523. а) $x^2 - 8x + 16 = 0$; б) $y^2 + 12y + 36 = 0$.
 524. а) $z^2 - 6z + 9 = 0$; б) $x^2 + 10x + 25 = 0$.

Рівень Б



525. Знайдіть таке число b , для якого даний вираз є квадратом двочлена:

- а) $64x^2 + 80x + b$; б) $b + \frac{2}{45}y^2 + 0,04y^4$.

526. Подайте многочлен у вигляді суми квадратів двох виразів:

- а) $2y^2 + 2y + 1$; б) $a^4 + 3a^2 + 1$;
 в) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$; г) $m^2 + 2mn + 2n^2 + 2n + 1$.

527. Подайте многочлен $9x^2 + 6xy + 2y^2 + 4y + 4$ у вигляді суми квадратів двох виразів. Для яких значень x та y значення цього многочлена дорівнює нулю?

528. Розв'яжіть рівняння $(x^2 + 4x + 4)^2 - (x + 2)^4 = 0$.

Вправи для повторення															
-----------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

529. Швидкість велосипедиста у 2,5 разу більша від швидкості пішохода. За 2 год пішохід долає відстань, що на 2,5 км менша за відстань, яку долає велосипедист за 1 год. Знайдіть швидкість пішохода.

530. Для яких значень x значення виразу $(2x + 1)^2 - 4(x^2 + 3x)$ дорівнює: 1; -1 ?

531. Запишіть у вигляді виразу:

а) куб суми чисел m і n ;

б) суму кубів чисел m і n ;

в) куб різниці чисел a і c ;

г) різницю кубів чисел a і c .

532. Запишіть у вигляді куба вираз:

а) $8x^3$;

б) $-8x^3$;

в) $64a^9$;

г) $-0,027a^6b^{12}$.

533. Перемножте многочлени:

а) $(x + 4)(x^2 + 2x - 3)$;

б) $(a - 2b)(a^2 - 2ab + 2b^2)$.

Поміркуйте															
------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

534. У першій чашці є кава, у другій — стільки ж молока. З першої чашки в другу перелили ложечку кави, потім таку ж ложечку суміші перелили з другої чашки в першу. Чого більше: молока в першій чашці чи кави у другій?

16. Різниця і сума кубів двох виразів

Різницю квадратів двох виразів можна розкласти на множники за формулою різниці квадратів: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$. Розкладаючи на множники різницю кубів двох виразів, використовують *формулу різниці кубів*:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Доведемо цю тотожність, перемноживши вирази $a - b$ і $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{a^2b} - \underline{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3.$$

У формулі різниці кубів тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають *неповним квадратом суми виразів a і b* (він нагадує тричлен $a^2 + 2ab + b^2$, який є «повним» квадратом суми виразів a і b). Отже, формулу різниці кубів можна сформулювати так:

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Розкладаючи на множники суму кубів двох виразів, використовують формулу суми кубів:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Доведемо цю тотожність:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2b} - \underline{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3.$$

Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають *неповним квадратом різниці* виразів a і b . Отже,

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розкласти на множники:

а) $a^3 - 64$; б) $27a^3 + 125b^3$; в) $-x^3 - y^6$.

• а) $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a - 4)(a^2 + 4a + 16)$;

б) $27a^3 + 125b^3 = (3a)^3 + (5b)^3 = (3a + 5b)(9a^2 - 15ab + 25b^2)$;

в) $-x^3 - y^6 = -(x^3 + (y^2)^3) = -(x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4)$. •

Усно

535. Назвіть неповний квадрат різниці виразів:

а) x та y ; б) c і d ; в) p і 1 ; г) 2 і c .

536. Назвіть неповний квадрат суми виразів:

а) m і n ; б) p і q ; в) a і 1 ; г) 3 та x .

537. Розкладіть на множники: а) $x^3 - y^3$; б) $m^3 + n^3$.

Рівень А



Розкладіть на множники:

538. а) $p^3 - q^3$; б) $b^3 - 1$; в) $x^3 - 27$; г) $64 - y^3$;

д) $b^3 + c^3$; е) $a^3 + 8$; є) $1 + y^3$; ж) $125 + b^3$.

539. а) $m^3 - n^3$; б) $b^3 - 8$; в) $27 - a^3$; г) $1 - z^3$;

д) $x^3 + y^3$; е) $k^3 + 64$; є) $p^3 + 1$; ж) $27 + c^3$.

540. а) $27x^3 - 1$; б) $1 + 64b^3$; в) $8a^3 - 27$; г) $125 - 27y^3$;

д) $64m^3 - 27$; е) $b^3 + \frac{1}{8}$; є) $\frac{1}{27}y^3 - 1$; ж) $\frac{1}{8}x^3 + 1$.

541. а) $m^6 - n^3$; б) $a^9 + b^6$; в) $a^6 + c^6$; г) $x^{12} - y^9$.

542. а) $8z^3 + 1$; б) $1 - 125p^3$; в) $27x^3 + 64$; г) $125c^3 - 8$;
 д) $\frac{1}{8}a^3 - 1$; е) $27m^3 + \frac{1}{27}$; є) $y^3 - x^9$; ж) $p^6 + q^{12}$.

Рівень Б



543. Запишіть у вигляді добутку:

- а) $-a^3 + 8$; б) $-b^3 - c^3$; в) $-27 + y^3$; г) $-64 - z^3$.

Розкладіть на множники:

544. а) $64a^3 - 27b^3$; б) $\frac{1}{64}p^3 - 8q^3$; в) $27a^6 - 125$;
 г) $0,001a^6 - b^3c^3$; д) $8x^9 + 125y^6$; е) $1000 - a^3b^9c^{12}$.
 545. а) $216b^3 - 27c^3$; б) $125m^3 + \frac{64}{125}n^6$; в) $0,064x^9y^6z^3 - 27$.

Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

546. а) $921^3 - 821^3$ на 100; б) $57^3 + 28^3$ на 85.
 547. а) $27^3 + 37^3$ на 64; б) $75^3 - 46^3$ на 29.

Спростіть вираз:

548. а) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + b^3$;
 б) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + 1$;
 в) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - a^6 - b^6$;
 г) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$.
 549. а) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 27$; б) $(b - 1)(b^2 + b + 1) + (b + 1)(b^2 - b + 1)$.

Розв'яжіть рівняння:

550. а) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 4x$; б) $(y^2 - 3y + 9)(y + 3) = 6y + y^3$.
 551. а) $(1 - x)(1 + x + x^2) = x - x^3$; б) $-8z + z^3 = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)$.

Рівень В



552. Доведіть тотожність:

- а) $(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 3a - 3b + 3) = (a + 1)^3 + (b - 1)^3$;
 б) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;
 в) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;
 г) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

553. а) $124^5 - 74^5$ на 50; б) $87^5 + 88^5$ на 175.

Вказівка. Використайте тотожності в) і г) задачі 552.

554. а) $6^{10} + 8^{10}$ на 100; б) $3^{15} - 2^{20}$ на 11.

555. Сума і добуток двох чисел дорівнюють відповідно 3,5 і 3. Знайдіть суму кубів цих чисел.

Вправи для повторення

556. Спростіть вираз:

а) $(2x - y)(x - 2y) + 5xy$;

б) $(3a - b)(-a + 3b) + 3(a^2 + b^2)$;

в) $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1) - (a^2 + 1)^2$.

557. Обчисліть:

а) $4^{10} - (4^5 + 3)(4^5 - 3)$;

б) $2^{12} \cdot 3^{12} - 4 - (6^6 + 4)(6^6 - 4)$.

558. Поїзд затримали на станції A на 10 хв, однак він надолужив згаяний час на перегоні між станціями A і B , пройшовши його зі швидкістю 105 км/год, замість запланованої швидкості 90 км/год. Знайдіть відстань між станціями A і B .

Поміркуйте

559. На майданчику граються 5 хлопчиків. Кожний з них серед інших 4 хлопчиків має не менше 2 братів. Доведіть, що всі хлопчики є братами.

174 Застосування кількох способів

для розкладання многочленів на множники

Часто, розкладаючи многочлен на множники, потрібно використати кілька способів. Якщо це можливо, то розкладання доречно починати з винесення спільного множника за дужки.

Розглянемо кілька прикладів.

1. Розкладемо на множники многочлен $7a^2b^2 - 7b^4$.

$$7a^2b^2 - 7b^4 = 7b^2(a^2 - b^2) = 7b^2(a - b)(a + b).$$

Спочатку винесли спільний множник $7b^2$ за дужки, а потім застосували формулу різниці квадратів.

2. Розкладемо на множники многочлен $6ac - 9c - 24abc + 36bc$.

Усі члени многочлена мають спільний множник $3c$. Винесемо його за дужки:

$$6ac - 9c - 24abc + 36bc = 3c(2a - 3 - 8ab + 12b).$$

Многочлен $2a - 3 - 8ab + 12b$ розкладемо на множники способом групування:

$$2a - 3 - 8ab + 12b = (2a - 3) - 4b(2a - 3) = (2a - 3)(1 - 4b).$$

Отже,

$$6ac - 9c - 24abc + 36bc = 3c(2a - 3)(1 - 4b).$$

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розкласти на множники тричлен:

а) $x^2 - 6x - 16$;

б) $a^2 + 2ab - 8b^2$.

• а) Якщо до виразу $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x$ додати 3^2 , тобто 9, то одержимо вираз $x^2 - 6x + 9$, який є квадратом двочлена $x - 3$. Тому, виділивши квадрат цього двочлена, матимемо:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 16 &= x^2 - 6x + 9 - 9 - 16 = (x - 3)^2 - 25 = (x - 3)^2 - 5^2 = \\ &= (x - 3 - 5)(x - 3 + 5) = (x - 8)(x + 2). \end{aligned}$$

б) $a^2 + 2ab - 8b^2 = a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - 8b^2 = (a + b)^2 - 9b^2 =$
 $= (a + b - 3b)(a + b + 3b) = (a - 2b)(a + 4b).$ •

Вправа 2. Розкласти на множники многочлен $m^2 - 4n^2 - mk - 2nk$.

• $m^2 - 4n^2 - mk - 2nk = m^2 - (2n)^2 - (mk + 2nk) =$
 $= (m - 2n)(m + 2n) - k(m + 2n) = (m + 2n)(m - 2n - k).$ •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $18x^3 - 2x = 0$.

• Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$18x^3 - 2x = 2x(9x^2 - 1) = 2x(3x - 1)(3x + 1).$$

Маємо рівняння

$$2x(3x - 1)(3x + 1) = 0,$$

звідки: $x = 0$, або $3x - 1 = 0$, або $3x + 1 = 0$; $x = 0$, або $x = \frac{1}{3}$, або $x = -\frac{1}{3}$.

Відповідь. 0; $\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{3}$. •

Рівень А



Розкладіть на множники:

560. а) $7a^2 - 7b^2$;

б) $km^2 - kn^2$;

в) $9x^2 - 36$;

г) $4a^3 - 4a$;

д) $x^4 - x^2$;

е) $ca^2 - 9cb^2$;

є) $2a^3 - 2b^3$;

ж) $27c + b^3c$.

561. а) $5p^2 - 5q^2$;

б) $3b^2 - 27$;

в) $24 - 6a^2$;

г) $3y^4 - 3y^2$;

д) $18xy^2 - 2x$;

е) $4k^3 + 32$;

є) $6a - 6ab^3$;

ж) $a^3 - a^5$.

562. а) $3p^2 + 6pq + 3q^2$;

б) $-b^2 + 2bc - c^2$;

в) $81 - 54b + 9b^2$;

г) $2xb^2 + 8xb + 8x$;

д) $9a^3 + 6a^2 + a$;

е) $m - 10m^2 + 25m^3$.

563. а) $4x^2 + 8x + 4$;

б) $n - 14nc + 49nc^2$;

в) $-6a^2 + 24ab - 24b^2$;

г) $x^3 - 12x^2 + 36x$.

579. а) $a^2 - b^2 + (a - b)^2$, якщо $a = 5\frac{1}{6}$; $b = 2\frac{1}{6}$;

б) $(m - 2)^2 + m^2 - 4$, якщо $m = 102$.

Розв'яжіть рівняння:

580. а) $x^3 - x = 0$;

в) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$;

д) $x^4 - x^3 - x^2 + x = 0$;

581. а) $x^3 - 4x = 0$;

в) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$;

б) $1,6y^3 - 0,4y = 0$;

г) $2z^3 - z^2 = 8z - 4$;

е) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

б) $1,2z^3 - 0,3z = 0$;

г) $4y^3 - y^2 = 4y - 1$.

Рівень В



Розкладіть на множники:

582. а) $x^2 + 2x - 8$;

в) $4c^2 - 4c - 3$;

д) $a^2 + 12ab + 11b^2$;

583. а) $2a^2 + a - 4ab - b + 2b^2$;

584. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 8x + 7 = 0$;

в) $(x - 1)^2 - 6(x - 1) + 8 = 0$;

585. Доведіть тотожність:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2).$$

586. Доведіть, що значення виразу $3^{34} + 9^{92} - 3^{30} - 9^{90}$ ділиться на 80.

587. Доведіть, що значення виразу $11^{10} + 4 \cdot 7^{49} + 11^{11} - 4 \cdot 7^{48}$ ділиться на 12.

588. Доведіть, що рівність $a^3 + b^2 = ab(a + 1)$ є правильною тільки тоді, коли $b = a$ або $b = a^2$.

Вправи для повторення

589. Подайте у вигляді многочлена:

а) $(3a + 2b)(4a - b) + 2b^2$;

б) $2x(y + 15x) + (x - 6y)(5y + 2x)$.

590. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{5}{6}x + \frac{2}{9}x = 38$;

б) $2\frac{3}{8} + \frac{1}{8}x = \frac{1}{5} - \frac{3}{5}x$.

591. Запишіть у вигляді виразу:

а) подвоєний добуток змінної a та суми змінних m і n ;

б) різницю квадратів виразів $a - 1$ і bc .

592. Маса сплаву міді й цинку дорівнює 4,2 кг. Знайдіть масу міді, якщо її у сплаві на 10% більше, ніж цинку.

593. До сплаву міді й олова, загальна маса якого дорівнює 2 кг, додали 200 г міді й одержали новий сплав, у якому міді стало в 1,2 разу більше, ніж олова. Скільки відсотків міді містив перший сплав?

Поміркуйте

594. Жук повзає по ребрах куба. Чи зможе він послідовно обійти всі ребра, проходячи по кожному ребру рівно один раз?

Для тих, хто хоче знати більше



18. Застосування перетворень виразів

Нам уже траплялося чимало завдань, для розв'язання яких потрібно було перетворювати той чи інший вираз. Здебільшого ми використовували перетворення виразів, коли розв'язували рівняння, доводили тотожності, знаходили значення виразів. Розглянемо ще деякі задачі, пов'язані з перетвореннями виразів.

1. Порівняння значень многочлена з нулем.

Приклад 1. Довести, що многочлен $x^2 - 8x + 18$ набуває лише додатних значень.

- Виділивши із тричлена $x^2 - 8x + 18$ квадрат двочлена, матимемо:

$$x^2 - 8x + 18 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 18 = (x - 4)^2 + 2.$$

Ми подали многочлен у вигляді суми двох доданків $(x - 4)^2$ і 2. Доданок $(x - 4)^2$ для будь-яких x набуває лише невід'ємних значень, доданок 2 — додатний. Тому вираз $(x - 4)^2 + 2$ набуває лише додатних значень. Оскільки $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 + 2$, то й вираз $x^2 - 8x + 18$ набуває лише додатних значень. •

2. Знаходження найбільшого і найменшого значень виразів.

Виходячи з рівності $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 + 2$, одержаної у прикладі 1, можна вказати найменше значення многочлена $x^2 - 8x + 18$. Воно дорівнює 2, до того ж, цього найменшого значення многочлен набуває, якщо $x = 4$.

Приклад 2. Знайти найбільше значення многочлена $-x^2 + 4x + 1$.

- Перетворимо даний многочлен так:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 1 &= -(x^2 - 4x - 1) = -(x^2 - 4x + 4 - 4 - 1) = \\ &= -((x - 2)^2 - 5) = -(x - 2)^2 + 5. \end{aligned}$$

Найбільше значення многочлена дорівнює 5. •

3. Розв'язування задач на подільність.

Приклад 3. Довести, що значення виразу $(2n + 3)^2 - (2n - 3)(2n + 5)$ ділиться на 8 для будь-якого цілого значення n .

- Спростимо даний вираз:

$$\begin{aligned} (2n + 3)^2 - (2n - 3)(2n + 5) &= 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 10n - 6n - 15) = \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n + 15 = 8n + 24 = 8(n + 3). \end{aligned}$$

Рівень Б



Доведіть, що вираз набуває лише від'ємних значень:

603. а) $-(a^2 - 2a + 4)$;

б) $-x^2 + 4x - 5$.

604. а) $-(x^2 - 2x + 2)$;

б) $-y^2 + 2y - 4$.

Знайдіть найменше значення виразу та значення змінної, для якого вираз набуває найменшого значення:

605. а) $x^2 - 4x + 4$;

б) $x^2 + 4x + 7$.

606. а) $a^2 + 6a + 9$;

б) $x^2 - 6x + 10$.

Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу ділиться на дане число:

607. а) $(n - 2)^2 + 3n^2$ на 4;

б) $(n - 2)(2n - 7) - 2n^2 - 3$ на 11.

608. $(n + 2)^2 - n(n - 2) + 2$ на 6.

Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу не ділиться на дане число:

609. а) $(n - 5)^2 + (2n - 3)(2n + 8)$ на 5; б) $(n - 3)(n^2 - 3) - (n^3 - 1)$ на 3.

610. $(n + 3)^2 - (n - 3)^2 + 3$ на 12.

611. Доведіть, що значення виразу $5^{33} - 5^{30}$ ділиться на 124.

Рівень В



612. Знайдіть найбільше значення виразу та значення змінної, для якого вираз набуває найбільшого значення:

а) $-x^2 + 2x - 8$;

б) $-a^2 - 4a + 3$.

613. Чи може значення виразу $a^2 - 4a + 7$ дорівнювати 1?

Розв'яжіть рівняння:

614. а) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

б) $x^2 - x - 12 = 0$.

615. а) $(x - 1)^2 + (x - 3)^2 = 0$;

б) $(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^4 = 0$.

616. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

а) $3^{10} + 9^6$ на 10;

б) $2^{20} + 2^{25} - 2^{22}$ на 29.

617. Доведіть, що не існує чисел x та y , для яких виконувалася б рівність:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$;

б) $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 3 = 0$.

618. Запишіть число 4 у вигляді суми таких двох доданків, щоб їх добуток був найбільшим.

Вправи для повторення

619. Довжина прямокутника дорівнює n м, а ширина на k м менша. Запишіть у вигляді виразів периметр та площу прямокутника.

620. Турист деяку відстань проплив моторним човном проти течії річки за 1,2 год, а назад повертався плотом протягом 7,2 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 21 км/год.
621. Поле, площа якого дорівнює 568 га, поділено на 3 ділянки так, що площа третьої ділянки на 52 га менша від суми площ перших двох ділянок, а площа першої ділянки відноситься до площі другої як 2 : 3. Знайдіть площу кожної ділянки.
622. Для яких значень коефіцієнта a рівняння $ax = 3$ має єдиний корінь? Чи існує таке значення a , для якого це рівняння не має коренів?

Поміркуйте

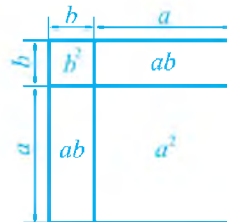
623. Чи можна всі натуральні числа від 1 до 49 розбити на кілька груп так, щоб у кожній групі найбільше число дорівнювало сумі інших чисел групи?

Цікаво знати

Античні математики використовували формули скороченого множення задовго до нашої ери. На той час формули подавалися не у звичному нам символічному вигляді, а формулювалися словами.

Учені Давньої Греції алгебраїчні твердження, формули, що виражають певні залежності між величинами, трактували геометрично. Так, добуток ab вони розглядали як площу прямокутника зі сторонами a та b .

Наведемо приклад алгебраїчного твердження, яке було відомим давньогрецьким ученим, і яке в геометричній термінології формулювали так: *площа квадрата, побудованого на сумі двох відрізків, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на кожному з цих відрізків, плюс подвоєна площа прямокутника, побудованого на цих відрізках.*



Не важко здогадатися, що йдеться про формулу квадрата суми, яку ми зараз символічно записуємо так:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Запитання і вправи для повторення § 4

1. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів та їх суми?
 2. Запишіть і прочитайте формулу квадрата суми двох виразів; квадрата різниці двох виразів.
 3. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
 4. Наведіть приклад тричлена, який можна записати у вигляді квадрата суми; квадрата різниці.
 5. Чому дорівнює сума кубів двох виразів?
 6. Чому дорівнює різниця кубів двох виразів?
 7. Які способи розкладання многочленів на множники вам відомі?
624. Виконайте множення:
- а) $(5 - a)(5 + a)$; б) $(3b + 2a)(3b - 2a)$; в) $(x + y^2)(x - y^2)$;
 г) $(-c + 0,4)(0,4 + c)$; д) $(-m - 5n)(m - 5n)$; е) $(ab + 2a^2)(ab - 2a^2)$.
625. Піднесіть до квадрата:
- а) $(a - 2b)^2$; б) $(3x + 2x^2)^2$; в) $(-0,5ab - 2c)^2$.
626. Спростіть вираз:
- а) $(a - 6)(a + 6) + (3 - a)(3 + a)$;
 б) $(3x^2 - 1)(3x^2 + 1) - (1 - 3x^2)^2$;
 в) $(5a - 2b)^2 + (2a + 5b)^2 - 29b^2$;
 г) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$;
 д) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) + a^8 + b^8$.
627. Доведіть тотожність:
- а) $(a + b)(a - b) - (a - c)(a + c) = (c - b)(c + b)$;
 б) $(n + 1)^2 + (n + 5)^2 - 3 = (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + 3$;
 в) $(m - 2)(m + 2)(m^2 + 4)(m^4 + 16) = m^8 - 256$.
628. Обчисліть:
- а) $96 \cdot 104$; б) $52 \cdot 48$; в) $19,8 \cdot 20,2$; г) $7,5 \cdot 8,5$.
629. Розв'яжіть рівняння:
- а) $(x - 3)(x + 3) - x(x + 2) = 1$; б) $(2x + 5)^2 = (2x - 3)^2$;
 в) $\left(\frac{1}{5} + 10x\right)^2 - 4\left(\frac{1}{5} + 25x^2\right) = 0$; г) $(5x + 3)(5x - 3) + 9\frac{1}{9} = (5x - 1)^2$.
630. Доведіть, що для кожного цілого значення n значення виразу:
- а) $(2n + 1)(2n - 1) - (n + 1)^2 - n - 1$ ділиться на 3;
 б) $(2n + 7)(8n - 8) - (4n + 5)^2$ не ділиться на 6.
631. Доведіть, що значення виразу $(k - 2)^2 + (k + 2)^2 - 2(k - 4)(k + 4)$ не залежать від значень k .

Розкладіть на множники:

632. а) $3a^2 - 3$; б) $x^3 - 4x$; в) $x^4y^2 - x^2y^4$;
 г) $1,44a^2 - b^4$; д) $(c^2 + 1)^2 - 4c^2$; е) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$;
 є) $25m^2 - (4m - 4)^2$; ж) $x^2 - y^2 - x - y$; з) $2a^2 - 2b^2 - (a - b)^2$.
 633. а) $a^3 - 64$; б) $x^3 + 8z^3$; в) $(x + 2)^3 - y^3$.
 634. а) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$; б) $z^4 + z^3 - 8z - 8$; в) $2x^4 - 2x^3 - 2x + 2$.
 635*. а) $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$; б) $x^4 + 4$.

Розв'яжіть рівняння:

636. а) $x^3 - 9x = 0$; б) $y(y^2 + 3) = 4y$;
 в) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$; г) $2z^3 + 3z^2 = 2z + 3$.
 637*. а) $x^2 - 4x + 4 + 2(x - 1)^2 = 0$; б) $(x^2 + 1)^2 + (x^2 - x)^2 = 1$;
 в) $|x(x - 1)| + x^2 - 2x + 1 = 0$.

Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

638. а) $401^2 - 199^2$ на 600; б) $85^3 - 48^3$ на 37;
 в) $58^3 + 42^3$ на 100; г) $7^{33} + 7^{31}$ на 50.
 639. а) $8^{25} - 64^{12}$ на 7; б) $16^9 - 32^8 + 8^{12}$ на 7.
 640. Доведіть, що вираз $x^2 - 14x + 50$ набуває лише додатних значень.
 641. Доведіть, що вираз $4x - x^2 - 5$ набуває лише від'ємних значень.
 642. Знайдіть найменше значення виразу:
 а) $x^2 + 8x + 17$; б) $a^2 - 8ac + 16c^2 + 16$.
 643. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних цілих чисел є непарним числом.
 644. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться на 8.
 645*. Доведіть, що значення виразу $15^{10} - 15^3 + 225^6 - 211^3$ ділиться на 226.
 646*. Доведіть, що різниця квадратів двох цілих чисел, які не діляться на 3, кратна 3.
 647*. Доведіть, що не існує чисел x та y , для яких виконувалася б рівність:
 а) $x^2 + y^4 - 4x - 2y^2 + 7 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 4xy - 2x + 3 = 0$.

Завдання для самоперевірки № 4

Рівень 1

- Виконайте множення $(a - x)(a + x)$ та вкажіть правильну відповідь:
 а) $a^2 - 2ax + x^2$; б) $a^2 + 2ax + x^2$; в) $a^2 + x^2$; г) $a^2 - x^2$.
- Піднесіть до квадрата $(b - 4)^2$ та вкажіть правильну відповідь:
 а) $b^2 - 4b + 16$; б) $b^2 - 16$; в) $b^2 - 8b + 16$; г) $b^2 + 8b + 16$.
- Розкладіть на множники многочлен $y^2 - 9$ та вкажіть правильну відповідь:
 а) $(y - 9)(y + 9)$; б) $(y - 3)(y - 3)$; в) $(y - 3)(y + 3)$; г) $(y + 3)(y + 3)$.

4. Обчисліть $85^2 - 15^2$ та вкажіть правильну відповідь:
 а) 140; б) 4900; в) 7000; г) 6125.
5. Подайте тричлен $x^2 + 4x + 4$ у вигляді квадрата двочлена та вкажіть правильну відповідь:
 а) $(x - 2)^2$; б) $(x + 4)^2$; в) $(x - 4)^2$; г) $(x + 2)^2$.
6. Подайте тричлен $a^2 - 10a + 25$ у вигляді квадрата двочлена та вкажіть правильну відповідь:
 а) $(a - 10)^2$; б) $(a - 5)^2$; в) $(a - 3)^2$; г) $(a + 5)^2$.

Рівень 2

7. Спростіть вираз $(3 - a)(3 + a) + (1 - a)^2$ та знайдіть його значення, якщо $a = 0,5$.
8. Піднесіть до квадрата:
 а) $(4 + 3b)^2$; б) $(2a - 5)^2$.
9. Розв'яжіть рівняння:
 а) $(x - 2)^2 - x^2 = 12$; б) $(x + 3)(x - 3) - x^2 = 3x$.
10. Розкладіть на множники:
 а) $9y^2 - 16$; б) $3x^2 - 3y^2$; в) $27a^3 - b^3$.
11. Подайте у вигляді квадрата двочлена:
 а) $9a^2 + 12a + 4$; б) $100a^2 - 20ab + b^2$.

Рівень 3

12. Спростіть вираз:
 а) $(2x - 7y)^2 + (2x + 7y)^2 - 8x^2$; б) $(2 - 3b^2)(3b^2 + 2) + (3b^2 - 1)^2$.
13. Доведіть тотожність $(a + 1)(a - 1)(a^2 + 1) - (a^2 - 1)^2 - 2a^2 = -2$.
14. Розкладіть на множники:
 а) $a^6 - 4b^4$; б) $0,001a^3 - 27b^3$; в) $0,8a^3 + 0,4a^2 + 0,4a^4$.
15. Доведіть, що вираз $-x^2 + 10x - 27$ набуває лише від'ємних значень.
16. Розв'яжіть рівняння:
 а) $-(2x + 3)^2 + (x + 5)(2x + 5) = 16$; б) $x^2 - 2x - 35 = 0$.

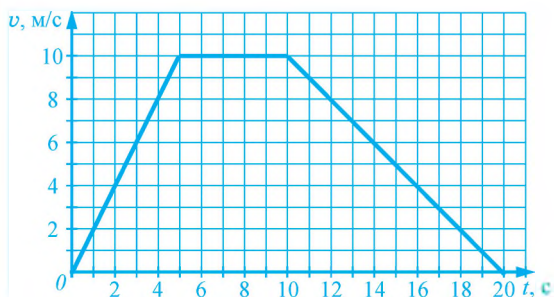
Рівень 4

17. Спростіть вираз:
 а) $((x + 2y^2)(x - 2y^2))^2 - 16y^8$; б) $(a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$.
18. Розкладіть на множники:
 а) $m^3 - n^3 + 3m^2 + 3mn + 3n^2$; б) $a^2 + b^2 + c^2 - x^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.
19. Розв'яжіть рівняння:
 а) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 + 4x$; б) $x^3 - 9 = x - 9x^2$.
20. Цілі числа n та m при діленні на 5 дають в остачі 3 та 4 відповідно. Доведіть, що число $n^2 + m^2$ ділиться на 5.
21. Доведіть, що многочлен $4x^2 + a^2 - 4x + 1$ набуває лише невід'ємних значень.

Розділ II. ФУНКЦІЇ

Усе в природі змінюється і розвивається. Вивчаючи явища, пов'язані з цією невід'ємною рисою природи, учені дійшли до понять змінної величини і функції.

У даному розділі ми з'ясуємо, що таке функція, графік функції, що таке лінійна функція та які її властивості.



§ 5. ФУНКЦІЇ

19. Функція. Способи задання функції

1. Функції та способи їх задання. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр — P см. Знаючи сторону a , за формулою $P = 4a$ можна знайти відповідне їй значення периметра P . Наприклад,

якщо $a = 6$, то $P = 4 \cdot 6 = 24$;

якщо $a = 0,1$, то $P = 4 \cdot 0,1 = 0,4$;

якщо $a = 2,5$, то $P = 4 \cdot 2,5 = 10$.

Бачимо, що значення периметра *залежать* від того, яких значень ми надавали довжині сторони квадрата. Зауважимо також, що кожному значенню довжини сторони відповідає одне певне значення периметра. Так, значенню $a = 6$ відповідає значення $P = 24$, значенню $a = 0,1$ — значення $P = 0,4$.

У даному прикладі маємо дві залежні змінні a і P — довжину сторони квадрата і його периметр. Значення змінної a можна вибрати довільно, а значення змінної P залежать від вибраних значень a . Тому a називають *незалежною змінною*, а P — *залежною змінною*.

Розглянемо ще один приклад залежності між величинами.

Водій вирішив простежити за лічильником, який шлях він проїде за 1 год, 2 год, 3 год, 4 год, 4,5 год, 5 год. Результати спостережень він записав у вигляді таблиці:

t , год	1	2	3	4	4,5	5
S , км	82	170	225	300	335	380

У даному прикладі маємо дві змінні: час t і шлях S , пройдений за цей час. Значення шляху залежать від значень часу. До того ж, кожному значенню часу відповідає одне певне значення шляху. Так, часу $t = 2$ відповідає значення шляху $S = 170$, часу $t = 4,5$ — значення шляху $S = 335$. У даному випадку t є незалежною змінною, а S — залежною змінною.

У математиці, як правило, незалежну змінну позначають буквою x , а залежну змінну — буквою y . У розглянутих прикладах кожному значенню незалежної змінної відповідає *єдине значення* залежної змінної. За таких умов для залежності між змінними використовують термін «функція».

Означення

Залежність змінної y від змінної x називають функцією, якщо кожному значенню змінної x відповідає одне певне значення змінної y .

Для змінних x та y є спеціальні терміни: незалежну змінну x називають *аргументом*, а залежну змінну y — *функцією*. Кажуть: y є *функцією від аргументу* x .

Отже, у розглянутих прикладах:

периметр P квадрата є функцією від довжини його сторони a ; тут P — функція, a — аргумент;

шлях S є функцією від часу t ; тут S — функція; t — аргумент.

Щоб *задати функцію*, потрібно вказати, як для кожного значення аргументу можна знайти відповідне значення функції.

Перша з розглянутих нами функцій задана *формулою* $P = 4a$, за якою для кожного значення аргументу a можна знайти відповідне значення функції P . Друга функція задана *таблицею*, у якій для кожного значення аргументу t вказано відповідне значення функції S .

2. Область визначення та область значень функції. Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення* функції; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень* функції.

Так, область визначення функції, що задається формулою $P = 4a$, утворюють усі значення, яких може набувати змінна a . Оскільки ця змінна визначає довжину сторони квадрата, то a може набувати лише додатних значень. Отже, область визначення цієї функції утворюють усі додатні числа.

Область значень функції, що задається формулою $P = 4a$, утворюють усі значення, яких може набувати залежна змінна P . Периметр P не може дорівнювати від'ємному числу або нулю, однак може дорівнювати будь-якому додатному числу. Наприклад, P може дорівнювати 2, бо 2 — це периметр квадрата зі стороною 0,5. Отже, область значень цієї функції утворюють усі додатні числа.

Область визначення функції, заданої таблицею, утворюють числа 1; 2; 3; 4; 4,5; 5 (числа першого рядка таблиці); область значень цієї функції утворюють числа 82; 170; 225; 300; 335; 380 (числа другого рядка таблиці).

Розглянемо функцію, задану формулою $y = x^2 + 1$, де $0 \leq x \leq 10$. Такий запис означає, що область визначення функції утворюють усі значення x , які задовольняють нерівності $0 \leq x \leq 10$.

Якщо функція задана формулою $y = x^2 + 1$ і не вказано, яких значень можна надавати аргументу, то вважають, що область визначення функції утворюють усі числа.

Існують функції, які на окремих частинах області визначення задані різними формулами. Наприклад, якщо функція задана у вигляді

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \leq 1; \\ 2x - 1, & \text{якщо } x > 1, \end{cases}$$

то це означає, що для $x \leq 1$ значення функції потрібно знаходити за формулою $y = x^2$, а для $x > 1$ — за формулою $y = 2x - 1$. Так, якщо $x = -2$, то маємо: $y = (-2)^2 = 4$; якщо $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2 - 1 = 3$.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Автомобіль, рухаючись зі швидкістю 80 км/год, долає за t год шлях S км. Задати формулою функцію — залежність S від t . Знайти значення функції, які відповідають значенням аргументу: 2; 2,5.

• За t год автомобіль проїде 80 t км, тому $S = 80t$ — шукана формула. Якщо $t = 2$, то $S = 80 \cdot 2 = 160$; якщо $t = 2,5$, то $S = 80 \cdot 2,5 = 200$. •

Вправа 2. Починаючи із третьої години, через кожну годину міряли атмосферний тиск і записували дані в таблицю:

t , год	3	4	5	6	7	8	9
p , мм рт. ст.	746	748	751	752	752	755	756

Залежність між якими змінними задає ця таблиця? Чи задає таблиця функцію? Який тиск у міліметрах ртутного стовпчика був о 4 год? о 8 год? Яка область визначення функції; область значень?

• Таблиця задає залежність між годинами t доби й атмосферним тиском p . Ця залежність є функцією, бо кожному значенню t відповідає єдине значення p . Якщо $t = 4$, то за таблицею знаходимо: $p = 748$. Отже, о 4 годині атмосферний тиск був 748 мм рт. ст. Аналогічно о 8 годині — 755 мм рт. ст. Область визначення функції утворюють числа 3, 4, 5, 6, 7, 8 і 9, а область значень — числа 746, 748, 751, 752, 755 і 756. •

Вправа 3. Функція задана формулою $y = x^2 - 3$. Скласти таблицю значень аргументу і відповідних значень функції, надавши аргументу таких значень: -6; -3; -2; 0; 2; 3; 6.

x	-6	-3	-2	0	2	3	6
y	33	6	1	-3	1	6	33

Вправа 4. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює -3, якщо функція задана формулою:

а) $y = 2x - 5$; б) $y = x^2 + x - 3$; в) $y = x^2 + 1$?

• а) Щоб знайти значення x , для яких $y = -3$, розв'яжемо рівняння $2x - 5 = -3$: $2x = 2$; $x = 1$. Отже, функція набуває значення $y = -3$, якщо $x = 1$.

$$б) x^2 + x - 3 = -3; x^2 + x = 0; x(x + 1) = 0;$$

$$x = 0 \text{ або } x + 1 = 0; x = 0 \text{ або } x = -1.$$

Функція набуває значення -3 , якщо $x = 0$ або $x = -1$.

в) $x^2 + 1 = -3; x^2 = -4$ — рівняння коренів не має. Значення -3 дана функція не набуває. ●

Усно

648. Нехай x — довжина сторони квадрата, а S — його площа. Чому залежність S від x є функцією? Яка змінна є незалежною, а яка залежною; яка є аргументом, а яка — функцією? Задайте функцію формулою.

649. Функція задана формулою $y = 5x$.

а) Яка змінна є незалежною, а яка — залежною; яка є аргументом, а яка — функцією?

б) Яке значення функції відповідає значенню аргументу $x = 2; x = -1$?

в) Якому значенню аргументу відповідає значення функції $y = 5; y = 0$?

650. Залежності змінної y від змінної x задані таблицями:

а)

x	1	2	3
y	1	1	1

б)

x	1	3	9
y	1	1; 3	1; 3; 9

(У таблиці б) числам 1, 3, 9 відповідають їхні дільники.) Яка з таблиць задає функцію? Для функції вкажіть область визначення та область значень.

651. Функція задана таблицею:

x	-2	0	1	3	4
y	3	-1	5	7	7

а) Чому дорівнює значення функції, якщо $x = -2; x = 1; x = 4$?

б) Для яких значень аргументу значення функції дорівнює $-1; 7; 3$?

в) Яка область визначення функції?

г) Яка область значень функції?

Рівень А



652. Одна сторона прямокутника дорівнює 6 см, а суміжна — x см. За якою формулою можна обчислити площу S прямокутника? Чи задає ця формула функцію?

653. Густина сталі дорівнює 7800 кг/м^3 . Запишіть формулу, за якою можна обчислити масу сталевго куба з ребром a м. Яка область визначення функції, що задається цією формулою? Знайдіть значення функції, якщо $a = 0,2$.

654. Автомобіль рухається зі швидкістю 75 км/год. За час t год він проходить шлях S км. Задайте формулою залежність шляху S від часу t . Знайдіть S , якщо $t = 2, 4$.
655. Довжина прямокутного паралелепіпеда дорівнює 7,5 см, ширина — 4 см, а висота — x см. Задайте формулою залежність об'єму V паралелепіпеда від висоти x . Знайдіть V , якщо $x = 2, 5$.
656. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = 2x^2 - x$, якщо $x = 2$; $x = 0$; $x = -1$.
657. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = 2x + 1$, якщо $x = 5$; $x = 0, 5$; $x = -2$.
658. Функція задана формулою $y = 18 - 3x$. Складіть таблицю значень функції для значень аргументу: -3 ; -2 ; 0 ; 1 ; 6 .
659. Функція задана формулою $y = 2x^2 + 1$. Складіть таблицю значень функції для значень аргументу: -4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 .
660. Функція задана формулою $y = 4x - 5$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює 0 ; 3 ?
661. Функція задана формулою $y = -2x + 3$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює 1 ; 5 ?
662. Функція задана таблицею:

x	-4	-2	0	2	4
y	-2	-1	0	1	2

- а) Знайдіть значення функції, якщо $x = -2$; $x = 2$.
- б) Для яких значень x значення функції дорівнює -1 ; 1 ?
- в) Яка область визначення функції?
- г) Яка область значень функції?



663. Функція задана формулою $y = 12x$. Заповніть таблицю:

x	-4	-3					1,5	2		3,5
y			-12	-6	-3	2			27	

664. Функція задана формулою $y = x + 6$. Заповніть таблицю:

x	-12	-6					24	-24
y			2	3	-4	-6		

665. Велосипедист має подолати шлях від села до автостанції завдовжки 7 км, рухаючись зі швидкістю 10 км/год. Нехай S км — шлях, який залишилося проїхати велосипедистові через t год після початку руху. Задайте форму-

лою залежність шляху S від часу t . Знайдіть значення функції, яка визначається цією формулою, якщо $t = 0,5$. Яка область значень цієї функції?

666. Натуральне число m при діленні на 4 дає неповну частку n і остачу 1. Задайте формулою залежність m від n . Знайдіть значення функції, яка визначається цією формулою, якщо $n = 50$. Яка область визначення і область значень цієї функції?
667. Функція задана формулою $y = x^2 - 4x + 2$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює: а) 2; б) -2 ?
668. Функція задана формулою $y = x^2 + 2x - 3$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює: а) -3 ; б) -4 ?
669. Функція задана формулою $y = 3x - 1$, де змінна x може набувати значень $-6; -3; 0; 3; 6; 9$. Задайте цю функцію таблицею.

Рівень В



670. Доведіть, що функція $y = x^2 + 6x + 10$ не набуває від'ємних значень.
671. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 4x + 2$.
672. Для яких значень аргументу значення функції $y = x^2 - 4|x|$ дорівнюють нулю?
673. Функція задана формулою $y = x^2 + 2ax$, де a — деяке додатне число. Чи набуває ця функція від'ємного значення?

Вправи для повторення

674. З міста A до міста B , відстань між якими дорівнює 40 км, виїхав велосипедист, а через 40 хв назустріч йому з міста B — мотоцикліст. Швидкість велосипедиста дорівнює 15 км/год, а мотоцикліста — 45 км/год. Через який час після виїзду велосипедиста вони зустрінуться?
675. На координатній площині позначте точки $A(-4; 0)$, $B(0; 1)$, $C(4; -1)$ і точку D з абсцисою -3 й ординатою 2.
676. Через точку $A(3; 0)$ проведіть пряму, паралельну осі y , а через точку $B(0; 2)$ — пряму, паралельну осі x . Знайдіть координати точки перетину проведених прямих.
677. Знайдіть периметр і площу прямокутника $ABCD$, якщо $A(-1; -1)$, $B(3; -1)$, $C(3; 1)$.

Поміркуйте

678. В абетці мови острова *Абаба* є лише дві букви a і b . Ім'я будь-якого жителя острова можна одержати, замінюючи у слові *Абаба* записані підряд букви ab на bbb , ba — на aab , чи bb — на aaa (заміну можна робити кілька разів). Чи є на острові житель з ім'ям *Бааабба*?

20. Графік функції. Функція як математична модель реальних процесів

1. Графік функції. Розглянемо функцію, задану формулою $y = 0,5x^2$, де $-3 \leq x \leq 2$. Знайдемо значення цієї функції для цілих значень аргументу й занесемо результати в таблицю:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2

Значення x ми вибрали так, що кожне наступне на 1 більше від попереднього. Тому кажуть, що таблиця значень функції складена з кроком 1.

Позначимо на координатній площині точки, абсциси яких дорівнюють вибраним значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції (рис. 3).

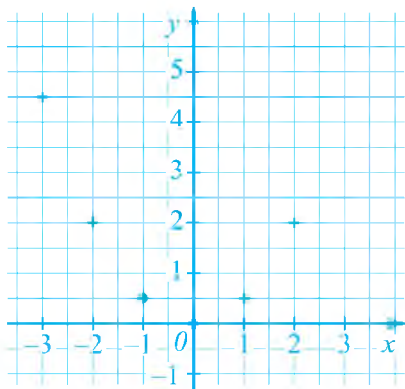


Рис. 3

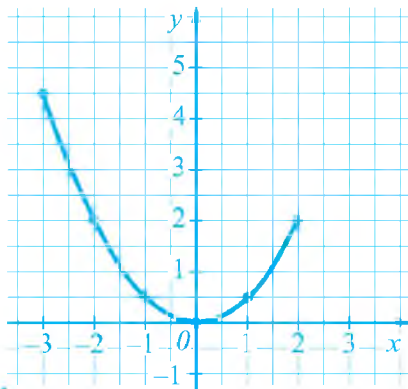


Рис. 4

Добираючи інші значення x , що задовольняють нерівності $-3 \leq x \leq 2$, й обчислюючи відповідні значення y , отримаємо інші пари значень x та y . Кожній з цих пар також відповідає певна точка на координатній площині. Усі такі точки утворюють фігуру, яку називають *графіком* функції, заданої формулою $y = 0,5x^2$, де $-3 \leq x \leq 2$ (рис. 4).

Графік функції утворюють точки координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

2. Графічний спосіб задання функції. Маючи графік функції, можна знаходити її значення за відомим значенням аргументу і навпаки: знаходити значення аргументу за відомим значенням функції.

Розглянемо, наприклад, функцію, графік якої зображений на рисунку 5. Про таку функцію кажуть, що вона задана *графічно*.

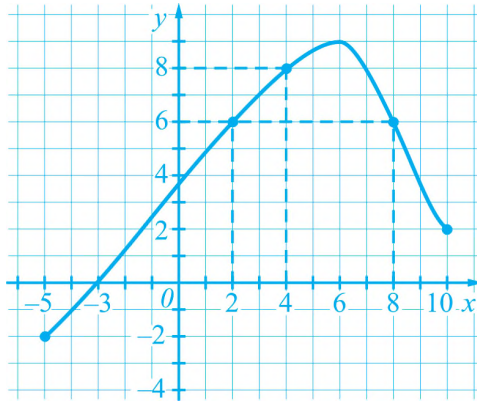


Рис. 5

Знайдемо за допомогою графіка значення функції, якщо $x = 4$. Для цього через точку осі x з абсцисою 4 проведемо пряму, паралельну осі y . Точка її перетину із графіком функції має координати $(4; 8)$. Отже, якщо $x = 4$, то значення функції дорівнює 8.

Знайдемо за допомогою цього ж графіка значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 6. Для цього через точку осі y з ординатою 6 проведемо пряму, паралельну осі x . Одержимо дві точки її перетину із графіком функції: $(2; 6)$ і $(8; 6)$. Отже, функція набуває значення 6, якщо $x = 2$ або $x = 8$.

Деяка лінія на координатній площині задає функцію, якщо будь-яка пряма, яка паралельна осі y , перетинає цю лінію не більше ніж в одній точці. Використовуючи таку лінію для кожного значення змінної x , можна знайти тільки одне значення змінної y .

Дивлячись на графік, зображений на рисунку 5, можна відмітити деякі властивості функції, заданої цим графіком.

1) Область визначення функції утворюють усі значення x , що задовольняють нерівності $-5 \leq x \leq 10$.

2) Найбільше значення функції дорівнює 9 (цього значення функція набуває, якщо $x = 6$).

3) Найменше значення функції дорівнює -2 (цього значення функція набуває, якщо $x = -5$).

4) Область значень функції утворюють усі значення y , що задовольняють нерівності $-2 \leq y \leq 9$.

5) Значення функції дорівнює нулю, якщо $x = -3$. Ті значення аргументу, для яких значення функції дорівнюють нулю, називають *нулями* функції. Отже, значення $x = -3$ є нулем даної функції.

6) Функція набуває додатних значень, якщо $-3 < x \leq 10$; від'ємних значень — якщо $-5 \leq x < -3$.

3. Функція як математична модель реальних процесів. Вам, мабуть, уже доводилося бачити моделі човна, літака, автомобіля, виготовляти моделі куба, прямокутного паралелепіпеда. Кожна модель, залежно від її призначення, відображає певні властивості оригіналу.

Математична модель — це опис якогось реального об'єкта чи процесу мовою математики.

Розглянемо рисунок 6, на якому зображено графік зміни температури води протягом 20 хв.

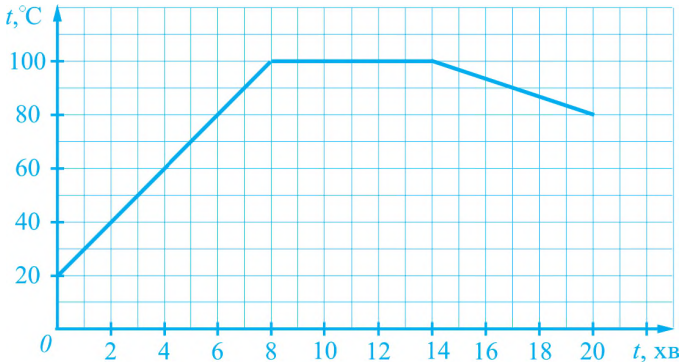


Рис. 6

Із графіка випливає, що початкова температура води дорівнювала 20 °C; протягом перших 8 хв температура води підвищилась до 100 °C, потім протягом 6 хв (від 8 хв до 14 хв) температура води не змінювалась, а протягом наступних 6 хв — знизилась до 80 °C.

Функція, графік якої зображено на рисунку 6, описує реальний процес зміни температури води. Кажуть, що ця функція моделює даний процес, або що вона є *математичною моделлю* даного процесу.

Якщо тіло рухається рівномірно зі швидкістю 15 м/с, то шлях S м, пройдений ним за час t с, можна обчислити за формулою $S = 15t$. У цьому випадку функція, задана формулою $S = 15t$, є математичною моделлю рівномірного руху.

У сьомому та наступних класах ми ознайомимося з багатьма функціями, які можна використати для моделювання реальних процесів та залежностей між різними величинами.

Крім функцій, є й інші види математичних моделей, з якими ми ознайомимося за подальшого вивчення алгебри.

Цікаво знати. Історія науки знає чимало прикладів, коли в межах вдало побудованої математичної моделі за допомогою обчислень, як кажуть, «на кінчику пера», вдавалося передбачити існування нових фізичних об'єктів та явищ. Так, опираючись на математичні моделі, астрономи Дж. Адамс (Англія) у 1845 році й У. Левер'є (Франція) у 1846 році незалежно один від одного дійшли висновку про існування невідомої тоді ще планети й указали її розміщення на небі. За розрахунками У. Левер'є астроном Г. Галле (Німеччина) знайшов цю планету. Її назвали Нептун.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Побудувати графік функції, заданої формулою:

- а) $y = 0,5x + 1$, де $-4 \leq x \leq 4$, склавши таблицю значень функції з кроком 1;
- б) $y = 1 - x^2$, де $-2 \leq x \leq 2$.
- а) Складемо таблицю значень функції:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині. Якщо до цих точок прикласти лінійку, то можна побачити, що всі вони лежать на одній прямій. Сполучимо відрізком крайні позначені точки. Цей відрізок і є графіком функції $y = 0,5x + 1$, де $-4 \leq x \leq 4$ (рис. 7).

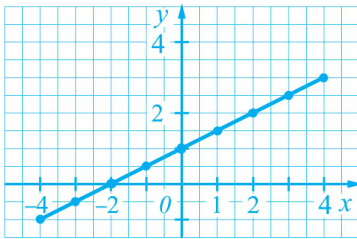


Рис. 7

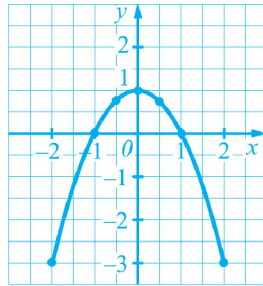


Рис. 8

- б) Складемо таблицю значень функції:

x	-2	-1	- $\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-3	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	-3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці, на координатній площині. Сполучимо їх плавною лінією. Маємо графік функції, заданої формулою $y = 1 - x^2$, де $-2 \leq x \leq 2$ (рис. 8). •

Вправа 2. Чи належить графіку функції $y = 2x^2$ точка $A(3; 9)$; $B(2; 8)$?

• Точка $A(3; 9)$ належатиме графіку даної функції, якщо значення функції для $x = 3$ дорівнює 9.

Знаходимо: якщо $x = 3$, то $y = 2 \cdot 3^2 = 18$. Значення функції не дорівнює 9. Отже, точка $A(3; 9)$ графіку функції не належить.

Для точки $B(2; 8)$ матимемо: якщо $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2^2 = 8$. Точка $B(2; 8)$ належить графіку функції. •

Вправа 3. На рисунку 9 зображено графік функції. Користуючись графіком, заповнити таблицю:

x	-6	-2	8			
y				-4	-1,5	1

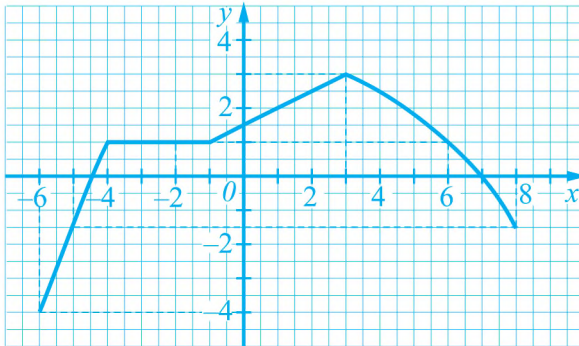


Рис. 9

● Заповнимо таблицю:

x	-6	-2	8	-6	-5; 8	$-4 \leq x \leq -1$; 6
y	-4	1	-1,5	-4	-1,5	1

Усно

679. Функція задана графіком (див. рис. 10). Знайдіть значення функції, якщо $x = -2$. Якому значенню аргументу відповідає значення функції $y = 2$? Яка область визначення та область значень функції?

680. Чи є лінія, зображена на рисунку 11, графіком деякої функції? Відповідь обґрунтуйте.

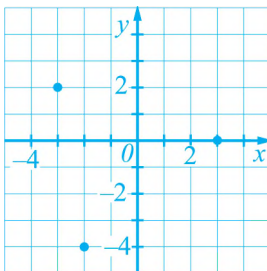


Рис. 10

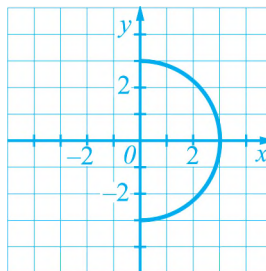


Рис. 11

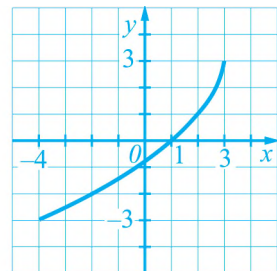


Рис. 12

681. Функція задана графіком (див. рис. 12).

- а) Знайдіть значення функції, якщо $x = -4$; $x = -2$; $x = 2$.
- б) Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = -2$; $y = 0$; $y = 3$.
- в) Яка область визначення та область значень функції?
- г) Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції?
- д) Укажіть нулі функції.
- е) Для яких значень x функція набуває додатних значень; від'ємних значень?

682. На рисунку 13 показано графік зміни об'єму води в баку залежно від часу.

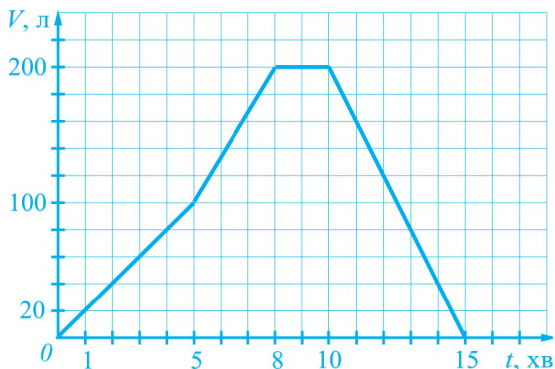


Рис. 13

- а) Скільки води було в баку в початковий момент часу?
- б) Скільки води поступило в бак протягом перших 5 хв; 8 хв; 10 хв?
- в) Скільки часу об'єм води в баку не змінювався?
- г) Протягом скількох хвилин спорожнився бак?



683. На рисунку 14 зображено графік функції. Користуючись цим графіком, заповніть таблицю:

x	-3	-2	0	1	4,5				
y						-1,5	-1	0	4

Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнює найменше значення функції? Для яких значень x функція набуває додатних значень?

684. На рисунку 15 зображено графік функції. Користуючись цим графіком, заповніть таблицю:

x	-2,5	-1	3	4				
y					-1,5	0	1	4

Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнює найбільше значення функції? Укажіть нулі функції. Для яких значень x функція набуває від'ємних значень?

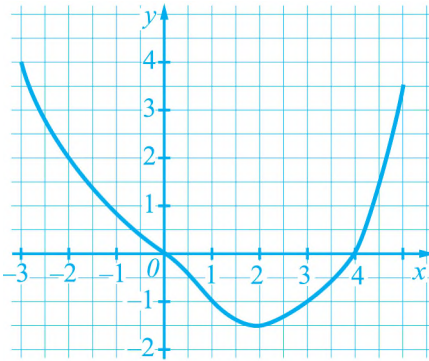


Рис. 14

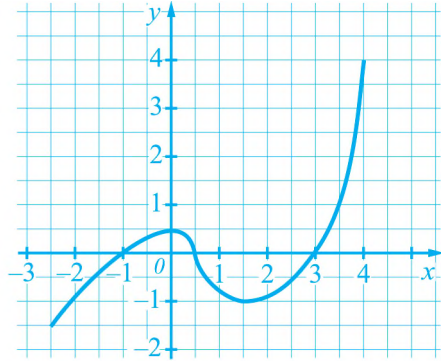


Рис. 15

685. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 2x + 1$, де $-3 \leq x \leq 2$, склавши таблицю значень функції з кроком 1. Чи належать графіку функції точки $A(-2; -3)$, $B(0; -1)$? Користуючись графіком, знайдіть: значення функції, якщо $x = -1,5$; $x = 0,5$; значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 0$; $y = 1$.
686. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = -3x - 1$, де $-2 \leq x \leq 1$, склавши таблицю значень функції з кроком 1. Чи належать графіку функції точки $M(0; -1)$, $N(1; -2)$?

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

687. а) $y = \frac{1}{4}x - 1$, де $-4 \leq x \leq 6$;

б) $y = x^2 - 1$, де $-2 \leq x \leq 2$.

688. а) $y = \frac{1}{2}x + 2$, де $-6 \leq x \leq 4$;

б) $y = x^2$, де $-1 \leq x \leq 3$.

689. На рисунку 16 показано графік залежності висоти польоту літака від часу. а) На якій максимальній висоті летів літак? б) Скільки часу літак набирав висоту?

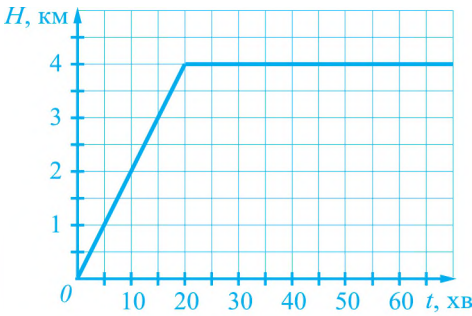


Рис. 16

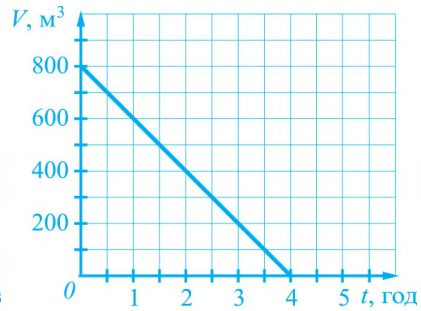


Рис. 17

690. На рисунку 17 показано графік зміни об'єму води в басейні. а) Який процес відображає цей графік: вода поступає в басейн чи витікає з басейну? б) Скільки води було в басейні в початковий момент часу; через 4 год?



691. На рисунку 18 зображено графік зміни температури повітря протягом доби.
- Якою була температура повітря о 2 год; о 9 год; о 18 год; о 24 год?
 - О котрій годині температура повітря дорівнювала $-2\text{ }^{\circ}\text{C}$; $0\text{ }^{\circ}\text{C}$; $6\text{ }^{\circ}\text{C}$?
 - О котрій годині температура повітря була найнижчою; найвищою?

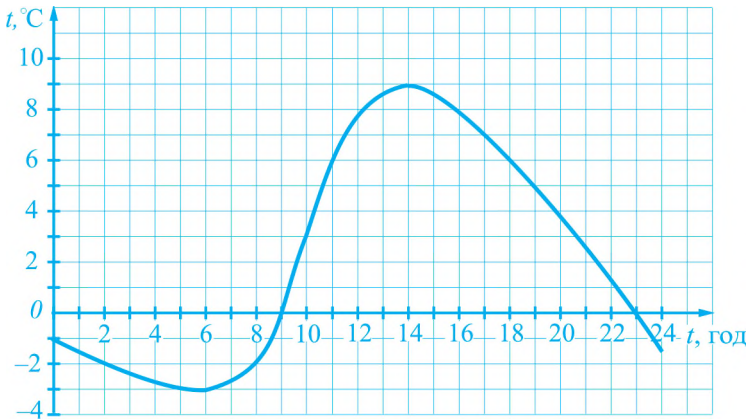


Рис. 18

692. На рисунку 19 зображено графік залежності швидкості тіла від часу.
- Яку швидкість мало тіло через 2 с після початку руху; через 5 с; через 10 с; через 20 с?
 - У який момент часу швидкість тіла дорівнювала 4 м/с; 6 м/с; 8 м/с?
 - У які моменти часу швидкість тіла була найменшою?
 - Укажіть час, протягом якого тіло рухалось зі сталою швидкістю. Який шлях пройшло тіло за цей час?

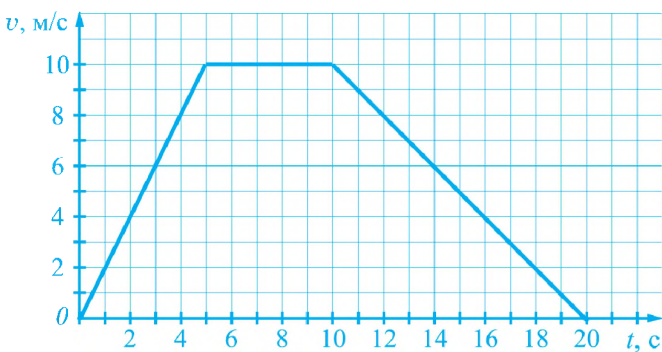


Рис. 19

693. На рисунку 20 зображено графік руху групи туристів від табору до каменя Довбуша.
- Скільки часу рухалися туристи та який шлях вони подолали?
 - Скільки часу витратили туристи на привал?
 - З якою швидкістю рухалися туристи протягом перших двох годин; після привалу?
 - Яка середня швидкість руху туристів?

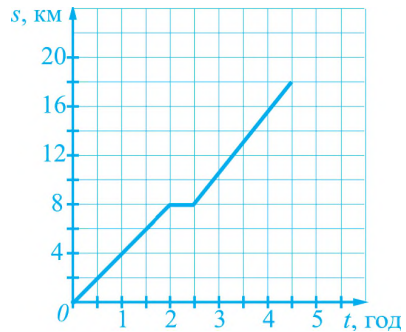


Рис. 20

694. Графіком функції є ламана $ABCD$ (сукупність трьох відрізків AB , BC і CD), де $A(-2; -3)$, $B(0; 3)$, $C(4; 3)$, $D(6; 1)$. Накресліть графік функції та заповніть таблицю:

x	-1	1,33			4,5	
y			-2	3		1,5

Яка область визначення та область значень функції? Вкажіть нулі функції. Для яких значень x функція набуває додатних значень; від'ємних значень?

695. Графіком функції є ламана $KLMN$, де $K(-4; 4)$, $L(-2; 2)$, $M(2; 2)$, $N(3; 3)$. Накресліть графік функції та заповніть таблицю:

x	-3			1,25	2,5	
y		4	2			3,5

Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції? Чи має функція нулі?

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

696. а) $y = x(4 - x)$, де $-1 \leq x \leq 5$; б) $y = x^2 + 4x + 3$, де $-3 \leq x \leq 1$.
 697. а) $y = x^2 - 2x$, де $-2 \leq x \leq 3$; б) $y = (1 - x)(3 + x)$, де $-2 \leq x \leq 1$.

Рівень В 

698. Побудуйте графік функції, заданої формулою:
 а) $y = |x|$, де $-3 \leq x \leq 3$; б) $y = |x| - 2$, де $-3 \leq x \leq 3$.

Вправи для повторення

699. Зі 100 кг насіння льону отримують 37 кг олії.
 а) Скільки кілограмів олії одержать із 350 кг такого насіння?
 б) Скільки потрібно кілограмів насіння, щоб одержати 185 кг олії?
700. У першому сплаві є 40% міді, а в другому — 10%. Скільки кілограмів другого сплаву потрібно додати до 10 кг першого, щоб отримати 30-відсотковий сплав міді?
701. Відстань між містами A і B дорівнює 190 км. З міста A до міста B виїжджає автомобіль і рухається зі швидкістю 90 км/год. На якій відстані від міста B він буде через t год? Запишіть розв'язок у вигляді виразу зі змінною. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 1, 2$.

Поміркуйте

702. П'ять рибалок наловили 9 рибин. Доведіть, що принаймні двоє з них наловили рибин порівну.

2.1. Лінійна функція

1. Що таке лінійна функція. Розглянемо кілька прикладів.

Нехай тіло рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю 20 м/с й напрям його руху збігається з напрямом осі x (рис. 21). Якщо в початковий момент руху тіло перебувало на відстані 35 м від початку відрілку, то через $t \text{ с}$ тіло перебуватиме на відстані $S = 20t + 35$ метрів від нього.



Рис. 21

Нехай у басейн через трубу щохвилини вливається $2,5 \text{ м}^3$ води. Якщо в початковий момент часу в басейні було 70 м^3 води, то об'єм V води (у м^3), яка буде у басейні через $t \text{ хв}$, можна обчислити за формулою $V = 2,5t + 70$.

Формулами $S = 20t + 35$, $V = 2,5t + 70$, де t — незалежна змінна, задаються функції, які називають *лінійними*.

Означення

Лінійною функцією називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа.

У формулі $y = kx + b$ змінній x можна надавати будь-яких значень, тому область визначення лінійної функції утворюють усі числа.

2. Графік лінійної функції. Побудуємо графік лінійної функції $y = 0,5x - 1$. Для цього складемо таблицю кількох значень x та відповідних значень y :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5

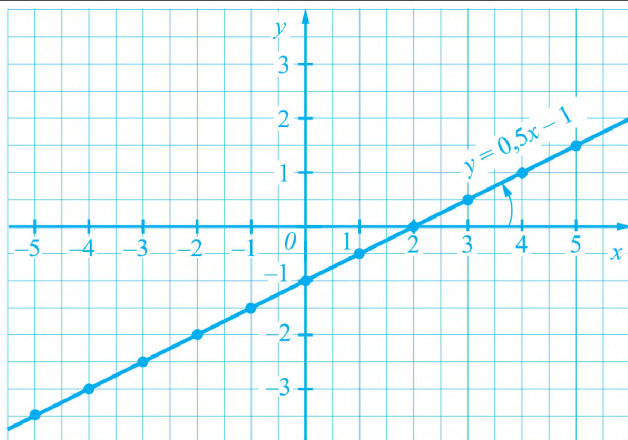


Рис. 22

На координатній площині позначимо точки, координати яких подано в таблиці (див. рис. 22). Приклавши лінійку, переконуємося, що всі позначені точки лежать на одній прямій. Якби для будь-якого іншого значення x обчислили відповідне значення y і позначили б точку з такими координатами на координатній площині, то й вона лежала б на цій прямій.

Через позначені точки проведемо пряму. Вона є графіком лінійної функції $y = 0,5x - 1$.

Взагалі, графіком лінійної функції є пряма.

Щоб побудувати графік лінійної функції, досить знайти координати лише двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині й провести через них пряму. Так, щоб побудувати графік функції $y = 0,5x - 1$, досить було взяти дві точки, наприклад, $(0; -1)$ і $(2; 0)$ та провести через них пряму.

3. Кутівий коефіцієнт. У формулі лінійної функції $y = 0,5x - 1$ коефіцієнт біля змінної x додатний: $k = 0,5 > 0$. Графік цієї функції утворює гострий кут з додатним напрямом осі x (див. рис. 22). На рисунку 23 зображено графік лінійної функції $y = -2x + 1$. Для цієї функції $k = -2 < 0$ і її графік утворює тупий кут з додатним напрямом осі x .

Отже, від коефіцієнта k залежить кут, який утворює графік функції $y = kx + b$ з додатним напрямом осі x . Тому число k називають *кутовим коефіцієнтом прямої* $y = kx + b$.

Якщо $k > 0$, то пряма $y = kx + b$ утворює з додатним напрямом осі x гострий кут, якщо $k < 0$, — тупий кут.

Якщо $k = 0$, то формула, якою задається лінійна функція, має вигляд $y = 0x + b$, тобто $y = b$. Така функція для всіх значень x набуває того самого значення b . Наприклад, лінійна функція $y = 2$ для всіх значень x набуває значення 2. Тому графіком функції є пряма, утворена точками $(x; 2)$, де x — будь-яке число. Ця пряма паралельна осі x (рис. 24).

Щоб побудувати графік функції $y = 2$, досить було позначити на осі y точку з ординатою 2 і провести через неї пряму, паралельну осі x .

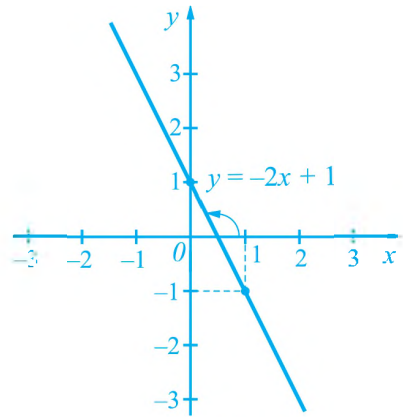


Рис. 23

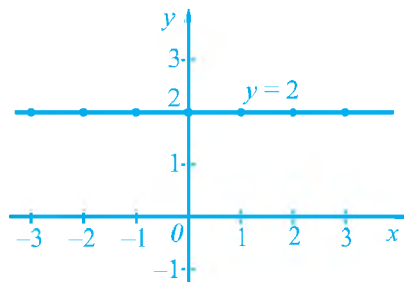


Рис. 24

4. Властивості лінійної функції $y = kx + b$.

- 1) Область визначення функції утворюють усі числа.
- 2) Якщо $k \neq 0$, то область значень функції утворюють усі числа; якщо $k = 0$, то функція набуває лише одного значення $y = b$.
- 3) Графіком функції є пряма.
- 4) Графік функції утворює з додатним напрямом осі x гострий кут, якщо $k > 0$, тупий кут, — якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то графік паралельний осі x , зокрема, якщо $k = 0$ і $b = 0$, то він збігається з віссю x .

5. Функція $y = kx$. У формулі $y = kx + b$, якою задається лінійна функція, покладемо $b = 0$. Одержимо формулу $y = kx$, якою задається функція, яка є окремим, але доволі важливим випадком лінійної функції і служить моделлю багатьох реальних процесів. Розглянемо приклади.

1. Нехай тіло рухається зі швидкістю 20 м/с. Тоді шлях S м, пройдений ним за час t с, можна обчислити за формулою $S = 20t$. Ця формула задає залежність шляху S від часу t .

2. Густина заліза дорівнює $7,8 \text{ г/см}^3$. Масу m г заліза, об'єм якого дорівнює $V \text{ см}^3$, можна обчислити за формулою $m = 7,8V$. Ця формула задає залежність маси m від об'єму V .

Перейшовши у прикладах до прийнятих позначень аргументу і функції, матимемо функції, що задаються формулами $y = 20x$ та $y = 7,8x$, тобто формулами виду $y = kx$, де $k \neq 0$.

Означення

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x — незалежна змінна, k — деяке число, $k \neq 0$, називають прямою пропорційністю.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції, то графіком прямої пропорційності є пряма. Ця пряма проходить через початок координат (бо якщо $x = 0$, то $y = k \cdot 0 = 0$).

Для побудови графіка прямої пропорційності досить знайти яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести через цю точку та початок координат пряму.

Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{3}x$. Знайдемо координати якої-небудь точки графіка, відмінної від початку координат: якщо $x = 3$, то $y = 1$. Позначимо на координатній площині точку $(3; 1)$ і проведемо через неї та через початок координат пряму (рис. 25). Ця пряма є графіком функції $y = \frac{1}{3}x$.

На рисунку 26 зображено графіки функцій виду $y = kx$ для різних значень k .

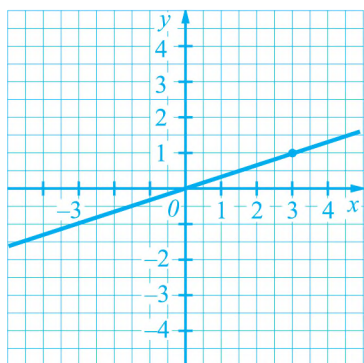


Рис. 25

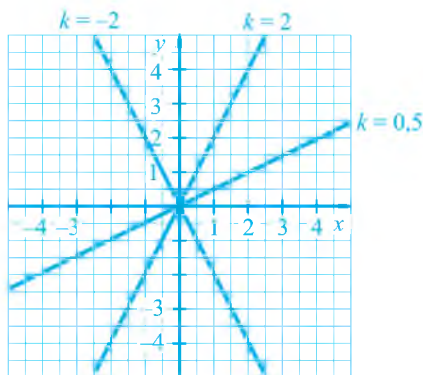


Рис. 26

Якщо $k > 0$, то графік функції $y = kx$ розміщений у першій і третій координатних чвертях, а якщо $k < 0$, — у другій і четвертій чвертях.

Для тих, хто хоче знати більше



6. Точки перетину графіків функцій.

На рисунку 27 зображені графіки двох лінійних функцій $y = -0,25x + 4$ та $y = x - 1$. Якщо $x = 4$, то функції набувають того самого значення $y = 3$. Отже, графіки функцій мають спільну точку $(4; 3)$. Ще кажуть, що графіки перетинаються в точці $(4; 3)$.

Взагалі, графіки двох функцій мають спільну точку, якщо існує значення x , для якого обидві функції набувають того самого значення.

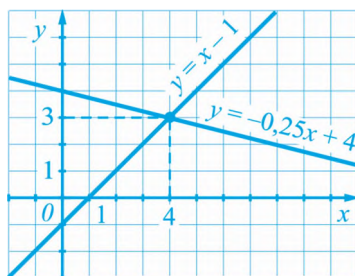


Рис. 27

7. Взаємне розміщення графіків лінійних функцій. Розглянемо дві лінійні функції $y = 0,5x - 2$ та $y = 0,6x + 1$, формули яких мають різні коефіцієнти біля x . З'ясуємо, чи перетинаються графіки цих функцій (рис. 28). Для цього перевіримо, чи існує значення x , для якого обидві функції набувають того самого значення; іншими словами: чи існує значення x , для якого виконується рівність $0,5x - 2 = 0,6x + 1$. Розв'яжемо дане рівняння:

$$0,5x - 0,6x = 2 + 1; \quad -0,1x = 3; \quad x = -30.$$

Якщо $x = -30$, то обидві функції набувають того самого значення:

$$y = 0,5 \cdot (-30) - 2 = -15 - 2 = -17 \quad \text{і} \quad y = 0,6 \cdot (-30) + 1 = -18 + 1 = -17.$$

Отже, графіки функцій перетинаються в точці $(-30; -17)$.

Розглянемо дві лінійні функції $y = 0,5x - 2$ та $y = 0,5x + 1$, формули яких мають однакові коефіцієнти біля x . Рівняння $0,5x - 2 = 0,5x + 1$ не має коренів. Тому прямі, що є графіками функцій $y = 0,5x - 2$ та $y = 0,5x + 1$ (рис. 29), не мають спільних точок (ці прямі паралельні).

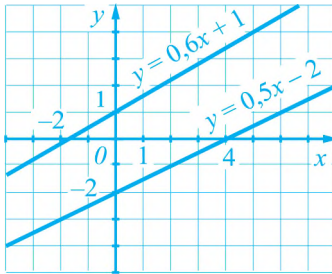


Рис. 28

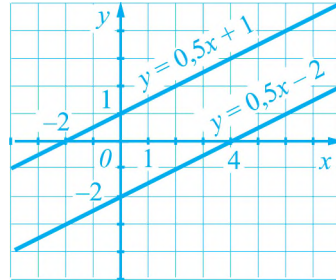


Рис. 29

Взагалі, графіки функцій виду $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ перетинаються, якщо $k_1 \neq k_2$ (коефіцієнти біля x різні), і паралельні, якщо $k_1 = k_2$ (коефіцієнти біля x однакові) та $b_1 \neq b_2$.

Приклади розв'язання вправ



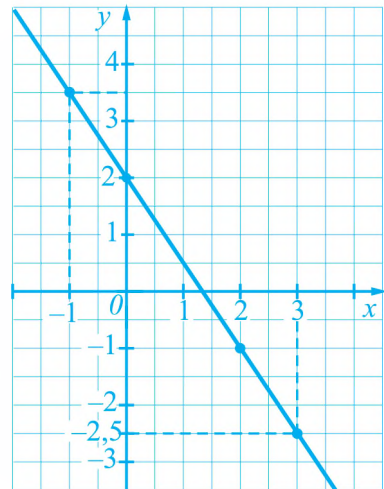
Вправа 1. Побудувати графік функції, заданої формулою $y = -1,5x + 2$. Користуючись графіком, знайти:

- значення y , яке відповідає $x = -1$;
 - значення x , якому відповідає $y = -2,5$.
- Будемо графік функції.

$y = -1,5x + 2$		
x	0	2
y	2	-1

а) Нехай $x = -1$. Через точку $(-1; 0)$ проводимо пряму, паралельну осі y , і знаходимо точку її перетину з графіком. Це точка $(-1; 3,5)$. Отже, значенню $x = -1$ відповідає значення $y = 3,5$.

б) Нехай $y = -2,5$. Через точку $(0; -2,5)$ проводимо пряму, паралельну осі x , і знаходимо точку перетину цієї прямої з графіком. Це точка $(3; -2,5)$. Отже, значення $y = -2,5$ відповідає значенню $x = 3$. •



Рівень А



709. Лінійна функція задана формулою $y = 2x - 6$. Знайдіть значення y , яке відповідає $x = -6$; $x = 0$; $x = 9$. Для яких значень x значення функції дорівнює -3 ; 0 ; 7 ?
710. Лінійна функція задана формулою $y = 5x - 1$. Знайдіть значення y , яке відповідає $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$. Для яких значень x значення функції дорівнює -6 ; 0 ; 4 ?
711. Чи проходить графік функції $y = 1,8x + 9$ через точку: $A(10; 27)$; $B(50; 89)$, $C(-20; -27)$?

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

712. а) $y = 2x - 3$; б) $y = -0,5x + 1$; в) $y = 0,5x + 2$; г) $y = -3x$.
713. а) $y = x - 2$; б) $y = -2x + 0,5$; в) $y = -2,5$.

В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

714. а) $y = -1,5x$; $y = -1,5x - 2$; $y = -1,5x + 2$;
б) $y = 4$; $y = 1,5$; $y = -2$.
715. $y = 2x$; $y = 2x - 2$; $y = 2x + 1$.
716. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = -1,5x + 1,5$. Користуючись графіком, знайдіть:
а) значення y , яке відповідає $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$;
б) значення x , якому відповідає $y = -3$; $y = 1,5$;
в) нуль функції;
г) значення x , для яких функція набуває додатних значень.
717. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 0,5x - 3$. Користуючись графіком, знайдіть:
а) значення y , яке відповідає $x = -2$; $x = 2$; $x = 4$;
б) значення x , якому відповідає $y = -2$; $y = 1$;
в) нуль функції;
г) значення x , для яких функція набуває від'ємних значень.
718. Пряма пропорційність задана формулою $y = 4x$. Заповніть таблицю:

x	-3		-1	2	3	
y		-8				20

719. Пряма пропорційність задана формулою $y = -2x$. Заповніть таблицю:

x	-5		-2			3
y		6		0	-4	

734. На рисунку 30 зображено графік прямої пропорційності.

а) Запишіть формулу, якою задають цю функцію.

б) Укажіть значення y , які відповідають значенням $x \geq 0$.

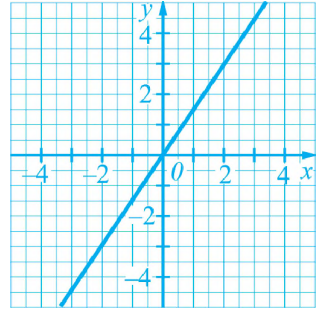


Рис. 30

735. В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = 3,5$ та $y = 2x$. Для яких значень x точки першого графіка лежать вище від точок другого графіка?

736. Для яких значень x графік функції $y = 0,5x$ лежить нижче від графіка функції $y = 2$?

737. Одна сторона прямокутника дорівнює 2 см, а інша — x см, де $x \geq 1$. Запишіть формулу, яка задає залежність площі y прямокутника (у квадратних сантиметрах) від x . Побудуйте графік функції, яку задають цією формулою.

738. У початковий момент часу велосипедист перебував на відстані 60 м до фінішу. На рисунку 31 зображено графік зміни відстані від велосипедиста до фінішу відповідно до зміни часу.

а) Через який час велосипедист досяг фінішу?

б) З якою швидкістю рухався велосипедист?

в) Який шлях пройшов велосипедист за дві останні секунди?

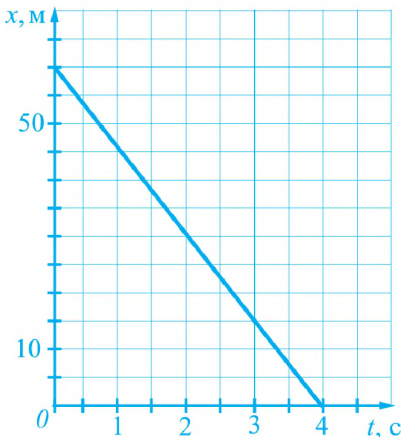


Рис. 31

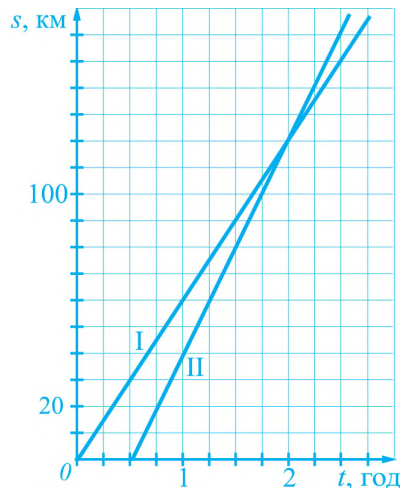


Рис. 32

739. На рисунку 32 зображено графіки руху двох автобусів, що вирушили з однієї станції.
- Через який час після відходу першого автобуса вирушив другий?
 - З якими швидкостями рухалися автобуси?
 - На якій відстані від станції другий автобус наздогнав перший?
 - Якою формулою задається залежність шляху, пройденого першим автобусом, від часу?
740. Олег і Петро змагалися у плаванні на дистанції 200 м у 50-метровому басейні. На рисунку 33 зображено графіки зміни відстані від кожного із хлопців до місця старту.
- Скільки часу витратив кожен із хлопців на подолання перших 50 м дистанції?
 - Хто переміг у змаганні?
 - На скільки секунд відстав переможений від переможця?
 - Яка середня швидкість руху кожного із хлопців на першій стометрівці?
 - Що означають точки перетину графіків?

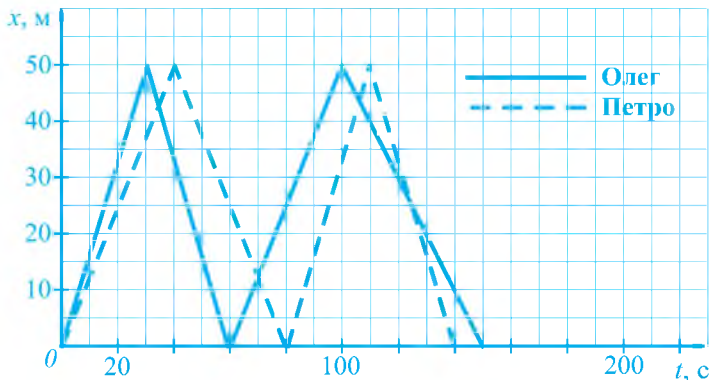


Рис. 33

741. Легковий автомобіль від'їхав від АЗС, маючи в баку 34 л бензину. Нехай після подолання шляху завдовжки S км у баку залишиться V л бензину. Задайте формулою залежність об'єму V від пройденого шляху S , якщо відомо, що на подолання кожних 100 км шляху автомобіль витрачає 8,5 л бензину. Знайдіть об'єм бензину в баку, якщо автомобіль проїде 180 км. Який шлях проїде автомобіль, якщо витратить увесь бензин?
742. У басейні для вирощування риби, розміри якого дорівнюють $10 \text{ м} \times 6 \text{ м} \times 1,5 \text{ м}$, є 30 м^3 води. Відкрили кран, і до басейну щохвилини стало поступати $1,5 \text{ м}^3$ води. Нехай через t хв у басейні стане $V \text{ м}^3$ води. Задайте формулою залежність об'єму V від часу t . Знайдіть об'єм води в басейні, якщо $t = 30$. За який час наповниться водою весь басейн?

Рівень В



743. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій:

а) $y = 14x - 8$ та $y = 7x + 8$; б) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$ та $y = \frac{1}{4}x$.

744. Чи проходить графік функції $y = x + 4$ через точку перетину графіків функцій $y = 2x + 5$ та $y = -5x - 2$?

745. Знайдіть таке число a , щоб точка перетину прямих $y = ax$ та $y = 6x - 2$ мала абсцису 2.

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

746. а) $y = |x|$; б) $y = |x| - 2$.

747. а) $y = x + 2|x|$; б) $y = 2x - |x|$.

Вправи для повторення

748. Для яких значень x значення виразу $15x - 6$ дорівнює 3?

749. Розв'яжіть рівняння:

а) $4 - (2x + 3) = 0$; б) $2(2x - 1) - 3(3x - 1) = 6$.

750. Доведіть, що значення виразу $(k + 3)(k^2 - k + 4) - (k - 4)(k + 3)^2 + 32k$ ділиться на 48 для кожного цілого значення k .

751. До 30-відсоткового розчину солі, маса якого дорівнює 750 г, долили 150 г води. Скільки відсотків солі містить утворений розчин?

752. У першому бідоні було молока утричі більше, ніж у другому. Коли з першого бідона перелили 12 л молока у другий, то в другому бідоні його стало в 1,4 разу більше, ніж у першому. Скільки молока було в кожному бідоні спочатку?

Поміркуйте

753. На дошці записано числа 1, 2, 3, ..., 21. Дозволяється стерти будь-які два числа і записати їх різницю (якщо стерли числа a і b , то можна записати число $a - b$ або число $b - a$). Повторивши таку операцію 20 разів, одержимо одне число. Чи може це число дорівнювати 0?

Цікаво знати

«В одну ріку не можна увійти двічі» — ці слова приписують давньогрецькому філософові Геракліту Ефеському (з міста Ефес). Вони відображають суттєву особливість реального світу: усе в ньому перебуває у стані безперер-

вної зміни і розвитку. Саме шукаючи закономірності в нескінченному морі видозмін природи, учені дійшли до понять змінної величини і функції.

Поняття змінної величини вперше увів французький математик Рене Декарт (1596 – 1650) у знаменитому творі «Геометрія» у 1637 році. Саме після введення цього поняття починає створюватись сучасне уявлення про функцію як про залежність однієї змінної величини від іншої. Слід зазначити, що хоча деякі залежності між величинами, які ми називаємо функціями, використовувалися ще в давні часи, математика до першої половини XVII ст. залишалася наукою про сталі величини.

Термін «функція» (від латинського *functio* — виконання, звершення) вперше увів німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц у 1694 році.

Завдяки працям Г. Лейбніца та відомого англійського фізика й математика Ісаака Ньютона (1643–1727) сформувалася нова гілка математики — математичний аналіз, у якому поняття функції є одним з основних. Г. Лейбніцем та І. Ньютоном були розроблені методи дослідження функцій, які вже понад 300 років служать потужним засобом вивчення навколишнього світу за допомогою математики.

Про вагому роль функцій як математичних моделей реальних процесів І. Ньютон писав так: «Я не зміг би отримати багатьох своїх фундаментальних результатів, якби не відмовився від безпосереднього розгляду самих тіл і не звів усе просто до дослідження функцій».



Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646 – 1716),
німецький філософ,
математик, фізик

Запитання і вправи для повторення § 5

1. Наведіть приклад залежності між змінними.
2. Поясніть на прикладі, що таке аргумент і що таке функція.
3. Які ви знаєте способи задання функції? Наведіть приклад функції, заданої за допомогою формули.
4. Що називають областю визначення і областю значень функції?
5. Які точки координатної площини утворюють графік функції?
6. Як за допомогою графіка функції знайти її значення за відомим значенням аргументу?

7. Яку функцію називають лінійною? Наведіть приклади лінійних функцій.
8. Що є графіком лінійної функції?
9. Яку функцію називають прямою пропорційністю? Наведіть приклади прямої пропорційності.
754. Функція задана формулою $y = 5x - 3$.
- Знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: -8 ; 0 ; 16 .
 - Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції: -3 ; 1 .
 - Для якого значення x значення функції дорівнює значенню аргументу?
755. У деяких країнах (наприклад, у США, Канаді) температуру повітря вимірюють у градусах Фаренгейта. Температуру в градусах Фаренгейта (t_F) виражають через температуру в градусах Цельсія (t_C) за формулою $t_F = 1,8t_C + 32$.
- Знайдіть t_F , якщо $t_C = 20$ °C; $t_C = -15$ °C.
 - Знайдіть t_C , якщо $t_F = 5$ °F; $t_F = 50$ °F.
 - Знайдіть у градусах Фаренгейта температуру плавлення льоду, температуру кипіння води.
756. Функція задана формулою $y = x^2 - 3$, де змінна x може набувати значень: -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 . Задайте цю функцію таблицею.
757. На рисунку 34 зображено графік зміни температури тіла протягом 20 хв.
- Якою була початкова температура тіла?
 - На скільки градусів збільшилась температура тіла протягом перших 4 хв?
 - На скільки градусів змінилась температура тіла протягом останніх 6 хв?
 - Протягом скількох хвилин температура тіла не змінювалась?

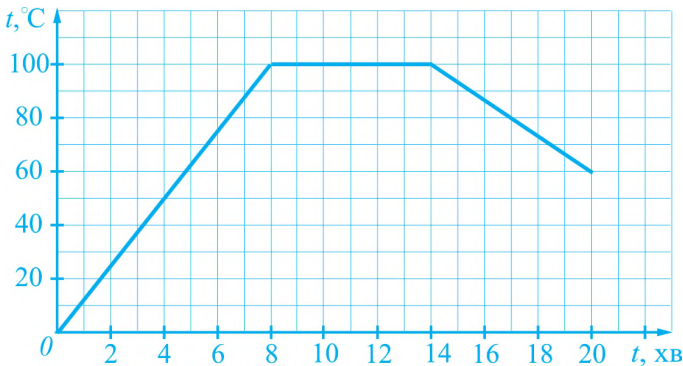


Рис. 34

- 758.** Графіком функції є ламана ABC , де $A(-2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(5; 1)$. Накресліть графік функції. Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції? Вкажіть нулі функції. Для яких значень x функція набуває додатних значень? від'ємних значень?
- 759.** Побудуйте графік функції $y = -3x - 1$. За допомогою графіка знайдіть:
- значення функції, якщо $x = -1,5$; $x = 1,5$;
 - значення x , для якого $y = 5$.

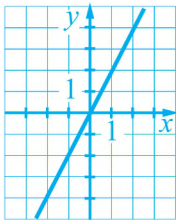
Побудуйте графік функції:

- 760.** а) $y = 2x + 1$, де $-3 \leq x \leq 1$; б) $y = 0,5x^2 - 0,5$, де $-2 \leq x \leq 2$.
- 761.** а) $y = -3x$; б) $y = 1,5x - 1$.
- 762*.** а) $y = 2|x|$; б) $y = x + |x|$.
- 763.** Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1,5 см, 2 см та x см, де $x \geq 1$. Запишіть формулу, яка задає залежність об'єму V паралелепіпеда (у кубічних сантиметрах) від x . Побудуйте графік функції, яку задають цією формулою.
- 764.** Запишіть формулу прямої пропорційності, якщо її графік проходить через точку $A(-3; 1)$.
- 765.** Графік функції $y = kx$ проходить через точку $A(-8; 4)$. Знайдіть k . Чи проходить графік цієї функції через точку: $B(2; -1)$; $C(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6})$?
- 766.** Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = -4x + 6$ з осями координат.
- 767.** Знайдіть координати точки перетину графіків функцій:
- $y = 3x$ і $y = -3x + 6$;
 - $y = x + 7$ і $y = 5 - 4x$.
- 768*.** В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = |x|$ та $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$. Знайдіть точки перетину графіків. Використовуючи графіки функцій, розв'яжіть рівняння $|x| = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$.
- 769*.** Функція задана формулою $y = kx + 3$.
- Для яких значень k графік цієї функції проходить через точку $(2; 4)$?
 - Для яких значень k графік цієї функції паралельний графіку функції $y = 5x - 8$?

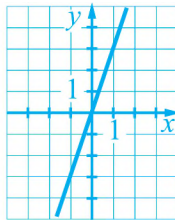
Завдання для самоперевірки № 5

Рівень 1

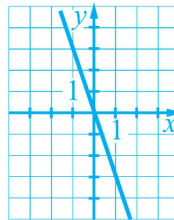
- Чому дорівнює значення функції $y = 2x - 0,5$, якщо $x = 1,5$?
а) 1,5; б) 1; в) $-2,5$; г) 2,5.
- Знайдіть значення функції $y = -4x$, якщо $x = 0,5$.
а) $-3,5$; б) $-4,5$; в) -2 ; г) 2.
- Для якого значення аргументу значення функції $y = 4x$ дорівнює 10?
а) 40; б) 2,5; в) 5; г) 2,4.
- Який із графіків є графіком функції $y = 3x$ (рис. 35)?



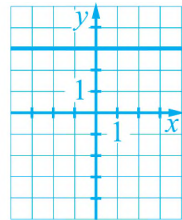
а)



б)



в)



г)

Рис. 35

- Яка з точок належить графіку функції $y = 2x + 1$?
а) $A(-4; 9)$; б) $B(4; 9)$; в) $C(4; 7)$; г) $D(-4; -9)$.
- Укажіть правильні твердження:
а) графіком лінійної функції є пряма;
б) формулою $y = 5x - 3$ задають пряму пропорційність;
в) графік функції $y = 2x + 3$ проходить через точку $(5; 1)$;
г) функція, графік якої зображено на рисунку 35,г), задають формулою $y = 3$.

Рівень 2

- Функція задана формулою $y = 2x^2 - 4$. Для кожного значення аргументу вкажіть відповідне значення функції:
а) $x = -2$; 1) $y = -4$;
б) $x = 0,5$; 2) $y = -3,5$;
в) $x = 3$; 3) $y = 4$;
г) $x = 0$; 4) $y = 14$.

8. Функція задана формулою $y = -4x - 1$. Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції -9 ; 9 .
9. Користуючись графіком функції (рис. 36), знайдіть:
 - а) значення функції, якщо $x = -3$;
 - б) значення аргументу, яким відповідає значення функції -2 .

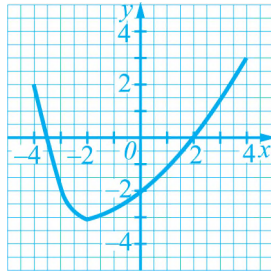


Рис. 36

10. Побудуйте графік функції $y = -2x$.
11. Чи проходить графік функції, заданої формулою $y = 4 - x^2$, через точку $(3; -5)$?

Рівень 3

12. Знайдіть область визначення і область значень функції, графік якої зображений на рисунку 36. Для яких значень x функція набуває від'ємних значень?
13. Функція задана формулою $y = x^2 - 6x + 2$. Знайдіть значення аргументу, яким відповідає значення функції $y = 2$.
14. Побудуйте графік функції $y = -2x - 2$. Вкажіть значення x , яке є нулем функції. Для яких значень x функція набуває від'ємних значень?
15. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 3x - 5$ та $y = 9 - 2x$.
16. Графік функції $y = kx$ проходить через точку $A(2, 5)$. Чи проходить графік цієї функції через точку $B(-3; -6)$?

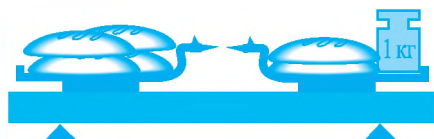
Рівень 4

17. Знайдіть найменше значення функції, заданої формулою $y = x^2 - 6x + 2$.
18. Функція задана формулою $y = (x - 2)(x + 4)$. Знайдіть значення аргументу, яким відповідає значення функції $y = -5$.
19. Чи проходить графік функції $y = 0,4x + 1,4$ через точку перетину графіків функцій $y = 3x + 4$ та $y = -2x - 1$?
20. За допомогою графіків функцій знайдіть значення x , для яких значення функції $y = -x + 2$ більші, ніж відповідні значення функції $y = 0,5x + 3,5$.
21. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 2|x| - 1$.

Розділ III. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

Алгебра тривалий час була частиною арифметики — однієї з найдавніших математичних дисциплін. Слово «арифметика» в перекладі з грецької мови означає «мистецтво чисел». Алгебру ж після виокремлення її в окрему науку розглядали як мистецтво розв'язувати рівняння.

У даному розділі ми з'ясуємо, що таке лінійне рівняння з однією змінною та із двома змінними, що означає розв'язати рівняння, що таке система двох лінійних рівнянь із двома змінними, які основні способи розв'язування систем рівнянь, як розв'язувати задачі за допомогою рівнянь та систем рівнянь.



 — x кг

$$4x = 2x + 1$$

§ 6. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

22. Поняття рівняння. Розв'язування рівнянь

1. Рівняння з однією змінною. Розглянемо задачу.

Маса 4 великих і 15 малих деталей дорівнює 270 г. Маса великої деталі втричі більша від маси малої. Яка маса малої деталі?

Нехай маса малої деталі дорівнює x г, тоді маса великої — $3x$ г. Маса 15 малих деталей дорівнює $15x$ г, а 4 великих — $4 \cdot 3x = 12x$ (г). За умовою задачі, сума цих мас дорівнює 270 г:

$$15x + 12x = 270.$$

Ми одержали рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою x (ще кажуть: рівність містить змінну x). Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти значення x , для якого рівність $15x + 12x = 270$ є правильною числовою рівністю.

*Рівність з невідомим значенням змінної називають **рівнянням з однією змінною** (або **рівнянням з одним невідомим**).*

2. Корінь рівняння. Розглянемо рівняння $3x = x + 6$. Підставляючи замість змінної x деякі числа, одержуватимемо числові рівності, які можуть бути правильними або неправильними. Наприклад:

якщо $x = 3$, то матимемо рівність $3 \cdot 3 = 3 + 6$, яка є правильною;

якщо $x = 4$, то матимемо рівність $3 \cdot 4 = 4 + 6$, яка є неправильною.

*Значення змінної, для якого рівняння перетворюється у правильну числову рівність, називають **коренем**, або **розв'язком рівняння**.*

Отже, число 3 є коренем рівняння $3x = x + 6$, а число 4 — ні.

3. Кількість коренів рівняння. Рівняння можуть мати різну кількість коренів. Наприклад:

рівняння $3x = 9$ має лише один корінь — число 3;

рівняння $(x - 2)(x - 6) = 0$ має два корені — числа 2 і 6;

рівнянню $x + 0 = x$ задовольняє будь-яке число x ; кажуть, що це рівняння має безліч коренів.

Рівняння може й не мати коренів. Розглянемо, наприклад, рівняння $x + 1 = x$. Для будь-якого числа x значення лівої частини рівняння на 1 більше від значення правої частини. Отже, яке число x ми не взяли б, рівність $x + 1 = x$ буде неправильною. Тому це рівняння не має коренів.

4. Розв'язування рівнянь. *Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.*

Розв'яжемо рівняння, складене вище за умовою задачі про великі та малі деталі:



$$15x + 12x = 270; \quad 27x = 270; \quad x = 270 : 27; \quad x = 10.$$

Отже, маса малої деталі дорівнює 10 г.

Розв'язування рівняння здебільшого зводиться до виконання певних перетворень, у результаті яких дане рівняння замінюють простішим.

Розв'яжемо, наприклад, рівняння:

$$5(x - 2) + 11 = 3x + 9. \quad (1)$$

1. Розкриємо дужки:

$$5x - 10 + 11 = 3x + 9. \quad (2)$$

2. Зведемо подібні доданки в лівій частині рівняння:

$$5x + 1 = 3x + 9. \quad (3)$$

3. Перенесемо доданки зі змінною x у ліву частину рівняння, а без змінної — у праву, змінивши їх знаки на протилежні:

$$5x - 3x = 9 - 1. \quad (4)$$

4. Зведемо подібні доданки у кожній частині рівняння:

$$2x = 8. \quad (5)$$

5. Поділимо обидві частини рівняння на 2:

$$x = 4.$$

Отже, рівняння (1) має єдиний корінь — число 4.

Розв'язуючи рівняння (1), ми виконували певні перетворення: розкривали дужки, зводили подібні доданки, переносили доданки з однієї частини рівняння в іншу, ділили обидві частини рівняння на число. Із цими перетвореннями пов'язані такі *основні властивості рівнянь*:

Властивість 1. У будь-якій частині рівняння можна розкрити дужки або звести подібні доданки.

Властивість 2. Будь-який доданок можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

Властивість 3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на те саме, відмінне від нуля, число.

Якщо в деякому рівнянні виконати одне з перетворень, указаних у властивостях 1, 2 або 3, то одержимо рівняння, яке має ті ж корені, що й початкове рівняння.

Розв'язуючи рівняння (1), ми послідовно одержували рівняння (2), (3), (4), (5). Усі вони разом з рівнянням (1) мають той самий корінь — число 4.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Чи є число 2,5 коренем рівняння $3x - 0,5 = 2(x + 1)$?

773. Поясніть кожний крок розв'язання рівняння:

а) $3(x-2) = 5x + 4$

$$3x - 6 = 5x + 4$$

$$3x - 5x = 4 + 6$$

$$-2x = 10$$

$$x = 10 : (-2)$$

$$x = -5;$$

б) $\frac{1+2x}{3} = 4 + x$

$$3 \cdot \frac{1+2x}{3} = 3(4+x)$$

$$1 + 2x = 12 + 3x$$

$$2x - 3x = 12 - 1$$

$$-x = 11$$

$$x = -11.$$

Рівень А



774. Доведіть, що число 1,5 є коренем рівняння:

а) $4x - 3 = x + 1,5;$

б) $2(1 - 2x) + x = -5x + 5.$

775. Доведіть, що число 8 є коренем рівняння:

а) $0,5x + 6 = 2x - 6;$

б) $4(x + 3) = 49 - (x - 3).$

Розв'яжіть рівняння:

776. а) $5x + 3 = 18;$

б) $1,7x - 2 = 3,1;$

в) $4 - 4y = 6;$

г) $-1,2y = 0,03;$

д) $-4(x + 8) = -108;$

е) $5(2y + 1) = -1;$

є) $12,6 = 6(x + 2,5);$

ж) $z : 1,5 = -7;$

з) $(0,7x + 1) : 0,5 = 4.$

777. а) $6 + 3z = 15;$

б) $2x - 11 = -3;$

в) $7 - 6x = 10;$

г) $4(2x + 3) = -4;$

д) $-2(3 + y) = 10,06;$

е) $(5z + 4) : 3 = -17.$

778. а) $30(x + 2) = 15(x - 2);$

б) $200(x - 1) = 300;$

в) $\frac{2}{7}x = 4;$

г) $\frac{1}{3}(x - 2) = x.$

779. а) $161(2x + 2) = 161x;$

б) $50(x + 3) = 250(x + 1);$

в) $\frac{1}{4}x = 3;$

г) $x - 1 = \frac{1}{3}x.$

Рівень Б



780. Запишіть рівняння, яке має:

а) єдиний корінь — число 4;

б) два корені — числа -4 і 4.

781. Запишіть рівняння, коренями якого є числа 0 і -2.

Розв'яжіть рівняння:

782. а) $200(x - 5) = 100(x + 1) + 500;$

б) $350x + 250(5x - 4) - 800 = 0;$

в) $\frac{1}{30}(2x - 5) + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}x;$

г) $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)(x + 1) = \frac{1}{12}.$

783. а) $210(x - 12) + 140(x + 18) = 70$; б) $\frac{2}{15}(1 - x) - \frac{4}{15}(1 + x) = \frac{7}{15}$.

784. а) $(3x + 7)(3x - 2) = 0$; б) $x^2 + 8 = 4$.

785. а) $(4x - 6)(2x + 6) = 0$; б) $2x^2 + 7 = 1$.

Рівень В



786. Знайдіть таке число a , щоб коренем рівняння $2x + a = -1$ було число 1.

787. Не виконуючи обчислень, доведіть, що число 2 не є коренем рівняння $135x(1297x - 468) - 114(273x + 575) - 2125 = 0$.

788. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x - 1)(2x - 1)(3x - 1) = 0$; б) $x^2(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$;

в) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) = (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 5)$;

г) $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4}$.

Зправи для повторення

789. Знайдіть значення виразу:

а) $(2a + 5)^2 - (2a - 3)(2a + 3)$, якщо $a = -0,1$;

б) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) - x^2(x - 4)$, якщо $x = 2,5$;

в) $(a + 2b)(a - 2b) + (a + b)(a + 4b)$, якщо $a = 3$; $b = -1$.

790. У сьомих класах навчається 84 учні, що становить $\frac{2}{21}$ усіх учнів школи. Скільки всього учнів є у школі?

791. У місті зараз проживає 52 000 жителів. Відомо, що населення цього міста щороку збільшується на 4%.

а) Скільки жителів буде в місті через рік?

б) Скільки жителів було в місті рік тому?

Поміркуйте

792. До вершини гори ведуть сходи, які мають 1001 сходинку. На найнижчих 500 сходинках лежать камені — по одному на сходинці. Сізіф може взяти будь-який камінь і перенести його вгору, але не далі як на найближчу вільну сходинку. Після цього Аїд може скотити вниз на одну сходинку будь-який камінь, якщо попередня сходинка є вільною. Сізіф та Аїд діють по черзі. Починає Сізіф, і його мета — покласти камінь на верхню сходинку. Чи може Аїд цьому завадити?

23. Лінійні рівняння з однією змінною

Розглянемо рівняння:

$$2x = -4; \quad -1,7x = 5,1; \quad \frac{2}{3} \cdot x = 0; \quad 0x = 2,4.$$

Ліва частина кожного із цих рівнянь є добутком деякого числа й змінної, а права частина — деяким числом. Такі рівняння називають *лінійними* рівняннями з однією змінною.

Означення

Рівняння виду $ax = b$, у якому a і b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Числа a і b називають *коефіцієнтами* лінійного рівняння.

Коли, розв'язуючи рівняння, виконують певні перетворення, зводячи дане рівняння до більш простого, то в багатьох випадках отриманим «простим» рівнянням є саме лінійне рівняння.

З'ясуємо, скільки коренів може мати лінійне рівняння. Для цього розглянемо спочатку такі три рівняння:

$$1) 3x = 2; \quad 2) 0x = 2; \quad 3) 0x = 0.$$

1) Щоб розв'язати рівняння $3x = 2$, досить обидві його частини поділити на 3. Одержимо один корінь: $x = \frac{2}{3}$.

2) У рівнянні $0x = 2$ значення лівої частини дорівнює 0 для будь-якого числа x . Права ж частина рівняння відмінна від нуля. Отже, дане рівняння коренів не має.

3) Рівність $0x = 0$ є правильною для будь-якого числа x . Тому коренем рівняння $0x = 0$ є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

У загальному випадку для лінійного рівняння $ax = b$ матимемо:

якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$;

якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то рівняння коренів не має;

якщо $a = 0$ і $b = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

Підсумок: кількість коренів лінійного рівняння

	Коефіцієнти	Корені
$ax = b$ — лінійне рівняння	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь
	$a = 0$ і $b \neq 0$	коренів немає
	$a = 0$ і $b = 0$	коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів)

Для тих, хто хоче знати більше



Рівняння з модулями

Нагадаємо, що модулем додатного числа й числа 0 є те саме число, модулем від'ємного числа є протилежне йому число:

$$|a| = a, \text{ якщо } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ якщо } a < 0.$$

Так, $|1,4| = 1,4$; $|0| = 0$; $|-2| = 2$. Модуль будь-якого числа x є невід'ємним числом, тобто $|x| \geq 0$.

Рівняння $|x| = 3$, $|x - 5| = 1$, $|2x - 3| = 0$, $|x| + 3x = 1$ містять змінну під знаком модуля. Такі рівняння називають *рівняннями з модулем*.

Рівняння виду $|x| = a$. Розв'язуючи рівняння виду $|x| = a$, де a — деяке відоме число, можна використовувати геометричний зміст модуля числа: модуль числа x — це відстань від початку відрілку до точки, що зображує число x на координатній прямій.

Розглянемо рівняння $|x| = 2$. На координатній прямій існують дві точки, розміщені на відстані 2 одиниці від початку відрілку. Це точки, що відповідають числам 2 і -2 (рис. 37). Тому рівняння $|x| = 2$ має два корені: 2 і -2 .



Рис. 37

Рівняння $|x| = 0$ має один корінь — число 0, а рівняння $|x| = -2$ не має коренів (модуль будь-якого числа x є невід'ємним числом і не може дорівнювати -2).

У загальному випадку рівняння $|x| = a$:

має два корені a і $-a$, якщо $a > 0$;

має один корінь 0, якщо $a = 0$;

не має коренів, якщо $a < 0$.

Розв'язування рівнянь з модулями, виходячи з означення модуля числа.

Розв'яжемо рівняння

$$|x| + 3x = 4. \quad (1)$$

Це рівняння не можна звести до вигляду $|x| = a$, де a — деяке число. Для його розв'язання розглянемо два випадки.

1. Якщо x — невід'ємне число ($x \geq 0$), то $|x| = x$ і рівняння (1) набуває вигляду $x + 3x = 4$, звідки $x = 1$. Число 1 — невід'ємне (задовольняє нерівність $x \geq 0$), тому воно є коренем рівняння (1).

2. Якщо x — від'ємне число ($x < 0$), то $|x| = -x$ і рівняння (1) набуває вигляду $-x + 3x = 4$, звідки $x = 2$. Число 2 не є від'ємним (не задовольняє нерівність $x < 0$), тому воно не є коренем рівняння (1).

Отже, рівняння $|x| + 3x = 4$ має один корінь $x = 1$.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розв'язати рівняння $5(2x - 1) = 4x - 23$.

• $10x - 5 = 4x - 23$; $10x - 4x = -23 + 5$; $6x = -18$; $x = -3$.

Відповідь. -3 . •

Вправа 2. Розв'язати рівняння $3x - 4 = 3(x - 2)$.

• $3x - 4 = 3x - 6$; $3x - 3x = -6 + 4$; $0x = -2$ (або $0 = -2$).

Відповідь. Рівняння коренів не має. •

Вправа 3. Розв'язати рівняння $3x - 2(x - 1) = x + 2$.

• $3x - 2x + 2 = x + 2$; $3x - 2x - x = 2 - 2$; $0x = 0$ (або $0 = 0$).

Відповідь. Коренем рівняння є будь-яке число. •

Вправа 4. Розв'язати рівняння $\frac{2x-1}{18} = \frac{x}{12} + \frac{1}{9}$.

• Помноживши обидві частини рівняння на 36 (36 — найменше спільне кратне знаменників дробів), матимемо:

$$36 \cdot \frac{2x-1}{18} = 36 \cdot \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{9} \right); \quad 2(2x-1) = 3x+4; \quad 4x-2 = 3x+4;$$

$$4x - 3x = 4 + 2; \quad x = 6.$$

Відповідь. 6. •

Підсумок. Розв'язуючи рівняння, які зводяться до лінійних, варто дотримувати таких кроків:

1. Якщо в рівнянні є вирази з дробовими коефіцієнтами, то помножити обидві його частини на найменший спільний знаменник дробів.

2. Розкрити дужки.

3. Перенести всі доданки, які містять змінну, в одну частину рівняння (як правило, в ліву), а доданки, які не містять змінної, — в іншу частину (у праву).

4. Звести подібні доданки.

5. Поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт біля змінної, якщо він відмінний від нуля. Якщо ж він дорівнює 0, то рівняння або не має коренів, або його коренем є будь-яке число.

Вправа 5. Розв'язати рівняння $|5x - 3(x + 2) + 3| = 3$.

• $|5x - 3x - 6 + 3| = 3$; $|2x - 3| = 3$.

Якщо модуль числа дорівнює 3, то цим числом є 3 або -3 . Тому можливі два випадки:

1) $2x - 3 = 3$; $2x = 6$; $x = 3$; 2) $2x - 3 = -3$; $2x = 0$; $x = 0$.

Відповідь. 3; 0. •

Вправа 6. Розв'язати рівняння $2|z| - 3 = 5$.

• $2|z| - 3 = 5$; $2|z| = 8$; $|z| = 4$; $z = 4$ або $z = -4$.

Відповідь. -4 ; 4. •

Усно

793. Які з даних рівнянь є лінійними рівняннями?

а) $\frac{2}{9} \cdot x = 8$;

б) $4 : x = 2$;

в) $-2,7y = 0$;

г) $\frac{4}{z} = \frac{2}{5}$.

794. Скільки коренів має рівняння:

а) $56x = 64$; б) $0x = -2$; в) $8x = 0$; г) $0y = 0$?

795. Розв'яжіть лінійне рівняння:

а) $6x = 42$; б) $4x = -12$; в) $-3y = 6$; г) $-5z = -45$;
 д) $3x = -2$; е) $0y = -4$; є) $0x = 0$; ж) $-2x = 0$.



Розв'яжіть рівняння:

796. а) $36x = -54$; б) $0,04z = 1,4$; в) $-1,2x = -0,09$;

г) $-3,86t = 7,913$; д) $2y = -\frac{2}{3}$; е) $\frac{4}{15}x = -\frac{2}{5}$.

797. а) $5x - 3 = 17$; б) $7x + 32 = 12x + 25$; в) $4 - 3y = 6y + 22$;

г) $4,5z + 1 = 7z + 2,5$; д) $-1,2m - 2 = m - 0,9$; е) $-1,74x + 7,92 = -1,08x$.

798. а) $56x = -196$; б) $0,8x = 1,2$; в) $\frac{5}{8}x = \frac{3}{4}$;

г) $6x + 2 = 20x - 5$; д) $2y - 1,8 = -3y + 6,7$; е) $4,5x + 1 = 2,2 + 3x$.

799. а) $6(x - 2) = 2x$;

б) $1 - (3x + 1) = 2x$;

в) $x(x - 2) - x^2 = 4$;

г) $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 2x$.

800. а) $x(x + 4) - x^2 = 2x - 8$;

б) $(x - 1)^2 = x^2 + 3$.



Розв'яжіть рівняння:

801. а) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$; б) $8(-3x + 4) + 14(3 + 2x) = 4 + 2x$;

в) $-5(4x + 3) + 3x = -12(x - 3)$; г) $0,5x = 0,1(2x - 5) + 1,7$.

802. а) $x(x - 3) + x(7 - x) = -7$; б) $(2x - 7)(2x + 7) = x(4x + 3)$;

в) $(x + 2)(x - 1) = x(x + 3)$; г) $(3x - 1)^2 = 3x(3x + 1)$.

803. а) $5(3x - 6) + 4(3 - 2x) = 5x - 8$; б) $9(x - 3) - 4(7 - 3x) - 5 = -3x$;

в) $-0,3(8 - 4x) = 0,6(x - 3) + 0,9$; г) $2(-0,9x + 1,4) + 1,4(1,5 + x) = x$;

д) $(x - 1)(2x + 3) = 2x^2 + 2x$; е) $(x + 2)^2 = (x - 4)(x + 4)$.

804. Знайдіть значення x , для яких функції $y = 2x - 3$ й $y = -3 + 7x$ набувають того самого значення.

805. Знайдіть значення x , для яких значення виразу $25x - 30$ на 5 менше від значення виразу $15x + 15$.

806. Знайдіть значення x , для яких значення виразу $4x + 6$ у 6 разів більше від значення виразу $6x - 15$.

807. Функція задана формулою $y = -2x + 3$. Знайдіть значення аргументу, для якого значення функції дорівнює 7.

808. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 4x - 5$ та $y = 1 - 2x$.

Розв'яжіть рівняння:

809. а) $\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = 2 - \frac{x-2}{15};$ **б)** $-\frac{2x+1}{6} + \frac{2-11x}{9} = \frac{2}{3} - \frac{x-3}{2};$

в) $2\left(3\frac{3}{4} - 2x\right) + 2,5 = 1\frac{2}{9} - \left(-x + \frac{2}{3}\right);$ **г)** $2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3} - 3x\right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{3} - 3x\right) = 1.$

810. а) $\frac{x+1}{6} + \frac{2-x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{x-3}{12};$ **б)** $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x}{6};$

в) $\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{5}x + 4\frac{1}{3};$ **г)** $2\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6} - 2x\right) - \left(5\frac{1}{6} - \frac{4}{5}x\right) = 1\frac{5}{6}.$

Рівень В



Розв'яжіть рівняння:

811. а) $200(2(2(x-1) - 1) - 1) = -600;$ **б)** $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right) - x\right) - x\right) - x = 1.$

812. а) $|x - 3| = 8;$

б) $2|x| - 1 = 5;$

в) $|2(x - 3) - (x + 4)| = 2;$

г) $2(|x - 3| - 4(2|x| + 9)) = -48.$

813. а) $3x + |x| = 20;$

б) $5|x| + x = 12;$

в) $x - |x| = 12;$

г) $x - |x| = 0.$

Вправи для повторення

814. Обчисліть:

а) $\left(3\frac{3}{8} - 2\frac{5}{12}\right) \cdot 1\frac{2}{5};$

б) $1,2 \cdot (-0,94) + 1,2 \cdot (-1,56) + 2 : \frac{5}{6}.$

815. З міст A і B одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі й зустрілися через 1,5 год. Швидкість одного автомобіля дорівнює a км/год, а іншого — b км/год. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами.

816. Легковий автомобіль наздоганяє вантажний. Швидкість легкового автомобіля дорівнює a км/год, а вантажного — b км/год. Запишіть у вигляді виразу відстань між автомобілями за 0,2 год до зустрічі.

817. З кошика взяли 3 яблука, потім — третину решти яблук і ще 3 яблука. Після цього в кошику залишилася половина початкової кількості яблук. Скільки яблук було в кошику спочатку?

Поміркуйте

818. У рівнянні $ax = 4389$ коефіцієнт a є трицифровим числом виду $**1$. Розв'яжіть це рівняння, якщо відомо, що його коренем є натуральне число.

24. Розв'язування задач за допомогою рівнянь

Розв'язуючи задачі за допомогою рівнянь, здебільшого дотримуються такої схеми:

- 1) вибирають невідоме й позначають його буквою x (або якою-небудь іншою буквою);
- 2) використовуючи умову задачі, складають рівняння;
- 3) розв'язують рівняння і відповідають на поставлені в задачі запитання.

Розглянемо приклади.

Задача 1. У двох цистернах зберігається 66 т бензину, до того ж, у першій бензину в 1,2 разу більше, ніж у другій. Скільки бензину в кожній цистерні?

• Нехай у другій цистерні є x т бензину, тоді в першій — $1,2x$ т. У двох цистернах разом є $(1,2x + x)$ т бензину, що, за умовою, дорівнює 66 т.

Маємо рівняння: $1,2x + x = 66$.

Розв'яжемо це рівняння: $2,2x = 66$; $x = 66 : 2,2$; $x = 30$.

Отже, у другій цистерні є 30 т бензину, а в першій — $1,2 \cdot 30 = 36$ (т).

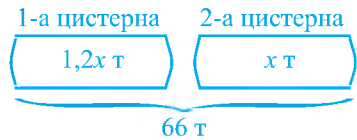
Відповідь. 36 т, 30 т. •

Зауваження. Щоб розв'язати задачу 1, можна міркувати й так. Нехай у другій цистерні є x т бензину, тоді в першій — $(66 - x)$ т. У першій цистерні бензину в 1,2 разу більше, ніж у другій, тому $66 - x = 1,2x$. Далі залишається розв'язати це рівняння і записати відповідь до задачі.

Задача 2. З міста A до міста B виїхав вантажний автомобіль. Через 30 хв назустріч йому з міста B виїхав легковий автомобіль, швидкість якого на 25 км/год більша, ніж швидкість вантажного. Автомобілі зустрілися через 1,3 год після виїзду вантажного автомобіля з міста A . Знайти відстань між містами, якщо за весь час руху вантажний автомобіль проїхав на 10 км більше, ніж легковий.

• Нехай швидкість вантажного автомобіля дорівнює x км/год, тоді швидкість легкового — $(x + 25)$ км/год.

До моменту зустрічі вантажний автомобіль був у дорозі 1,3 год, а легковий на 30 хв = 0,5 год менше: $1,3 \text{ год} - 0,5 \text{ год} = 0,8 \text{ год}$. За 1,3 год вантажний автомобіль проїхав $1,3x$ км, а легковий за 0,8 год — $0,8(x + 25)$ км. Оскільки



вантажний автомобіль проїхав на 10 км більше, ніж легковий, то різниця шляхів $1,3x$ км і $0,8(x + 25)$ км дорівнює 10 км.

	Швидкість, км/год	Час, год	Шлях, км
Вантажний автомобіль	x	1,3	$1,3x$
Легковий автомобіль	$x + 25$	0,8	$0,8(x + 25)$

Маємо рівняння: $1,3x - 0,8(x + 25) = 10$.

Розв'яжемо це рівняння:

$$1,3x - 0,8x - 20 = 10; \quad 0,5x = 30; \quad x = 60.$$

Отже, швидкість вантажного автомобіля дорівнює 60 км/год.

Відстань між містами дорівнює сумі відстаней, які проїхали обидва автомобілі, тобто $(1,3x + 0,8(x + 25))$ км. Оскільки $x = 60$, то матимемо:

$$1,3x + 0,8(x + 25) = 1,3 \cdot 60 + 0,8 \cdot (60 + 25) = 78 + 68 = 146 \text{ (км)}.$$

Відповідь. 146 км. ●

Примітка. Опираючись на розв'язання задач 1 і 2, проаналізуємо перші два кроки наведеної вище схеми розв'язування задач за допомогою рівнянь.

1) *Вибір невідомого*, яке ми позначали буквою, у розв'язаннях цих задач був різний. У задачі 1 ми позначили через x т одну з шуканих величин (масу бензину в другій цистерні). У задачі 2 шуканою величиною є відстань між містами. Якщо цю величину позначити через x км, то, складаючи рівняння, доведеться провести доволі складні міркування. Ми ж через x км/год позначили невідому швидкість вантажного автомобіля, виразили через x шляхи, які проїхали автомобілі, й склали рівняння, знаючи, що різниця шляхів дорівнює 10 км.

Отже, позначати через x (або якою-небудь іншою буквою) бажано ту невідому величину, через яку легше виражаються величини, значення яких можна прирівняти.

2) Щоб *скласти рівняння*, спочатку виражаємо через x ті величини, значення яких прирівнюватимемо. Після цього записуємо рівняння.

Рівняння як математична модель реальних процесів. Опишемо мовою математики задачу 2. Шукаючи швидкість вантажного автомобіля в цій задачі, ми позначили її через x км/год. Швидкість легкового автомобіля на 25 км/год більша, ніж швидкість вантажного, що мовою математики записують так: швидкість легкового автомобіля дорівнює $(x + 25)$ км/год.

Мовою математики шлях, який проїхав вантажний автомобіль, записують: $1,3x$ км, а шлях, який проїхав легковий автомобіль, — $0,8(x + 25)$ км.

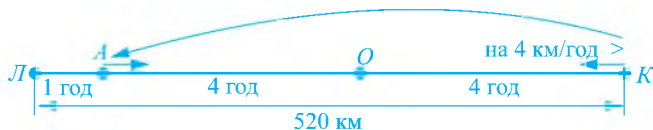
За умовою задачі вантажний автомобіль проїхав на 10 км більше, ніж легковий, що мовою математики можна висловити так: різниця шляхів, які проїхали вантажний і легковий автомобілі, дорівнює 10 км і записати: $1,3x - 0,8(x + 25) = 10$.

Рівень Б



- 830.** У першому кошику було на 12 яблук більше, ніж у другому. Після того як мама взяла з першого кошика 18 яблук, а з другого 14, у першому кошику яблук стало в 1,2 разу більше, ніж у другому. Скільки яблук було в кожному кошику спочатку?
- 831.** Перший велосипедист долає шлях між двома селами за 36 хв, а другий — за 45 хв. Швидкість першого велосипедиста більша від швидкості другого на 4 км/год. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста і відстань між селами.
- 832.** З Чернівців одночасно виїхали два автомобілі й одночасно приїхали до Житомира. Перший автомобіль їхав зі сталою швидкістю, другий автомобіль перші 2 год їхав зі швидкістю на 12 км/год меншою, а решту — 3 год — зі швидкістю, в 1,1 разу більшою від швидкості першого автомобіля. Знайдіть відстань між містами.
- 833.** З міста A до міста B одночасно виїхали автомобіль і мотоцикліст. Коли через 2,5 год автомобіль прибув до міста B , мотоциклістові до цього міста залишалось проїхати ще 75 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість автомобіля в 1,6 разу більша від швидкості мотоцикліста.
- 834.** Човен проплив шлях між двома пристанями за течією річки за 1,2 год, а на зворотний шлях затратив 1,5 год. Знайдіть відстань між пристанями, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 22,5 км/год.
- 835.** Від пристані A до пристані B за течією річки катер шлив 3 год, а від B до A — 4 год. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.
- 836.** Автомобіль мав подолати шлях завдовжки 140 км за 2 год. Деяку частину шляху він проїхав зі швидкістю 60 км/год, а решту шляху — зі швидкістю 75 км/год. Скільки кілометрів проїхав автомобіль зі швидкістю 60 км/год, якщо відомо, що до місця призначення він прибув вчасно?
- 837.** Зі Львова до Києва, відстань між якими дорівнює 520 км, вийшов поїзд, а через годину назустріч йому з Києва вийшов другий поїзд, який проходить за годину на 4 км більше, ніж перший. Поїзди зустрілися через 4 год після відходу другого поїзда з Києва. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

Вказівка. Розв'язуючи задачу, використайте схему:



847. Сплав міді, цинку й олова містить 32% олова, а міді — на 40 г менше, ніж олова. Відомо також, що цинку в сплаві на 100 г більше, ніж міді. Знайдіть масу сплаву.
848. У процесі очищення руди кількість домішок у ній зменшується від 20% у добутій руді до 5% в очищеній. Скільки потрібно взяти тонн добутої руди, щоб одержати 32 т очищеної?

Зправи для повторення

849. Запишіть відповідні рівності:
- а) подвоєна сума чисел x та y дорівнює 3;
 - б) добуток чисел x та y утричі більший від їх суми.
850. Доберіть такі два числа x та y , для яких виконується рівність:
- а) $2x + 5y = 27$;
 - б) $3x - 7y = 8$.
851. Знайдіть значення виразу $2x^2 - 4y^2$, якщо x дорівнює найменшому цілому числу, яке задовольняє нерівність $-5,4 < x < -2,7$, а y — найбільшому цілому числу, яке задовольняє нерівність $-15,4 \leq y \leq -2$.
852. Довжина Дніпра дорівнює 2285 км, а Дністра — 1362 км. На скільки відсотків довжина Дністра менша від довжини Дніпра? Результат округліть до 0,1%.
853. В Оленки число зошитів у клітинку відноситься до числа зошитів у лінійку як 4 : 5. Чи може число всіх зошитів дорівнювати: а) 15; б) 18?

Поміркуйте

854. На складі є банки, місткість яких дорівнює 0,5 л, 0,7 л та 1 л. Коли зі складу частину банок забрали, то на ньому залишилося 3600 банок загальною місткістю 2800 л. Доведіть, що серед них є хоча б одна півлітрова банка.

Цікаво знати

Протягом багатьох століть алгебра була наукою про рівняння та способи їх розв'язування. Лінійні рівняння вміли розв'язувати ще давні єгиптяни й вавилоняни (I тис. до н. е.).

Про стан математики в Давньому Єгипті можна дізнатися з математичних текстів, написаних на особливому папері — папірусі, виготовленому зі стебел рослини, яка має таку ж назву. Написання деяких папірусів відносять

до XVIII ст. до н. е., хоча описані в них математичні факти були відомі давнім єгиптянам задовго до їх написання.

Один з таких папірусів був знайдений у 1872 році в одній з єгипетських пірамід. Його придбав англійський колекціонер предметів старовини Райнд і зараз цей папірус — папірус Райнда — зберігається в Лондоні.

У папірусі Райнда особливе місце посідають задачі на «аха» («хау»). Це задачі, які розв'язують за допомогою лінійних рівнянь з одним невідомим.

«Аха» («хау») означає «сукупність», «купу» (невідому величину). Приклад

такої задачі: «Купа. Її $\frac{2}{3}$, її $\frac{1}{2}$, її $\frac{1}{7}$ і її ціле. Це 33». Якщо позначити «купу» — невідому величину — через x , то за цією задачею одержимо рів-

$$\text{няння: } \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + x = 33.$$

Помітніших успіхів у створенні початків алгебри було досягнуто в Давньому Вавилоні. До нашого часу збереглися вавилонські глиняні плиточки з комбінаціями клиноподібних рисочок — клинописи. Ці плиточки відігравали у Вавилоні таку ж роль, як папіруси в Єгипті. На плитках трапляються і клинописні математичні тексти, які свідчать, що вже близько 4000 років тому у Вавилоні могли розв'язувати рівняння, що містять квадрат невідомого.

Починаючи із VII ст. до н. е., давні греки, ознайомившись із досягненнями єгиптян і вавилонян в галузі математики, продовжили їх науку. Одним з тих, хто для розв'язання задач використовував рівняння, був давньогрецький математик **Діофант**.

Про Діофанта відомо небагато, навіть точно не встановлено роки його життя. Деяко про життя Діофанта та про те, скільки він прожив років, можна судити з напису на його могильній плиті.



Діофант (III ст.),
давньогрецький математик
з Александрії

Напис на плиті	Мовою алгебри
Подорожній! Поховано тут Діофанта. І числа розкажуть тобі, Який довгий шлях він життєвий пройшов.	x
Посту частину його життя становило веселе дитинство.	$\frac{x}{6}$
Минула частина дванадцята — Й пухом покрилося його підборіддя.	$\frac{x}{12}$
Сьому — в бездітному шлюбі прожив Діофант.	$\frac{x}{7}$
Минуло п'ять літ.	5
Ощасливлений він був народженням первістка-сина, Якому судилася лише половина життя його батька.	$\frac{x}{2}$
І в глибокій журбі Старець закінчив свій шлях на Землі, Де прожив років чотири з часу, Коли сина не стало.	4
Скажи: віку якого досягши, Славетний помер Діофант?	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$

Грецьку науку в середні віки перейняли вчені Сходу — індійці та араби. Саме на Сході в IX ст. алгебра стає самостійною математичною наукою.

Походження слова «алгебра» також пов'язане зі Сходом.

Місто Багдад у VII–IX ст. було столицею могутнього Арабського халіфату. Багдадські халіфи сприяли розвитку природничих і математичних наук. За панування халіфа Гаруна ал-Рашида в Багдаді була заснована велика бібліотека, а халіф ал-Мамун організував своєрідну академію — «Будинок мудрості» й побудував добре обладнану обсерваторію.

При дворі ал-Мауна жив і працював учений **Мухаммед бен Муса ал-Хорезмі** (близько 780 — близько 850). Він зібрав та систематизував способи розв'язування рівнянь й описав їх у праці «Кітаб ал-джебр ал-мукабала», що дослівно означає «Книга про відновлення і протиставлення». У той час від'ємні числа вважали «несправжніми», і коли в процесі розв'язування рівняння в якійсь його частині з'являлось від'ємне число, його потрібно було перенести в іншу частину. Цю операцію називали відновленням (ал-джебр), тобто переведенням «несправжніх» (від'ємних) чисел у «справжні» (додатні). За допомогою протиставлення (ал-мукабала) відкидали однакові доданки в обох частинах рівняння.

У XII ст. твір ал-Хорезмі переклали на латинську мову, зберігши в його назві лише слово «ал-джебр», яке згодом почали вимовляти як *алгебра*.

Поступово сформувалася сучасна алгебра, яка охоплює не тільки теорію розв'язування рівнянь, а й способи проведення операцій (дій) з різноманітними об'єктами (зокрема, з числами).



Мухаммед бен Муса ал-Хорезмі (IX ст.),
арабський математик,
астроном і географ.
Уперше розглядає алгебру
як самостійний розділ
математики

Запитання і вправи для повторення § 6

1. Наведіть приклади рівнянь з однією змінною.
2. Що називають коренем рівняння? Чи є число 4 коренем рівняння $3x - 2 = x + 6$?
3. Що означає розв'язати рівняння?
4. Сформулюйте властивості рівнянь.
5. Дайте означення лінійного рівняння з однією змінною. Наведіть приклад такого рівняння.
6. Скільки коренів може мати лінійне рівняння з однією змінною?

855. Доведіть, що число 2,5 є коренем рівняння:

а) $3x - 5 = x$;

б) $x(x - 0,5) = 4x - 5$.

856. Яке з чисел -2 ; $-1,2$; $1,8$ є коренем рівняння $5x - 3 = 10x + 3$?

857. Скільки коренів має рівняння:

а) $\frac{3}{7}x = 12$;

б) $\left(\frac{3}{5} - 0,6\right)x = 1$;

в) $0(x + 3) = 0$?

Розв'яжіть рівняння:

858. а) $2x - 3 = 5(x - 3)$;

б) $12(x - 1) = 24(x + 1)$;

в) $0,6(2x - 3) - 1,5(x + 4) = -4,2x$;

г) $2(3 - 2(x + 1)) = 6(2 - x)$;

д) $-6(2x + 5) + 2(x + 3) = 2$;

е) $24(x - 3) + 18(x - 2) = 30(3x - 10)$.

859. а) $\frac{5}{36} + \frac{1}{18}x = \frac{7}{36}x - \frac{5}{9}$;

б) $\frac{3-x}{12} - \frac{5+x}{6} = \frac{x}{3}$.

860. а) $x(2x - 1) - 2x(x + 2) = 10$;

б) $(x + 3)(2x + 3) = (x - 1)(2x - 1)$;

в) $(x + 4)^2 = x^2 + 3x$;

г) $(3x - 1)(3x + 1) = 3(3x^2 - x)$.

861*. а) $2|x| + 0,2 = \frac{1}{7}$;

б) $3 - 2(1 - 2|x|) = 11 - |x|$;

в) $|x - 2| = 2$;

г) $3|2x + 1| - 7 = 2$;

д) $5x - 2|x| = 21$;

е) $2(|x| - 5) = 3x - 7$.

862. Чи існує число k , для якого рівняння $(k - 2)x + 2 = k$ не має коренів?

863. Периметр прямокутника дорівнює 48 см, його довжина втричі більша від ширини. Знайдіть площу прямокутника.

864. Периметр трикутника дорівнює 30 см. Знайдіть довжину кожної сторони трикутника, якщо перша його сторона на 4 см коротша від другої, а друга — в 1,2 разу довша від третьої.

865. Трактор зорав поле за 3 дні. За перший день було зорано 35% площі поля, за другий — на 4 га менше, ніж за перший, а за третій день — 25 га. Знайдіть площу поля.

866. Теплохід пройшов шлях завдовжки 90 км. Деяку частину цього шляху теплохід ішов зі швидкістю 30 км/год, а решту — зі швидкістю 25 км/год. Який шлях пройшов теплохід зі швидкістю 30 км/год, якщо на весь шлях він затратив 3,5 год?

867*. Туристові від села до станції потрібно пройти шлях завдовжки 10 км. Коли він вийшов із села, до відходу поїзда, на який він поспішав, залишалося 3 год. Долаючи 3 км за годину, турист зрозумів, що запізнюється на поїзд, і пішов зі швидкістю 4 км/год. На станцію він прийшов за 12 хв до відходу поїзда. Скільки часу рухався турист зі швидкістю 3 км/год?

868*. Є два сплави міді й олова; перший містить 40% міді, а другий — 60%. Скільки потрібно взяти кілограмів кожного сплаву, щоб одержати 10 кг нового сплаву, який містив би 54% міді?

869*. За першу поїздку автомобіль витратив 25% бензину, що був у баку, за другу — на 40% менше, ніж за першу. Після цього в баку залишилося бензину на 8 л більше, ніж було витрачено за обидві поїздки. Скільки літрів бензину було в баку спочатку?

Завдання для самоперевірки № 6

Рівень 1

1. Яке з чисел є коренем рівняння $4x + 2 = 10$?
а) 1; б) -2 ; в) 2; г) 3.
2. Скільки коренів має рівняння $(x - 2)(x + 2) = 0$?
а) Один; б) два; в) безліч; г) коренів немає.
3. Які з даних рівнянь є лінійними рівняннями?
а) $\frac{1}{3}x = 2$; б) $y^2 = 4$; в) $2 : x = 3$; г) $-2y = 0$.
4. Розв'яжіть рівняння $7y - 3 = 3y + 5$ та вкажіть правильну відповідь:
а) -2 ; б) 2; в) 0,8; г) 0,5.
5. Сума двох чисел дорівнює 6, до того ж, перше число в 4 рази більше від другого.
Яке з рівнянь потрібно скласти, щоб знайти друге число (x — друге число)?
а) $x + 6x = 4$; б) $6x - x = 4$; в) $4x + x = 6$; г) $4x - x = 6$.

Рівень 2

6. Складіть лінійне рівняння, коренем якого є число 3.
7. Установіть відповідність між рівняннями і кількістю коренів рівняння:
а) $7x = 1$; 1) один корінь;
б) $0 \cdot x = -2$; 2) безліч коренів;
в) $2x = 0$; 3) коренів немає.
г) $0 \cdot x = 0$;
8. Розв'яжіть рівняння:
а) $2(x - 3) = 5x - 9$; б) $4 - 5(1 - 2x) = 1 - 6x$.
9. Швидкість велосипедиста на 10 км/год більша від швидкості пішохода. Відомо, що за 2 год велосипедист долає таку ж відстань, яку пішохід проходить за 6 год. Знайдіть швидкість пішохода.

Рівень 3

10. Чи мають рівняння $(x - 1)(x + 2) = 0$ та $x + 2 = 0$ ті самі корені?
11. Розв'яжіть рівняння:
- а) $160x + 560 = -160(3x - 1)$; б) $\frac{2x-1}{15} = \frac{x+6}{40} - \frac{1-x}{10}$.
12. У двох сувоях є 81 м тканини, до того ж, у першому — на 70% більше, ніж у другому. Скільки метрів тканини є в кожному сувої?
13. У першому резервуарі є 420 м^3 води, а у другому — 750 м^3 . З обох резервуарів почали одночасно випускати воду. З першого резервуара щогодини витікає 28 м^3 води, а з другого — 38 м^3 . Через скільки годин у першому резервуарі стане води удвічі менше, ніж у другому?

Рівень 4

14. Доведіть, що рівняння $(x - 4)(x + 2) = 0$ і $|x - 1| = 3$ мають ті самі корені.
15. Розв'яжіть рівняння:
- а) $x(x - 5)^2 + 10 = (x - 1)^3 - 7x^2$; б) $2(|x - 3|) = 4|x| - 10$.
16. Екскаватор мав вирити траншею певної довжини. За перший день він вирив 30% довжини всієї траншеї, за другий — на 10% більше, ніж за перший, а за третій — решту 111 м. Знайдіть довжину траншеї.
17. Сплав міді й олова має масу 12 кг і містить 45% міді. Скільки кілограмів олова потрібно додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, який містив би 40% міді?

§ 7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

25. Рівняння із двома змінними

1. Поняття рівняння із двома змінними. Ви вже вмієте розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, що зводяться до лінійних. Нагадаємо, що лінійне рівняння з однією змінною — це рівняння виду $ax = b$, де a і b — деякі числа, а x — змінна.

Розглянемо приклад, який приводить до рівняння із двома змінними.

Нехай відомо, що сума деяких двох чисел дорівнює 8. Якщо одне з чисел позначити через x , а друге — через y , то матимемо рівняння

$$x + y = 8,$$

яке містить дві змінні: x та y . Таке рівняння називають *рівнянням із двома змінними*.

Рівняння

$$3x - 2y = 1, \quad 0x + 4y = 5, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad xy = 10$$

теж є рівняннями із двома змінними. Перші два із цих рівнянь є рівняннями виду $ax + by = c$, де a , b і c — числа. Такі рівняння називають *лінійними рівняннями із двома змінними*.

Означення

Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x та y — змінні, a , b і c — деякі числа (коефіцієнти рівняння).

Коефіцієнти a та b називають ще коефіцієнтами при змінних, а коефіцієнт c — вільним членом.

2. Розв'язки рівняння із двома змінними. Розглянемо рівняння $x + y = 8$. Якщо $x = 2$, $y = 6$, то це рівняння перетворюється у правильну числову рівність $2 + 6 = 8$. Кажуть, що пара значень змінних $x = 2$, $y = 6$ є *розв'язком* рівняння $x + y = 8$.

Означення

Розв'язком рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, для яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Розв'язками рівняння $x + y = 8$ є й такі пари чисел:

$$x = 4, y = 4; \quad x = 4,5, y = 3,5; \quad x = 10, y = -2.$$

Скорочено ці розв'язки записують так: $(4; 4)$; $(4,5; 3,5)$; $(10; -2)$. У цих парах чисел на першому місці пишуть значення змінної x , а на другому — значення змінної y . Це пов'язано з тим, що змінну x умовно вважають першою змінною, а змінну y — другою.

Щоб знайти розв'язок рівняння із двома змінними, можна підставити в рівняння довільне значення однієї змінної і, розв'язавши одержане рівняння з

однією змінною, знайти відповідне значення іншої змінної. Для прикладу знайдемо ще кілька розв'язків рівняння $x + y = 8$.

Нехай $x = 7$, тоді $7 + y = 8$, звідки $y = 8 - 7$; $y = 1$.

Нехай $x = -3$, тоді $-3 + y = 8$, звідки $y = 8 + 3$; $y = 11$.

Ми знайшли два розв'язки $(7; 1)$ і $(-3; 11)$. Надаючи змінній x інших значень, одержимо інші розв'язки рівняння. Рівняння $x + y = 8$ має безліч розв'язків.

Рівняння $0x + 0y = 0$ також має безліч розв'язків — його розв'язками є будь-яка пара чисел $(x; y)$. Рівняння $0x + 0y = 8$ розв'язків, очевидно, не має.

Узагалі, *лінійне рівняння із двома змінними або має безліч розв'язків, або не має жодного розв'язку.*

3. Властивості рівнянь із двома змінними. Властивості рівнянь із двома змінними такі ж, як і рівнянь з однією змінною, а саме:

1. У будь-якій частині рівняння можна виконати *тотожні перетворення виразів (розкрити дужки, звести подібні доданки).*

2. Будь-який доданок можна *перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.*

3. Обидві частини рівняння можна *помножити або поділити на те саме, відмінне від нуля, число.*

Розглянемо рівняння

$$3x + 2y = 9.$$

Використовуючи властивості рівнянь, виразимо з цього рівняння одну змінну через іншу, наприклад, y через x . Для цього перенесемо доданок $3x$ у праву частину, змінивши його знак на протилежний:

$$2y = -3x + 9.$$

Поділимо обидві частини одержаного рівняння на 2:

$$y = -1,5x + 4,5.$$

Користуючись формулою $y = -1,5x + 4,5$, можна знайти скільки завгодно розв'язків даного рівняння. Для цього досить узяти довільне значення x і обчислити відповідне значення y . Пари деяких відповідних значень x та y подамо у вигляді таблиці.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = -1,5x + 4,5$	10,5	9	7,5	6	4,5	3	1,5	0	-1,5

Пари чисел кожного стовпчика — розв'язки рівняння $3x + 2y = 9$.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Знайти значення коефіцієнта a , для яких одним з розв'язків рівняння $3x + ay = -1$ є пара чисел $(-1; 2)$.

• Якщо пара чисел $(-1; 2)$ є розв'язком рівняння $3x + ay = -1$, то має виконуватися рівність $3 \cdot (-1) + a \cdot 2 = -1$. Розв'яжемо одержане рівняння зі змінною a :

$$-3 + 2a = -1; \quad 2a = -1 + 3; \quad 2a = 2; \quad a = 1.$$

Відповідь. $a = 1$. •

Усно

870. Серед поданих рівнянь назвіть лінійні рівняння із двома змінними:

- | | | |
|--------------------|----------------------|--------------------|
| а) $xу = 3$; | б) $x + 2у = 7$; | в) $x + у^2 = 4$; |
| г) $x - y = 1$; | д) $12x + 10y = 0$; | е) $0x - 2y = 3$; |
| є) $3x + 0y = 0$; | ж) $0x + 0y = 0$; | з) $0x + 0y = 1$. |

871. Чи є розв'язком рівняння $2x - y = 3$ пара чисел:

- а) $x = 2, y = 1$; б) $x = 1, y = 2$?

872. Чи є розв'язками рівняння $x + 3y = 9$ пари чисел $(1; 1)$; $(6; 1)$?

873. Укажіть кілька розв'язків рівняння $x + y = 7$.

Рівень А	
-----------------	--

874. Які з пар чисел $(2; 2)$, $(1; 3)$, $(1; 3,5)$, $(4; -1)$, $(\frac{2}{3}; 4)$ є розв'язками рівняння $3x + 2y = 10$?

875. Які з пар чисел $(2; 2)$, $(-1; -2)$, $(1; 1)$, $(1; \frac{2}{3})$ є розв'язками рівняння $4x - 3y = 2$?

Знайдіть які-небудь два розв'язки рівняння:

876. а) $2x + 3y = 8$; б) $x - 3y = -1$.

877. а) $x + 2y = 7$; б) $3x - y = 2$.

Складіть яке-небудь лінійне рівняння, розв'язком якого є пара чисел:

878. а) $x = 1, y = 3$; б) $(-2, 1)$.

879. а) $x = 2, y = 1$; б) $(2, -2)$.

Рівень Б	
-----------------	--

880. З рівняння $2x + y = 5$ виразіть:

- а) змінну x через змінну y ; б) змінну y через змінну x .

Виразіть з рівняння змінну y через змінну x та знайдіть два які-небудь розв'язки рівняння:

881. а) $x - y = 7$;

б) $3x + 2y = 15$.

882. а) $2x + y = 5$;

б) $5x - 2y = 10$.

883. Серед розв'язків рівняння $3x + 5y = 16$ знайдіть таку пару чисел, яка складається із двох однакових чисел.

884. Знайдіть значення коефіцієнта a в рівнянні $ax + 3y = 10$, коли відомо, що розв'язком цього рівняння є пара чисел $(1; 2)$.

885. Пара чисел $(3; 2)$ є розв'язком рівняння $2x + by = 12$. Знайдіть b .

886. Розв'яжіть рівняння:

а) $0x - 2y = 6$;

б) $3x + 0y = 9$.

Рівень В



887. Розв'яжіть рівняння в цілих числах (тобто знайдіть усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння):

а) $2x - 5y = 7$;

б) $3x + 2y = 10$;

в) $-4x + 9y = 6$.

Розв'язання. а) Вибираємо змінну, коефіцієнт біля якої має менший модуль, тобто змінну x . Виразимо цю змінну через змінну y :

$$2x - 5y = 7; \quad 2x = 5y + 7; \quad x = \frac{5}{2}y + \frac{7}{2}.$$

Перетворимо праву частину одержаної формули так:

$$x = \frac{5}{2}y + \frac{7}{2} = 2y + \frac{1}{2}y + 3 + \frac{1}{2} = 2y + 3 + \frac{1}{2}(y + 1).$$

Отже,

$$x = 2y + 3 + \frac{1}{2}(y + 1).$$

Нехай для деяких цілих значень змінних остання рівність є правильною. Оскільки x та $2y + 3$ — цілі числа, то $\frac{1}{2}(y + 1)$ також має бути цілим числом. Отже, $y + 1$ має ділитися на 2, звідки: $y + 1 = 2k$; $y = 2k - 1$, де k — деяке ціле число. Підставивши $y = 2k - 1$ у формулу для змінної x , матимемо:

$$x = 2(2k - 1) + 3 + \frac{1}{2}(2k - 1 + 1) = 4k - 2 + 3 + k = 5k + 1.$$

Якщо $x = 5k + 1$, $y = 2k - 1$, то рівняння $2x - 5y = 7$ перетворюється у правильну числову рівність. Справді,

$$2(5k + 1) - 5(2k - 1) = 10k + 2 - 10k + 5 = 7.$$

Отже, розв'язками рівняння $2x - 5y = 7$ є пари цілих чисел: $x = 5k + 1$; $y = 2k - 1$, де k — довільне ціле число.

(Надаючи k у формулах для x та у різних цілих значень, одержуватимемо різні цілі розв'язки рівняння $2x - 5y = 7$. Наприклад, якщо $k = 0$, то маємо розв'язок $x = 1$, $y = -1$; якщо $k = 1$, — розв'язок $x = 6$, $y = 1$.)

888. Знайдіть усі натуральні розв'язки рівняння $5x + 6y = 57$.

889. Знайдіть усі значення a , для яких одним з розв'язків рівняння $2(5a + 1)^2x - 5(2a - 1)^2y = 7$ є пара чисел $(2; 5)$.

Вправи для повторення

890. У січні підприємство випустило 8000 одиниць продукції, у лютому — на 3,75% менше, ніж у січні, а в березні — на 4% більше, ніж у лютому. Скільки одиниць продукції випустило підприємство в березні?

891. На координатній площині позначте точки $A(-2; 2)$ та $B(4; -1)$. Проведіть пряму AB і знайдіть координати точок її перетину з осями координат.

892. Побудуйте графік функції:

а) $y = 1,5x - 2$;

б) $y = -x + 1$.

Поміркуйте

893. Ромашка має 18 пелюсток. Марійка, а за нею Настя по черзі відривають від ромашки або одну пелюстку, або дві пелюстки, які ростуть поруч. Хто відрве останню пелюстку — той переможець. Хто з дівчат може забезпечити собі перемогу?

26. Графік лінійного рівняння із двома змінними

Розглянемо рівняння

$$3x - 2y = 2.$$

Розв'язками цього рівняння є, наприклад, пари чисел $(0; -1)$ і $(2; 2)$. Цим розв'язкам на координатній площині відповідають точки з координатами $(0; -1)$ і $(2; 2)$. Якщо на координатній площині зобразимо всі точки, координати яких є розв'язками рівняння $3x - 2y = 2$, то одержимо *графік* цього рівняння.

Графік рівняння із двома змінними утворюють усі точки координатної площини, координати яких є розв'язками даного рівняння.

Щоб з'ясувати, що є графіком рівняння $3x - 2y = 2$, виразимо з нього змінну y через змінну x :

$$-2y = -3x + 2; \quad y = 1,5x - 1.$$

Формулою $y = 1,5x - 1$ задають лінійну функцію, графіком якої є пряма. Якщо $x = 0$, то $y = 1,5 \cdot 0 - 1 = -1$; якщо $x = 2$, то $y = 1,5 \cdot 2 - 1 = 2$. Провівши через точки $(0; -1)$ і $(2; 2)$ пряму (рис. 38), одержимо графік функції $y = 1,5x - 1$. Ця пряма є й графіком рівняння $3x - 2y = 2$.

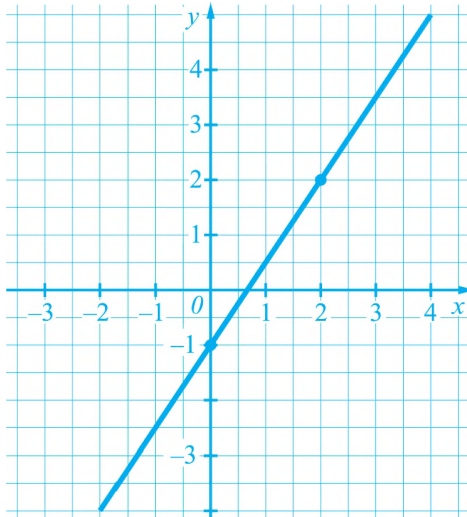


Рис. 38

Взагалі, графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.

Щоб побудувати графік такого рівняння, можна: 1) виразити змінну y через змінну x (якщо це можливо) і побудувати графік відповідної лінійної функції або 2) знайти два розв'язки рівняння, позначити на координатній площині точки, що відповідають цим розв'язкам, і провести через них пряму.

На рисунках 39 і 40 зображені графіки лінійних рівнянь, у яких один з коефіцієнтів біля змінних дорівнює 0:

$$0x + y = 2, \text{ або } y = 2;$$

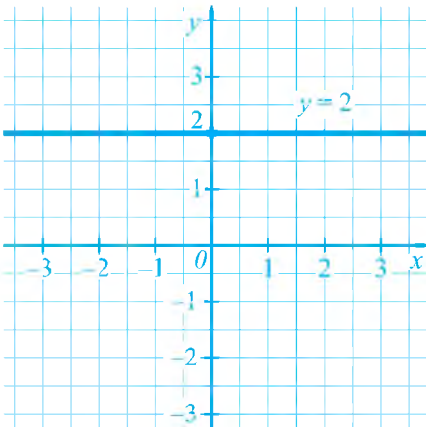


Рис. 39

$$2x + 0y = 6, \text{ або } x = 3.$$

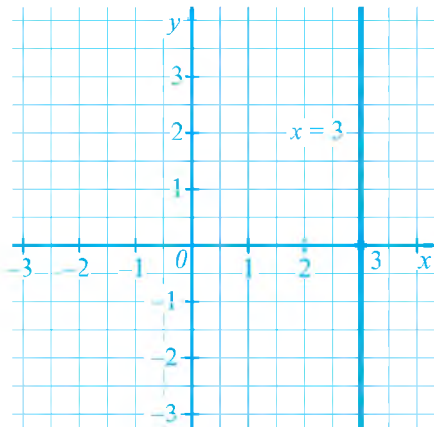


Рис. 40

Графіком рівняння $y = 2$ є графік функції $y = 2$, тобто пряма, паралельна осі x , що проходить через точку $(0; 2)$.

Розв'язками рівняння $2x + 0y = 6$ (або $x = 3$) є всі пари чисел $(x; y)$, у яких $x = 3$, а y — довільне число. Точки координатної площини, які відповідають таким розв'язкам, утворюють пряму, паралельну осі y , що проходить через точку $(3; 0)$.

Для тих, хто хоче знати більше



З'ясуємо розміщення графіка рівняння $ax + by = c$ залежно від його коефіцієнтів.

1) $a \neq 0, b \neq 0$. Тоді: $by = -ax + c$; $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$. Пряма $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ має кутовий коефіцієнт $k = -\frac{a}{b}$. Тому якщо a і b — числа різних знаків, то $k > 0$ і графік рівняння $ax + by = c$ утворює гострий кут з додатним напрямом осі x , якщо a і b — числа одного знака, то $k < 0$, і кут, який утворює графік з додатним напрямом осі x , — тупий.

2) $a = 0, b \neq 0$. Графіком рівняння $0x + by = c$ є пряма $y = \frac{c}{b}$, паралельна осі x .

3) $a \neq 0, b = 0$. Графіком рівняння $ax + 0y = c$ є пряма, паралельна осі y .

4) $a = 0, b = 0, c = 0$. Розв'язком рівняння $0x + 0y = 0$ є будь-яка пара чисел, а його графіком — уся координатна площина.

5) $a = 0, b = 0, c \neq 0$. Рівняння $0x + 0y = c$, де $c \neq 0$, розв'язків не має і його графік не містить жодної точки.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Побудувати графік рівняння $5x + 2y = 4$.

• Спочатку знайдемо два розв'язки рівняння.

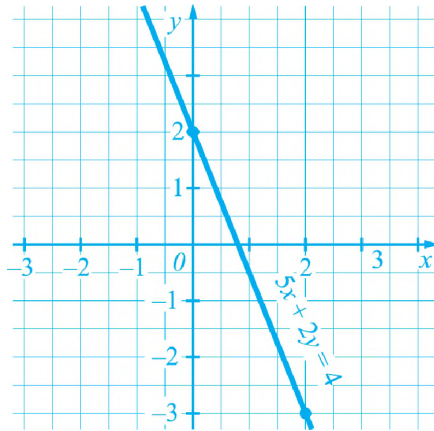
Нехай $x = 0$, тоді: $2y = 4$; $y = 2$. $(0; 2)$ — розв'язок.

Нехай $x = 2$, тоді: $10 + 2y = 4$; $2y = -6$; $y = -3$. $(2; -3)$ — розв'язок.

Розв'язки рівняння можна подавати у вигляді таблиці.

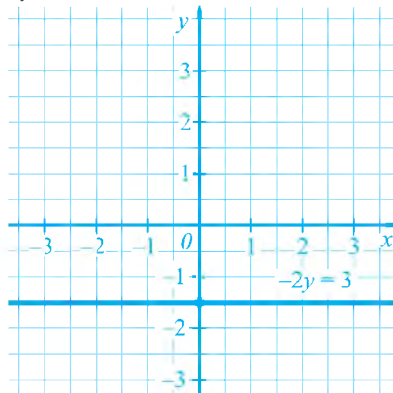
x	0	2
y	2	-3

На координатній площині позначаємо точки $(0; 2)$ та $(2; -3)$ і проводимо через них пряму. Ця пряма є шуканим графіком.



Вправа 2. Побудувати графік рівняння $-2y = 3$.

• У даному рівнянні маємо одну змінну y . Якщо потрібно побудувати графік такого рівняння, то вважають, що це є лінійне рівняння із двома змінними x та y , у якому коефіцієнт біля змінної x дорівнює 0, тобто $0x - 2y = 3$. Графіком рівняння є пряма $y = -1,5$, яка паралельна осі x і проходить, наприклад, через точку $(0; -1,5)$. •



Усно

- 894.** Назвіть координати кількох точок, що належать графіку рівняння $-x + y = 1$ (рис. 41).
- 895.** Які з даних точок належать графіку рівняння $2x - y = 1$:
 а) $A(1; 1)$; б) $B(2; 1)$;
 в) $C(0; 1)$; г) $D(0; -1)$?
- 896.** Укажіть координати кількох точок, які належать графіку рівняння $x - 2y = 0$.
- 897.** Графік якого рівняння зображено на рисунку 42? рисунку 43?

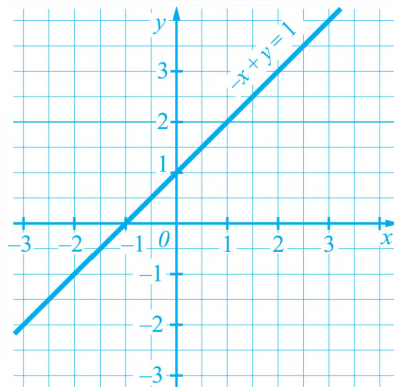


Рис. 41

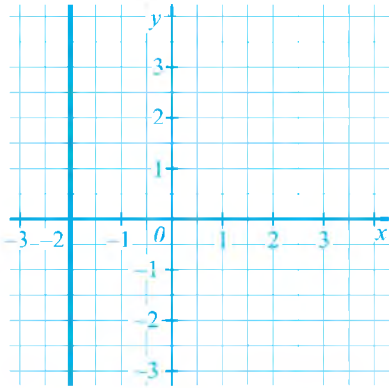


Рис. 42

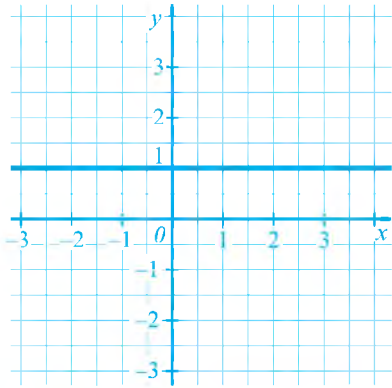


Рис. 43

Рівень А



898. Які з точок $K(-2; 0,5)$, $L(0; 2)$, $M(2; 4)$, $N(3; 0,25)$ не належать графіку рівняння $-3x + 4y = 8$?

899. Які з точок $A(2; 11)$, $B(3; 12)$, $C(0; 7)$, $D(-1; 5)$ належать графіку рівняння $-2x + y = 7$?

Побудуйте графік рівняння:

900. а) $x - 3y = 6$;

б) $3x + y = -1$;

в) $x - 2y = 0$;

г) $4x + y = 0$;

д) $1,5x = 6$;

е) $-0,3y = 0,6$.

901. а) $x + 2y = 3$;

б) $3x - y = 0$;

в) $8x = 24$;

г) $0,7y = -2,8$.

Рівень Б



902. В одній системі координат побудуйте графіки рівнянь:

а) $x + y = 2$;

б) $-x - y = -2$;

в) $2x + 2y = 4$.

Що можна сказати про графіки цих рівнянь?

903. В одній системі координат побудуйте графіки рівнянь:

а) $x - y = -2$;

б) $x - y = 0$;

в) $x - y = 2$.

Що можна сказати про графіки цих рівнянь?

Побудуйте графік рівняння:

904. а) $5x - 6y = 4$;

б) $8x + 16y = 24$.

905. а) $4x + 7y = 3$;

б) $12x - 4y = 8$.

906. На прямій, яка є графіком рівняння $7x - 5y = 9$, узято точку, абсциса якої дорівнює 2. Знайдіть ординату цієї точки.

907. На прямій, яка є графіком рівняння $4x + 9y = 1$, узято точку, ордината якої дорівнює 1. Знайдіть абсцису цієї точки.

908. Знайдіть значення коефіцієнта a в рівнянні $ax + 3y = 4$, коли відомо, що графік рівняння проходить через точку $(1; 2)$. Побудуйте графік рівняння.
909. Знайдіть значення коефіцієнта c в рівнянні $5x - 2y = c$, коли відомо, що графік рівняння проходить через точку $(2; 4)$. Побудуйте графік рівняння.

Рівень В



910. Чи існує значення a , для якого графіки двох рівнянь $a^2x + 4y = 5$ і $(a + 1)x - y = 1$ проходили б через точку $(1; 1)$?

Побудуйте графік рівняння:

911. а) $|x| - y = 0$; б) $|2x| + y = 0$;
 в) $2|x| - |y| = 0$; г) $|x + y| = 2$.
912. а) $(y + 3x)(y - 2x) = 0$; б) $y^2 - 10x + 5xy - 2y = 0$;
 в) $(y + 2)^2 + (y + x)^2 = 0$.

Зправи для повторення

913. Розкладіть на множники:
 а) $7x + ay + 7y + ax$; б) $(x - 2)^2 - 1$;
 в) $8x^3 + 125y^3$; г) $(a + b + c)^2 - (a + b)^2$.
914. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 8x + 1$.
915. Одне число більше від іншого на 12, а їх сума дорівнює 44. Знайдіть ці числа.

Поміркуйте

916. Чи можна 31 камінець, маси яких дорівнюють 850 г, 860 г, ..., 1140 г, 1150 г розкласти у 6 куп так, щоб маса камінців кожної купи не перевищувала 5,2 кг?

27. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

1. Системи лінійних рівнянь із двома змінними та їх розв'язки.

Розглянемо задачу.

У 7-А і 7-Б класах навчаються разом 56 учнів, до того ж, у 7-А класі є на 4 учні більше, ніж у 7-Б. Скільки учнів є в кожному класі?

Для розв'язання задачі позначимо кількість учнів 7-А класу через x , а кількість учнів 7-Б класу — через y . За умовою задачі, у 7-А і 7-Б класах разом навчаються 56 учнів, тобто $x + y = 56$. У 7-А класі є на 4 учні більше, ніж у 7-Б, тому різниця $x - y$ дорівнює 4: $x - y = 4$.

Маємо два лінійні рівняння із двома змінними:

$$x + y = 56;$$

$$x - y = 4.$$

І в першому, і в другому рівняннях змінні позначають ті самі величини — кількості учнів 7-А і 7-Б класів. Тому потрібно знайти такі значення змінних, які перетворюють у правильну числову рівність і перше, і друге рівняння, тобто потрібно знайти спільні розв'язки цих рівнянь.

Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють **систему рівнянь**.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки. Так, систему двох лінійних рівнянь із двома змінними, складену за умовою нашої задачі, записують:

$$\begin{cases} x + y = 56; \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Спільним розв'язком обох рівнянь цієї системи є пара значень змінних $x = 30$, $y = 26$, бо рівності $30 + 26 = 56$ і $30 - 26 = 4$ є правильними. Цю пару чисел називають **розв'язком системи рівнянь**.

Означення

Розв'язком системи двох рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, для яких кожне рівняння системи перетворюється у правильну числову рівність.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

2. Розв'язування систем лінійних рівнянь графічним способом.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = -3; \\ -x + 3y = 5. \end{cases}$$

Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи. На рисунку 44 пряма AB — графік рівняння $2x + y = -3$, а пряма CD — графік рівняння $-x + 3y = 5$. Координати будь-якої точки прямої AB є розв'язком першого рівняння системи, а координати будь-якої точки прямої CD є розв'язком другого рівняння. Будь-яка спільна точка цих прямих має координати, які є розв'язком як першого, так і другого рівнянь, тобто є розв'язком системи. Оскільки прямі AB і CD перетинаються в єдиній точці $M(-2; 1)$, то система рівнянь має єдиний розв'язок $x = -2$; $y = 1$. Цей розв'язок можна записувати й у вигляді пари $(-2; 1)$.

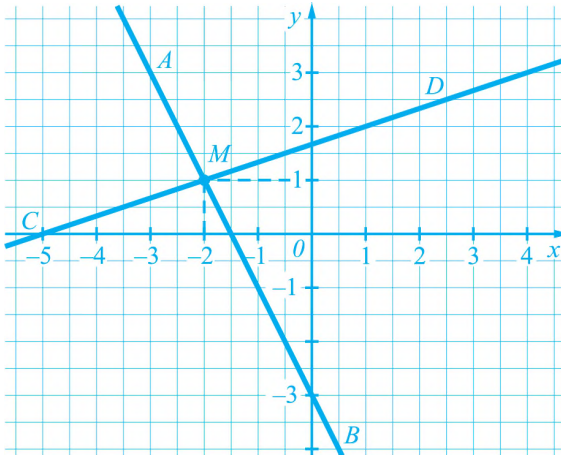


Рис. 44

Спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь, який ми щойно використали, називають *графічним*.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь графічним способом, потрібно побудувати графіки рівнянь системи в одній системі координат і знайти координати спільних точок цих графіків.

Якщо в кожному з двох лінійних рівнянь системи хоча б один з коефіцієнтів біля змінних відмінний від нуля, то графіками таких рівнянь є прямі. Оскільки дві прямі можуть перетинатися, збігатися або бути паралельними, то такі системи лінійних рівнянь можуть мати один розв'язок, безліч розв'язків або не мати розв'язків.

Для тих, хто хоче знати більше



Кількість розв'язків системи двох лінійних рівнянь залежить від коефіцієнтів рівнянь. Для довільної системи рівнянь $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1; \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$ у якій усі коефіцієнти другого рівняння відмінні від нуля, правильними є твердження:

якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ (коефіцієнти біля змінних не пропорційні), то система рівнянь має єдиний розв'язок;

якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ (коефіцієнти біля змінних і вільні члени пропорційні), то система рівнянь має безліч розв'язків;

якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ (коефіцієнти біля змінних пропорційні, але не пропорційні вільним членам), то система рівнянь розв'язків не має.

Приклади розв'язання вправ



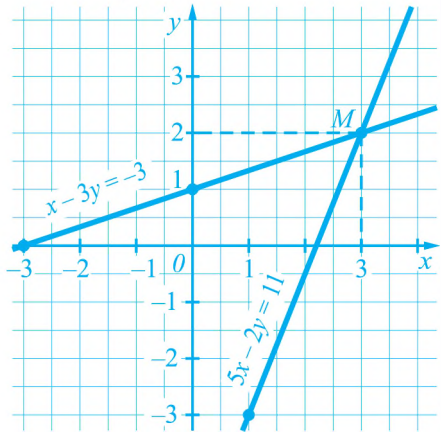
Вправа 1. Розв'язати графічно систему рівнянь
$$\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3. \end{cases}$$

• Побудуємо графіки рівнянь системи.

$5x - 2y = 11$		
x	1	3
y	-3	2

$x - 3y = -3$		
x	0	-3
y	1	0

Графіки перетинаються в єдиній точці — точці $M(3; 2)$. Отже, система рівнянь має єдиний розв'язок $(3; 2)$. •



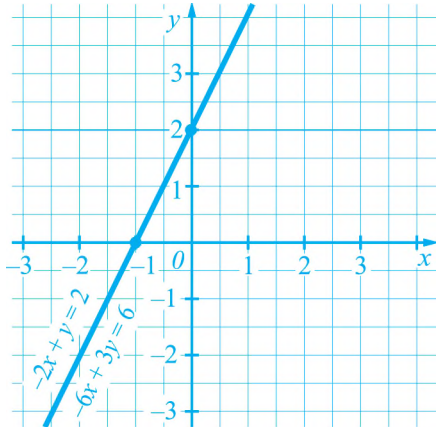
Примітка. Щоб не помилитися, визначаючи за графіками координати точки M , варто перевірити, чи справді знайдені координати є розв'язком системи. Перевіримо: якщо $x = 3$; $y = 2$, то $5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 11$ і $3 - 3 \cdot 2 = -3$ — правильні рівності. Пара $(3; 2)$ є розв'язком системи.

Вправа 2. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} -2x + y = 2; \\ -6x + 3y = 6? \end{cases}$$

• Побудуємо графіки рівнянь системи.

$-2x + y = 2$		
x	0	-1
y	2	0

$-6x + 3y = 6$		
x	0	-1
y	2	0



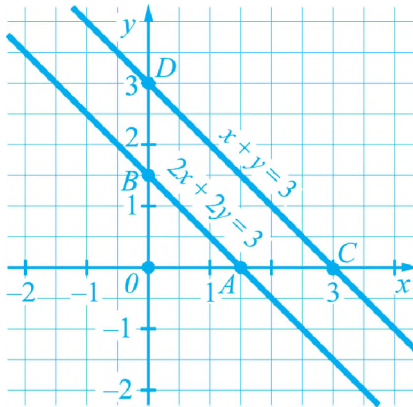
Графіки збігаються. Система рівнянь має безліч розв'язків. •

Вправа 3. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x + 2y = 3? \end{cases}$

• Побудуємо графіки рівнянь системи.

$x + y = 3$		
x	0	3
y	3	0

$2x + 2y = 3$		
x	0	1,5
y	1,5	0



Графіками рівнянь є паралельні прямі (бо $\angle OAB = \angle OCD = 45^\circ$). Система рівнянь розв'язків не має. •

Усно

917. Чи є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} x - 2y = 0; \\ x + 3y = 5 \end{cases}$ пара чисел:

а) $x = 2; y = 1;$

б) $x = 0; y = 0?$

918. Скільки розв'язків має система, графіки рівнянь якої зображені на рисунку 45; рисунку 46 (на рисунку 46 прямі паралельні)?

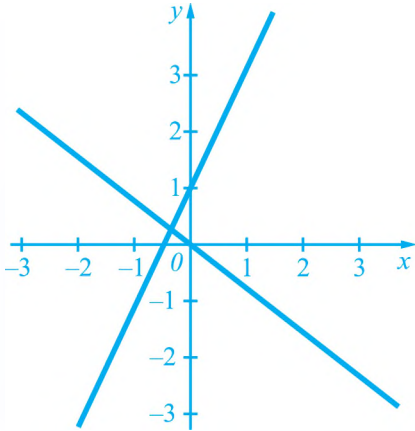


Рис. 45

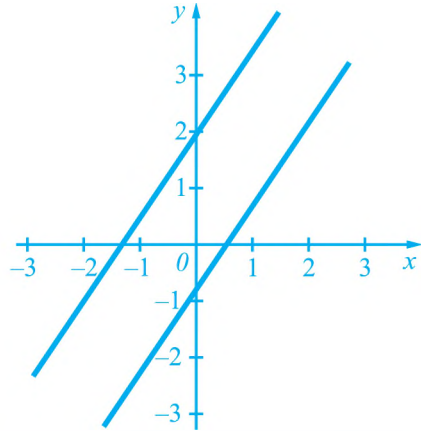


Рис. 46

Рівень А



Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

919. а)
$$\begin{cases} x - y = 2; \\ 2x - 3y = 2; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x - y = -4; \\ x + 2y = 8; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} 3x - 4y = -7; \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$$

920. а)
$$\begin{cases} x - y = 0; \\ 2x + 5y = 7; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2x + y = 2; \\ x + 2y = -5; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 4x - y = 8; \\ 2x + y = 10. \end{cases}$$

921. Чи є пара чисел $(-1; 3)$ розв'язком системи рівнянь:

а)
$$\begin{cases} 5x + 2y = 1; \\ -2x + y = 5; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} -3x - y = 0; \\ 4x + 2y = -2? \end{cases}$$

Рівень Б



922. Складіть яку-небудь систему рівнянь, що має розв'язок $x = -2; y = 1$.

923. Складіть яку-небудь систему рівнянь, що має розв'язок $(3; -1)$.

Скільки розв'язків має система рівнянь:

924. а)
$$\begin{cases} x - 2y = -3; \\ 2x - 4y = -6; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 6x - 2y = -3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x + 3y = 4; \\ 4x + y = -5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y = 2x - 4; \\ 4x - 2y = 8? \end{cases}$$

$$925. \text{ а) } \begin{cases} x + 3y = -2; \\ 2x + 6y = -4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = 1; \\ 9x - 6y = -2; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x - 2y = -2; \\ x + 4y = 0? \end{cases}$$

$$926. \text{ Знайдіть які-небудь два розв'язки системи рівнянь } \begin{cases} 2x - 3y = -2; \\ 6x - 9y = -6. \end{cases}$$

Рівень В



927. Для яких значень коефіцієнтів a та b пара чисел $(2; -1)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x - ay = 10; \\ bx + 2y = 4? \end{cases}$$

928. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} |x| - y = 0; \\ x - y = -2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} |2x| - y = 0; \\ y = 3; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} |x| - y = 0; \\ x - 3y = -4. \end{cases}$$

Вправи для повторення

929. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } 2x - 6 = 2(1 - x);$$

$$\text{б) } 3(6y - 4) + 2y = 0;$$

$$\text{в) } \frac{5x-1}{6} - 2x = \frac{x-1}{4} - 7;$$

$$\text{г) } \frac{2y+3}{3} - y = y - 3.$$

930. Доведіть, що значення виразу $(n+2)^2 - (n-2)^2$ ділиться на 8 для будь-якого цілого значення n .

931. З рівняння $2x - 3y = -4$ виразіть:

$$\text{а) змінну } x \text{ через змінну } y;$$

$$\text{б) змінну } y \text{ через змінну } x.$$

Поміркуйте

932. Кожен із 28 туристів розмовляє англійською або французькою мовами. Відомо, що англійською мовою розмовляють 20 туристів, а французькою — 15. Скільки туристів розмовляють і англійською, і французькою мовами?

28. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки

Розглянемо правильну рівність $7 + 2 = 9$. Якщо в цій рівності число 2 замінити числовим виразом $2(3 - 2)$, значення якого дорівнює 2, то одержимо правильну рівність $7 + 2(3 - 2) = 9$. Навпаки, якщо у правильній рівності $7 + 2(3 - 2) = 9$ вираз $2(3 - 2)$ замінити його значенням 2, то одержимо правильну рівність $7 + 2 = 9$.

На цих властивостях числових рівностей базується розв'язування систем лінійних рівнянь *способом підстановки*. Розглянемо приклад.

Нехай потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 3x - 2y = 8. \end{cases} \quad (1)$$

З першого рівняння системи виразимо змінну y через змінну x :

$$y = 3 - 2x.$$

Підставимо у друге рівняння системи замість y вираз $3 - 2x$. Одержимо систему

$$\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 3x - 2(3 - 2x) = 8. \end{cases} \quad (2)$$

Системи (1) і (2) мають ті самі розв'язки (доведення — в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше»). Друге рівняння системи (2) має лише одну змінну x . Розв'яжемо його:

$$3x - 6 + 4x = 8; \quad 7x = 14; \quad x = 2.$$

У перше рівняння системи (2) підставимо замість x число 2 і знайдемо відповідне значення y :

$$y = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Пара чисел $(2; -1)$ — розв'язок системи (2), а також і системи (1).

Спосіб, використаний для розв'язання системи (1), називають *способом підстановки*.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь способом підстановки, потрібно:

- 1) виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через іншу;
- 2) підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної одержаний вираз;
- 3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Для тих, хто хоче знати більше



Доведемо, що системи (1) і (2) мають ті самі розв'язки.

Нехай пара чисел $(a; b)$ — довільний розв'язок системи (1). Тоді правильними є числові рівності $2a + b = 3$ і $3a - 2b = 8$, а отже, і рівність $b = 3 - 2a$. Замінимо в рівності $3a - 2b = 8$ число b виразом $3 - 2a$, одержимо правильну рівність $3a - 2(3 - 2a) = 8$. Оскільки рівності $b = 3 - 2a$ і $3a - 2(3 - 2a) = 8$ є правильними, то пара чисел $(a; b)$ є розв'язком системи (2). Ми показали, що довільний розв'язок системи (1) є розв'язком системи (2).

Навпаки, нехай пара чисел $(c; d)$ — довільний розв'язок системи (2). Тоді правильними є числові рівності $d = 3 - 2c$ і $3c - 2(3 - 2c) = 8$. Замінимо в рівності $3c - 2(3 - 2c) = 8$ вираз $3 - 2c$ числом d , одержимо правильну рівність $3c - 2d = 8$. З рівності $d = 3 - 2c$ випливає, що $2c + d = 3$. Оскільки рівності $2c + d = 3$ і $3c - 2d = 8$ є правильними, то пара чисел $(c; d)$ є розв'язком системи (1). Ми показали, що довільний розв'язок системи (2) є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають ті самі розв'язки.

Системи рівнянь із двома змінними, які мають ті самі розв'язки, називають рівносильними. Отже, розв'язуючи систему рівнянь (1), ми замінили її рівносильною системою (2).

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 4x - 5y = 7; \\ 3x + 4y = -18. \end{cases}$$

- Виразимо з першого рівняння змінну y через змінну x :

$$5y = 4x - 7; \quad y = \frac{4x - 7}{5}.$$

Підставимо у друге рівняння системи замість y вираз $\frac{4x - 7}{5}$ і розв'яжемо одержане рівняння:

$$3x + 4 \cdot \frac{4x - 7}{5} = -18;$$

$$15x + 4(4x - 7) = -90;$$

$$15x + 16x - 28 = -90;$$

$$31x = -62;$$

$$x = -2.$$

Знайдемо відповідне значення змінної y :

$$y = \frac{4 \cdot (-2) - 7}{5} = -3.$$

Відповідь. $(-2; -3)$. •

$$\text{г)} \begin{cases} 5u + 4v = 11; \\ u + 6v = -3; \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} 2a - 5b = 9; \\ a - 7b = 0; \end{cases}$$

$$\text{е)} \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0; \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

Рівень Б



Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$936. \text{ а)} \begin{cases} 5x - 6y = 1; \\ 3x + 4y = 12; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 3x + 4y = -5; \\ 5x - 3y = 11; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 0,2x - 4y = 2; \\ 0,5x + 2y = 11; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} 0,7x - 0,3y = 1,2; \\ -2x + 5y = 9. \end{cases}$$

$$937. \text{ а)} \begin{cases} 3x - 2y = 2; \\ 4x - 6y = 1; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 5x + 4y = 1; \\ 4x - 3y = 7; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 4x - 0,5y = 3; \\ 7x + 0,2y = 16. \end{cases}$$

Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь, не виконуючи побудов:

$$938. \text{ а)} x - y = 4 \text{ та } x + 2y = -2;$$

$$\text{б)} 5x - 2y = 10 \text{ та } 3x - 4y = -8.$$

$$939. 7x + 4y = 9 \text{ та } 2x + 5y = -9.$$

Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$940. \text{ а)} \begin{cases} 5(x - 4) + 2x = x - 2; \\ 4(y + 3) - 5 = x - 4; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} -2(6x + 3) + 1 = 2y - 3; \\ 11 - 4(x - 2) = y - 2; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 8(x + 3) - 17 = -5(y + 3); \\ 0,2(y - 5) + 1 = -0,9 - 0,3x; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} p + 5(q - p) = 3p - 2q + 6; \\ 2q - p = 3p - 2q - 20; \end{cases}$$

$$\text{д)} \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 1; \\ 4(x + y) + 5(x - y) = 3; \end{cases}$$

$$\text{е)} \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2 = 0; \\ 4x - y = 56. \end{cases}$$

$$941. \text{ а)} \begin{cases} 7(x - 2) + 3x + 7 = 3y + 1; \\ 10 - 5x = 4(x - 3) + 4; \end{cases}$$

$$\text{б)} \begin{cases} 8(x - 3y) + 25y = 5x - 7; \\ 0,3(x - 9y) = 0,2x - 2y + 0,5; \end{cases}$$

$$\text{в)} \begin{cases} 3(x - 2y) + 2(x - y) = 2; \\ 5(x - 2y) + 3(x - y) = 4; \end{cases}$$

$$\text{г)} \begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{9}y = \frac{2}{3}; \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

942. Доведіть, що графіками рівнянь $4x - 2y = 5$ та $6x - 3y = 6$ є паралельні прями.

943. Графіком функції є пряма, що проходить через точки $A(-2; 6)$, $B(3; 1)$. Задайте цю функцію формулою.

944. Графіком функції є пряма, що проходить через точки $A(-3; 2)$, $B(3; -1)$.
Задайте цю функцію формулою.

Рівень В



945. Розв'яжіть систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} x - y = 3; \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x + y = 7; \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y+1}{3} = 0; \\ \frac{x-2}{6} = \frac{y}{4}; \end{cases}$$

г)
$$\begin{cases} \frac{x-2y}{3} + 3 = \frac{3x-y}{5}; \\ \frac{2(3x-y)}{3} = \frac{x-2y}{2} + 10; \end{cases}$$

д)
$$\begin{cases} 4(2x+3y+1) - (2x-3y-1) = 7; \\ 6(2x+3y+1) - 7(2x-3y-1) = 5. \end{cases}$$

946. Для яких значень коефіцієнта a система рівнянь
$$\begin{cases} 4x - y = 9; \\ 6x + ay = 4 \end{cases}$$
 не має розв'язку?

947. Для яких значень коефіцієнта b система рівнянь
$$\begin{cases} 5x + by = 8; \\ 10x + 3y = 16 \end{cases}$$
 має безліч розв'язків?

Зправи для повторення

948. Розкладіть на множники:

а) $2x - 6 - xy + 3y$;

б) $y^3 - 10y^2 + 25y$;

в) $(a - 2b)^2 - 4a^2$;

г) $27a^3 - b^3$.

949. Доведіть, що значення виразу $4(a-2)^2 - (2a-3)^2 + 4a$ не залежать від значень a .

950. Відомо, що $a^2 + b^2 = 25$ і $ab = -12$. Знайдіть: $(a+b)^2$; $(a-b)^2$.

- 951*. Вираз $2a^2 - ab$ для $a = -2$ і деякого значення b набуває значення 4. Якого значення набуває для тих самих значень a і b вираз $a + 2(a + (2a - b))$?

Поміркуйте

952. Чи можна вибрати деяких 5 аркушів підручника з алгебри так, щоб сума номерів вибраних 10 сторінок дорівнювала 100?

29. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання

Розглянемо дві правильні рівності:

$$7 + 5 = 12;$$

$$8 + 6 = 14.$$

Додамо почленно ці рівності: ліву частину до лівої й праву до правої:

$$(7 + 5) + (8 + 6) = 12 + 14.$$

Знову одержали правильну рівність. Ця властивість правильних числових рівностей лежить в основі способу розв'язування систем рівнянь, який називають *способом додавання*. Розглянемо приклад.

Нехай потрібно розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y = 21; \\ 5x - 2y = 19. \end{cases} \quad (1)$$

Додамо почленно ліві й праві частини рівнянь:

$$(3x + 2y) + (5x - 2y) = 21 + 19; \quad 8x = 40.$$

Замінімо одне з рівнянь системи (1), наприклад, перше, рівнянням $8x = 40$. Одержимо систему

$$\begin{cases} 8x = 40; \\ 5x - 2y = 19. \end{cases} \quad (2)$$

Системи (1) і (2) мають ті самі розв'язки (доведення подане в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше»). Розв'яжемо систему (2). З першого рівняння знаходимо: $x = 5$. Підставивши це значення у друге рівняння, матимемо:

$$5 \cdot 5 - 2y = 19; \quad 25 - 2y = 19; \quad -2y = -6; \quad y = 3.$$

Пара чисел (5; 3) — розв'язок системи (2), а також і системи (1).

Розв'язуючи систему (1), ми скористалися тим, що в рівняннях коефіцієнти біля змінної y є протилежними числами і після почленного додавання рівнянь одержали рівняння з однією змінною x .

Розв'яжемо ще одну систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 2x - 3y = -26. \end{cases} \quad (3)$$

У цій системі рівнянь коефіцієнти біля змінної x і коефіцієнти біля змінної y не є протилежними числами. Однак, помноживши обидві частини першого рівняння на 2, а другого — на -3 , одержимо систему

$$\begin{cases} 6x + 8y = 24; \\ -6x + 9y = 78, \end{cases}$$

у якій коефіцієнти біля x — протилежні числа. Додавши почленно рівняння останньої системи, матимемо:

$$17y = 102; \quad y = 6.$$

Підставивши значення y в перше рівняння системи (3), знаходимо:

$$3x + 4 \cdot 6 = 12; \quad 3x = -12; \quad x = -4.$$

Отже, розв'язком системи (3) є пара чисел $(-4; 6)$.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь способом додавання, потрібно:

- 1) помножити обидві частини рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти біля однієї зі змінних в обох рівняннях стали протилежними числами;
- 2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь;
- 3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Для тих, хто хоче знати більше



Доведемо, що системи рівнянь (1) і (2) мають ті самі розв'язки.

Нехай пара чисел $(a; b)$ — довільний розв'язок системи (1), тоді правильними є числові рівності $3a + 2b = 21$ і $5a - 2b = 19$. Додавши ці рівності, одержимо правильну рівність $8a = 40$. Оскільки рівності $8a = 40$ і $5a - 2b = 19$ є правильними, то пара чисел $(a; b)$ є розв'язком системи (2). Ми показали, що довільний розв'язок системи (1) є розв'язком системи (2).

Навпаки, нехай пара чисел $(c; d)$ — довільний розв'язок системи (2), тоді правильними є числові рівності $8c = 40$ і $5c - 2d = 19$. Віднімемо від першої із цих рівностей другу. Одержимо правильну рівність $3c + 2d = 21$. Оскільки рівності $3c + 2d = 21$ і $5c - 2d = 19$ є правильними, то пара чисел $(c; d)$ є розв'язком системи (1). Ми показали, що довільний розв'язок системи (2) є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають ті самі розв'язки.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Розв'язати способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9; \\ 6x + 7y = 9. \end{cases}$$

• Помножимо обидві частини першого рівняння системи на -2 . Отримаємо систему

$$\begin{cases} -6x - 10y = -18; \\ 6x + 7y = 9. \end{cases}$$

Почленно додавши рівняння останньої системи, матимемо:

$$-3y = -9; \quad y = 3.$$

Підставимо у перше рівняння системи замість y число 3 і розв'яжемо одержане рівняння:

$$3x + 15 = 9; \quad 3x = -6; \quad x = -2.$$

Відповідь. $(-2; 3)$. ●



Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

953. а) $\begin{cases} x - y = 1; \\ x + y = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 8y = 18; \\ -3x + 4y = -6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 5y = 6; \\ 8x - 5y = -1. \end{cases}$

954. а) $\begin{cases} 4x + 5y = 6; \\ 4x + 3y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5m + 2n = -2; \\ 3m + 2n = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 3y = 12; \\ 3x + 2y = 17. \end{cases}$

955. а) $\begin{cases} x - y = 4; \\ 2x + y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + y = -2; \\ -5x + 3y = -6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

956. а) $\begin{cases} 3x - 5y = 2; \\ 2x + 3y = -5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x + 2y = 6; \\ 3x + 7y = -8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8x - 3y = 41; \\ 7x + 5y = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + 4y = -1; \\ 9x + 7y = 1; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 5x + 3y = 2; \\ 3x + 5y = -2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} -9x + 8y = -25; \\ 5x + 3y = -1. \end{cases}$

957. а) $\begin{cases} 2x - 3y = 8; \\ 5x + 2y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5x - 4y = 1; \\ -2x + 5y = 20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 8y = 11; \\ 4x - 6y = 17; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x - 5y = -2; \\ 7x - 8y = 10. \end{cases}$



Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

958. а) $\begin{cases} 0,1x + 3y = 5; \\ 0,3x - 7y = -1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 1,2x + 0,7y = 28; \\ -0,6x + 0,5y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 1; \\ 6x - 5y = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 1; \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = 0. \end{cases}$

Вправи для повторення

968. Запишіть відповідні рівності:
- а) сума чисел x та y у 5 разів більша від їх різниці;
 - б) добуток чисел a і b на 12 більший від їх частки;
 - в) сума чисел x та y становить третину їх добутку.
969. Знайдіть розміри ділянки прямокутної форми, якщо її периметр дорівнює 104 м, а довжина на 12 м більша від ширини.
970. Брат старший від сестри удвічі. А 5 років тому він був старший від сестри на 7 років. Скільки років кожному?
971. Вкладник зняв з рахунку в банку 20% усіх грошей, а через годину — 30% залишку. Після цього на його рахунку залишилося 560 грн. Який був початковий вклад?

Поміркуйте

972. У країні є 15 міст, кожне з яких сполучене дорогою принаймні із 7 іншими. Доведіть, що дорогами країни можна проїхати з будь-якого міста до будь-якого іншого міста.

30. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь

Ви вже розв'язували задачі за допомогою рівнянь з однією змінною. Розв'яжемо задачу, склавши систему рівнянь.

Задача. Швидкість моторного човна за течією річки дорівнює 24 км/год, а проти течії — 19 км/год. Яка швидкість човна у стоячій воді та яка швидкість течії річки?

● Нехай швидкість човна у стоячій воді дорівнює x км/год, а швидкість течії річки — y км/год. Швидкість човна за течією річки (24 км/год) дорівнює сумі його швидкості у стоячій воді та швидкості течії річки, тому маємо рівняння

$$x + y = 24.$$

Швидкість човна проти течії річки (19 км/год) дорівнює різниці швидкості човна у стоячій воді та швидкості течії річки, тому

$$x - y = 19.$$

Щоб відповісти на запитання задачі, потрібно знайти такі значення x та y , які задовольняли б і перше, і друге рівняння, тобто які задовольняли б систему цих рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 24; \\ x - y = 19. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо: $x = 21,5$; $y = 2,5$.

Відповідь. Швидкість човна у стоячій воді дорівнює 21,5 км/год; швидкість течії річки — 2,5 км/год. ●

Розв'язуючи задачу, ми одержали систему рівнянь і задачу на рух звели до математичної задачі — розв'язати систему рівнянь. Отже, як математичні моделі реальних процесів, крім функцій і рівнянь, можуть виступати й системи рівнянь.

Зазначимо, що для моделювання задачі можна було б використати рівняння з однією змінною. Однак для складання такого рівняння довелося б провести складніші міркування.

Щоб розв'язати задачу за допомогою системи рівнянь, поступають так:

- 1) позначають деякі дві невідомі величини буквами;
- 2) використовуючи умову задачі, складають два рівняння з вибраними невідомими;
- 3) записують систему цих рівнянь і розв'язують її;
- 4) відповідають на поставлені в задачі запитання.

Приклади розв'язання вправ



Вправа 1. Якщо відкрити кран теплої води на 7 хв, а потім кран холодної — на 3 хв, то у ванну наллється 54 л води. Якщо ж відкрити кран теплої води на 8 хв, а потім кран холодної — на 6 хв, то у ванну наллється 72 л води. Скільки літрів води наливається у ванну через кожний кран за хвилину?

● Нехай за 1 хв через перший кран (теплої води) наливається x л води, а через другий кран (холодної води) — y л. Тоді за 7 хв через перший кран наллється $7x$ л води, а через другий кран за 3 хв — $3y$ л. У результаті, за умовою задачі, у ванні буде 54 л води. Маємо рівняння:

$$7x + 3y = 54.$$

У другому випадку за 8 хв через перший кран наллється $8x$ л води, а через другий кран за 6 хв — $6y$ л, що, за умовою задачі, дорівнює 72 л води. Маємо друге рівняння:

$$8x + 6y = 72.$$

Одержали систему рівнянь
$$\begin{cases} 7x + 3y = 54; \\ 8x + 6y = 72. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему способом додавання:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 54; \\ -4x - 3y = -36; \end{cases} \quad 3x = 18; \quad x = 6.$$

утричі більше, ніж на першій. Скільки книжок стояло на кожній полиці спочатку?

Вказівка. Розв'язуючи задачу, використайте таблицю:

	I полиця	II полиця	
Було книжок	x	y	Разом 60
Стало книжок	$x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$	$y + \frac{1}{4}x$	На другій утричі більше, ніж на першій

- 984.** На двох гілках сиділо 25 горобців. Коли з першої гілки на другу перелетіло 5 горобців, а з другої полетіло 7 горобців, то на першій гілці їх стало удвічі більше, ніж на другій. Скільки горобців було на кожній гілці спочатку?
- 985.** За 3 год за течією річки і за 5 год проти течії теплохід проходить 338 км, а за 1 год проти течії і за 30 хв за течією — 63 км. Знайдіть швидкість теплохода у стоячій воді і швидкість течії річки.
- 986.** Теплохід проходить за 2 год за течією річки і за 3 год проти течії 222 км. Він же за 3 год за течією річки проходить на 60 км більше, ніж за 2 год проти течії. Знайдіть швидкість теплохода у стоячій воді і швидкість течії річки.
- 987.** Летіли галки і побачили палки. Якщо на кожну палку сяде по дві галки, то одна палка залишиться без галок. Якщо на кожну палку сяде одна галка, то одна галка залишиться без палки. Скільки було палок і скільки летіло галок?
- 988.** Кінь і мул ішли поруч з важкими ношами на спинах. Кінь скаржився, що його ноша дуже важка. «Чого ти скаржишся?», — відповів йому мул. — «Адже якщо я візьму в тебе один мішок, то моя ноша стане удвічі важчою від твоєї. А ось якби ти забрав з моєї спини один мішок, то твоя ноша стала б однаковою з моєю». Скільки мішків ніс кінь і скільки мул?
- 989.** Мале підприємство має на двох рахунках у банку 24 тис. грн. Скільки грошей є на кожному рахунку, якщо 35% грошей на одному з них дорівнює 85% на іншому?
- 990.** На двох складах було 102 т цукру. Коли з першого складу забрали 15% цукру, то на ньому все ж залишилося на 9 т цукру більше, ніж на другому. Скільки тонн цукру було на кожному складі спочатку?
- 991.** Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо цифри числа переставити місцями, то одержимо число, яке менше від даного на 18. Знайдіть це число.
- 992.** З пункту A в пункт B , відстань між якими дорівнює 41 км, вийшов турист. Через 1 год назустріч йому з пункту B вийшов інший турист. Че-

- 999.** З пункту A в пункт B одночасно виїхали два мотоциклісти. Коли через 1,5 год перший мотоцикліст прибув у пункт B , другому до пункту B залишалось проїхати ще 9 км. Не затримуючись у пункті B , перший мотоцикліст вирушив у зворотний шлях і через 5 хв зустрів другого мотоцикліста. Знайдіть швидкості мотоциклістів і відстань між пунктами.
- 1000.** Шлях між пунктами A і B пролягає спочатку по шосе, а потім — ґрунтовою дорогою. Рухаючись по шосе зі швидкістю 60 км/год, а ґрунтовою дорогою — зі швидкістю 45 км/год, автомобіль проїхав шлях від A до B за 1,5 год. На зворотному шляху автомобіль підвищив швидкість на ґрунтовій дорозі на 3 км/год, а на шосе знизив швидкість на 4 км/год і проїхав шлях від B до A знову ж таки за 1,5 год. Знайдіть довжину шосе і довжину ґрунтової дороги.
- 1001.** Моторний човен пройшов за течією річки від пристані A до пристані B , а потім проти течії від B повз A до пристані C і затратив на весь цей шлях 9 год 20 хв. Після цього човен за 9 год пройшов шлях від C до B і від B до A . Знайдіть відстань між пристанями A і C , якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 10 км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год.

Вправи для повторення											
-----------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1002. Спростіть вираз:

а) $(m + 2n)(2m - n) + 2n^2$;

б) $a^2(b + 5a) + (a - 2b)(2b - 5a^2)$.

1003. Розкладіть на множники:

а) $a + 3ab - c - 3bc$;

б) $x^2 - y^2 + 2(x + y)$;

в) $a^2 - 4b^2 + a - 2b$;

г) $c^2 - 3ac + 2a^2$.

1004. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

а) $725^3 - 375^3$ на 350;

б) $72^3 + 88^3$ на 80.

1005*. Доведіть, що не існує чисел x та y , для яких виконувалася б рівність $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 9 = 0$.

1006. Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}x + 2$ та знайдіть координати точки його перетину з осями координат.

Поміркуйте											
------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

1007. У кутовій клітинці дошки розміру 5×5 стоїть фішка. За один хід фішку можна переставити в сусідню по стороні клітинку. Чи можна за допомогою таких ходів обійти всі клітинки дошки, побувавши на кожній лише один раз, і повернутися в початкову клітинку?

Цікаво знати

У книзі «Геометрія», виданій 1637 року, відомий французький математик **Рене Декарт** (1596–1650) запропонував новий метод математичних досліджень — метод координат. Суть цього методу полягає в тому, що кожній геометричній фігурі на координатній площині ставлять у відповідність рівняння чи нерівність, яким задовольняють координати кожної точки фігури і тільки вони. Так, кожній прямій можна поставити у відповідність рівняння цієї прямої виду $ax + by = c$. Якщо, наприклад, потрібно довести, що деякі дві прямі є паралельними, то досить записати рівняння обох прямих і довести, що система цих рівнянь не має розв'язку. Як бачимо, геометрична задача завдяки методу координат зводиться до алгебраїчної задачі. Таке нововведення Декарта дало початок новій геометрії, яку зараз називають аналітичною геометрією.

Рене Декарт народився в департаменті Турень (Франція) в сім'ї дворян. Після здобуття освіти служив офіцером в армії Моріса Оранського, брав участь у Тридцятирічній війні. Завершивши військову службу, Р. Декарт поїхав у Голландію, де написав більшу частину своїх наукових робіт і завоював славу великого вченого.

Р. Декарт зробив ряд відкриттів, які стали поворотними пунктами в усій математиці. Він увів поняття змінної величини і функції, прямокутної системи координат, яку ми на його честь називаємо ще прямокутною декартовою системою координат.

З рівняннями з кількома змінними пов'язана одна з найвідоміших математичних теорем, про яку тривалий час точаться розмови й у середовищі, далекому від математики. Ідеться про **Велику теорему Ферма**. Ця теорема стверджує, що *рівняння із трьома змінними виду $x^n + y^n = z^n$ не має розв'язків у натуральних числах, якщо показник степеня $n > 2$.*

Як виявилось, у цьому простому, на перший погляд, математичному твердженні криється надзвичайна складність. Причина ж величезного ажіотажу, що розгорівся довкола теореми П'єра Ферма, така.



Рене Декарт
(1596 – 1650),
французький філософ і математик. Розробив метод координат, створив основи аналітичної геометрії

1636 року в книзі Діофанта Олександрійського (III ст.) «Арифметика», яку Ферма частенько студював, роблячи помітки на її широких берегах, і яку зберіг для потомків його син, був зроблений запис, що він, П. Ферма, має доведення теореми, але воно доволі велике, щоб його можна було розмістити на берегах.

Відтоді розпочався пошук доведення, адже в інших матеріалах П. Ферма його так і не виявили.

Хто тільки не намагався довести теорему. Чи не кожен математик вважав за свій обов'язок докластися до Великої теореми, але зусилля виявлялися марними. За доведення бралися й найвідоміші математики XVII–XX століть. Л. Ейлер довів теорему для степенів $n=3$ і $n=4$, А. Лежандр — для $n=5$, Й. Діріхле — для $n=7$. У загальному ж вигляді теорема залишалась не доведеною.

На початку XX ст. (1907) заможний німецький шанувальник математики П. Вольфскель заповідав сто тисяч марок тому, хто запропонує повне доведення теореми Ферма. Через деякий час з'явилися доведення для показника степеня $n < 100$, потім для $n < 619$. Багатьом математикам здавалося, що вони знайшли доведення, але згодом у цих «доведеннях» знаходили помилки.

Були й спроби заперечити Велику теорему шляхом пошуку хоча б одного розв'язку рівняння $x^n + y^n = z^n$ для $n > 2$. Проте навіть перебір натуральних чисел з використанням комп'ютерів не давав результату — для яких значень n теорему не перевіряли б, вона завжди виявлялась правильною.

Лише в 1995 році англійському професорові математики з Принстонського університету (США) **Ендрю Вайлзу** вдалося довести Велику теорему. Доведення було надруковане в одному з провідних математичних журналів і зайняло увесь номер — понад сто аркушів.

Таким чином, лише у кінці XX ст. увесь світ визнав, що на 360 році свого життя Велика теорема Ферма, яка насправді весь цей час була гіпотезою, стала-таки доведеною теоремою.



П'єр Ферма
(1601 – 1665),

французький математик,
зробив значний внесок
у розвиток теорії чисел.
Разом з Рене Декартом
є основоположником
аналітичної геометрії

До свого тріумфу Е. Вайлз ішов понад тридцять років. Про теорему Ферма випадково дізнався в десятирічному віці, й відтоді заповітна мрія довести її не залишала Ендрю на жодну мить. На щастя, у нього вистачило здорового глузду, аби не піти шляхом тисяч упертих ентузіастів, які настирливо намагалися розв'язати проблему елементарними засобами. Лише через двадцять років, уже маючи докторський ступінь і обійнявши посаду професора математики в Принстоні, Е. Вайлз вирішив відкласти всі справи й узятися за втілення своєї мрії. Йому вдалося довести Велику теорему Ферма і тим самим розв'язати чи не найпопулярнішу математичну головоломку останніх століть.

Запитання і вправи для повторення § 7

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням із двома змінними? Наведіть приклад такого рівняння.
 2. Що називають розв'язком рівняння із двома змінними? Чи є пара чисел $(4; 1)$ розв'язком рівняння $x - 2y = 2$?
 3. Що є графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля?
 4. Що називають розв'язком системи рівнянь із двома змінними?
 5. Що означає розв'язати систему рівнянь?
 6. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?
 7. Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь із двома змінними графічним способом?
 8. Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом підстановки?
 9. Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання?
1008. Які з пар чисел $(3; 3)$, $(-1; -2)$, $(7; 6)$, $(1; 0,5)$ є розв'язками рівняння $5x - 4y = 3$?
1009. Знайдіть два які-небудь розв'язки рівняння:
а) $-2x + 4y = 8$; б) $x + 3y = -2$.
1010. Складіть лінійне рівняння, розв'язком якого є пара чисел:
а) $x = 4$, $y = 3$; б) $(-2, 4)$.
1011. З рівняння $4x - y = 6$ виразіть:
а) змінну x через змінну y ; б) змінну y через змінну x .
1012. Побудуйте графік рівняння:
а) $x - 2y = 4$; б) $2x + y = -4$; в) $3x - 2y = 6$.
1013. Чи є пара чисел $(-2; 3)$ розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x + 3y = 5; \\ 3x + 4y = 8? \end{cases}$

1014. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 3; \\ x - 3y = -1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = -1; \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

1015. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 3y = 1; \\ 2x - y = 9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2m - n = 6; \\ 3m + 2n = 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x - 4y = 5; \\ 4x - 3y = 5. \end{cases}$$

1016. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x + y = 1; \\ 3x - y = 8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x - 4y = 9; \\ 3x + 2y = -9; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 5x - 7y = 1; \\ 6x - 5y = 8. \end{cases}$$

1017. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $2x - 3y = 1$ та $x + 3y = 5$.

1018. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2,8x - 1,5y = -1; \\ 21x + 25y = 355; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 99x - 114y = 282; \\ 11x - 14y = 30; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2(x-1) + y = x-4; \\ 4(x+1) - 5 = -y; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2(2x+1) - (2y-3) = 3; \\ -4(2x-1) + 3(y-2) = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{15} = 1; \\ 5x - 3y = -15; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3}; \\ \frac{y}{7} = \frac{x+2}{6}. \end{cases}$$

1019*. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} (x+3)^2 - (x+2)^2 = -2y+5; \\ (y-5)^2 - (y+3)^2 = 4+4x. \end{cases}$$

1020. Фермер відвів під зернові й овочеві культури 32 га землі, до того ж, під зернові — на 27 га більше, ніж під овочеві. Скільки гектарів землі відвів фермер під зернові культури і скільки — під овочеві?

1021. Відомо, що 5 тонких і 3 товсті зошити мають разом 168 аркушів, а 4 тонкі та 2 товсті зошити — 120 аркушів. Скільки аркушів має один тонкий зошит і скільки — товстий?

1022. В Андрія є 20 монет по 10 к. і 25 к. — усього на суму 3 грн 80 к. Скільки монет по 10 к. і скільки по 25 к. має Андрій?

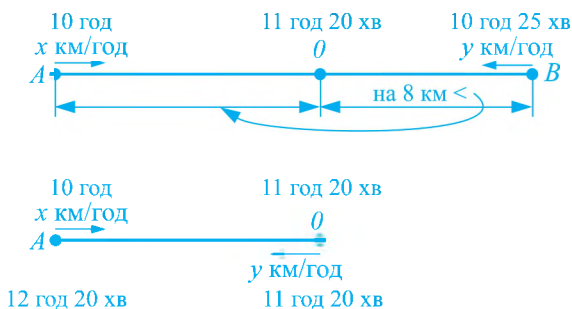
1023. У пекарні було 18 мішків борошна першого гатунку і 12 мішків борошна другого гатунку, загальна маса яких дорівнює 1248 кг. Коли використали 4 мішки борошна першого гатунку і 6 мішків борошна другого гатунку, то залишилося 824 кг борошна. Яка маса мішка борошна кожного гатунку?

1024. Сума двох чисел дорівнює 4,5. Знайдіть ці числа, якщо половина одного з них дорівнює 75% іншого.

1025. З міст A і B , відстань між якими дорівнює 110 км, о 9 год 15 хв виїхали назустріч один одному два автобуси й рухалися з однаковою швидкістю. О 9 год 30 хв з міста A до міста B виїхав легковий автомобіль, який о 10 год зустрів автобус, що їхав до міста A , а о 10 год 30 хв наздогнав автобус, що їхав до міста B . Знайдіть швидкості автобусів і автомобіля.

1026*. З міста A до міста B о 10 год виїхав автобус, а з міста B до міста A о 10 год 25 хв — автомобіль. До моменту зустрічі об 11 год 20 хв автомобіль проїхав на 8 км менше, ніж автобус. Знайдіть швидкості автобуса й автомобіля, якщо до міста A автомобіль приїхав о 12 год 20 хв.

Вказівка. Розв'язуючи задачу, використайте схему:



Завдання для самоперевірки № 7

Рівень 1

- Укажіть розв'язки рівняння $x - y = 2$:
 а) (3; 2); б) (3; 1); в) (5; 2); г) (-3; -2).
- Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 3; \\ 3x + y = 7? \end{cases}$
 а) (3; 3); б) (2; 2); в) (2; 1); г) (-1; 5).
- Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y = 2 - x; \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ способом підстановки та вкажіть правильну відповідь:
 а) (1; 1); б) (0; 2); в) (2; 0); г) (4; -2).
- Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 6; \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ способом додавання та вкажіть правильну відповідь:
 а) (-2; 8); б) (-4; 10); в) (4; 2); г) (2; 4).

5. Сума двох чисел дорівнює 21, до того ж, одне з них на 5 більше від іншого. Знайдіть ці числа.

Нехай більше число дорівнює x , а менше — y . Яка система рівнянь відповідає умові задачі?

а) $\begin{cases} x + y = 21; \\ y - x = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5; \\ y - x = 21; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 5; \\ x - y = 21; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 21; \\ x - y = 5. \end{cases}$

Рівень 2

6. Доберіть замість зірочок такі числа, щоб пари $(3; *)$ і $(* ; 2)$ були розв'язками рівняння $5x - 2y = 9$.
7. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2; \\ x + 3y = 6. \end{cases}$
8. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + 2y = 11; \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ способом підстановки.
9. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 6; \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ способом додавання.
10. У магазині борошно продають у малій та великій упаковках. Загальна маса малої та великої упаковок борошна дорівнює 7 кг, а 2 малі й 3 великі упаковки мають загальну масу 19 кг. Яка маса малої упаковки борошна і яка — великої?

Рівень 3

11. Знайдіть таке число a , щоб графік рівняння $2x - ay = 2$ проходив через точку $(-1; 2)$.
12. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 5y = -1; \\ 3x + 2y = 8. \end{cases}$
13. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 0,3y = 2; \\ 5x + 0,2y = 24 \end{cases}$ способом додавання.
14. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3(2x - y) - 2(x - y) = 1; \\ 4x - 5(x + 2y) = 51. \end{cases}$
15. За цукерки і печиво мама заплатила 15 грн. Відомо, що 25% вартості цукерок менші, ніж третина вартості печива, на 1 грн 50 к. Скільки гривень мама заплатила за цукерки і скільки — за печиво?

Рівень 4

16. Знайдіть такі числа a і b , щоб графік рівняння $2ax - (b + 2)y = 2$ проходив через точки $(-1; 4)$ і $(2; 2)$.
17. Розв'яжіть графічно систему рівнянь
$$\begin{cases} |2x| - y = 0; \\ x + y = 3. \end{cases}$$
18. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y = (x+2)^2; \\ (y+1)^2 - x = (y-2)^2. \end{cases}$$
19. Для якого значення коефіцієнта a система рівнянь
$$\begin{cases} x + 3y = 4; \\ 2x + ay = 8 \end{cases}$$
 має безліч розв'язків?
20. Є сталь двох сортів з умістом нікелю 5% і 40%. Скільки тонн сталі кожного сорту потрібно взяти, щоб після переплавки одержати 70 т сталі, яка містила б 30% нікелю?

ЗАДАЧІ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

1027. Купили 2 кг огірків по a грн за кілограм і 5 кг помідорів по b грн за кілограм. Запишіть у вигляді виразу вартість покупки.

1028. Автомобіль протягом t год рухався зі швидкістю 80 км/год і протягом 2 год — зі швидкістю 70 км/год. Запишіть у вигляді виразу шлях, який проїхав автомобіль за весь час руху. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 1,2$.

1029. Через першу трубу до басейну щохвилини поступає a л води, а через другу — b л. Скільки літрів води поступить до басейну через обидві труби за 3 год?

1030. Знайдіть значення степеня:

а) 9^4 ; б) $(-3)^5$; в) $(-2,5)^3$; г) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$.

1031. Подайте у вигляді степеня з основою a :

а) $a^2 a^4$; б) $a^7 : a$; в) $(a^3)^5$; г) $(a^5 \cdot a)^4$.

1032. Обчисліть:

а) $0,4^5 \cdot 2,5^5$; б) $(2^2 \cdot 0,5^2)^7 \cdot 0,25^4 \cdot 4^4$; в) $\left(-\frac{3}{7}\right)^5 \cdot 1,7^2 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^5$.

1033. Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь:

а) $8x^2xy$; б) $-3a^2b \cdot 2(a^5)^2$; в) $-m^3 \cdot 3m^2n \cdot 5n^4$;
г) $0,5ac \cdot (-4a^3c)^2 \cdot a^2c$; д) $\frac{2}{3}a^4b \cdot \left(-2\frac{2}{5}ab^2\right)$; е) $\frac{1}{6}x^3y^2 \cdot \left(-1\frac{2}{7}xy\right)^2$.

1034. Подайте одночлен $12a^4b^5$ у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду, одним з яких є: $2a^2b^2$; $-4a^3b$; $-0,5b$.

1035. Подайте одночлен $9a^6b^2$ у вигляді квадрата одночлена.

1036. Подайте одночлен $27x^6y^9$ у вигляді куба одночлена.

1037. Знайдіть значення одночлена:

а) $-4a^3b$, якщо $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{5}$; б) $(2x^3y)^2 \cdot y^4$, якщо $x = 0,25$; $y = 4$.

1038*. Спростіть вираз, де n — натуральне число:

а) $(x^3)^{3n} \cdot (x^5x^{n+1})^2$; б) $(-a^n)^{17} \cdot (-a^2)^9$.

1039. Зведіть подібні члени многочлена та знайдіть його степінь:

а) $3x^2 - 6x + x^2 - 3 + x$; б) $3a \cdot 2ab + a^5 - a^3 - 7a^2b$;

в) $0,6a^2b - 1,4b^2a + 2,8a^2b + 3,3ab^2$; г) $5x^3 + 1\frac{5}{14}x^2 - 6\frac{1}{7}x^3 - 1\frac{2}{7}x^2$.

1040. Спростіть вираз:

а) $8a^2 + 4a - 3 - (7 - 8a + 3a^2)$; б) $x - 3x^2y - xy + (x^2 - 3x^2y + xy)$;
 в) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}\right)$.

Виконайте множення:

1041. а) $4a(a^2 - 4a + 3)$; б) $(2x^2 - 4x + 8)(-0,5x^2)$;
 в) $(4ab^2 + 9a^2)(2b^2 - 3a)$; г) $(a - 7)(b + 1)(c - 2)$.
 1042. а) $(b + 2c)(b - 2c)$; б) $(5x - 2y)(5x + 2y)$;
 в) $(1,4a - 0,3b)(0,3b + 1,4a)$; г) $\left(\frac{2}{3}ab + 2c^2\right)\left(\frac{2}{3}ab - 2c^2\right)$.

1043. Піднесіть до квадрата:

а) $(2x + 3)^2$; б) $(3c - 1)^2$; в) $(0,4b - 5a)^2$; г) $\left(2\frac{1}{7} - \frac{1}{2}y\right)^2$.

Спростіть вираз:

1044. а) $(x - 3)(x^2 + x + 3) - x^3$; б) $3c - (c - 2)(2c^2 - c + 1) - 5c^2$;
 в) $(5 + x)(5 - x) + x^2$; г) $(2b - 9)(2b + 9) - 4b^2$;
 д) $(n - 1)(n^2 + n + 1) - n^3$; е) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9) - 27$.

1045. а) $(10 - 3m)(2 + 3m) + (5m - 4)(5 - 2m)$;

б) $(4a + 9)(a^2 - 2a + 2) - (4a - 7)(a + 1)^2$;

в) $(n^2 - 3n)(1 + 3n)(-1 + n) - 3n(n^3 + 1)$;

г) $(4y - 5y^2)^2 + (2y + 5y^2)^2 - 20y^2$.

Запишіть у вигляді многочлена:

1046. а) $(b + 2)(b - 2)(b^2 + 4)$; б) $15x^3(x^2 + 10)(10 - x^2)$;

в) $a^5(a^4 - (2a^3 + a^2(a^2 - 2a + 3))) + 4a^7$.

1047*. а) $(a^2 + 2a - 2)^2$; б) $(5x - 2)^3$; в) $(c - 3)^4$.

1048. Доведіть тотожність:

а) $y(b - x) + x(b + y) = b(x + y)$;

б) $(-m + n)(m - n) = -(n - m)^2$;

в) $(a + b + c + d)^2 - (a + b)^2 - (c + d)^2 = 2(a + b)(c + d)$;

г) $(n + 1)(n + 3)(n + 5)(n + 7) + 7 = (n^2 + 8n + 8)(n^2 + 8n + 14)$.

Розкладіть на множники:

1049. а) $2x + 2xy$; б) $a^2 - 2a$; в) $12xy^3 + 8xy^2 - 16x^2y$.

1050. а) $ax - ay + 3x - 3y$; б) $x^2y - 2x + xy - 2$;

в) $9ya - 6ya^2 + 2axy - 3xy$; г) $8x^2a - 15y^3 - 10x^2y + 12ay^2$.

1051. а) $9n^2 - 4m^2$; б) $120 - 30a^4$; в) $27x^3 + 0,008y^3$;

г) $x^3 - (m - n)^3$; д) $a^2 + 8a + 16$; е) $6x^2 - 24xy + 24y^2$.

1052. а) $y^4 - \frac{1}{49}y^2$; б) $a^2 - 4b^2 + 2b + a$; в) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4y^4$.
- 1053*. а) $x^2 - 2x - 3$; б) $a^2 + 3a - 4$; в) $x^2 - 8xy + 7y^2$.
1054. Доведіть, що значення виразу:
а) $9^7 - 3^{12}$ ділиться на 8; б) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.
1055. Обчисліть:
а) $97 \cdot 103$; б) $1,8 \cdot 2,2$; в) $52^2 - 48^2$; г) $7,35^2 - 6,35^2$.
1056. Знайдіть значення виразу:
а) $a^3 - 0,5a^2$, якщо $a = 1,5$;
б) $x^2 - 2xy + y^2$, якщо $x = -0,3$; $y = -10,3$.
1057. Доведіть, що значення виразу $(x + 1)^2 - (x - 1)(x + 3)$ не залежать від значень x .
1058. Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу:
а) $(2n + 3)^2 - (2n - 1)^2$ ділиться на 8;
б) $(8n - 4)^2 - 8(4n - 3)$ не ділиться на 32.
1059. Для якого значення x значення виразу $x^2 + 2x + 9$ є найменшим?
1060. Для якого значення x значення виразу $2 - x^2 + 4x$ є найбільшим?
- 1061*. Доведіть, що сума кубів двох послідовних цілих чисел, які не діляться на 3, кратна 9.
- 1062*. Чи може різниця четвертих степенів двох натуральних чисел бути простим числом?
- 1063*. Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + y^2 - 4y - 2x$.
- 1064*. Доведіть: якщо деякі два цілі числа не діляться на 3, то їх сума або різниця ділиться на 3.
- 1065*. Два велосипедисти проїхали шлях від пункту A до пункту B . Перший велосипедист першу половину шляху їхав зі швидкістю 20 км/год, а другу половину — зі швидкістю 16 км/год. Другий же велосипедист першу половину шляху їхав зі швидкістю 19 км/год, а другу половину — зі швидкістю 17 км/год. Хто з них затратив більше часу на шлях від A до B ?
1066. Функція задана формулою $y = -2x + 3$.
а) Знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: -2 ; 0 ; 6 .
б) Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції: 3 ; 1 .
в) Для якого значення x значення функції дорівнює значенню аргументу?
1067. Побудуйте графік функції $y = 2x - 0,5$. За допомогою графіка знайдіть:

а) значення функції, якщо $x = -0,5$; $x = 1,5$;

б) значення x , для якого $y = 1,5$.

1068. Побудуйте графік функції $y = 0,5x + 1$, де $-4 \leq x \leq 3$. Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції? Укажіть нулі функції. Для яких значень x функція набуває додатних значень; від'ємних значень?

1069. Побудуйте графік функції:

а) $y = -x + 1$, де $-3 \leq x \leq 2$;

б) $y = 2x^2 - 2$, де $-2 \leq x \leq 2$.

в) $y = 1,5x$;

г) $y = -1,5x$;

д) $y = 3x + 1$;

е) $y = -1,5x - 1$.

1070. Графік прямої пропорційності проходить через точку $A(2; 7)$. Чи проходить цей графік через точку $B(-4; -14)$?

1071. На рисунку 47 зображено графік функції. Знайдіть область визначення та область значень цієї функції. Задайте функцію формулою, якщо:

а) $0 \leq x \leq 2$;

б) $2 \leq x \leq 6$.

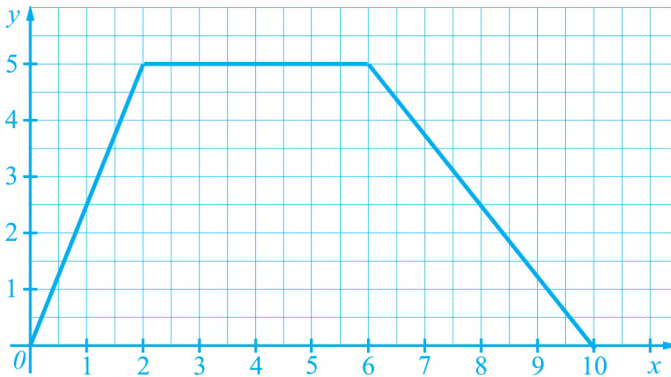


Рис. 47

1072. Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:

а) $y = 1,5x$ та $y = -x + 5$;

б) $y = -2x$ та $y = 2$.

1073. Для якого значення b графіки функцій $y = 3x + b$ і $y = 2x + 4$ перетинаються в точці, що лежить на осі абсцис?

Розв'яжіть рівняння:

1074. а) $3x - 18 = 57 - 2x$;

б) $3(x - 2) - 4(x - 4) = 5$;

в) $250(x + 8) = 125x - 500$;

г) $0,3(1 - x) = 0,4(x - 1) - 0,7$;

д) $\frac{2}{9}(3x - 2) + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{2}{9}$;

е) $\frac{5}{6}(1 - 4x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}(5x + 3)$;

є) $\frac{x - 4}{5} = 1 - \frac{x - 1}{3}$;

ж) $\frac{2x + 3}{6} + \frac{3x + 4}{9} = \frac{5}{18}$.

1075. а) $x(x+5) - x^2 = 2$;

б) $(2x+3)(x-1) = 2x^2$;

в) $x(x+0,1) = (x-0,1)(x+0,2)$;

г) $\frac{1}{3}x\left(x - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}(x^2 - 2)$;

д) $(x-3)(x+3) = (x+1)^2$;

е) $2x(x-1,5)^2 = 2x^3 - 6x^2 + 3$.

1076. а) $y^3 - 3y^2 = 0$;

б) $x^3 - \frac{1}{4}x = 0$;

в) $x^2 - 6x + 9 = 0$;

г) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$;

д) $y^2 + 2y - 48 = 0$;

е) $z^2 - 15z + 56 = 0$.

1077*. а) $|3 - 2x| = 5$;

б) $||x| - 2| = 6$.

1078*. а) $(|x|+5)(3|x|-9) = 0$; б) $|x(x-2)| + x^2 = 0$; в) $x^2 + 2|x| + 1 = 0$.

1079*. Доведіть, що рівняння $x^4 + 1 + (x-2)^4 = 2x^2$ не має коренів.1080*. Розв'яжіть рівняння $|x+4| = |7-x|$.*Розв'яжіть задачі 1081–1086, склавши рівняння.*

1081. Периметр прямокутника дорівнює 68,4 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 3,6 см коротша від іншої.

1082. Сума двох чисел дорівнює 52,7, одне з них у 2,4 разу більше від іншого. Знайдіть більше із цих чисел.

1083. У першій цистерні втричі більше бензину, ніж у другій. Коли з першої цистерни забрали 400 л бензину, а з другої — 800 л, виявилося, що в першій цистерні бензину стало у 8 разів більше, ніж у другій. Скільки літрів бензину було в кожній цистерні спочатку?

1084. З міста виїхав мотоцикліст і рухався зі швидкістю 40 км/год. Через півгодини услід за ним виїхав автомобіль, швидкість якого дорівнює 60 км/год. Через скільки годин після свого виїзду з міста автомобіль наздожене мотоцикліста?

1085. Нержавіюча сталь є сплавом заліза, хрому й нікелю. Лист із такої сталі містить 15% хрому, 0,5% нікелю, а заліза — на 2,78 кг більше, ніж хрому. Знайдіть масу листа.

1086*. Автобус рухався до міста N зі швидкістю 60 км/год. Дорогою його обігнав легковий автомобіль, що їхав зі швидкістю 80 км/год. Автомобіль прибув до міста N і через 15 хв вирушив у зворотний шлях. На відстані 10 км від міста N він знову зустрів автобус. На якій відстані від міста N були автобус і автомобіль за першої зустрічі?1087. Чи є пара чисел $(2; -1)$ розв'язком рівняння $2x + 5y = -3$?

1088. Побудуйте графік рівняння:

а) $x + 3y = 3$;

б) $2x - 3y = 6$;

в) $2x = 5$;

г) $-3y = 6$.

1089. Розв'яжіть графічно систему рівнянь
$$\begin{cases} x - y = 2; \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

Розв'яжіть систему рівнянь:

1090. а)
$$\begin{cases} x + 2y = 6; \\ 2x - 3y = -2; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 2x - 5y = 8; \\ 2x + 3y = -8; \end{cases}$$
 в)
$$\begin{cases} 15x - 8y = 4; \\ 9x - 5y = 1. \end{cases}$$

1091. а)
$$\begin{cases} 3(2x - 5) + 2y = x + 2; \\ 5(x + 1) - 15 = y + 4; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 0, 2(2x + 0, 5) - 0, 3(2y - 3) = 1, 8; \\ -38(5x - 1) + 38(5y + 6) = 0. \end{cases}$$

1092. а)
$$\begin{cases} x + \frac{1}{9}y = 3\frac{1}{3}; \\ 3x - \frac{2}{3}y = 1; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-2}{6} = -2; \\ \frac{x+8}{8} - \frac{y+7}{6} = 0. \end{cases}$$

1093. Знайдіть точку перетину графіків рівнянь $2x + 3y = -2$ і $4x - 5y = 7$.

1094. Чи належить точка перетину графіків рівнянь $2x + 4y = -6$ і $10x - y = 12$ графіку рівняння $3x + y = 1$?

1095. Графік лінійної функції проходить через точки $A(-1; 1)$ і $B(3; -7)$. Задайте цю функцію формулою.

1096*. Для якого значення k система рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y = 5; \\ 2x + 4y = k \end{cases}$$
 має безліч розв'язків?

Розв'яжіть задачі 1097–1101, склавши систему рівнянь.

1097. Сума двох чисел дорівнює 20,5, одне з них на 2,3 більше від іншого. Знайдіть ці числа.

1098. Два автоматичні станки за 8 год спільної роботи виготовляють 2000 деталей. Перший станок за 2 год і другий за 3 год разом виготовляють 630 деталей. Скільки деталей виготовляє за годину кожний станок?

1099. З пунктів A і B , відстань між якими дорівнює 17 км, вийшли назустріч один одному два туристи і зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкості туристів, якщо швидкість одного з них на 0,5 км/год менша від швидкості іншого.

1100. Братові й сестрі разом 10 років. Скільки років кожному з них, якщо через рік брат буде удвічі старший від сестри?

1101*. Молоко однієї корови містить 5% жиру, а іншої — 3,5%. Змішавши молоко обох корів, одержали 10 л молока, жирність якого дорівнює 4%. Скільки для цього використали літрів молока від кожної корови?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Пам'ятайте: хочете навчитися плавати, — сміливіше входьте в воду. Хочете навчитися математики, — беріться за задачі. Кожен розв'язок є своєрідним мистецтвом пошуку.

М. Кравчук

До § 1. Цілі вирази

- 1102.** Чи можна в запису $* 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ поставити замість зірочок знаки «+» або «-» так, щоб значення одержаного виразу дорівнювало: **а)** 5; **б)** 0; **в)** 60?
- 1103.** Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $n(n+1) + (n+2)(n+3)$ є складеним числом.
- 1104.** Вираз $a^2 + 2ab + 2a - b + 4$ для $a=2$ і деякого значення b набуває значення 0. Якого значення набуває вираз $a^2 + ab + b^2$ для тих самих значень a і b ?
- 1105.** Для деяких натуральних значень m і n число $3m + 2n$ ділиться на 7. Доведіть, що для тих самих значень m і n на 7 ділиться й число:
а) $10m + 9n$; **б)** $4m + 5n$; **в)** $m + 3n$.
- 1106.** Для деяких натуральних значень m і n число $5m - n$ ділиться на 8. Для тих самих значень m і n на 8 ділиться і число $3m + 4n$. Доведіть, що тоді й самі числа m і n діляться на 8.
- 1107. а)** Доведіть: якщо два цілі числа при діленні на 7 дають рівні остачі, то різниця цих чисел ділиться на 7.
б) Доведіть, що серед будь-яких восьми цілих чисел завжди знайдуться два числа, різниця яких ділиться на 7.
- 1108.** Запишіть формулу цілих чисел, які діляться на 5, а при діленні на 2, 3 і 4 дають в остачі 1.
- 1109.** (Задача-жарт.) Жінка несла на базар 2 кошики яєць. Її ненароком штовхнув чоловік, кошики впали, а яйця розбилися. Чоловік, щоб розрахуватися, запитав, скільки було всього яєць. Жінка відповіла:
 — Я їх не рахувала, але коли складала в кошики по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, то щоразу залишалось по одному яйцю, а коли складала по 7, то залишилось 2 яйця. Ще знаю, що в кожному кошику поміщається не більше 70 яєць.
 Скільки яєць було в кошиках?
- 1110.** До деякого трицифрового числа праворуч дописали одну цифру, і від одержаного числа відняли початкове. Виявилось, що різниця ділиться на 9. Яку цифру дописали?
- 1111.** Доведіть, що число \overline{aaabbb} ділиться на 37.

1112. а) Доведіть, що сума чисел \overline{abc} , \overline{bca} і \overline{cab} кратна 111.
 б) Доведіть, що не існує трицифрового числа \overline{abc} , для якого число $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ було б квадратом натурального числа.
1113. Два учні по черзі пишуть n -цифрове число: число одиниць пише перший, число десятків — другий, число сотень — знову перший і т. д. Чи може другий учень досягти того, щоб одержане число ділилося на 9, якщо перший заважає йому це зробити? Розгляньте випадки: а) $n = 10$; б) $n = 15$.

До § 2. Одночлени

1114. Доведіть, що для кожного натурального значення n число:
 а) $3^{4n} + 4$ ділиться на 5; б) $9^{2n} - 1$ ділиться на 10.
1115. Доведіть, що для кожного натурального значення n число $4^{2n} + 4$ ділиться на 10.
1116. Доведіть, що для кожного натурального значення n число $10^n - 4$ ділиться на 3, але не ділиться на 9.
1117. Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких була б правильною рівність $m(m + 1) = 3^n + 2^n$.
1118. Що більше:
 а) 125^{125} чи 25^{185} ; б) 250^8 чи 375^7 ?
1119. Якою цифрою може закінчуватися запис квадрата цілого числа; четвертого степеня цілого числа; восьмого степеня цілого числа?
1120. а) Доведіть, що не існує цілого числа, квадрат якого дорівнює $\underbrace{33\dots3}_{100 \text{ трійок}}$.
 б) Чи існують натуральні значення m і n , для яких рівність $m^4 = 10^n + 4$ є правильною?
 в) Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких була б правильною рівність $m^8 = 10^n + 2$.
1121. Знайдіть найменше натуральне число, яке внаслідок множення на 2 дає квадрат натурального числа, а внаслідок множення на 3 — куб натурального числа.

До § 3. Многочлени

1122. а) Число n при діленні на 6 дає в остачі 3, а число m — в остачі 4. Яку остачу при діленні на 6 дає число: $3n + 5m$; nm ?
 б) Числа m , n і k при діленні на 5 дають відповідно в остачах 2, 3 і 4. Доведіть, що число $nk - m(m - 1)$ ділиться на 5.
1123. У чотирицифровому числі число десятків і число тисяч на 1 більші від числа одиниць, а число сотень на 1 більше від числа десятків. Доведіть, що це чотирицифрове число ділиться на 11.

1124. Двоцифрове число в сумі з числом, записаним тими ж цифрами, але у зворотному порядку, дає квадрат натурального числа. Знайдіть усі двоцифрові числа, які мають таку властивість.
1125. Розв'яжіть рівняння $(5|x| - 6)(3|x| + 5) = 5(3x^2 + 1)$.
1126. Доведіть, що:
- а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1$;
 б) $4(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8 + 5^9) = 5^{10} - 1$.
Вказівка. а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^{10} = (2 - 1)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^{10})$.
 Виконавши множення, спростіть останній вираз.
1127. Доведіть, що значення виразу $27^7 + 9^{11} - 81^5$ ділиться на 11.
1128. Доведіть, що значення виразу $2^{n+3} + 5^{n+3} - 2^n + 5^n$ ділиться на 7 для будь-якого натурального значення n .
1129. Доведіть, що сума чотирьох послідовних натуральних степенів числа 3 ділиться на 120.
1130. Розкладіть на множники:
- а) $2a - a^2 - 6b + 9b^2$;
 б) $81x^2 - 49x^2y^2 + 144xy + 64y^2$;
 в) $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc$.

До § 4. Формули скороченого множення

1131. Спростіть вираз $(a - (-b)^n)^2 + (a + (-b)^n)^2$, де n — натуральне число.
1132. Розв'яжіть рівняння:
- а) $(|x| - x)(|x| + x) = 1 - |x|$;
 б) $(2|x| - 1)(2|x| + 1) = (x - 1)(4x - 1)$;
 в) $(1 - |x|)(1 + |x|)(1 + |x|^2) + x^4 = |x|$.
- Розкладіть на множники:*
1133. а) $(a^2 + 1)^2 + 6(a^2 + 1) + 5$; б) $(c^2 - 3c)^2 - 2(c^2 - 3c) - 8$;
 в) $(a^2 - 4a)^2 - 2a^2 + 8a - 15$; г) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$.
1134. а) $a^4 + 4a^2 - 5$; б) $a^4 + a^2 + 1$.
1135. а) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$; б) $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1$.
1136. Доведіть, що значення виразу $25^6 - 2^{21}$ ділиться на 497.
1137. Доведіть, що різниця четвертих степенів двох цілих чисел, одне з яких при діленні на 5 дає в остачі 1, а друге — в остачі 2, кратна 5.
1138. Різниця квадратів натуральних чисел m і n є простим числом. Доведіть, що:
- а) $m = n + 1$;
 б) число $4m + n^2$ є квадратом цілого числа.
1139. Знайдіть усі натуральні числа m і n , для яких є правильною рівність:
- а) $(m + n)^2 - n^2 = 3$; б) $m^2 - (m - n)^2 = 9$.

1140. Знайдіть усі цілі значення m і n , для яких виконується рівність $(n + 2m)^2 - (n + m)^2 = 5$.

1141. Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких була б правильною рівність:

а) $m^3 - (m - 2n)^3 = 99$;

б) $(2m + 1)^3 + (m + 2)^3 = 2^n$.

1142. Доведіть: якщо число y є середнім арифметичним чисел x та z , то $x^4 + 2x^3z - 2xz^3 - z^4 - 4x^2y^2 + 4y^2z^2 = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

1143. а) $x^{10} - x^9 = x^4 - x^3$;

б) $1 - x + x^2 + (x^3 - x^2)^{20} = x$.

1144. а) $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$;

б) $|x|^2 + 2|x| = 3$.

1145. Доведіть, що рівняння $x^2 - 4x + |x| + 5 = 0$ не має коренів.

1146. Чи існують числа x та y , для яких виконується рівність $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 3 = 0$?

1147. а) Доведіть, що квадрат цілого числа або ділиться на 3, або при діленні на 3 дає в остачі 1.

Вказівка. Ціле число n може мати вигляд: 1) $n = 3k$; 2) $n = 3k + 1$; 3) $n = 3k + 2$, де k — ціле число. Розгляньте три можливі випадки.

б) Доведіть, що для кожного натурального значення n число $3n + 2$ не є квадратом цілого числа.

в) Доведіть, що сума квадратів трьох послідовних цілих чисел не є квадратом цілого числа.

г) Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких виконувалася б рівність $m^2 + 1 = 3n$.

1148. а) Доведіть, що не існує цілих чисел m і n , для яких виконувалася б рівність $8n + 2 = m^2$.

Вказівка. Припустимо, що такі цілі числа m і n існують. Тоді з рівності $8n + 2 = m^2$ випливає, що m^2 є парним числом. Тому й число m — парне. Нехай $m = 2k$, де k — ціле число. Обґрунтуйте, що рівність $8n + 2 = 4k^2$ для цілих n і k не може бути правильною.

б) Доведіть, що серед чисел виду $8n + 2$, де n — натуральне число, немає квадрата цілого числа.

в) Доведіть, що сума квадратів двох послідовних непарних чисел не є квадратом цілого числа.

1149. а) Нехай n — деяке натуральне число. Доведіть, що за числом n^2 наступні $2n$ натуральних чисел не є квадратами натуральних чисел.

б) Доведіть, що число $5^{20} + 1$ не є квадратом натурального числа.

в) Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких виконувалася б рівність $5^{2m} + 4 = n^2$.

До § 5. Функції

1150. Два хлопці змагалися у плаванні на дистанції 100 м. На рисунку 48 зображено графіки їхніх запливів на перших 60 м дистанції. Назвіть переможця, вважаючи, що кожний із хлопців плив зі сталою швидкістю. Знайдіть відстань між хлопцями через 45 с після старту; у момент фінішу переможця.

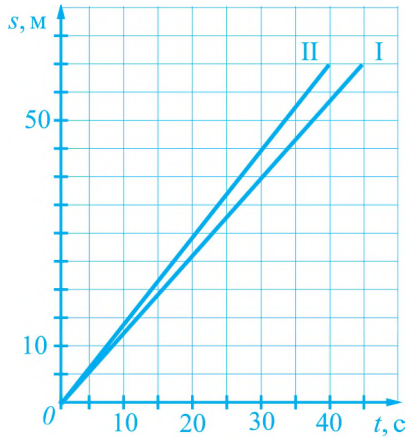


Рис. 48

1151. Графік лінійної функції проходить через точки $(-1; -2)$ і $(2; 1)$. Знайдіть усі значення a , для яких точка $(2a; 2-a)$ належала б цьому графіку.

До § 6. Лінійні рівняння з однією змінною

1152. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x - 1| + |x + 1| = 0$;

б) $|x - 4| + |2x - 8| = 0$.

1153. Скільки коренів залежно від числа a (кажуть: параметра a) має рівняння:

а) $|x - a| = 0$;

б) $|x| = a$;

в) $|x - a| + |x - 1| = 0$?

1154. Розв'яжіть рівняння $ax = a$ з параметром a .

Розв'язання. Розглянемо два випадки.

1) $a \neq 0$. Тоді: $ax = a$; $x = 1$ (поділили обидві частини рівняння на a).

2) $a = 0$. Тоді: $ax = a$; $0x = 0$; коренем рівняння є будь-яке число.

Відповідь. Якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число. ●

Розв'яжіть рівняння з параметром a :

1155. а) $x - a = 3$;

б) $0,5x + 3a = 1,5$;

в) $a - 4x = 3a$.

1156. а) $ax = 5$;

б) $ax = 0$;

в) $ax = 10a$;

г) $(a + 2)x = 2$;

д) $4ax + 4a = 8a$;

е) $a(1 - x) = 5a$.

1157. Розв'яжіть рівняння з параметром b :

а) $(b - 2)x = b^2 - 4$;

б) $bx - 2x = 2b - 4$.

1158. Дано рівняння $a(x - 1) + 5a = 8(x + a) + 1$ з параметром a .

а) Для яких значень a рівняння не має коренів?

б) Чи існують значення a , для яких рівняння має більше ніж один корінь?

1159. Доведіть, що для будь-якого значення параметра a коренем рівняння $x(x + a^2) - a^2 = x(x - 1) + 2$ є додатне число.

Примітка. Рівняння систем містять 3 змінні: x , y та z . Розв'язати такі системи означає знайти всі значення змінних x , y та z , для яких кожне рівняння системи перетворюється у правильну числову рівність.

1172. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} 3x + (a - 2)y = 4a; \\ -3x + 3ay = -2 \end{cases}$$
 залежно від значень параметра a ?

1173. Для яких значень a система рівнянь
$$\begin{cases} 2|x| - y = a; \\ |x| - y = 0 \end{cases}$$
 має два розв'язки?

1174. Дано 10 чисел. Відомо, що сума будь-яких дев'яти із цих чисел дорівнює 1. Чому дорівнює сума усіх даних чисел?

1175. Двома паралельними залізничними коліями рухаються назустріч один одному два поїзди. Довжина першого поїзда дорівнює 130 м, а другого — 104 м. Зустрівшись, поїзди протягом 4,68 с ішли один повз інший. Якби поїзди рухалися в одному напрямку й перший поїзд переганяв другий, то вони йшли б один повз інший протягом 46,8 с. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

ВІТЧИЗНЯНІ МАТЕМАТИКИ



Феофан Прокопович
(1681 – 1736)

Феофан Прокопович — один з найвідоміших мислителів кінця XVII – початку XVIII ст., професор та ректор Києво-Могилянської академії, державний та церковний діяч. Філософ і математик, поет і публіцист, він залишив значну кількість творів. Писав латинською, українською, російською, польською мовами, робив переклади книг і коментував їх.

Феофан Прокопович був найосвіченішою людиною свого часу. Так, у його бібліотеці було близько 30 тисяч книг, написаних різними мовами.

Народився Феофан Прокопович у Києві, закінчив Києво-Могилянську академію, в якій згодом почав викладати курс філософії, включивши до нього два математичні курси — арифметику й геометрію. Найзначнішою математичною працею Феофана Прокоповича є курс лекцій з математики, теоретичні відомості у якому на той час були найповнішими в царській Росії.



**Михайло Васильович
Остроградський**
(1801 – 1861)

Почесне місце в історії математики посідає наш співвітчизник Михайло Остроградський. Він був членом Туринської, Петербурзької, Римської, Американської та Французької Академій Наук. Слава його була настільки великою, що батьки, маючи намір заохотити своїх дітей до навчання, переконували їх словами: «Учись, і будеш, як Остроградський».

2001 року ЮНЕСКО внесла ім'я Михайла Остроградського до переліку видатних математиків світу.

Народився Михайло Остроградський на Полтавщині, походив з козацько-старшинського роду Остроградських. Закінчив Полтавську гімназію, Харківський університет. Серед його математичних досягнень є праці з алгебри та теорії чисел, математичного аналізу, він є автором кількох підручників, а теореми, формули М. Остроградського вивчають студенти математичних спеціальностей усіх університетів світу.



**Георгій Феодосійович
Вороний**
(1868 – 1908)

Георгій Вороний визнаний фахівцями як один з найяскравіших талантів у галузі теорії чисел на межі XIX–XX століть.

Сьогодні у зв'язку з розвитком комп'ютерної графіки, молекулярної біології, творенням штучного інтелекту, його наукові праці набули особливого значення. Зараз Георгій Вороний — один з найцитованіших математиків світу. Це — унікальне явище, зокрема в математиці, де будь-які відкриття вже через 2–3 роки вважаються застарілими.

Георгій Вороний народився в селі Журавка на Полтавщині (тепер Чернігівська область), закінчив Прилуцьку гімназію, Петербурзький університет, працював у Варшавському університеті на посаді професора, у 1907 році був обраний членом-кореспондентом Петербурзької Академії наук. З його ім'ям пов'язані спеціальні математичні терміни: у деяких країнах так звані «діаграми Вороного» уведені навіть до шкільної програми.



**Михайло Пилипович
Кравчук**
(1892 – 1942)

Праці Михайла Кравчука, яких він написав понад 180, належать до різних розділів математики, зокрема до алгебри й теорії чисел. Уведені ним спеціальні многочлени зараз відомі математикам як многочлени Кравчука. Він є автором важливих праць з історії математики, багатьох підручників для вищої та середньої шкіл.

2002 року ЮНЕСКО внесла ім'я Михайла Кравчука до переліку найвидатніших людей світу.

Народився Михайло Кравчук у селі Човниці (тепер Ківерцівський район Волинської області), закінчив Луцьку гімназію, Київський університет. З часу створення в Києві Інституту математики (1934 р.) очолював у ньому один з відділів, був організатором першої в Україні математичної олімпіади школярів (1935 р.). Михайло Кравчук є співавтором першого тритомного словника української математичної термінології.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ

Подільність натуральних чисел

1. Будь-яке натуральне число a , на яке ділиться дане натуральне число n , називають *дільником* числа n .

2. Будь-яке натуральне число n , яке ділиться на дане натуральне число a , називають *кратним* числу a .

Число 12	дільники: 1; 2; 3; 4; 6; 12.
	кратні: 12; 24; 36; 48; ...

3. Натуральне число називають *простим*, якщо воно має тільки два різні дільники: одиницю і те саме число.

4. Число, яке має більше ніж два дільники, називають *складеним*.

5. Кожне складене число можна записати у вигляді добутку кількох простих чисел, тобто *розкласти його на прості множники*.

Наприклад: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

6. На **10** діляться ті й тільки ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0.

7. На **5** діляться ті й тільки ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрами 0 або 5.

8. На **2** діляться ті й тільки ті натуральні числа, запис яких закінчується парною цифрою.

9. На **3** діляться ті й тільки ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 3.

10. На **9** діляться ті й тільки ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 9.

Найбільший спільний дільник

11. Найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з даних чисел, називають *найбільшим спільним дільником* цих чисел.

Для знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел можна розкласти ці числа на прості множники і знайти добуток спільних множників.

Наприклад: $144 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{3}$; $60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot \underline{5}$;
 $\text{НСД}(144; 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Найменше спільне кратне

12. Найменшим спільним кратним натуральних чисел називають найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел.

Щоб знайти найменше спільне кратне двох чисел, кожне з них можна розкласти на прості множники, до розкладу одного з чисел дописати з розкладу іншого числа ті множники, яких немає у розкладі першого, і перемножити записані числа.

$$\text{Наприклад: } 144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3; \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5;$$

$$\text{НСК}(144; 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720.$$

Десяткові дроби

13. Додавання і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно. Для цього дроби записують так, щоб відповідні розрядні одиниці й коми були одні під одними.

$$\text{Наприклад: } \begin{array}{r} + 0,714; \\ \underline{11,3} \\ 12,014 \end{array} \quad \begin{array}{r} - 1,75 \\ \underline{0,592} \\ 1,158 \end{array}$$

14. Щоб помножити один десятковий дріб на інший, потрібно виконати множення, не зважаючи на коми, а потім у добутку відокремити комою стільки десяткових знаків, скільки їх є в обох множниках разом.

Щоб поділити десятковий дріб на десятковий дріб, потрібно в діленому і дільнику перенести коми праворуч на стільки цифр, скільки десяткових знаків має дільник, а потім виконати ділення на натуральне число.

$$\text{Наприклад: } 1,8 \cdot 36 = 64,8; \quad 5,472 : 1,52 = 547,2 : 152 = 3,6.$$

$$\begin{array}{r} 0,32 \\ \underline{36} \\ 54 \\ \underline{0,576} \end{array} \quad \begin{array}{r} 547,2 \quad | \quad 152 \\ \underline{456} \\ 912 \\ \underline{912} \\ 0 \end{array}$$

Окремі випадки множення і ділення десяткових дробів:

$$0,731 \cdot 10 = 7,31; \quad 1,23 \cdot 100 = 123; \quad 5,3 \cdot 0,1 = 0,53; \quad 21,53 \cdot 0,01 = 0,2153;$$

$$14,2 : 10 = 1,42; \quad 14,2 : 100 = 0,142; \quad 153 : 100 = 1,53; \quad 0,73 : 0,1 = 7,3.$$

Звичайні дроби

15. Основна властивість дробу. Якщо чисельник і знаменник звичайного дробу помножити або поділити на те саме натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному.

Наприклад: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$; $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$.

16. Щоб звести дроби до найменшого спільного знаменника, потрібно:

- 1) знайти найменше спільне кратне знаменників;
- 2) знайти додаткові множники, поділивши найменше спільне кратне на кожний знаменник;
- 3) чисельник і знаменник кожного дробу помножити на відповідний додатковий множник.

Наприклад: зведемо до найменшого спільного знаменника дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ і $\frac{7}{16}$:

1) НСК(4; 12; 16) = 48;

2) додаткові множники: $48 : 4 = 12$; $48 : 12 = 4$; $48 : 16 = 3$;

3) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{36}{48}$; $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{20}{48}$; $\frac{7}{16} = \frac{7 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{21}{48}$.

17. Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, потрібно до чисельника першого дробу додати чисельник другого й записати в чисельнику, а знаменник записати той самий.

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, потрібно від чисельника першого дробу відняти чисельник другого й записати в чисельнику, а знаменник записати той самий.

Наприклад: $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$; $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$; $1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, потрібно їх спочатку звести до спільного знаменника.

18. Щоб перемножити два звичайні дроби, потрібно перемножити їх чисельники і добуток записати в чисельнику, перемножити їх знаменники і добуток записати в знаменнику.

Щоб поділити один дріб на інший, досить ділене помножити на число, обернене дільнику.

Наприклад: $\frac{12}{25} \cdot \frac{10}{27} = \frac{\cancel{12}^4 \cdot \cancel{10}^2}{\cancel{25}_5 \cdot \cancel{27}_3} = \frac{8}{45}$; $\frac{3}{11} : \frac{45}{77} = \frac{3}{11} \cdot \frac{77}{45} = \frac{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{77}^7}{\cancel{11}_1 \cdot \cancel{45}_3} = \frac{7}{15}$.

19. Щоб звичайний дріб записати десятковим, досить чисельник дробу поділити на його знаменник.

Наприклад: $\frac{3}{20} = 0,15$.

20. Щоб знайти дріб від числа, потрібно число помножити на цей дріб.

Наприклад: знайдемо $\frac{2}{3}$ від 45: $45 \cdot \frac{2}{3} = \frac{45 \cdot 2}{3} = 30$;

30% від 140 — це 0,3 від 140: $140 \cdot 0,3 = 42$.

Щоб знайти число за даним значенням його дробу, потрібно це значення поділити на дріб.

Наприклад: знайдемо число, $\frac{5}{6}$ якого дорівнює 40:

$$40 : \frac{5}{6} = 40 \cdot \frac{6}{5} = \frac{40 \cdot 6}{5} = 48;$$

знайдемо число, 17% якого дорівнює 51: $17\% = 0,17$; $51 : 0,17 = 300$.

21. Щоб знайти відсоткове відношення двох чисел, потрібно знайти відношення цих чисел і записати його у відсотках.

Наприклад: знайдемо відсоткове відношення чисел 12 і 28:

$$\frac{12}{28} = \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%.$$

Додатні та від'ємні числа

22. Модулем додатного числа і нуля є це ж число; модулем від'ємного числа є протилежне йому число:

$$|a| = a, \text{ якщо } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ якщо } a < 0.$$

Наприклад: $|5,3| = 5,3$; $|0| = 0$; $|-1,8| = 1,8$.

23. Щоб додати два від'ємні числа, потрібно додати їх модулі й поставити перед отриманим числом знак «-».

Щоб додати два числа з різними знаками, потрібно знайти модулі чисел, від більшого модуля відняти менший модуль і поставити перед отриманим числом знак того доданка, модуль якого більший.

Наприклад:

$$-1,6 + (-2,3) = -3,9; \quad -0,7 + 0,7 = 0; \quad 3,2 + (-4,7) = -(4,7 - 3,2) = -1,5.$$

24. Щоб від одного числа відняти інше, досить до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику.

Наприклад: $-15 - (-9) = -15 + 9 = -6$.

25. Щоб знайти добуток двох від'ємних чисел, досить перемножити модулі цих чисел.

Щоб знайти добуток двох чисел з різними знаками, досить перемножити їх модулі й поставити перед одержаним числом знак «-».

$$\text{Наприклад: } (-1,1) \cdot (-0,9) = 1,1 \cdot 0,9 = 0,99; \quad 1\frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{11}{9} \cdot \frac{3}{4}\right) = -\frac{11}{12}.$$

26. Щоб знайти частку двох від'ємних чисел, досить поділити модуль діленого на модуль дільника.

Щоб знайти частку чисел з різними знаками, досить поділити модуль діленого на модуль дільника і поставити перед одержаним числом знак «-».

$$\text{Наприклад: } -105 : (-21) = 105 : 21 = 5; \quad \frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{2}{3} \cdot 4\right) = -2\frac{2}{3}.$$

27. Щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+», потрібно опустити дужки і знак «+», що стоїть перед ними, і записати всі доданки, які були в дужках, зі своїми знаками:

$$a + (-b + c) = a - b + c.$$

Щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «-», потрібно опустити дужки і знак «-», що стоїть перед ними, і записати всі доданки, які були в дужках, із протилежними знаками:

$$a - (b - c) = a - (+b - c) = a - b + c.$$

28. Щоб звести подібні доданки, потрібно додати їхні коефіцієнти і результат помножити на спільну буквену частину.

$$\text{Наприклад: } 7a - 9a + 4a = (7 - 9 + 4)a = 2a.$$

ВІДПОВІДІ

§ 1

16. 50л кг; 2400 кг. 17. 32к деталей; 160 деталей. 20. а) 22,45; б) 530. 21. а) $4\frac{1}{6}$; б) 4,6.
 24. $x = 2,5$. 25. $x = -7$. 26. $x = 2$. 36. $(n - k + 30)$ куців; 78 куців. 37. $(4a - 0,5n)$ грн;
 14,5 грн. 39. 120; 5040; 2 нулями; 24 нулями. 42. 23 числа. 43. $m = 6k + 5$. 44. 27 кг.
 49. Попелюшка. *Вказівка*. Після кожного ходу кількість букетів збільшується на 1.
 Оскільки усього є 32 троянди, то, маючи 2 букети, одержати 32 букети з однієї троян-
 ди можна за $32 - 2 = 30$ ходів. Врахуйте, що парні ходи робить принц. 57. а) $44a + 40$;
 б) $8,5b - 4a$; в) $-6y + 4$; г) $-2x - 23y - 6$. 58. а) $2x - 11z$; б) $-14a + 15b - 3$. 59. а) $-6,9$;
 б) -11 ; в) 28. 60. а) -4 ; б) 27. 72. а) $28c + 26$; б) $x - 4,5$; в) $-6x + 2y + 3z$; г) $4a - 11\frac{1}{3}b$;
 д) $-6x + 18$; е) $15n - 20$. 73. а) $6a + 12$; б) $1,5a - 5,4b$; в) $12n + 18$; г) $\frac{2}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{2}{9}$.
 76. а) 1; б) 2. 77. а) -3 ; б) 0,5. 78. $(b + 1200)$ м. 79. $(3x - 7)$ книжок. 88. а) -9 ; 7; б) -5 ; 5;
 в) коренів немає. 89. 250 т. 90. 60 км/год. 91. На 5%. 93. 7 намист. *Вказівка*. Врахуйте,
 що у намисті чорні перлини можуть бути поруч, через одну, через дві і т. д.
 98. а) $35 - 54a$; б) $5x - 10$; в) $x - 4y - 9$; г) $7b + 5$; д) $-0,1x + 2y - 1,2$; е) $2,5a + 15$.
 99. а) -47 ; б) 0,1. 100. 13. 101. $x = 1,8$.

Завдання для самоперевірки № 1

1. г). 2. б). 3. б). 4. в). 5. в). 6. $(2a - b)$ грн. 7. $13a + 8,2$. 8. $-2,5x + 2,75$; 0,75. 10. $6a - 2$.
 11. 8,24. 12. $(4a - 3b)$ сторінок. 14. $-\frac{3}{14}$. 15. $(8a - 17)$ книжок.

§ 2

129. 11; 1; 1; 5; 31. 130. -5 ; 0; 22. 134. а) 0; 100; 0; б) 0; 99; -1 ; в) 0; 1; 1; г) 0; 1; 1.
 136. 3. 137. б) 2. 138. 7 матчів виграла, 2 зіграла внічию. 139. -5 ; -10 ; -9 . 140. *Вказівка*.
 Нехай a — найменша з відстаней між двома мавпами. Розгляньте, куди дивляться
 мавпи, відстань між якими дорівнює a . 158. а) 10 000; б) 1 000 000; в) 1; г) 100 000;
 д) $4\frac{17}{27}$; е) 1; є) 1; ж) $5\frac{5}{7}$. 159. а) 1000; б) 1 000 000; в) 1; д) 81; е) $-9\frac{1}{3}$. 162. а) a^{m+2} .
 163. а) a^{35} ; б) a^{18} ; в) a^{22} ; г) a^{15} . 164. а) a^{22} ; б) a^{15} ; в) a^{16} ; г) a^{12} . 167. $2\frac{7}{9}$. 169. г) 33.

170. 19. 171. 35 см × 35 см; 936 плиток. 172. 250 м^3 . 173. Ні. *Вказівка*. Щохвилини сума чисел на табло збільшується удвічі. Порівняйте суми чисел вказаних четвірок. 186. а) $-1,25a^7b^5$; б) $0,27a^6b^5$; в) $-x^5y^8$; г) $16a^6b^{12}$; д) $-0,5m^{10}n^8$; е) $1,1a^7b^7c^7$. 187. а) $-25m^4n^3$; б) $-0,1p^5q^3$; в) $-9a^{12}b^5$; г) $-1,5x^9y^5z^6$. 192. а) 12; б) 4; в) 64; г) -24. 193. а) 400 000; б) 1; в) -32. 194. а) -10; б) 256. 195. а) $16x^{48}$; б) $2x^{22n}$; в) $8a^{4n+2}b^{4n+2}$; г) $-x^{8n+5}$. 196. а) 1; б) 0,16. 197. У 8 разів. 198. а) 2; б) -1. 200. 1400 грн. 201. 855 км. 202. *Вказівка*. Припустіть, що кожний хлопець зіграв більше, ніж 5 матчів. Врахуйте, що тоді в усіх матчах загалом зіграли більше, ніж $5 \cdot 30$ хлопців. 211. а) $-2a^5b$; б) a^3b^3 ; в) $-x^4y^2$; г) $-112a^7b^4$; д) $-10x^6z^5$; е) $81a^{12}b^{16}c^{20}d^4$; є) $-0,2a^5b^5$; ж) $-10x^3y^5$; з) $-256m^8n^{21}$. 213. а) 27; б) -320. 214. в) 1; г) 256. 215. 3. 216. $9^{40} > 80^{20}$. 217. а) 0; б) коренів немає; в) 0.

Завдання для самоперевірки № 2

1. в). 2. б). 3. г). 4. в). 5. г). 6. а) — 2); б) — 1); в) — 3). 7. а) 44; б) 80; в) 1000. 8. а) $6a^5$; б) $-1,5a^5b^5$; в) $16a^4c^{12}$. 9. а) 1; б) 20 000. 10. а) 6^{36} ; б) 3^{46} ; в) 2^{24} . 11. а) $36x^8y^8$; б) $63a^8b^{12}c^{12}$; в) $-0,0016m^{47}n^{60}$; г) $6,25a^{11}x^{11}$. 12. а) Наприклад, $2a^2b^2 \cdot 4a^{10}b^{10} \cdot 8b^6$; б) $(-4a^5b^8) \cdot (-16a^7b^{10})$; в) $(4a^4b^6)^3$. 13. а) 256; б) 32. 14. а) 2^{4n+10} ; б) 2^{9n+22} . 15. а) 1; б) 9. 16. 4. 17. а) 0; б) коренів немає.

§ 3

226. а) 12; б) 2,21; в) -18. 227. а) 28; б) 0. 230. а) -0,44; б) -10. 231. а) 168; б) 2. 235. *Вказівка*. Припустимо, що для $x = n$, де n — ціле число, значення многочлена дорівнює нулю. Тоді правильною є рівність $n^5 - 6n^2 + 1 = 0$. Обґрунтуйте, виходячи з цієї рівності, що 1 має ділитися на n , звідки $n = 1$ або $n = -1$. Однак якщо $n = 1$ або $n = -1$, то дана рівність є неправильною. 236. *Вказівка*. Якщо \overline{abc} — дане число, то одержане число \overline{cba} можна записати у вигляді $\overline{cba} = \overline{abc} + 99c - 99a$. 238. а) 17,6 кг; б) 25 кг. 239. 18,4 км/год. 240. Не може. *Вказівка*. Врахуйте: якби кенгуру повернувся в початкову точку, то кількість стрибків в один бік дорівнювала б кількості стрибків у протилежний бік і загальна кількість стрибків була б парною. 252. а) 0,8; б) -2. 253. а) 0,5; б) -0,8. 254. а) a^2b^3 ; б) $-x^4 - 2x - 11$; в) $2xy - 2x^2$; г) $-5a^2 - 5b - 3$. 255. а) $-x^2 - 5x$; б) $8ab + 4b^2$; в) $-n^2 + 7n$. 256. а) $P = -3x^2 - x + 3$; б) $P = x^2 + 2$; в) $P = 3x^2$. 257. $-2x^2 + 2x + 6$. 258. а) 2; б) -1,75. 259. а) -1,2; б) 2. 261. Порівну. 262. $a = -1$, $b = 1$. 266. 25 ц. 267. *Вказівка*. Нехай A — команда, яка програла найбільше матчів. Вона, за умовою, не програла усі матчі, тому перемогла деяку команду B . Знову ж таки, за умовою, команда B перемогла деяку команду C . Доведіть, що команда C перемогла

- команду А. 271. б) $-10a^2 - 8a$; в) $2a^5 - a^3$; г) $-12x^3 - 2x$. 272. а) $-3a^3$; б) $4b^3 - 4b + 1$. 273. а) $2a^2$; б) $-2y^2$; в) $-3m - 6$; г) 0. 274. а) c^3 ; б) $-5x^3 - 15x^2$; в) $4a^2$; г) 0. 275. а) -1 ; б) 2,5; в) $-0,75$; г) 6. 276. а) 1; б) 2,4. 277. а) $-2a^2 - 8a + 8$; б) $15x^6 - 18x^4$; в) $-8m^4n^3 + 8m^4n^2$; г) $-2x^2 + x$; д) $11abc$; е) $-18x^5y^2$. 278. а) $2a^3$; б) $-4xy^2 + 2x$; в) $-8m^3n^5$; г) $-\frac{2}{3}a^2b^2 - 4a^4$. 285. а) 5; б) 0,7. 286. а) -15 ; б) 2. 287. а) 3; б) 2. 288. а) 1; б) 1,5. 289. 1,5; 8,5. 290. 60 см^2 . 291. 200 м^2 . 292. а) 0; б) $-a^n$; в) $x^{3n+4} + x^{3n+2}$. 295. Хлопців на 5 більше, ніж дівчат. 296. $(3 - 2x + \frac{1}{3}x^2)$ л. *Вказівка.* Після першого відливання і доливання води в 1 л суміші міститься $\frac{3-x}{3}$ л спирту. 297. 90 км. 298. 180 км. 299. 60 піратів. 301. Так. *Вказівка.* Врахуйте, що за 3 задачі учень може одержати один з наборів оцінок: 000, 100, 200, 020, 120, 220, ..., 246. Покажіть, що кількість таких наборів дорівнює 27 та зробіть висновок. 307. а) $6a^2 - 4$; б) -12 ; в) -15 ; г) $a^3 + a$; д) $a^2 - 3b^2$; е) $-4y^2$. 308. а) $7x + 6$; б) $3a^2$; в) $5ab - 8b^2$; г) $2m^2 - 15n^2$. 309. а) 5; б) 0,6. 310. а) 4; б) 1. 315. а) $12a^2 - 10$; б) $45x - 4$; в) $5a$; г) $7b^3$; д) $14x^4y^2$. 316. а) $18x^2 - 15$; б) $-35b + 10$; в) $x^3 + 9y^3$; г) $2ab$. 317. а) 1,8; б) 2; в) -1 ; г) 2. 318. а) $|\frac{1}{3}|$; б) 4; в) коренем є будь-яке число. 326. 3; 4; 5. 327. 9 см; 5 см. 328. 8 см; 4 см. 329. 0. 330. а) $a^n + b^n$; б) $2^{n+3} + 5$. 335. 223. *Вказівка.* Сума коефіцієнтів многочлена стандартного вигляду від однієї змінної x дорівнює значенню цього многочлена, якщо $x = 1$. 336. 30 л. 337. 3 км/год. 338. 25,2 км. 341. Ні. *Вказівка.* Обґрунтуйте, що за вказаних ходів парність кількості чашок, які стоять догори дном, не змінюється. 354. а) 6,25; б) 103. 355. а) 1,96; б) 28. 356. а) 0; 5; б) 0; -3 . 357. а) 0; -2 ; б) 0; 2. 358. а) $ab^3(a+b-ab)$; б) $12x^4y^3(3-4x^2y)$; в) $8a^2b^2(3b-2ab-5a)$; г) $-0,6m^4n^5(5n-2m+7mn)$; д) $\frac{2}{15}x^2y^3z^2(xy-2z+7xz^2)$; е) $\frac{4}{9}abc(c+2b-4a)$. 359. а) $2x^4z^3(1+2z-2z^2)$; б) $15a^2b^2 \times (3a^2-4ab+5b^2)$; в) $-1,8m^2n^4(2n-3m+5)$; г) $\frac{3}{7}x^3y^3z^4(2x^2-y^2+4z)$. 360. а) $(m+k)(a-b)$; г) $(a-b)(m-3)$; е) $(x-2)(x+2)$; є) $(a-b)(2x-a+b)$; ж) $2x(a+b)(2+a+b)$. 361. а) $(x-k) \times (m-n)$; в) $(s-t)(a-b)$; г) $(a-b)(2+x)$; д) $(m-4)(m-9)$; е) $(m-n)(x+2m-2n)$. 362. а) 0,5; б) $\frac{17}{21}$. 363. а) 5; б) 0. 364. а) 0; -20 ; б) 0; 0,4; в) 0; $\frac{2}{5}$. 365. а) 0; 0,2; б) 0; $-0,2$; в) 0; $1\frac{3}{4}$. 372. 350 км. 373. 276 м. 375. а) 26,3; б) 1; в) $\frac{1}{3}$. 376. Ні. *Вказівка.* Припустіть, що розставити відповідним чином числа можна. Підрахуйте двома способами суму всіх чисел таблиці. 378. є) $(1-2n)(a-b)$; ж) $(y-1)(4a-3)$. 379. г) $(c+b)(6-a)$; д) $(x+y)(1-b)$; е) $(a-1)(7m+5x)$. 380. а) $(a+1)(a^2+1)$; б) $(x-4)(x^2+2)$; в) $(b-a)(b-2)$; г) $(x+y)(10+x)$; д) $(3-x)(a+x)$; е) $(a-1)(xy+5)$. 381. а) $(x+2)(x^2+1)$; б) $(a^2+5) \times (a^4+5)$; в) $(a+2b)(a+3)$; г) $(x+3a)(x-2)$. 382. а) $(a^2+b^2)(1-ay)$; б) $(b-y)(bn-y)$;

в) $(c+2)(3a^2-5bc)$; г) $(2x^2+3y)(6+5x)$; д) $(3y-4x)(0,3a+0,4y)$; е) $\left(\frac{1}{17}x+\frac{4}{17}yz\right)(3xyz-1)$.

383. а) $(y^2-a)(x^2+2y)$; **б)** $(a-2c)(2ab-1)$; **в)** $(2x^3+3y^2)(3y+4z^2)$; **г)** $(n^2+3m^2)\times(0,2mn-0,5)$. **384. а)** $(a-b+c)(x+3)$; **б)** $(x^2-y^2+4z)(a-4b)$; **в)** $(a+b)(-5+3n-m)$; **г)** $(b+c)(n^2+p^2-p)$. **385. а)** $(a+b+2)(ab+1)$; **б)** $(a-b+1)(c+d)$; **в)** $(a+b)(2a^2+2b-1)$.

386. а) 2,5; **б)** 37; **в)** 0. **387. а)** 38; **б)** $-9\frac{4}{9}$. **388.** $(a+b-1)(a^2+b^2)$. **390.** Якщо $x > 3$, то значення многочлена додатні; якщо $x < 3$, — від'ємні. **391. а)** $(a-2)(a-5)$; **б)** $(x+1)\times(x+4)$; **в)** $(x+y)(x+2y)$; **г)** $(a-3b)(a-4b)$. **392. а)** 1; 2; **б)** -5; -3. **393. а)** -2; 0; **б)** 1; 2; 3; 4. **394.** 1; 5. **396.** 60 і 35 книжок. **397.** 26,5 т; 28 т. **399. Вказівка.** Розбийте учнів на 5 пар, у кожній з яких — два учні, які сидять один навпроти одного. **405. а)** $12b^2-14b$; **б)** $4x+8$; **в)** $-ab^2+2a-1$; **г)** 0; **д)** $4bc$; **е)** 0. **407. а)** -1; **б)** -1,5. **410.** 7 см; 5 см. **411. а)** 0,6; **б)** коренів немає; **в)** -1. **413. а)** $(a+b)(2+x)$; **б)** $(x-y)(3-a)$; **в)** $(x+2)(x^2+1)$; **г)** $(1-2y)(0,1x+0,2y)$; **д)** $5(b+2)(a^2-2bc)$; **е)** $(4z-5y)(x^2-5y^2)$. **414. а)** $(x-7)(x-2)$; **б)** $(x+2)(x+6)$. **415. а)** 0; 3; **б)** 0; -2; **в)** 0; -2,5; **г)** 0; $2\frac{2}{3}$. **416. а)** 2; 3; **б)** -3; -1. **417. а)** -18; **б)** 85; **в)** 42. **421.** 0,5.

Завдання для самоперевірки № 3

1. в). 2. в). 3. б). 4. г). 5. в). 6. б). 7. а) $2a-6$; б) $-x^2-3x-1$. 8. а) $6x^4-2x^3+2x^2$; б) $6a^2-19ab+10b^2$. 9. а) $4x(1-3x)$; б) $-10(2+a)$; в) $2a^2b(1+2a-a^2)$. 10. 75. 11. а) 0; 0,5; б) 0; -4. 12. $5x^4-4x^2+3x$. 13. а) $-3,2x^7y^5+6,8x^5y^3$; б) $2a^3-7a^2b-6ab^2+8b^3$. 14. а) 3; б) 0; 1. 15. а) $(m-n)(m-2n+3)$; б) $(a-x)(am-x)$. 17. а) $a^3b-2\frac{13}{15}a^2b^2+2ab^3$; б) $x^3+6x^2y+11xy^2+6y^3$. 18. -9. 19. а) -6; б) $-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}$. 20. а) $(a-b)\left(\frac{2}{9}+a-b\right)$; б) $(x+2)(x+a)$. 21. 20 см²; 14 см².

§ 4

431. а) 3; **б)** -5; **в)** $-4x^4$; **г)** $64c^8$; **д)** $9a^2b^2$; **е)** $8a^2$; **є)** $-6b^3+24b$. **432. а)** 7; **б)** $25-2c$; **в)** a^6 ; **г)** $-4z^4$; **д)** 0. **433. а)** z^2+1 ; **б)** $\frac{9}{49}a^2+\frac{21}{25}b^2$; **в)** $-x^2-\frac{2}{3}$; **г)** $\frac{1}{9}a^4$. **434. а)** $\frac{1}{4}a^2$; **б)** $6b^2-2\frac{7}{9}$. **435. а)** b^4-1 ; **б)** $16x^4-1$; **в)** $16-y^4$; **г)** $81n^4-256$; **д)** y^4-16z^4 ; **е)** a^8-1 . **436. а)** $81-c^4$; **б)** z^4-625 ; **в)** $256x^4-y^4$; **г)** $81k^8-16$. **439. а)** 5; **б)** 0,5; **в)** 1; **г)** 0. **440. а)** 0,5; **б)** 0,4. **441. а)** 0; **б)** $a^{32}-b^{32}$. **442. Вказівка.** Ураховавши, що $a-b=1$, ліву частину рівності можна записати у вигляді $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$. **444.** -1. **445.** Площа квадрата. **446.** 10%. **447.** 1,35 кг. **450. Вказівка.** Врахуйте, що один гном може мати 0, 1, 2, 3, 4 або 5 пукерок — усього 6 варіантів. **456. а)** $2a^2+2$; **б)** b^2 ;

- в) $-20x$; г) $2x - 2$. **457. а)** 16; **б)** $2x^2 + 8$. **458. а)** 1; **б)** -2 . **459. а)** -5 ; **б)** 1. **468. а)** $-8a$; **б)** 1; **в)** $12n^2 + 2$; г) $a^2 + b^2 + 2ab$. **469. а)** $2a^2 + 8b^2$; **б)** $x^4 + 25x$; **в)** $a^2 + b^2 - 1$. **470. а)** $-0,3$; **б)** 2; **в)** 0,5; г) 0,25. **471. а)** 1; **б)** -9 ; **в)** -1 . **473. $-4a^{20}b^{20}$** . **476. 2. 477. Вказівка.** Розгляньте можливі випадки: 1) $m = 5k + 1$; 2) $m = 5k + 2$; 3) $m = 5k + 3$; 4) $m = 5k + 4$, де k — ціле число. **478. Ні.** **479. 720 ц.** **480. 12,6; 7.** **484. Вказівка.** Зафарбуйте непарні стовпці дошки в чорний колір, а парні — у білий. Урахуйте, що з чорної клітинки жук може переповзти лише на білу, а з білої — лише на чорну. **496. а)** $(a + 1)(a + 3)$; **б)** $(3b - 3) \times (3b + 1)$; **в)** $(2 - 3b)(6 + 3b)$; г) $(2a - 5 - 5b)(2a - 5 + 5b)$; д) $(x + 1)(7x + 5)$; е) $(-2a - 8b) \times (4a + 2b)$. **497. а)** $(2x - 4)(2x + 2)$; **б)** $(-2a - 3)(6a + 3)$; **в)** $(-x + y)(9x - 3y)$. **498. $-34,4; 2\frac{1}{7}$** . **499. 44; $\frac{2}{7}$** . **500. а)** $-2; -4$; **б)** 1; $-0,2$; **в)** $-5; -1$; г) -6 ; 0. **501. а)** 2; 3; **б)** 1; 3. **504. а)** $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$; **б)** $(1 - x)(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$. **505. а)** $-2; 2$; **б)** $-1; 1$; **в)** $-4; 0$. **508. а)** 12 років; **б)** 6 років. **509. 80 км/год.** **511. Вказівка.** Розгляньте рівносторонній трикутник зі стороною 1 см. **517. а)** 100; 0,01; 400; **б)** 400; 10 000. **518. 100; 100.** **521. а)** 1; **б)** 100; 81. **522. $\frac{1}{9}$** . **523. а)** 4; **б)** -6 . **524. а)** 3; **б)** -5 . **525. а)** 25; **б)** $\frac{1}{81}$. **527. $x = \frac{2}{3}, y = -2$** . **528.** Коренем є будь-яке число. **529. 5 км/год.** **530. 0; 0,25.** **534. Порівну.** **544. в)** $(3a^2 - 5)(9a^4 + 15a^2 + 25)$; е) $(10 - ab^3c^4)(100 + 10ab^3c^4 + a^2b^6c^8)$. **545. в)** $(0,4x^3y^2z - 3)(0,16x^6y^4z^2 + 1,2x^3y^2z + 9)$. **548. а)** a^3 ; **б)** x^6 ; **в)** 0; г) 16. **549. а)** x^3 ; **б)** $2b^3$. **550. а)** -2 ; **б)** 4,5. **551. а)** 1; **б)** 8. **555. 11,375.** **556. а)** $2x^2 + 2y^2$; **б)** $10ab$; **в)** $-a^2$. **557. а)** 9; **б)** 12. **558. 105 км.** **559. Вказівка.** Припустіть, що деякі два хлопчики А і В не є братами. Врахуйте, що тоді вони не мають спільного брата і тому разом мають не менше 4 братів, а для цього потрібно щонайменше $4 + 2 = 6$ хлопчиків. **560. г)** $4a(a - 1)(a + 1)$; д) $x^2(x - 1)(x + 1)$; е) $c(a - 3b)(a + 3b)$; ж) $c(3 + b)(9 - 3b + b^2)$. **561. г)** $3y^2(y - 1)(y + 1)$; д) $2x(3y - 1)(3y + 1)$; е) $6a(1 - b)(1 + b + b^2)$; ж) $a^3(1 - a)(1 + a)$. **562. б)** $-(b - c)^2$; д) $a(3a + 1)^2$; е) $m(1 - 5m)^2$. **563. в)** $-6(a - 2b)^2$; г) $x(x - 6)^2$. **564. а)** 800; **б)** 125. **565. а)** 300; **б)** 26 000. **566. а)** $-3; 3$; **б)** $-0,5; 0,5$. **567. а)** $-5; 5$; **б)** $-0,2; 0,2$. **568. а)** $(a - n)(a + n)(a^2 + n^2)$; **б)** $(k - 2)(k + 2)(k^2 + 4)$. **569. а)** $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; **б)** $(3 - b)(3 + b)(9 + b^2)$. **570. а)** $3(m + 8)(n - 3)$; **б)** $x^3(b - 1)(x + 1)$; **в)** $-4c(a + 8)(b + 3)$; г) $2y^2(y - a)(y - b)$; д) $0,5a(a + x)(3 - x)$; е) $xy(a - 1)(xy + 5)$. **571. а)** $2c(1 + x)(2a + b)$; **б)** $m(a - b)(m + 3)$; **в)** $-ab(a + b)(a + 1)$; г) $0,2x^2(x + 3y)(x - 2)$. **572. а)** $(x - y - z)(x - y + z)$; **б)** $(\frac{2}{3}x - a - b)(\frac{2}{3}x + a + b)$; **в)** $(c - 3 - k)(c - 3 + k)$; г) $(2x - y - 2)(2x + y + 2)$.

573. а) $(m+n-k)(m+n+k)$; б) $\left(\frac{3}{4}a-2x-y\right)\left(\frac{3}{4}a+2x+y\right)$; в) $(a-4-b)(a-4+b)$;
 г) $(p-q+5)(p+q-5)$. 575. 0. 576. а) $(a+b)(a-b+1)$; б) $(x-a)(x+a+1)$;
 в) $(2x-y)(2x+y-1)$; г) $(x-y)(3,5x+3,5y-1)$. 577. а) $(c-b)(c+b+1)$;
 б) $(x+y)(1+x-y)$; в) $(a-x)(a+x+4,8b)$. 578. а) 66; б) 19 200. 579. а) 31; б) 20 400.
 580. а) -1; 0; 1; б) -0,5; 0; 0,5; в) -2; 2; 4; г) -2; 0,5; 2; д) -1; 0; 1; е) 2. 581. а) -2; 0; 2;
 б) -0,5; 0; 0,5; в) -3; 1; 3; г) -1; 0,25; 1. 582. а) $(x-2)(x+4)$; б) $(a-6)(a-2)$;
 в) $(2c-3)(2c+1)$; г) $(x-5y)(x-y)$; д) $(a+b)(a+11b)$; е) $(3a-4b)(3a+2b)$.
 583. а) $(a-b)(2a-2b+1)$; б) $3ab(a-b)$. 584. а) 1; 7; б) -10; -2; в) 3; 5; г) -2; 1; 2; 3.
 590. а) 36; б) -3. 592. 2,2 кг. 593. 50%. 594. Ні. *Вказівка.* Припустіть, що такий обхід
 можливий. Розгляньте вершину куба, яка не є ні початком, ні кінцем обходу. Урахуй-
 те: скільки разів жук заповзає в цю вершину, стільки разів і вповзає з неї щоразу по
 різних ребрах. 605. а) 0 (якщо $x=2$); б) 3 (якщо $x=-2$). 606. а) 0 (якщо $a=-3$);
 б) 1 (якщо $x=3$). 612. а) -7 (якщо $x=1$); б) 7 (якщо $a=-2$); 614. а) 3; 4; б) -3; 4.
 615. а) Коренів немає; б) 1. 617. а) *Вказівка.* Рівність можна записати у вигляді
 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + 1 = 0$. 618. 2 + 2. 620. 3 км/год. 621. 124 га; 186 га; 258 га. 623. Ні.
Вказівка. Припустіть, що таке розбиття на групи можливе. Тоді в кожній групі сума
 чисел є парним числом, бо вона дорівнює подвоєному найбільшому числу групи. То-
 му й сума всіх заданих чисел є парним числом. Урахуйте, що насправді сума всіх за-
 даних чисел є непарною, бо серед них є 25 непарних чисел. 626. а) -27; б) $6x^2-2$;
 в) $29a^2$; г) $-2ab-2bc-2ca$; д) $2a^8$. 629. а) -5; б) -0,5; в) 0,19; г) $\frac{4}{45}$. 632. в) $x^2y^2(x-y) \times$
 $\times(x+y)$; д) $(c-1)^2(c+1)^2$; е) $(a-b-1)(a-b+1)$; є) $(m+4)(9m-4)$; ж) $(x+y)(x-y-1)$;
 з) $(a-b)(a+3b)$. 634. а) $(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1)$; б) $(z-2)(z+1)(z^2+2z+4)$;
 в) $2(x-1)^2(x^2+x+1)$. 635. а) $(x^2+xy+y^2)^2(1-x+y)(1+x-y)$; б) $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.
 636. а) -3; 0; 3; б) -1; 0; 1; в) -1; 1; 5; г) -1,5; -1; 1. 637. а) Коренів немає; б) 0; в) 1.
 642. а) 1; б) 16.

Завдання для самоперевірки № 4

1. г). 2. в). 3. в). 4. в). 5. г). 6. б). 7. $-2a+10$; 9. 8. а) $9b^2+24b+16$; б) $4a^2-20a+25$.
 9. а) -2; б) -3. 10. а) $(3y-4)(3y+4)$; б) $3(x-y)(x+y)$; в) $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$.
 11. а) $(3a+2)^2$; б) $(10a-b)^2$. 12. а) $98y^2$; б) $-6b^2+5$. 14. а) $(a^3-2b^2)(a^3+2b^2)$;
 б) $(0,1a-3b)(0,01a^2+0,3ab+9b^2)$; в) $0,4a^2(a+1)^2$. 16. а) 0; 1,5; б) -5; 7. 17. а) $x^4-8x^2y^4$;
 б) a^6-1 . 18. а) $(m^2+mn+n^2)(m-n+3)$; б) $(a+b+c-x)(a+b+c+x)$. 19. а) -0,25;
 б) -9; -1; 1.

§ 5

667. а) $x = 0$; $x = 4$; б) $x = 2$. 668. а) $x = -2$; $x = 0$; б) $x = -1$. 671. -2 . 672. -4 ; 0 ; 4 . 673. Так, наприклад, якщо $x = -a$. 674. 1 год 10 хв. 678. Немає. *Вказівка.* Замінами *аб* на *ббб*, *ба* на *ааб*, *бб* на *ааа* ми у слові кількість букв *б* або збільшуємо на 2, або не змінюємо, або зменшуємо на 2. У слові *Абаба* парна кількість букв *б*, тому в будь-якому імені жителя острова кількість букв *б* є парною. 692. в) $t = 0$; $t = 20$; г) $5 \leq t \leq 10$; 50 м. 693. б) 0,5 год; в) 4 км/год; 5 км/год; г) 4 км/год. 700. 5 кг. 702. *Вказівка.* Припустіть, що рибалки наловили різну кількість рибин та обгрунтуйте, що в такому випадку вони разом мали наловити не менше ніж 10 рибин. 735. $x < 1,75$. 736. $x < 4$. 741. $V = 34 - 0,085S$; 18,7 л; 400 км. 742. $V = 30 + 1,5t$; 75 м³; 40 хв. 744. Так. 745. $a = 5$. 748. $x = 0,6$. 749. а) 0,5; б) -1 . 751. 25%. 752. 27 л; 9 л. 753. Ні. *Вказівка.* Сума S усіх заданих чисел є непарним числом. Якщо стерти числа a і b , то сума усіх чисел, що залишилися, дорівнюватиме $S - a - b$. Написавши замість a і b число $a - b$ або $b - a$, матимемо числа, сума яких дорівнюватиме $(S - a - b) + a - b = S - 2b$ або $(S - a - b) + b - a = S - 2a$. В обох випадках сума двадцяти написаних чисел є непарною. Такою ж буде сума дев'ятнадцяти чисел після наступного кроку і т. д. 754. в) $x = 0,75$. 755. в) 32 °F; 212 °F. 765. $k = -0,5$. 768. -1 ; 2 — корені рівняння. 769. а) $k = 0,5$; б) $k = 5$.

Завдання для самоперевірки № 5

1. г). 2. в). 3. б). 4. б). 5. б). 6. а); г). 7. а) — 3); б) — 2); в) — 4); г) — 1). 8. 2; $-2,5$. 9. а) -2 ; б) -3 ; 0. 11. Так. 12. Область визначення: $-4 \leq x \leq 4$. Область значень: $-3 \leq y \leq 3$. Функція набуває від'ємних значень, якщо $-3,5 < x < 2$. 13. 0; 6. 14. $x = -1$ — нуль функції. Функція набуває від'ємних значень, якщо $x > -1$. 15. (2,8; 3,4). 16. Так. 17. $y = -7$. 18. $x = -3$; $x = 1$. 19. Так. 20. $x < -1$.

§ 6

782. а) 16; б) 1,125; в) $\frac{2}{15}$; г) $-\frac{7}{8}$. 783. а) 0,2; б) $-1\frac{1}{2}$. 786. $a = -3$. 787. *Вказівка.* Обгрунтуйте, що для $x = 2$ значення лівої частини рівняння є непарним числом. 788. в) -3 ; -2 ; -1 ; г) 0; 1; 2; 3; $5\frac{1}{3}$. 791. а) 54 080 жителів; б) 50 000 жителів. 792. Так. *Вказівка.* Сізіф може покласти камінь на якомога вищу сходинку, якщо діятиме так: 1) Він бере камінь з першої сходинки і переносить його на 501-у. Аїд скочує камінь з другої сходинки на першу. 2) Сізіф переносить камінь із 3-ї сходинки на 502-гу, Аїд скочує камінь з 4-ї на 3-тю і т. д. Кількість каменів, які лежать підряд, після кожного ходу Аїда зменшується на 1. Тому врахуйте: коли після 500-го ходу Сізіф покладе камінь на 1000-ну сходинку, на 999-й сходинці каменя не буде. 799. а) 3; б) 0; в) -2 ; г) 4,5.

800. а) -4; б) -1. 801. а) 2; б) -35; в) -10,2; г) 4. 802. а) -1,75; б) $-16\frac{1}{3}$; в) -1; г) $\frac{1}{9}$.
 803. а) 5; б) 2,5; в) 2,5; г) 3,5; д) -3; е) -5. 804. 0. 805. 4. 806. 3. 807. -2. 808. (1; -1).
 809. а) 5; б) -2; в) $1\frac{8}{9}$; г) 0. 810. а) 10; б) -1; в) -8; г) $-1\frac{1}{4}$. 811. а) 1; б) $-\frac{2}{7}$.
 812. в) 8; 12; г) -1; 1. 813. а) 5; б) -3; 2; в) коренів немає; г) коренем рівняння є будь-яке невід'ємне число. 817. 30 яблук. 818. 19. *Вказівка.* Число a має бути дільником числа $4389 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$. Обґрунтуйте, що лише дільник $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$ є трицифровим числом, яке закінчується цифрою 1. 819. 40 кг; 28 кг. 820. 18 і 15 комп'ютерів.
 821. 105 т. 822. 36 і 12 років. 823. 16 і 20 деталей. 824. 300 сторінок. 825. 90 км.
 826. а) 9 см; 6 см; 10 см; б) 10,5 см; 5,5 см; 9 см. 827. Олег — 2 грн; Сергій — 6 грн; Віталій — 4 грн. 828. 130 кг; 150 кг; 180 кг. 829. 52,5 кг; 45 кг; 37,5 кг. 830. 66 і 54 яблук. 831. 20 км/год; 16 км/год; 12 км. 832. 400 км. 833. 200 км. 834. 30 км.
 835. 21 км/год. 836. 40 км. 837. 56 км/год; 60 км/год. 838. 56, 14 і 11 років. 839. 60 і 35 книжок. 840. 80 семикласників. 841. 90 деталей. 842. 350 грн. 843. 10 хв; 40 хв.
 844. 28 учнів. 845. 8 ц, 2 ц. 846. 40 л; 30 л. 847. 500 г. 848. 38 т. 851. 34. 853. а) Ні; б) так. 854. *Вказівка.* Припустіть, що півлітрових банок не залишилося. Якщо залишилося x банок, ємність яких дорівнює 0,7 л, то матимемо рівняння $0,7x + (3600 - x) = 2800$. Обґрунтуйте, що натурального числа x , яке задовольняло б це рівняння, не існує. 858. в) 2; г) 5; д) -2,6; е) 4. 859. а) 5; б) -1. 860. а) -2; б) $-\frac{2}{3}$; в) -3,2; г) $\frac{1}{3}$.
 861. а) Коренів немає; б) -2; 2; в) 0; 4; г) -2; 1; д) 7; е) -0,6. 862. Не існує. 863. 108 см².
 864. 8 см; 12 см; 10 см. 865. 70 га. 866. 15 км. 867. 1,2 год. 868. 3 кг; 7 кг. 869. 40 л.

Завдання для самоперевірки № 6

1. в). 2. б). 3. а); г). 4. б). 5. в). 7. а) — 1); б) — 3); в) — 1); г) — 2). 8. а) 1; б) $\frac{1}{8}$.
 9. 5 км/год. 10. Ні. 11. а) $-\frac{5}{8}$; б) 14. 12. 51 м; 30 м. 13. 5 год. 15. а) -0,5; б) -2; 2.
 16. 300 м. 17. 1,5 кг.

§ 7

883. (2; 2). 884. 4. 885. 3. 886. а) $(x; -3)$, де x — будь-яке число; б) $(3; y)$, де y — будь-яке число. 887. б) $x = 2k, y = 5 - 3k$, де k — будь-яке ціле число; в) $x = 9k + 3, y = 4k + 2$, де k — будь-яке ціле число. 888. (9; 2); (3; 7). 889. $a = 0,2$. 890. 8008 одиниць.
 893. Настя. *Вказівка.* Незалежно від першого ходу Марійки Настя може залишити

після свого ходу два однакові завдовжки ланцюжки пелюсток. Якщо далі Марійка відриватиме пелюстки від одного ланцюжка, то Настя має відривати такі ж за порядком пелюстки від іншого. **906.** 1. **907.** –2. **908.** –2. **909.** 2. **910.** Існує: $a = 1$. **913.** **а)** $(x + y)(7 + a)$; **б)** $(x - 3)(x - 1)$; **г)** $c(2a + 2b + c)$. **914.** –15. **915.** 28; 16. **916.** Ні. *Вказівка.* Хоча б в одній купі має бути не менше ніж 6 камінців. Підрахуйте масу шести найлегших камінців. **919.** **а)** (4; 2); **б)** (0; 4); **в)** (2; 1); **г)** (–1; 1). **920.** **а)** (1; 1); **б)** (3; –4); **в)** (3; 4). **924.** **а)** Безліч; **б)** немає; **в)** один; **г)** безліч. **925.** **а)** Безліч; **б)** немає; **в)** один. **927.** $a = 0$; $b = 3$. **928.** **а)** (–1; 1); **б)** (–1,5; 3); (1,5; 3); **в)** (2; 2); (–1; 1). **929.** **а)** 2; **б)** 0,6; **в)** 5; **г)** 3. **932.** 7 туристів. **933.** **а)** (1; 3); **б)** (7; –4,5). **934.** **а)** (1; 3); **б)** (4; 1); **в)** (3; 1); **г)** (1; –2); **д)** розв’язків немає; **е)** (3; 2). **935.** **а)** (4; 0); **б)** (3; 5); **в)** (1,5; –2); **г)** (3; –1); **д)** (7; 1); **е)** (1; –1). **936.** **а)** (2; 1,5); **б)** (1; –2); **в)** (20; 0,5); **г)** (3; 3). **937.** **а)** (1; 0,5); **б)** (1; –1); **в)** (2; 10). **938.** **а)** (2; –2); **б)** (4; 5). **939.** (3; –3). **940.** **а)** (3; –2); **б)** (–11; 65); **в)** (1; –6); **г)** розв’язків немає; **д)** (0,5; 1,5); **е)** (12; –8). **941.** **а)** (2; 4); **б)** (–2; –1); **в)** (–6; –4); **г)** (5; 3). **943.** $y = -x + 4$. **944.** $y = -0,5x + 0,5$. **945.** **а)** (4; 1); **б)** (4; 3); **в)** (5; 2); **г)** (6; 3); **д)** $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{6}\right)$. **946.** $a = -1,5$. **947.** $b = 1,5$. **948.** **а)** $(x - 3)(2 - y)$; **б)** $y(y - 5)^2$; **в)** $(-a - 2b)(3a - 2b)$. **950.** 1; 49. **951.** –10. **952.** Ні. *Вказівка.* Одна із двох сторінок аркуша має парний номер, а інша — непарний. Тому сума номерів сторінок одного аркуша є непарною. **953.** **а)** (4; 3); **б)** (–2; –3); **в)** (0,5; 1). **954.** **а)** (–1; 2); **б)** (–2; 4); **в)** (5; 1). **955.** **а)** (3; –1); **б)** (0; –2); **в)** (–1; 3). **956.** **а)** (–1; –1); **б)** (2; –2); **в)** (4; –3); **г)** (0,5; –0,5); **д)** (1; –1); **е)** (1; –2). **957.** **а)** (1; –2); **б)** (5; 6); **в)** (5; 0,5); **г)** (6; 4). **958.** **а)** (20; 1); **б)** $\left(11\frac{2}{3}; 20\right)$; **в)** (48; 55); **г)** $\left(1\frac{1}{5}; 1\right)$. **959.** **а)** (2,5; 10); **б)** (–2; 4). **960.** **а)** (3,5; 4,5); **б)** $\left(\frac{11}{17}; -\frac{1}{17}\right)$; **в)** $\left(3; -\frac{1}{5}\right)$; **г)** $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. **961.** **а)** (2,5; 1); **б)** (16; –23). **962.** **а)** Ні; **б)** так. **963.** **а)** Так; **б)** ні. **965.** **а)** (–2; 0); **б)** (3; –1); (3; 1); **в)** (0,3; –1,2); **г)** (–2; 2). **966.** Якщо $a \neq 2$, — один розв’язок; якщо $a = 2$, — безліч розв’язків. **967.** $a = \frac{1}{42}$; $b = \frac{1}{7}$; $c = \frac{1}{3}$; $d = \frac{1}{2}$. **969.** 32 м × 20 м. **970.** 14 і 7 років. **971.** 1000 грн. **972.** *Вказівка.* Припустіть, що знайдуться два міста A і B такі, що дорогами країни проїхати з A в B не можна. За умовою, кожне з міст A і B сполучене дорогою принаймні із 7 іншими містами. Врахуйте, що інших міст є 13 і серед них немає міста C , яке сполучене дорогою і з містом A , і з містом B (інакше з A до B можна було б проїхати через це місто). **973.** 11 г; 8,5 г. **974.** 2 л; 1 л. **975.** 8 кг; 7 кг. **976.** 4 т;

5 т. **977.** 57,5; 46,5. **978.** 60; 12. **979.** 5 двомісних; 9 тримісних. **980.** 11 двомісних; 14 чотиримісних. **981.** 80 км/год; 60 км/год. **982.** 12 і 8 деталей. **983.** 20 і 40 книжок. **984.** 17 і 8 горобців. **985.** 43 км/год; 3 км/год. **986.** 45 км/год; 3 км/год. **987.** 3 палки, 4 галки. **988.** 5 і 7 міпків. **989.** 17 тис. грн; 7 тис. грн. **990.** 60 т; 42 т. **991.** 53. **992.** 5 км/год; 4 км/год. **993.** 50 км/год; 70 км/год. **994.** 80; 36. **995.** 50 л; 60 л. **996.** 2 грн; 1,5 грн. **997.** 180 грн; 270 грн. **998.** 48. **999.** 57 км/год; 51 км/год; 85,5 км. **1000.** 42 км; 36 км. **1001.** 8 км. **1003.** а) $(1 + 3b)(a - c)$; б) $(x + y)(x - y + 2)$; в) $(a - 2b)(a + 2b + 1)$; г) $(c - a) \times (c - 2a)$. **1007.** Не можна. *Вказівка.* Зафарбуйте клітинки дошки у білий та чорний колір у шаховому порядку. Врахуйте, що при кожному ході змінюється колір клітинки, на якій стоїть фішка. **1014.** а) (2; 1); б) (-1; -1). **1015.** а) (4; -1); б) (2; -2); в) (0,5; -1). **1016.** а) (1; -5); б) (-1; -3); в) (3; 2). **1017.** (2; 1). **1018.** а) (5; 10); б) (4; 1); в) (1; -3); г) (0,5; 2); д) (6; 15); е) (10; 14). **1019.** (-1; 1). **1020.** 29,5 га; 2,5 га. **1021.** 12 аркушів; 36 аркушів. **1022.** 8 монет; 12 монет. **1023.** 40 кг; 44 кг. **1024.** 2,7; 1,8. **1025.** 80 км/год; 100 км/год. **1026.** 72 км/год; 96 км/год.

Завдання для самоперевірки № 7

1. б). 2. в). 3. в). 4. г). 5. г). 6. (3; 3); (2,6; 2). 7. (3; 1). 8. (5; 3). 9. (2; 0). 10. 2 кг; 5 кг. 11. $a = -2$. 12. (2; 1). 13. (4; 20). 14. (-1; -5). 15. 6 грн; 9 грн. 16. $a = 0,2$; $b = -2,6$. 17. (1; 2); (-3; 6). 18. $(-\frac{3}{7}; \frac{3}{7})$. 19. $a = 6$. 20. 20 т; 50 т.

Задачі за курс алгебри 7 класу

1044. а) $-2x^2 - 9$; б) $-2c^3 + 2$. **1045.** а) $-19m^2 + 57m$; б) 25; в) $-11n^3 + 5n^2$; г) $50y^4 - 20y^3$. **1050.** а) $(x - y)(a + 3)$; б) $(x + 1)(xy - 2)$; в) $y(3 - 2a)(3a - x)$; г) $(2x^2 + 3y^2)(4a - 5y)$. **1052.** б) $(a + 2b)(a - 2b + 1)$; в) $(x - 2y - 2y^2)(x - 2y + 2y^2)$. **1053.** а) $(x - 3)(x + 1)$; б) $(a - 1)(a + 4)$; в) $(x - y)(x - 7y)$. **1059.** $x = -1$. **1060.** $x = 2$. **1062.** Ні. **1063.** -5. **1065.** Перший велосипедист. **1070.** Так. **1073.** $b = 6$. **1074.** а) 15; б) 5; в) -20; г) 2; д) 1; е) $\frac{2}{27}$; є) 4; ж) -1. **1075.** а) 0,4; б) 3; в) коренів немає; г) $2\frac{2}{3}$; д) -5; е) $\frac{2}{3}$. **1076.** а) 0; 3; б) -0,5; 0; 0,5; в) 3; г) -2; 2; д) -8; 6; е) 7; 8. **1077.** а) -1; 4; б) -8; 8. **1078.** а) -3; 3; б) 0; в) коренів немає. **1080.** 1,5. **1082.** 37,2. **1083.** 3600 л; 1200 л. **1084.** 1 год. **1085.** 4 кг. **1086.** 130 км. **1090.** а) (2; 2); б) (-1; -2); в) (4; 7). **1091.** а) (3; 1); б) (0,2; -1,2);

1092. а) $(2\frac{1}{3}; 9)$; б) $(-4; -4)$. 1093. $(0,5; -1)$. 1094. Так. 1095. $y = -2x - 1$. 1096. $k = 10$.
1098. 120 і 130 деталей. 1099. 4,5 км/год; 4 км/год. 1100. 7 років; 3 роки. 1101. $3\frac{1}{3}$ л; $6\frac{2}{3}$ л.

Задачі підвищеної складності

1104. 12. 1109. 121 яйце. 1110. 0 або 9. 1114. а) *Вказівка*. Доведіть, що запис числа $3^{4n} + 4$ закінчується цифрою 5. 1121. 72. 1122. а) 5; 0. 1130. а) $(a - 3b)(2 - a - 3b)$; б) $(9x + 8y - 7xy)(9x + 8y + 7xy)$; в) $(a + b + c)(ab + bc + ac)$. 1131. $2a^2 + 2b^{2n}$.
1132. а) $-1; 1$; б) $0,4$; в) $-1; 1$. 1133. а) $(a^2 + 2)(a^2 + 6)$; б) $(c - 4)(c - 2)(c - 1)(c + 1)$; в) $(a - 5)(a - 3)(a - 1)(a + 1)$; г) $(x - 1)(x + 1)^2(x + 3)$. 1134. а) $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 5)$; б) $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$. 1135. б) $(2x + y + 1)^2$. 1139. а) $m = 1, n = 1$; б) $m = 5, n = 1$; $m = 3, n = 3$; $m = 5, n = 9$. 1143. а) $-1; 0; 1$; б) 1. 1144. а) $1; -1; 2; -2$; б) $-1; 1$. 1146. Не існують. 1152. а) Коренів немає; б) 4. 1156. а) Якщо $a \neq 0$, то $x = 5 : a$; якщо $a = 0$, то коренів немає; б) якщо $a \neq 0$, то $x = 0$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число; д) якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число; е) якщо $a \neq 0$, то $x = -4$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число. 1157. а) Якщо $b \neq 2$, то $x = b + 2$; якщо $b = 2$, то коренем рівняння є будь-яке число; б) якщо $b \neq 2$, то $x = 2$; якщо $b = 2$, то коренем рівняння є будь-яке число. 1158. а) $a = 8$; б) не існують.
1160. Якщо $a \neq 0$ — два корені; якщо $a = 0$ — один корінь. 1161. $a = -6$. 1162. 290 км. 1163. 450 г. 1164. 200 мл. 1165. 20 км/год. 1166. $a = 2$. 1169. а) $(-2,5; 0,25)$; б) $(0; 0)$; $(1; 1)$. 1170. а) $(1; 2)$; $(-1; 2)$; б) $(3; 1)$; $(-3; 1)$. 1172. Якщо $a \neq 0,5$, — один розв'язок, якщо $a = 0,5$, — безліч розв'язків. 1173. $a > 0$. 1174. $1\frac{1}{9}$. 1175. 27,5 м/с; 22,5 м/с.

Предметний покажчик

Аргумент.....	97	Рівняння	
Властивості		— з однією змінною.....	130
— лінійної функції.....	114	— із двома змінними	152
— рівнянь з однією змінною .	131	— лінійне	135
— рівнянь із двома змінними	153	Розв’язок рівняння із двома змінними.....	152
— степеня	26	Розв’язування систем лінійних рівнянь	
Вирази		— графічним способом	162
— зі змінними	6	— способом додавання.....	173
— цілі	6	— способом підстановки.....	168
Віднімання многочленів.....	45	Розкладання многочленів на множники.....	56
Графік		— способом винесення спільного множника за дужки	56
— лінійного рівнянь із двома змінними	156	— способом групування.....	61
— лінійної функції.....	112	Система лінійних рівнянь із двома змінними	162
— функції	102	Способи задання функції	97
Додавання многочленів	44	Степінь	
Залежна змінна.....	96	— з натуральним показником..	23
Корінь рівняння.....	130	— многочлена.....	41
Кутовий коефіцієнт	113	— одночлена.....	33
Многочлен	41	Тотожність	13
Множення		Тотожне перетворення виразів	14
— многочленів	52	Тотожно рівні вирази.....	13
— одночленів	32	Формула	
— одночлена на многочлен	48	— квадрата суми	72
Незалежна змінна.....	96	— квадрата різниці	72
Область визначення функції.....	97	— різниці квадратів	76
— значень функції	97	— різниці кубів	81
Одночлен	32	— суми кубів	82
— стандартного вигляду	32	Функція	96
Піднесення до степеня		— лінійна	112
— добутку.....	28		
— одночлена.....	33		
— степеня	28		
Пряма пропорційність	114		

ЗМІСТ

РОЗДІЛ І. ЦІЛІ ВИРАЗИ

§ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ

1. Вирази зі змінними. Цілі вирази	6
2. Тотожно рівні вирази. Тотожності	13
Запитання і вправи для повторення § 1	19

§ 2. ОДНОЧЛЕНИ

3. Степінь з натуральним показником	23
4. Властивості степеня з натуральним показником	26
5. Одночлен і його стандартний вигляд	32
Запитання і вправи для повторення § 2	37

§ 3. МНОГОЧЛЕНИ

6. Многочлен. Степінь многочлена	41
7. Додавання і віднімання многочленів	44
8. Множення одночлена на многочлен	48
9. Множення многочлена на многочлен	52
10. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки	56
11. Розкладання многочленів на множники способом групування	61
Запитання і вправи для повторення § 3	64

§ 4. ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

12. Множення різниці двох виразів на їх суму	69
13. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів	72
14. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів	76
15. Розкладання многочленів на множники з використанням формул квадрата суми і квадрата різниці	79
16. Різниця і сума кубів двох виразів	81
17. Застосування кількох способів для розкладання многочленів на множники	84
18. Застосування перетворень виразів	88
Запитання і вправи для повторення § 4	92

РОЗДІЛ II. ФУНКЦІЇ

§ 5. ФУНКЦІЇ

19. Функція. Способи задання функції	96
20. Графік функції. Функція як математична модель реальних процесів	102
21. Лінійна функція	112
Запитання і вправи для повторення § 5	123

РОЗДІЛ III. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

§ 6. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

22. Поняття рівняння. Розв'язування рівнянь	130
23. Лінійні рівняння з однією змінною	135
24. Розв'язування задач за допомогою рівнянь	140
Запитання і вправи для повторення § 6	148

§ 7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

25. Рівняння із двома змінними	152
26. Графік лінійного рівняння із двома змінними	156
27. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними	161
28. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки	168
29. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання	173
30. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь	177
Запитання і вправи для повторення § 7	185

ЗАДАЧІ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ	190
--------------------------------------	-----

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ	196
------------------------------------	-----

ВІТЧИЗНЯНІ МАТЕМАТИКИ	203
-----------------------------	-----

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ	205
---	-----

ВІДПОВІДІ	210
-----------------	-----

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК	221
---------------------------	-----

Навчальне видання

*Кравчук Василь Ростиславович
Підручна Марія Васиївна
Янченко Галина Михайлівна*

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

*Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України*

**Видано за рахунок державних коштів.
Продаж заборонено**

Редактори: *Ярослав Гап'юк, Ярослав Гринчишин, Сергій Мартинюк*

Літературне редагування: *Людмила Олійник*

Художнє оформлення: *Олена Соколюк, Світлана Демчак*

Відповідальний за випуск *Сергій Мартинюк*

Формат 60×90/16. 14 ум. др. арк., 11,84 обл.-вид. арк. Тираж 12 195. Замовлення № 15-1054.

Видавець і виготовлювач Редакція газети «Підручники і посібники».

46000, м. Тернопіль, вул. Поліська, ба. Тел.: (0352) 43-15-15; 43-10-21.

Збут: zbut@pp-books.com.ua Редакція: red@pp-books.com.ua

Виробництво: print@pp-books.com.ua

www.pp-books.com.ua

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців, виготівників і розповсюджувачів видавничої продукції
серія ДК № 4678 від 21.01.2014 р.

Книга-поштою: а/с 376, Тернопіль, 46011.

Тел.: (0352) 42-43-76; 097-50-35-376

post@pp-books.com.ua