



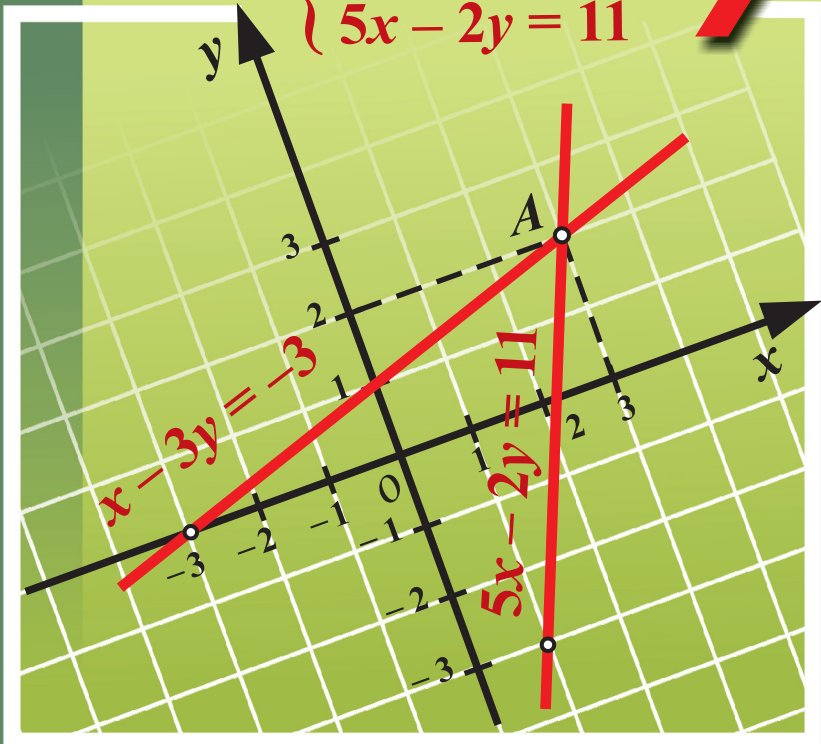
Василь Кравчук
Галина Янченко

АЛГЕБРА

КЛАС

7

$$\begin{cases} x - 3y = -3 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases}$$



ВАСИЛЬ КРАВЧУК, ГАЛИНА ЯНЧЕНКО

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу



Тернопіль
Видавництво «Підручники і посібники»
2007

УДК 51
ББК 22.1я721
К 77

Редактори *Ярослав Гап'юк, Ярослав Гринчишин, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування *Людмили Олійник*
Художнє оформлення *Олени Соколюк, Світлани Демчак*
Макет *Андрія Кравчука*

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(лист №1/11-2153 від 28.04.2007 року)*

Кравчук Василь, Янченко Галина

К 77 Алгебра: Підручник для 7 класу. — Тернопіль: Підручники і посібники, 2007. — 224 с.

ISBN 978-966-07-0846-4

УДК 51
ББК 22.1я721

ISBN 978-966-07-0846-4

© Кравчук В., Янченко Г., 2007

ЮНІ ДРУЗІ!

Ви розпочинаєте вивчення однієї з основних математичних дисциплін — алгебри. Сподіваємося, що підручник, який ви тримаєте в руках, допоможе вам не загубитися в лабіринтах цієї поки що непізної науки.

Щодо особливостей підручника, то матеріал, який ви вивчатимете, поділено на чотири розділи, сім параграфів, а параграфи — на пункти.

Кожний пункт розпочинається викладом теоретичного матеріалу. Деякі пункти містять додатковий матеріал під рубрикою «Для тих, хто хоче знати більше».

Далі — рубрика «Приклади розв'язання вправ». Це підказка. Вона допоможе вам ознайомитися з основними видами вправ, способами їх розв'язування та навчить правильно записувати розв'язання.

Приклади розв'язання вправ



Прочитавши теоретичний матеріал та поміркувавши над зразками розв'язаних задач, варто спочатку розв'язувати усні вправи і простіші задачі (рівень А), а відтак переходити до складніших (рівень Б). Задачі рівня В — для найкмітливіших — тих, хто хоче вміти та знати більше й отримувати найвищі оцінки. Для деяких задач цього рівня наведено розв'язання.

Рівень А



Рівень Б



Рівень В



Для самостійної роботи вдома рекомендовано задачі, номери яких виділено (наприклад, 343).

Рубрика «Вправи для повторення» допоможе періодично повторювати основні види вправ.

Після вивчення параграфа ви зможете повторити й систематизувати матеріал, відповівши на запитання та розв'язавши задачі, вміщені наприкінці параграфа.

Свої знання можна перевірити, розв'язавши завдання для самоперевірки.

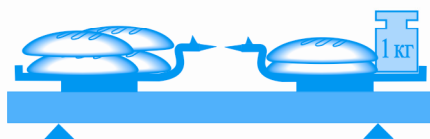
Щиро бажаємо успіху!

Розділ І.

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

Алгебра тривалий час була частиною арифметики — однієї з найдавніших математичних дисциплін. Слово «арифметика» в перекладі з грецької мови означає «мистецтво чисел». Алгебру ж після виокремлення її в окрему науку розглядали як мистецтво розв'язувати рівняння.

У даному розділі ми з'ясуємо, що таке рівняння, лінійне рівняння, що означає розв'язати рівняння, як розв'язувати задачі за допомогою рівнянь.



 — x кг

$$4x = 2x + 1$$

§ 1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

1. Поняття рівняння

1. Що таке рівняння. Розглянемо задачу.

Маса 4 великих і 15 малих деталей дорівнює 270 г. Маса великої деталі втричі більша від маси малої. Яка маса малої деталі?

Нехай маса малої деталі дорівнює x г, тоді маса великої — $3x$ г. Маса 15 малих деталей дорівнює $15x$ г, а 4 великих — $4 \cdot 3x = 12x$ (г). За умовою задачі сума цих мас дорівнює 270 г:

$$15x + 12x = 270.$$

Ми дійшли до рівності, що містить невідоме число, позначене буквою x (ще кажуть: рівність містить змінну x). Щоб розв'язати задачу, потрібно знайти значення x , для якого рівність $15x + 12x = 270$ є правильною числовою рівністю.

*Рівність з невідомим значенням змінної називають **рівнянням з однією змінною** (або **рівнянням з одним невідомим**).*

2. Корінь рівняння. Розглянемо рівняння $3x = x + 6$. Підставляючи замість змінної x деякі числа, одержуватимемо числові рівності, які можуть бути правильними або неправильними. Наприклад:

якщо $x = 3$, то матимемо рівність $3 \cdot 3 = 3 + 6$, яка є правильною;

якщо $x = 4$, то матимемо рівність $3 \cdot 4 = 4 + 6$, яка є неправильною.

*Значення змінної, для якого рівняння перетворюється у правильну числову рівність, називають **коренем**, або **розв'язком рівняння**.*

Отже, число 3 є коренем рівняння $3x = x + 6$, а число 4 — ні.

3. Кількість коренів рівняння. Рівняння можуть мати різну кількість коренів. Наприклад:

рівняння $3x = 9$ має лише один корінь — число 3;

рівняння $(x - 2)(x - 6) = 0$ має два корені — числа 2 і 6;

рівнянню $x + 0 = x$ задовольняє будь-яке число x ; кажуть, що це рівняння має безліч коренів.

Рівняння може й не мати коренів. Розглянемо, наприклад, рівняння $x + 1 = x$. Для будь-якого числа x значення лівої частини рівняння на 1 більше від значення правої частини. Отже, яке число x ми не взяли б, рівність $x + 1 = x$ буде неправильною. Тому це рівняння не має коренів.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Розв'яжемо рівняння, складене вище за умовою задачі про великі та малі деталі:

$$15x + 12x = 270; \quad 27x = 270; \quad x = 270 : 27; \quad x = 10.$$

Отже, маса малої деталі дорівнює 10 г.



Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Чи є число 2,5 коренем рівняння $3x - 0,5 = 2(x + 1)$?

• Якщо $x = 2,5$, то:

значення лівої частини рівняння дорівнює: $3 \cdot 2,5 - 0,5 = 7,5 - 0,5 = 7$;

значення правої частини дорівнює: $2(2,5 + 1) = 2 \cdot 3,5 = 7$.

Значення обох частин рівняння рівні, тому $x = 2,5$ — корінь даного рівняння. •

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

а) $3(x - 7) = 12$; б) $(2x + 1)(2x - 4) = 0$; в) $x^2 + 7 = 3$.

• а) $3(x - 7) = 12$; $x - 7 = 12 : 3$; $x - 7 = 4$; $x = 4 + 7$; $x = 11$.

Відповідь. 11.

б) Добуток дорівнює нулю лише тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю. Отже, $2x + 1 = 0$ або $2x - 4 = 0$, звідки $x = -0,5$ або $x = 2$.

Відповідь. $-0,5$; 2.

в) $x^2 + 7 = 3$; $x^2 = 3 - 7$; $x^2 = -4$. Квадрат числа не може дорівнювати від'ємному числу. Тому дане рівняння коренів не має.

Відповідь. Рівняння коренів не має. •

Усно

1. Які із записів є рівняннями:

а) $4x + 7$;

б) $4x - x = 15$;

в) $14 - 2,5 = 11,5$;

г) $8(x - 3) = 34$;

д) $5x - 2x + 5$;

е) $x > 2$?

2. Чи є число 2 коренем рівняння:

а) $5x = 3x + 4$;

б) $2x + 8 = 7x$;

в) $10 - y = y(y + 2)$?

3. Скільки коренів має рівняння:

а) $2x = 1$;

б) $2x = 0$;

в) $x = x + 3$;

г) $2 + x = x + 2$;

д) $x(x - 5) = 0$;

е) $\left(\frac{2}{5} - 0,4\right)(x - 2) = 0$?

Рівень А



4. Доведіть, що число 1,5 є коренем рівняння:

а) $4x - 3 = x + 1,5$;

б) $2(1 - 2x) + x = -5x + 5$.

5. Доведіть, що число 8 є коренем рівняння:

а) $0,5x + 6 = 2x - 6$;

б) $4(x + 3) = 49 - (x - 3)$.

6. Вкажіть рівняння, для якого число 3 є коренем:

а) $7x - 12 = 3x$;

б) $2x - 4x + 8 = 1$;

в) $3(8 - y) = 5y$.

7. Вкажіть рівняння, для якого число 2 є коренем:

- а) $6x = -2 + 7x$; б) $2(y - 5) + 7 = 1$; в) $5 - (6 - x) = x$.

Розв'яжіть рівняння:

8. а) $5x + 3 = 18$; б) $1,7x - 2 = 3,1$; в) $4 - 4y = 6$;
 г) $-1,2y = 0,03$; д) $-4(x + 8) = -108$; е) $5(2y + 1) = -1$;
 є) $12,6 = 6(x + 2,5)$; ж) $z : 1,5 = -7$; з) $(0,7x + 1) : 0,5 = 4$.
 9. а) $6 + 3z = 15$; б) $2x - 11 = -3$; в) $7 - 6x = 10$;
 г) $4(2x + 3) = -4$; д) $-2(3 + y) = 10,06$; е) $(5z + 4) : 3 = -17$.

Рівень Б



10. Запишіть рівняння, яке має:

- а) єдиний корінь — число 4; б) два корені — числа -4 і 4 .

11. Чи є число 1,5 коренем рівняння:

- а) $x - 1 = |1 - x|$; б) $x + |-x| = 0$?

12. Доведіть, що число 2 є коренем рівняння $4 - x = |-x|$.

Розв'яжіть рівняння:

13. а) $(3x + 7)(3x - 2) = 0$; б) $x^2 + 8 = 4$.
 14. а) $(4x - 6)(2x + 6) = 0$; б) $2x^2 + 7 = 1$.

Рівень В



15. Знайдіть таке число a , щоб коренем рівняння $2x + a = -1$ було число 1.

16. Рівняння $5x = a - 3$ має той же корінь, що й рівняння $2x - 7 = 1$. Знайдіть a .

17. Не виконуючи обчислень, доведіть, що число 2 не є коренем рівняння
 $135x(1297x - 468) - 114(273x + 575) - 2125 = 0$.

18. Розв'яжіть рівняння:

- а) $(x - 1)(2x - 1)(3x - 1) = 0$; б) $x^2(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$.

Вправи для повторення

19. Знайдіть:

- а) $\frac{3}{7}$ від 2,1; б) 0,4 від 4; в) 28% від 2,5.

20. Магазин закупив товар на 50 000 грн., продав його й отримав 7,5% прибутку. Скільки прибутку (у гривнях) отримав магазин?

21. Заготовлені в кар'єрі 400 т руди вивезли 3 самоскиди. Перший самоскид вивіз 30% усієї руди, другий — на 12 т більше, ніж перший. Скільки тонн руди вивіз третій самоскид?

22. Спростіть вираз:

а) $4x - 7x + 8 + 11x - 3$;

б) $8a + 5b - 2 - 9a - 4b$;

в) $7(3c + 1) - 5c + 2$;

г) $2b - 4(1 - 2b)$;

д) $x - (4 + x) - (x - 3)$;

е) $2a - 2b - 4(3b + 1) + a$.

2. Розв'язування рівнянь. Властивості рівнянь

Розв'язування будь-якого рівняння зводиться до виконання певних перетворень, у результаті яких дане рівняння замінюють більш простим.

Розв'яжемо, наприклад, рівняння:

$$5(x - 2) + 11 = 3x + 9. \quad (1)$$

1. Розкриємо дужки:

$$5x - 10 + 11 = 3x + 9. \quad (2)$$

2. Зведемо подібні доданки в лівій частині рівняння:

$$5x + 1 = 3x + 9. \quad (3)$$

3. Перенесемо доданки зі змінною x у ліву частину рівняння, а без змінної — у праву, змінивши їх знаки на протилежні:

$$5x - 3x = 9 - 1. \quad (4)$$

4. Зведемо подібні доданки у кожній частині рівняння:

$$2x = 8. \quad (5)$$

5. Поділимо обидві частини рівняння на 2:

$$x = 4.$$

Отже, рівняння (1) має єдиний корінь — число 4.

Розв'язуючи рівняння (1), ми виконували певні перетворення: розкривали дужки, зводили подібні доданки, переносили доданки з однієї частини рівняння в іншу, ділили обидві частини рівняння на число. Із цими перетвореннями пов'язані такі *основні властивості рівнянь*:

Властивість 1. У будь-якій частині рівняння можна розкрити дужки або звести подібні доданки.

Властивість 2. Будь-який доданок можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

Властивість 3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне і те ж, відмінне від нуля, число.

Якщо в деякому рівнянні виконати одне з перетворень, вказаних у властивостях 1, 2 або 3, то одержимо рівняння, яке має ті ж корені, що й початкове рівняння.

Розв'язуючи рівняння (1), ми послідовно одержували рівняння (2), (3), (4), (5). Усі вони разом з рівнянням (1) мають один і той же корінь — число 4.

Для тих, хто хоче знати більше



Властивості рівнянь можна обґрунтувати, використовуючи такі властивості числових рівностей:

Якщо $a = b$ — правильна числова рівність і c — деяке число, то:

$a + c = b + c$	Якщо до обох частин правильної числової рівності додати одне й те ж число, то одержимо правильну числову рівність.
$ac = bc$	Якщо обидві частини правильної числової рівності помножити на одне й те ж число, то одержимо правильну числову рівність.
$a : c = b : c,$ де $c \neq 0$	Якщо обидві частини правильної числової рівності поділити на одне й те ж, відмінне від нуля, число, то одержимо правильну числову рівність.

З першої властивості числових рівностей можна одержати такий наслідок: якщо з однієї частини правильної числової рівності перенести в іншу частину доданок, змінивши його знак на протилежний, то одержимо правильну числову рівність.

Використовуючи властивості числових рівностей, доведемо, наприклад, що рівняння

$$3x = x + 2 \quad (6)$$

має ті ж корені, що й рівняння

$$3x - x = 2. \quad (7)$$

(Це властивість 2 для рівняння $3x = x + 2$.)

• Нехай $x = a$ — довільний корінь рівняння (6). Тоді $3a = a + 2$ — правильна числова рівність. Перенесемо доданок a в ліву частину рівності, змінивши його знак на протилежний. Одержимо правильну числову рівність $3a - a = 2$, з якої випливає, що $x = a$ є коренем рівняння (7). Ми довели, що довільний корінь рівняння (6) є коренем рівняння (7).

Навпаки, нехай $x = b$ — довільний корінь рівняння (7). Тоді числова рівність $3b - b = 2$ є правильною. Перенесемо доданок $-b$ у праву частину рівності, змінивши його знак на протилежний. Одержимо правильну числову рівність $3b = b + 2$, з якої випливає, що $x = b$ є коренем рівняння (6). Ми довели, що довільний корінь рівняння (7) є коренем рівняння (6).

Отже, рівняння (6) і (7) мають одні й ті ж корені. •

Рівняння, які мають одні й ті ж корені, називають *рівносильними*. Отже, рівняння (6) і (7) є рівносильними.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розв'язати рівняння $\frac{1}{7}(x-8) = \frac{1}{14}(3x-31)$.

• Помноживши обидві частини рівняння на 14, матимемо:

$$14 \cdot \frac{1}{7}(x-8) = 14 \cdot \frac{1}{14}(3x-31); \quad 2(x-8) = 3x-31; \quad 2x-16 = 3x-31;$$

$$2x-3x = -31+16; \quad -x = -15; \quad x = 15.$$

Відповідь. 15. •

Приклад 2. Розв'язати рівняння $25(z - 3) + 100z = 125$.

• Поділивши обидві частини рівняння на 25, матимемо:

$$z - 3 + 4z = 5; \quad 5z = 5 + 3; \quad 5z = 8; \quad z = 1,6.$$

Відповідь. 1,6. •

Усно

23. Назвіть властивість рівнянь, на основі якої здійснено перехід від першого рівняння до другого:

а) $2x - 5 = 1; \quad 2x = 1 + 5;$

б) $3x + 2 = 5x + 4; \quad 3x - 5x = 4 - 2;$

в) $2(x - 2) = x; \quad 2x - 4 = x;$

г) $\frac{1-4x}{3} = x; \quad 1 - 4x = 3x.$

24. Обидві частини рівняння $x(x - 1) = 2x$ поділили на x й одержали рівняння $x - 1 = 2$. Чи мають ці рівняння одні й ті ж корені? Чи можна, розв'язуючи рівняння $x(x - 1) = 2x$, ділити обидві його частини на x ?

25. Поясніть кожний крок розв'язання рівняння:

а) $3(x - 2) = 5x + 4$

$$3x - 6 = 5x + 4$$

$$3x - 5x = 4 + 6$$

$$-2x = 10$$

$$x = 10 : (-2)$$

$$x = -5;$$

б) $\frac{1+2x}{3} = 4 + x$

$$3 \cdot \frac{1+2x}{3} = 3(4 + x)$$

$$1 + 2x = 12 + 3x$$

$$2x - 3x = 12 - 1$$

$$-x = 11$$

$$x = -11.$$

Рівень А



Розв'яжіть рівняння:

26. а) $7x - 4 = 3x - 9;$

б) $2x + 3(x + 1) = 8.$

27. а) $8x + 4 = 3x + 4;$

б) $4(x - 3) = x.$

28. а) $30(x + 2) = 15(x - 2);$

б) $200(x - 1) = 300.$

29. а) $161(2x + 2) = 161x;$

б) $50(x + 3) = 250(x + 1).$

30. а) $\frac{2}{7}x = 4;$

б) $\frac{1}{60}(x + 1) = \frac{1}{30};$

в) $\frac{1}{3}(x - 2) = x.$

31. а) $\frac{1}{4}x = 3;$

б) $\frac{1}{15}(x - 5) = 1;$

в) $x - 1 = \frac{1}{3}x.$

Рівень Б



Розв'яжіть рівняння:

32. а) $200(x-5) = 100(x+1) + 500$; б) $350x + 250(5x-4) - 800 = 0$;

в) $\frac{1}{30}(2x-5) + \frac{7}{30} = \frac{17}{30}x$; г) $\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)(x+1) = \frac{1}{12}$.

33. а) $210(x-12) + 140(x+18) = 70$; б) $\frac{2}{15}(1-x) - \frac{4}{15}(1+x) = \frac{7}{15}$.

34. а) $\frac{x-1}{12} = \frac{2x+1}{6}$; б) $\frac{1-3x}{21} = \frac{x+5}{14}$.

35. а) $\frac{3x+1}{24} = \frac{1-x}{8}$; б) $\frac{3+x}{15} = \frac{2x+3}{25}$.

Рівень В



36. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = (x+1)(x+2)(x+3)(x+5)$;

б) $\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{4}$.

Вправи для повторення

37. Знайдіть значення виразу:

а) $2(a+1) - 4(a-2)$, якщо $a = -0,1$;

б) $1,4x - (1 + 0,7x) - (3,3x - 2)$, якщо $x = 2,25$;

в) $-2(a+b-2) - a + 2b - 4$, якщо $a = 3$; $b = -1$.

38. У сьомих класах навчається 84 учні, що становить $\frac{2}{21}$ усіх учнів школи. Скільки всього учнів у школі?

39. У місті зараз проживає 52 000 жителів. Відомо, що населення цього міста щороку збільшується на 4%.

а) Скільки жителів буде в місті через рік?

б) Скільки жителів було в місті рік тому?

3. Лінійні рівняння з однією змінною

Розглянемо рівняння:

$$2x = -4; \quad -1,7x = 5,1; \quad \frac{2}{3} \cdot x = 0; \quad 0x = 2,4.$$

Ліва частина кожного із цих рівнянь є добутком деякого числа й змінної, а права частина — деяким числом. Такі рівняння називають *лінійними* рівняннями з однією змінною.

Означення

Рівняння виду $ax = b$, у якому a і b — деякі відомі числа, а x — змінна, називають лінійним рівнянням з однією змінною.

Числа a і b називають *коефіцієнтами* лінійного рівняння.

Коли, розв'язуючи рівняння, виконують певні перетворення, зводячи дане рівняння до більш простого, то в багатьох випадках отим «простим» рівнянням є саме лінійне рівняння.

З'ясуємо, скільки коренів може мати лінійне рівняння. Для цього розглянемо спочатку такі три рівняння:

$$1) 3x = 2; \quad 2) 0x = 2; \quad 3) 0x = 0.$$

1) Щоб розв'язати рівняння $3x = 2$, досить обидві його частини поділити на 3. Одержимо один корінь: $x = \frac{2}{3}$.

2) У рівнянні $0x = 2$ значення лівої частини дорівнює 0 для будь-якого числа x . Права ж частина рівняння відмінна від нуля. Отже, дане рівняння коренів не має.

3) Рівність $0x = 0$ є правильною для будь-якого числа x . Тому коренем рівняння $0x = 0$ є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

У загальному випадку для лінійного рівняння $ax = b$ матимемо:

якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний корінь $x = \frac{b}{a}$;

якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то рівняння коренів не має;

якщо $a = 0$ і $b = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число (рівняння має безліч коренів).

Підсумок: кількість коренів лінійного рівняння

	Коефіцієнти	Корені
$ax = b$ — лінійне рівняння	$a \neq 0$	$\frac{b}{a}$ — єдиний корінь
	$a = 0$ і $b \neq 0$	коренів немає
	$a = 0$ і $b = 0$	коренем є будь-яке число (рівняння має безліч коренів)

Для тих, хто хоче знати більше



Рівняння з модулями

Нагадаємо, що модулем додатного числа й числа 0 є це саме число, модулем від'ємного числа є протилежне йому число:

$$|a| = a, \text{ якщо } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ якщо } a < 0.$$

Так, $|1,4| = 1,4$; $|0| = 0$; $|-2| = 2$. Модуль будь-якого числа x є невід'ємним числом, тобто $|x| \geq 0$.

Рівняння $|x| = 3$, $|x - 5| = 1$, $|2x - 3| = 0$, $|x| + 3x = 1$ містять змінну під знаком модуля. Такі рівняння називають *рівняннями з модулем*.

Рівняння виду $|x| = a$. Розв'язуючи рівняння виду $|x| = a$, де a — деяке відоме число, можна використовувати геометричний зміст модуля числа: модуль числа x — це відстань від початку відріку до точки, що зображує число x на координатній прямій.

Розглянемо рівняння $|x| = 2$. На координатній прямій існують дві точки, розміщені на відстані 2 одиниці від початку відріку. Це точки, що відповідають числам 2 і -2 (рис. 1). Тому рівняння $|x| = 2$ має два корені: 2 і -2 .



Рис. 1

Рівняння $|x| = 0$ має один корінь — число 0, а рівняння $|x| = -2$ не має коренів (модуль будь-якого числа x є невід'ємним числом і не може дорівнювати -2).

У загальному випадку рівняння $|x| = a$:

має два корені a і $-a$, якщо $a > 0$;

має один корінь 0, якщо $a = 0$;

не має коренів, якщо $a < 0$.

Розв'язування рівнянь з модулями, виходячи з означення модуля числа.

Розв'яжемо рівняння

$$|x| + 3x = 4. \tag{1}$$

Це рівняння не можна звести до вигляду $|x| = a$, де a — деяке число. Для його розв'язання розглянемо два випадки.

1. Якщо x — невід'ємне число ($x \geq 0$), то $|x| = x$ і рівняння (1) набуває вигляду $x + 3x = 4$, звідки $x = 1$. Число 1 — невід'ємне (задовольняє нерівність $x \geq 0$), тому воно є коренем рівняння (1).

2. Якщо x — від'ємне число ($x < 0$), то $|x| = -x$ і рівняння (1) набуває вигляду $-x + 3x = 4$, звідки $x = 2$. Число 2 не є від'ємним (не задовольняє нерівність $x < 0$), тому воно не є коренем рівняння (1).

Отже, рівняння $|x| + 3x = 4$ має один корінь $x = 1$.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розв'язати рівняння $5(2x - 1) = 4x - 23$.

• $10x - 5 = 4x - 23$; $10x - 4x = -23 + 5$; $6x = -18$; $x = -3$.

Відповідь. -3 . •

Приклад 2. Розв'язати рівняння $3x - 4 = 3(x - 2)$.

• $3x - 4 = 3x - 6$; $3x - 3x = -6 + 4$; $0x = -2$ (або $0 = -2$).

Відповідь. Рівняння коренів не має. •

Приклад 3. Розв'язати рівняння $3x - 2(x - 1) = x + 2$.

• $3x - 2x + 2 = x + 2$; $3x - 2x - x = 2 - 2$; $0x = 0$ (або $0 = 0$).

Відповідь. Коренем рівняння є будь-яке число. •

Приклад 4. Розв'язати рівняння $\frac{2x-1}{18} = \frac{x}{12} + \frac{1}{9}$.

• Помноживши обидві частини рівняння на 36 (36 — найменше спільне кратне знаменників дробів), матимемо:

$$36 \cdot \frac{2x-1}{18} = 36 \cdot \left(\frac{x}{12} + \frac{1}{9} \right); \quad 2(2x-1) = 3x+4; \quad 4x-2 = 3x+4;$$

$4x-3x = 4+2; \quad x = 6.$

Відповідь. 6. •

Підсумок. Розв'язуючи рівняння, варто дотримувати таких кроків:

1. Якщо у рівнянні є вирази з дробовими коефіцієнтами, то помножити обидві його частини на найменший спільний знаменник дробів.

2. Розкрити дужки.

3. Перенести всі доданки, які містять змінну, в одну частину рівняння (як правило, в ліву), а доданки, які не містять змінної, — в іншу частину (в праву).

4. Звести подібні доданки.

5. Поділити обидві частини рівняння на коефіцієнт біля змінної, якщо він відмінний від нуля. Якщо ж він дорівнює 0, то рівняння або не має коренів, або його коренем є будь-яке число.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $|5x - 3(x + 2) + 3| = 3$.

• $|5x - 3x - 6 + 3| = 3$; $|2x - 3| = 3$.

Якщо модуль числа дорівнює 3, то цим числом є 3 або -3. Тому можливі два випадки:

1) $2x - 3 = 3$; $2x = 6$; $x = 3$; 2) $2x - 3 = -3$; $2x = 0$; $x = 0$.

Відповідь. 3; 0. •

Приклад 6. Розв'язати рівняння $2|z| - 3 = 5$.

• $2|z| - 3 = 5$; $2|z| = 8$; $|z| = 4$; $z = 4$ або $z = -4$.

Відповідь. -4; 4. •

Усно															
-------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

40. Які з даних рівнянь є лінійними рівняннями?

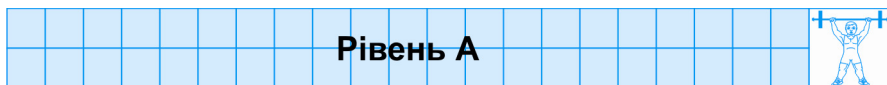
а) $\frac{2}{9} \cdot x = 8$;

б) $4 : x = 2$;

в) $-2,7y = 0$;

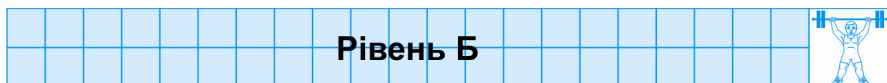
г) $\frac{4}{z} = \frac{2}{5}$.

41. Скільки коренів має рівняння:
 а) $56x = 64$; б) $0x = -2$; в) $8x = 0$; г) $0y = 0$?
42. Розв'яжіть лінійне рівняння:
 а) $6x = 42$; б) $4x = -12$; в) $-3y = 6$; г) $-5z = -45$;
 д) $3x = -2$; е) $0y = -4$; є) $0x = 0$; ж) $-2x = 0$.



Розв'яжіть рівняння:

43. а) $36x = -54$; б) $0,04z = 1,4$; в) $2y = -\frac{2}{3}$;
 г) $-1,2x = -0,09$; д) $-3,86t = 7,913$; е) $\frac{4}{15}x = -\frac{2}{5}$;
 є) $2\frac{1}{4}s = 1\frac{7}{8}$; ж) $-2,5x = -\frac{1}{6}$; з) $3\frac{5}{9}y = 0,6$.
44. а) $5x - 3 = 17$; б) $7x + 32 = 12x + 25$; в) $4 - 3y = 6y + 22$;
 г) $4,5z + 1 = 7z + 2,5$; д) $-1,2t - 2 = t - 0,9$; е) $-1,74x + 7,92 = -1,08x$;
 є) $4y + 1 = -1 + 4y$; ж) $0,77x = 1,65 + 1,1x$; з) $-16,8x - 3 = 6x + 2,7$.
45. а) $56x = -196$; б) $8x = -8 + 12x$; в) $1,15 - 3z = 2,5$;
 г) $2y - 18 = -3y + 67$; д) $6x + 2 = 20x - 5$; е) $4,5x + 1 = 2 + 4,5x$;
 є) $8 - 1,2z = -6z + 152$; ж) $4,02t - 1 = 1,52t$; з) $1,7x + 2,04 = -6,8x$.
46. а) $6(x - 2) = 2x$; б) $3(2x + 1) = 7x$; в) $1 - (3x + 1) = 2x$;
 г) $-2(2x - 4) = -3$; д) $2(x + 5) = 2(x - 4)$; е) $-3(10 - 2x) = 6x - 30$.
47. а) $8x - 7 = 3(x - 4)$; б) $-(3x + 1) = 3(3 - x)$; в) $6x - 2 = -2(1 - 3x)$.



Розв'яжіть рівняння:

48. а) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$; б) $8(-3x + 4) + 14(3 + 2x) = 4 + 2x$;
 в) $-5(4x + 3) + 3x = -12(x - 3)$; г) $0,5x = 0,1(2x - 5) + 1,7$.
49. а) $3,5(x - 3) - 0,7(7 - x) = -7$; б) $0,4(2x - 7) + 1,2(3x + 0,7) = 1,6x$;
 в) $5(4(x + 1) - 9x) = 25(x + 1)$; г) $0,8(2,2(x - 1) - 1) - 1,4x = -0,4$.
50. а) $5(3x - 6) + 4(3 - 2x) = 5x - 8$; б) $9(x - 3) - 4(7 - 3x) - 5 = -3x$;
 в) $-0,3(8 - 4x) = 0,6(x - 3) + 0,9$; г) $2(-0,9x + 1,4) + 1,4(1,5 + x) = x$;
 д) $40(5x - 8(x - 1)) = 160(x + 9)$; е) $12 + 3(2(x - 1) - 4) = 6(x + 1)$.
51. Знайдіть значення x , для яких значення виразів $2x - 3$ і $-3 + 7x$ дорівнюють одне одному.

52. Знайдіть значення x , для яких значення виразу $25x - 30$ на 5 менше від значення виразу $15x + 15$.
53. Знайдіть значення x , для яких значення виразу $4x + 6$ у 6 разів більше від значення виразу $6x - 15$.

Розв'яжіть рівняння:

54. а) $\frac{5}{12} + \frac{x}{6} = \frac{x}{4} + \frac{1}{3}$; б) $\frac{x-1}{5} + \frac{x-2}{3} = 2 - \frac{x-2}{15}$;
 в) $-\frac{2x+1}{6} + \frac{2-11x}{9} = \frac{2}{3} - \frac{x-3}{2}$; г) $\frac{2x-1}{8} + \frac{3x-2}{4} - \frac{2x-3}{2} = \frac{7}{8}$.
55. а) $2\frac{5}{6} - \frac{3}{8}x = \frac{1}{4}x + 3\frac{1}{3}$; б) $2\left(3\frac{3}{4} - 2x\right) + 2,5 = 1\frac{2}{9} - \left(-x + \frac{2}{3}\right)$;
 в) $5y - 4\frac{2}{7}\left(2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{6}\right) = 3\frac{1}{3}$; г) $2\frac{3}{8}\left(\frac{1}{3} - 3x\right) + \frac{5}{8}\left(\frac{1}{3} - 3x\right) = 1$.
56. а) $\frac{x+1}{6} + \frac{2-x}{8} = \frac{1}{4} + \frac{x-3}{12}$; б) $\frac{x}{2} - \frac{x+3}{3} - \frac{x-3}{4} = \frac{x}{6}$;
 в) $2\left(\frac{5}{6} - \frac{3}{4}x\right) = \frac{1}{5}x + 4\frac{1}{3}$; г) $2\frac{2}{5}\left(\frac{5}{6} - 2x\right) - \left(5\frac{1}{6} - \frac{4}{5}x\right) = 1\frac{5}{6}$.
57. а) $|x| = 5$; б) $|x| = -6$; в) $|x| = 0$;
 г) $|2x - 7| = 11$; д) $|15 - 4x| = 5$; е) $|7x - 2| = 0$.
58. а) $|x| + 3 = 7$; б) $3|x| = 6$; в) $|x| + 8 = 3$.
59. а) $|3x| = 12$; б) $|x - 3| = 8$; в) $|x + 2| = -2$;
 г) $|x - 7| = 0$; д) $2|x| - 1 = 5$; е) $5 - |x| = -11$.

Рівень В



Розв'яжіть рівняння:

60. а) $200(2(2(x-1) - 1) - 1) = -600$; б) $\frac{4}{5}\left(\frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2} - x\right) - x\right) - x\right) - x = 1$.
61. а) $|2(x-3) - (x+4)| = 2$; б) $|5x - 4(2x+3)| = 6$;
 в) $2(|x| - 3) - 4(2|x| + 9) = -48$; г) $|2x - 1| - 4(1 - |2x - 1|) = 6$.
62. а) $3x + |x| = 20$; б) $5|x| + x = 12$; в) $|x| + x = 8$;
 г) $x - |x| = 12$; д) $x + |x| = 0$; е) $x - |x| = 0$.
63. а) $|x| + x^2 = 0$; б) $x^2 + |x| = -7$; в) $|x| + |2x| + 4 = 0$.
64. У рівнянні $ax = 4389$ коефіцієнт a є трицифровим числом виду $**1$. Розв'яжіть це рівняння, якщо відомо, що його коренем є натуральне число.

Вправи для повторення

65. Обчисліть:

а) $\left(3\frac{3}{8} - 2\frac{5}{12}\right) \cdot 1\frac{2}{5}$;

б) $1,2 \cdot (-0,94) + 1,2 \cdot (-1,56) + 2 : \frac{5}{6}$.

66. З міст A і B одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі й зустрілися через 1,5 год. Швидкість одного автомобіля дорівнює a км/год, а іншого — b км/год. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами.

67. Легковий автомобіль наздоганяє вантажний. Швидкість легкового автомобіля дорівнює a км/год, а вантажного — b км/год. Запишіть у вигляді виразу відстань між автомобілями за 0,2 год до зустрічі.

68. Швидкість катера у стоячій воді (ще кажуть: власна швидкість катера) дорівнює a км/год, а швидкість течії річки — b км/год. Запишіть у вигляді виразу відстань, яку пропливе катер, рухаючись 2 год за течією річки і 3 год проти течії.

69. З кошика взяли 3 яблука, потім — третину решти яблук і ще 3 яблука. Після цього в кошику залишилася половина початкової кількості яблук. Скільки яблук було в кошику спочатку?

4. Розв'язування задач за допомогою рівнянь

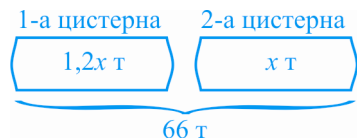
Розв'язуючи задачі за допомогою рівнянь, здебільшого дотримуються такої схеми:

- 1) вибирають невідоме й позначають його буквою x (або якою-небудь іншою буквою);
- 2) використовуючи умову задачі, складають рівняння;
- 3) розв'язують рівняння і відповідають на поставлені в задачі запитання.

Розглянемо приклади.

Задача 1. У двох цистернах зберігається 66 т бензину, до того ж, у першій бензину в 1,2 разу більше, ніж у другій. Скільки бензину в кожній цистерні?

• Нехай у другій цистерні є x т бензину, тоді в першій — $1,2x$ т. У двох цистернах разом є $(1,2x + x)$ т бензину, що за умовою дорівнює 66 т. Маємо рівняння:



$$1,2x + x = 66.$$

Розв'яжемо це рівняння: $2,2x = 66$; $x = 66 : 2,2$; $x = 30$.

Отже, у другій цистерні є 30 т бензину, а в першій — $1,2 \cdot 30 = 36$ (т).

Відповідь. 36 т, 30 т. •

Зауваження. Щоб розв'язати задачу 1, можна міркувати й так. Нехай у другій цистерні є x т бензину, тоді в першій — $(66 - x)$ т. У першій цистерні бензину в 1,2 разу більше, ніж у другій, тому $66 - x = 1,2x$. Далі залишається розв'язати це рівняння і записати відповідь до задачі.

Задача 2. З міста A до міста B виїхав вантажний автомобіль. Через 30 хв назустріч йому з міста B виїхав легковий автомобіль, швидкість якого на 25 км/год більша, ніж швидкість вантажного. Автомобілі зустрілися через 1,3 год після виїзду вантажного автомобіля з міста A . Знайти відстань між містами, якщо за весь час руху вантажний автомобіль проїхав на 10 км більше, ніж легковий.

• Нехай швидкість вантажного автомобіля дорівнює x км/год, тоді швидкість легкового — $(x + 25)$ км/год.

До моменту зустрічі вантажний автомобіль був у дорозі 1,3 год, а легковий на 30 хв = 0,5 год менше: $1,3 \text{ год} - 0,5 \text{ год} = 0,8 \text{ год}$. За 1,3 год вантажний автомобіль проїхав $1,3x$ км, а легковий за 0,8 год — $0,8(x + 25)$ км. Оскільки вантажний автомобіль проїхав на 10 км більше, ніж легковий, то різниця шляхів $1,3x$ км і $0,8(x + 25)$ км дорівнює 10 км.

	Швидкість, км/год	Час, год	Шлях, км
Вантажний автомобіль	x	1,3	$1,3x$
Легковий автомобіль	$x + 25$	0,8	$0,8(x + 25)$

Маємо рівняння: $1,3x - 0,8(x + 25) = 10$.

Розв'яжемо це рівняння:

$$1,3x - 0,8x - 20 = 10; \quad 0,5x = 30; \quad x = 60.$$

Отже, швидкість вантажного автомобіля дорівнює 60 км/год.

Відстань між містами дорівнює сумі відстаней, які проїхали обидва автомобілі, тобто $(1,3x + 0,8(x + 25))$ км. Оскільки $x = 60$, то матимемо:

$$1,3x + 0,8(x + 25) = 1,3 \cdot 60 + 0,8 \cdot (60 + 25) = 78 + 68 = 146 \text{ (км)}.$$

Відповідь. 146 км. •

Примітка. Спираючись на розв'язання задач 1 і 2, проаналізуємо перші два кроки наведеної вище схеми розв'язування задач за допомогою рівнянь.

1) *Вибір невідомого*, яке ми позначали буквою, у розв'язаннях цих задач був різний. У задачі 1 ми позначили через x т одну з шуканих величин (масу бензину в другій цистерні). У задачі 2 шуканою величиною є відстань між містами. Якщо цю величину позначити через x км, то при складанні рівняння доведеться провести доволі складні міркування. Ми ж через x км/год позначили невідому швидкість вантажного автомобіля, виразили через x шляхи, які проїхали автомобілі, й склали рівняння, знаючи, що різниця шляхів дорівнює 10 км.

82. Перший велосипедист долає шлях між двома селами за 36 хв, а другий — за 45 хв. Швидкість першого велосипедиста більша від швидкості другого на 4 км/год. Знайдіть швидкість кожного велосипедиста і відстань між селами.

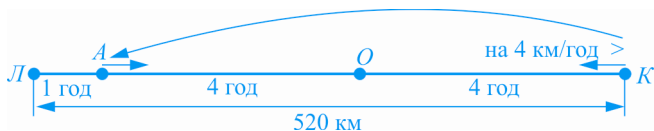


83. З Чернівців одночасно виїхали два автомобілі й одночасно приїхали до Житомира. Перший автомобіль їхав зі сталою швидкістю. Другий же автомобіль перші 2 год їхав зі швидкістю на 12 км/год меншою, а решту 3 год — зі швидкістю, в 1,1 разу більшою від швидкості першого автомобіля. Знайдіть відстань між містами.
84. З міста A до міста B одночасно виїхали автомобіль і мотоцикліст. Коли через 2,5 год автомобіль прибув до міста B , мотоциклісту до цього міста залишалось проїхати ще 75 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість автомобіля в 1,6 разу більша від швидкості мотоцикліста.
85. Човен проплив шлях між двома пристанями за течією річки за 1,2 год, а на зворотний шлях затратив 1,5 год. Знайдіть відстань між пристанями, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 22,5 км/год.
86. Від пристані A до пристані B за течією річки катер плыв 3 год, а від B до A — 4 год. Знайдіть швидкість катера у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 3 км/год.



87. Автомобіль мав подолати шлях завдовжки 140 км за 2 год. Деяку частину шляху він проїхав зі швидкістю 60 км/год, а решту шляху — зі швидкістю 75 км/год. Скільки кілометрів проїхав автомобіль зі швидкістю 60 км/год, якщо відомо, що до місця призначення він прибув вчасно?
88. Зі Львова до Києва, відстань між якими дорівнює 520 км, вийшов поїзд, а через годину назустріч йому з Києва вийшов другий поїзд, який проходить за годину на 4 км більше, ніж перший. Поїзди зустрілися через 4 год після відходу другого поїзда з Києва. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

Вказівка. Розв'язуючи задачу, використайте схему:



97. У двох бідонах є 70 л молока. Коли 12,5% молока, що було в першому бідоні, перелили у другий, то в обох бідонах молока стало порівну. Скільки літрів молока було в кожному бідоні спочатку?
98. Сплав міді, цинку й олова містить 32% олова, а міді — на 40 г менше, ніж олова. Відомо також, що цинку в сплаві на 100 г більше, ніж міді. Знайдіть масу сплаву.
99. У процесі очищення руди кількість домішок у ній зменшується від 20% у добутій руді до 5% в очищеній. Скільки потрібно взяти добутої руди, щоб одержати 32 т очищеної?

Вправи для повторення

100. Запишіть:
- суму числа m і числа, протилежного числу n ;
 - різницю числа s і числа, протилежного числу $-t$;
 - добуток найбільшого від'ємного цілого числа і суми чисел a та b .
101. До частки чисел $-1,8$ і $-1,3$ додайте добуток чисел $4,8$ і $-1,05$.
102. Знайдіть значення виразу $2x^2 - 4y^2$, якщо x дорівнює найменшому цілому числу, яке задовольняє нерівність $-5,4 < x < -2,7$, а y — найбільшому цілому числу, яке задовольняє нерівність $-15,4 \leq y \leq -2$.
103. Поставте замість зірочок такі цифри, щоб число:
- $1*48$ ділилося на 9;
 - $3*4*$ ділилося на 3 і на 5.
104. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:
- $x - (x - 1) + (x + 1)$;
 - $2(1,5a - 2(a - 1,5))$;
 - $2(a + 2b + 3c) - (a + 3b + 5c) - (a + b + c)$.
105. Оленка має фломастери шести кольорів. Скількома способами вона може написати число 2002 так, щоб різні цифри мали різний колір, а однакові цифри — однаковий колір?

Цікаво знати



Протягом багатьох століть алгебра була наукою про рівняння та способи їх розв'язування. Лінійні рівняння вміли розв'язувати ще давні єгиптяни й вавилоняни (I тис. до н.е.).

Про стан математики в Давньому Єгипті можна дізнатися з математичних текстів, написаних на особливому папері — папірусі, виготовленому зі стебел рослини, яка має таку ж назву. Написання деяких папірусів відносять

до XVIII ст. до н. е., хоча описані в них математичні факти були відомі давнім єгиптянам задовго до їх написання.

Один з таких папірусів був знайдений у 1872 році в одній з єгипетських пірамід. Його придбав англійський колекціонер предметів старовини Райнд і зараз цей папірус — папірус Райнда — зберігається в Лондоні.

У папірусі Райнда особливе місце посідають задачі на «аха» («хау»). Це задачі, які розв'язуються за допомогою лінійних рівнянь з одним невідомим. «Аха» («хау») означає «сукупність», «купу» (невідому величину).

Приклад такої задачі: «Купа. Її $\frac{2}{3}$, її $\frac{1}{2}$, її $\frac{1}{7}$ і її ціле. Це 33». Якщо позначити «купу» — невідому величину — через x , то за цією задачею одержимо рівняння: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x + x = 33$.

Більш помітні успіхи у створенні початків алгебри були досягнуті в Давньому Вавилоні. До нашого часу збереглися вавилонські глиняні плитки з комбінаціями клиновидних рисочок — клинописи. Ці плитки відігравали у Вавилоні таку ж роль, як папіруси в Єгипті. На плитках трапляються і клинописні математичні тексти, які свідчать, що уже близько 4000 років тому у Вавилоні могли розв'язувати рівняння, що містять квадрат невідомого.



Діофант (III ст.),
давньогрецький математик
з Александрії

Починаючи із VII ст. до н. е., давні греки, ознайомившись з досягненнями єгиптян і вавилонян в галузі математики, продовжили їх науку. Проте доволі мало грецьких вчених для розв'язання задач використовували рівняння. Одним із тих, хто використовував рівняння, був давньогрецький математик **Діофант**.

Про Діофанта відомо небагато, навіть точно не встановлено роки його життя. Дещо про життя Діофанта та про те, скільки він прожив років, можна судити з напису на його могильній плиті.

Напис на плиті	Мовою алгебри
Подорожній! Поховано тут Діофанта. І числа розкажуть тобі, Який довгий шлях він життєвий пройшов.	x
Шосту частину його життя становило веселе дитинство.	$\frac{x}{6}$
Минула частина дванадцята — Й пухом покрилося його підборіддя.	$\frac{x}{12}$
Сьому — в бездітному шлюбі прожив Діофант.	$\frac{x}{7}$
Минуло п'ять літ.	5
Ощасливлений він був народженням первістка-сина, Якому судилася лише половина життя його батька.	$\frac{x}{2}$
І в глибокій журбі Старець закінчив свій шлях на Землі, Де прожив років чотири з часу, Коли сина не стало.	4
Скажи: віку якого досягши, Славетний помер Діофант?	$x = \frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4.$

Грецьку науку в середні віки перейняли вчені Сходу — індійці та араби. Саме на Сході в IX ст. алгебра стає самостійною математичною наукою.

Походження слова «алгебра» також пов'язане зі Сходом.

Місто Багдад у VII–IX ст. було столицею могутнього Арабського халіфату. Багдадські халіфи сприяли розвитку природничих і математичних наук. За панування халіфа Гаруна ал-Рашида в Багдаді була заснована велика бібліотека, а халіф ал-Мамун організував своєрідну академію — «Будинок мудрості» й побудував добре обладнану обсерваторію.

При дворі ал-Мамуна жив і працював учений **Мухаммед бен Муса ал-Хорезмі** (близько 780 — близько 850). Він зібрав та систематизував способи розв'язування рівнянь й описав їх у роботі «Кітаб ал-джебр ал-мукабала», що дослівно означає «Книга про відновлення і протиставлення». У той час від'ємні числа вважались «несправжніми», і коли в процесі розв'язування рівняння в якійсь його частині з'являлось від'ємне число, його потрібно було перенести в іншу частину. Цю операцію називали відновленням (ал-джебр), тобто переведенням «несправжніх» (від'ємних) чисел у «справжні» (додатні). За допомогою протиставлення (ал-мукабала) відкидали однакові доданки в обох частинах рівняння.

У XII ст. твір ал-Хорезмі переклали латинською мовою, зберігши в його назві лише слово «ал-джебр», яке згодом стали вимовляти як *алгебра*.

Поступово сформувалася сучасна алгебра, яка охоплює не тільки теорію розв'язування рівнянь, а й способи проведення операцій (дій) з різноманітними об'єктами (зокрема, із числами).



Мухаммед бен Муса ал-Хорезмі (IX ст.),

арабський математик,
астроном і географ.

Уперше розглядає алгебру
як самостійний розділ
математики

Запитання і вправи для повторення § 1

1. Наведіть приклади рівнянь.
2. Що називають коренем рівняння? Чи є число 4 коренем рівняння $3x - 2 = x + 6$?
3. Що означає розв'язати рівняння?
4. Сформулюйте властивості рівнянь.
5. Дайте означення лінійного рівняння. Наведіть приклад лінійного рівняння.
6. Скільки коренів може мати лінійне рівняння?

106. Доведіть, що число 2,5 є коренем рівняння:

а) $3x - 5 = x$;

б) $x(x - 0,5) = 4x - 5$.

107. Яке з чисел -2 ; $-1,2$; $1,8$ є коренем рівняння $5x - 3 = 10x + 3$?

108. Скільки коренів має рівняння:

а) $\frac{3}{7}x = 12$; б) $\left(\frac{3}{5} - 0,6\right)x = 1$; в) $0(x + 3) = 0$?

Розв'яжіть рівняння:

109. а) $2x - 3 = 5(x - 3)$;

б) $12(x - 1) = 24(x + 1)$;

в) $0,6(2x - 3) - 1,5(x + 4) = -4,2x$; г) $2(3 - 2(x + 1)) = 6(2 - x)$;

д) $-6(2x + 5) + 2(x + 3) = 2$;

е) $24(x - 3) + 18(x - 2) = 30(3x - 10)$.

110. а) $\frac{5}{36} + \frac{1}{18}x = \frac{7}{36}x - \frac{5}{9}$;

б) $\frac{3-x}{12} - \frac{5+x}{6} = \frac{x}{3}$.

111*. а) $2|x| + 0,2 = \frac{1}{7}$;

б) $3 - 2(1 - 2|x|) = 11 - |x|$.

112*. а) $|x - 2| = 2$;

б) $3|2x + 1| - 7 = 2$.

113*. а) $5x - 2|x| = 21$;

б) $2(|x| - 5) = 3x - 7$.

114*. Знайдіть таке число a , щоб коренем рівняння $2x + 3(a - 1) = 5$ було число 4.

115*. Чи існує число k , для якого рівняння $(k - 2)x + 2 = k$ не має коренів?

116. Периметр прямокутника дорівнює 48 см, його довжина втричі більша від ширини. Знайдіть площу прямокутника.

117. Периметр трикутника дорівнює 30 см. Знайдіть довжину кожної сторони трикутника, якщо перша його сторона на 4 см коротша від другої, а друга — в 1,2 разу довша від третьої.

118. Трактор зорав поле за 3 дні. За перший день було зорано 35% площі поля, за другий — на 4 га менше, ніж за перший, а за третій день — 25 га. Знайдіть площу поля.

119. Теплохід пройшов шлях завдовжки 90 км. Деяку частину цього шляху теплохід йшов зі швидкістю 30 км/год, а решту — зі швидкістю 25 км/год. Який шлях пройшов теплохід зі швидкістю 30 км/год, якщо на весь шлях він затратив 3,5 год?

120*. Туристу треба пройти шлях від села до станції завдовжки 10 км. Коли він вийшов із села, до відходу поїзда, на який він поспішав, залишалося 3 год. Долаючи 3 км за годину, турист зрозумів, що запізнюється на поїзд, і пішов зі швидкістю 4 км/год. На станцію він прийшов за 12 хв до відходу поїзда. Скільки часу рухався турист зі швидкістю 3 км/год?

- 121*. Є два сплави міді й олова; перший містить 40% міді, а другий — 60%. Скільки потрібно взяти кожного сплаву, щоб одержати 10 кг нового сплаву, який містив би 54% міді?
- 122*. За першу поїздку автомобіль витратив 25% бензину, що був у баку, за другу — на 40% менше, ніж за першу. Після цього в баку залишилося бензину на 8 л більше, ніж було витрачено за обидві поїздки. Скільки літрів бензину було в баку спочатку?

Завдання для самоперевірки № 1

Рівень 1

1. Яке з чисел є коренем рівняння $4x + 2 = 10$?
- а) 1; б) -2 ; в) 2; г) 3.
2. Скільки коренів має рівняння $(x - 2)(x + 2) = 0$?
- а) Один; б) два; в) безліч; г) коренів немає.
3. Які з даних рівнянь є лінійними рівняннями?
- а) $\frac{1}{3}x = 2$; б) $y^2 = 4$; в) $2 : x = 3$; г) $-2y = 0$.
4. Розв'яжіть рівняння $7y - 3 = 3y + 5$ та вкажіть правильну відповідь:
- а) -2 ; б) 2; в) 0,8; г) 0,5.
5. Книжка й альбом коштують 6 грн., до того ж, книжка в 4 рази дорожча від альбому.
Яке з рівнянь треба скласти, щоб знайти ціну альбому (x — ціна альбому в гривнях)?
- а) $x + 6x = 4$; б) $6x - x = 4$; в) $x + 4x = 6$; г) $4x - x = 6$.

Рівень 2

6. Складіть лінійне рівняння, коренем якого є число 3.
7. Встановіть відповідність між рівнянням і кількістю коренів рівняння:
- | | |
|-----------------------|--------------------|
| а) $7x = 1$; | 1) один корінь; |
| б) $0 \cdot x = -2$; | 2) безліч коренів; |
| в) $2x = 0$; | 3) коренів немає. |
| г) $0 \cdot x = 0$; | |

8. Розв'яжіть рівняння:

а) $2(x - 3) = 5x - 9$;

б) $4 - 5(1 - 2x) = 1 - 6x$.

9. Швидкість велосипедиста на 10 км/год більша від швидкості пішохода. Відомо, що за 2 год велосипедист долає таку ж відстань, яку пішохід проходить за 6 год. Знайдіть швидкість пішохода.

Рівень 3

10. Чи мають рівняння $(x - 1)(x + 2) = 0$ і $x + 2 = 0$ одні й ті ж корені?

11. Розв'яжіть рівняння:

а) $160x + 560 = -160(3x - 1)$;

б) $\frac{2x-1}{15} = \frac{x+6}{40} - \frac{1-x}{10}$.

12. У двох сувоях є 81 м тканини, до того ж, у першому — на 70% більше, ніж у другому. Скільки метрів тканини у кожному сувої?

13. У першому резервуарі є 420 м^3 води, а у другому — 750 м^3 . З обох резервуарів почали одночасно випускати воду. З першого резервуара щогодини витікає 28 м^3 води, а з другого — 38 м^3 . Через скільки годин у першому резервуарі стане вдвічі менше води, ніж у другому?

Рівень 4

14. Доведіть, що рівняння $(x - 4)(x + 2) = 0$ і $|x - 1| = 3$ мають одні й ті ж корені.

15. Розв'яжіть рівняння:

а) $3\frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3} - x\right)\right) = \frac{5}{6}x$;

б) $2(|x| - 3) = 4|x| - 10$.

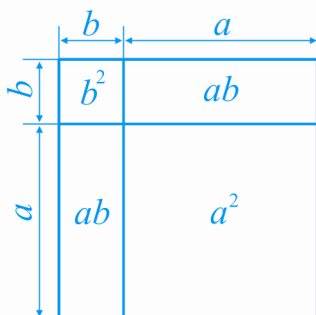
16. Екскаватор мав вирити траншею певної довжини. За перший день він вирив 30% довжини всієї траншеї, за другий — на 10% більше, ніж за перший, а за третій — решту 111 м. Знайдіть довжину траншеї.

17. Сплав міді й олова має масу 12 кг і містить 45% міді. Скільки кілограмів олова потрібно додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, який містив би 40% міді?

Розділ II. ЦІЛІ ВИРАЗИ

Розв'язування багатьох задач з математики, фізики, хімії пов'язане з необхідністю проводити певні перетворення виразів.

У даному розділі ми з'ясуємо, що таке вираз, цілий вираз, що таке тотожне перетворення виразу, вивчимо основні формули, на основі яких можна здійснювати перетворення виразів.



$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

§ 2. ЦІЛІ ВИРАЗИ

5. Вирази зі змінними. Цілі вирази

1. Вирази зі змінними. Розглянемо кілька задач.

Задача 1. Довжина прямокутної ділянки дорівнює 42 м, а ширина — на b м менша від довжини. Записати у вигляді виразу площу ділянки.

• Ширина ділянки дорівнює $(42 - b)$ м, а площа — $42(42 - b)$ м².

Відповідь. $42(42 - b)$ м². •

Вираз $42(42 - b)$ містить букву b і такий вираз ми називали *буквеним виразом*.

Букві b можна надавати різні значення, b може дорівнювати 0,8; 5; 7,2; 10 тощо, тобто значення b можна *змінювати*. Тому b називають *змінною*, а вираз $42(42 - b)$ — *виразом зі змінною*.

Задача 2. Довжина прямокутної ділянки дорівнює a м, а ширина — на b м менша від довжини. Записати у вигляді виразу площу ділянки.

• Ширина ділянки дорівнює $(a - b)$ м, а площа — $a(a - b)$ м².

Відповідь. $a(a - b)$ м². •

Букви a і b також можуть набувати різних значень, тому a і b — змінні, а вираз $a(a - b)$ — вираз із двома змінними.

Вираз зі змінними утворюють зі змінних, чисел, знаків дій і дужок. Виразом зі змінною вважають й окремо взяту змінну.

Якщо у вираз $42(42 - b)$ замість змінної підставити певне число, наприклад, число 12, то одержимо числовий вираз $42 \cdot (42 - 12)$, значення якого дорівнює: $42 \cdot (42 - 12) = 42 \cdot 30 = 1260$. Одержане число 1260 називають *значенням виразу* $42(42 - b)$ для значення змінної $b = 12$.

Значення виразу $a(a - b)$ для $a = 30$, $b = 7$ дорівнює:

$$30 \cdot (30 - 7) = 30 \cdot 23 = 690.$$

Розглянемо вираз зі змінною: $\frac{5}{a+4}$. Значення цього виразу можна знайти для будь-якого значення a , крім $a = -4$. Якщо $a = -4$, то дільник (знаменник) $a + 4$ дорівнює нулю, а на нуль ділити не можна. Кажуть, що для

$a \neq -4$ вираз $\frac{5}{a+4}$ має зміст, а для $a = -4$ він не має змісту.

2. Цілі вирази. Порівняємо вирази

$$a + b, \quad 7a, \quad \frac{1}{3}b, \quad a - \frac{c}{2}, \quad \frac{a-b}{5}$$

з виразами

$$\frac{7}{a}, \quad a : b, \quad b - \frac{a}{d+1}, \quad \frac{a+b}{c}.$$

Вирази першої групи не містять дії ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *цілими*.

Вирази другої групи містять дію ділення на вираз зі змінними. Такі вирази називають *дробовими*. Ми вивчатимемо їх у 8 класі. У 7 класі розглядатимемо тільки цілі вирази.

3. Формули. Вирази зі змінними використовують для запису формул. Наприклад:

$S = ab$ — формула для обчислення площі прямокутника;

$V = abc$ — формула для обчислення об'єму прямокутного паралелепіпеда.

Формулою $n = 2k$ (де k — ціле число) задаються парні числа, а формулою $n = 2k + 1$ — непарні числа.

Для тих, хто хоче знати більше



Формулами можна задати всі цілі числа, які при діленні на задане натуральне число дають одну й ту ж остачу.

Розглянемо спочатку приклад ділення двох натуральних чисел. Поділимо 48 на 5 з остачею:

$$\begin{array}{r} -48 \quad | \quad 5 \\ -45 \quad | \quad 9 \\ \hline \quad \quad 3 \end{array}$$

Одержали: 9 — неповна частка, 3 — остача.

Натуральні числа, не кратні числу 5, при діленні на 5 можуть дати в остачі 1, 2, 3 або 4. Числа, кратні числу 5, діляться (націло) на 5. Ще кажуть, що такі числа при діленні на 5 дають в остачі 0.

Поділивши 48 на 5, ми знайшли два числа 9 та 3 (неповну частку та остачу), використовуючи які число 48 можна записати у вигляді

$$48 = 5 \cdot 9 + 3.$$

Ділення будь-якого цілого числа на натуральне з остачею зводиться до знаходження подібної рівності.

Поділити ціле число m на натуральне число n з *остачею* означає знайти такі цілі числа k і r , щоб виконувалась рівність

$$m = nk + r, \quad \text{де } 0 \leq r < n.$$

За цих умов число k називають *неповною часткою*, а r — *остачею* від ділення m на n .

Остач від ділення цілих чисел на натуральне число n може бути n :

$$0, 1, 2, \dots, n-2, n-1.$$

Знайдемо для прикладу остачу від ділення числа -17 на число 3. Для цього запишемо число -17 у вигляді $-17 = 3k + r$, де k і r — цілі числа, до того ж, $0 \leq r < 3$. Щоб число r лежало в межах від 0 до 2, потрібно узяти $k = -6$. Тоді легко знайти, що $r = 1$. Маємо правильну рівність $-17 = 3 \cdot (-6) + 1$. Отже, число -17 при діленні на 3 дає в остачі 1.

Цілі числа при діленні на 3 можуть давати в остачі 0, 1 або 2. Відповідно до цього їх можна поділити на 3 групи.

Цілі числа	Остача при діленні на 3	Вид чисел
... -9; -6; -3; 0; 3; 6; 9; ...	0	$3k$
... -8; -5; -2; 1; 4; 7; 10; ...	1	$3k + 1$
... -7; -4; -1; 2; 5; 8; 11; ...	2	$3k + 2$

Отже, формулами $m = 3k$, $m = 3k + 1$ і $m = 3k + 2$, де k — довільне ціле число, задаються усі цілі числа, які при діленні на 3 дають в остачі відповідно 0, 1, 2. Про числа $m = 3k$ ще кажуть, що вони діляться (націло) на 3. Так, -9 ділиться на 3.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Записати у вигляді виразу:

- а) добуток числа a і суми чисел b та c ;
- б) частку різниці чисел m та n і числа 7;
- в) різницю числа a і добутку чисел m та n .
- а) $a(b + c)$; б) $(m - n) : 7$; в) $a - mn$. •

Зауваження. Читаючи словами числові вирази чи вирази зі змінними, першою називають останню по порядку виконання дію, далі передостанню і т. д.

Приклад 2. Знайти значення виразу $a^2(b + c)$, якщо $a = 4$, $b = -7$, $c = 2$.

- Якщо $a = 4$, $b = -7$, $c = 2$, то

$$a^2(b + c) = 4^2 \cdot (-7 + 2) = 16 \cdot (-5) = -80.$$

Відповідь. -80 . •

Приклад 3. Знайти значення виразу $(m + n)^2 - 3n$, якщо $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{3}$.

- Якщо $m = \frac{1}{6}$, $n = \frac{1}{3}$, то

$$(m + n)^2 - 3n = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{3} = \left(\frac{1+2}{6}\right)^2 - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}.$$

Відповідь. $-\frac{3}{4}$. •

Приклад 4. Записати у вигляді виразу число, яке має 9 сотень, c десятків, d одиниць.

- $9 \cdot 100 + c \cdot 10 + d = 900 + 10c + d$. •

Усно

123. Серед записів вкажіть числові вирази, вирази зі змінними та записи, що не є виразами:

а) $7,2 : 3$;

б) 5 ;

в) $2x = 3$;

г) $(18 - 3) : 5 = 3$;

д) $a - c$; е) $15 - 8a$; є) $\frac{19-8}{5}$; ж) abx^2 .

124. Прочитайте словами вирази зі змінними:


а) $5 + x$; б) $y : 7$; в) $2ab$; г) $(abc - 2) : 4$;

д) $(a - 3) : a$; е) $\frac{1}{4}z - 3,5$; є) $\frac{b-c}{4}$; ж) $\frac{37}{x}$.

Які з даних виразів є цілими виразами?

125. Складіть три вирази із числа 7 та змінних a і b .

126. Складіть два вирази із чисел 5 і 11 та змінної x .

Рівень А																								
-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

Запишіть у вигляді виразу:

127. а) Суму чисел 12 і a ; б) частку чисел $-c$ і 7;
в) куб числа a ; г) піврізницю чисел a і b .

128. а) Добуток числа 3 і суми чисел a та c ;
б) потроєний добуток чисел b і c ;
в) різницю числа a і квадрата числа c .

129. а) Різницю чисел b і 9; б) добуток чисел 3 і $-a$;
в) квадрат числа x ; г) півсуму чисел m і n ;
д) добуток різниці чисел 3 та c і числа 5;
е) подвоєну частку чисел a і c .

Знайдіть значення виразу:

130. а) $7b - 3$, якщо $b = -9$; б) $0,11 - 4c^2$, якщо $c = 0,2$;
в) $3a + b$, якщо $a = -3$; $b = 8$; г) $ab - 4c$, якщо $a = -0,4$; $b = 7$; $c = 0,12$.

131. а) $2,5 + \frac{a-2}{5}$, якщо $a = 4$; б) $\frac{2x-1}{0,1}$, якщо $x = -3$.

132. а) $-2a + 5,2$, якщо $a = -3$; б) $(1 - 4s)^2$, якщо $s = 2$;
в) $12(3y - 5)$, якщо $y = 1,5$; г) $x - 2y$, якщо $x = 11$; $y = -5,5$;
д) $3(a + b) - 2c$, якщо $a = 3,2$; $b = -7,7$; $c = 2,5$.

Заповніть таблицю:

133.

a	-4	-1	0	0,5	2	3
$4 - 3a$						

134.

x	-5	-3	0	1	1,5	2,5
$2x - 3$						

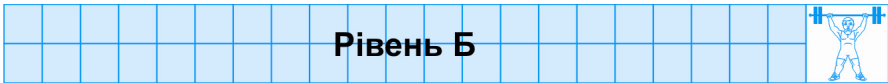
135.

x	5	7	1	-2	-4	10
y	2	-1	0	3	-0,5	-1
$x - 2y$						

136.

b	-2	0	0,5	1	3	3,5
$\frac{2b-5}{4}$						

137. Швидкість автомобіля дорівнює 75 км/год. Запишіть у вигляді виразу шлях, який автомобіль проїде за t год.
138. На склад завезли n мішків борошна по 50 кг у кожному. Запишіть у вигляді виразу масу всього завезеного борошна. Знайдіть значення цього виразу, якщо $n = 48$.
139. Робітник за день виготовляє 32 деталі. Запишіть у вигляді виразу кількість деталей, які робітник виготовить за k днів. Знайдіть значення цього виразу, якщо $k = 5$.
140. З ділянки, площа якої дорівнює a га, господарство зібрало по 38 ц пшениці з гектара, а з ділянки, площа якої дорівнює b га, — по 42 ц. Запишіть у вигляді виразу масу пшениці, зібраної господарством з обох ділянок.
141. Майстерня закупила 50 м тканини по a грн. за метр і 30 м тканини по b грн. за метр. Запишіть у вигляді виразу вартість усієї тканини.



Знайдіть значення виразу:

142. а) $8,5 \cdot (a - 13,97) + 4\frac{3}{8}b$, якщо $a = 16,17$; $b = \frac{6}{7}$;

б) $(3\frac{2}{9} - m - n) \cdot 36$, якщо $m = -12\frac{2}{3}$; $n = 1\frac{1}{6}$.

143. а) $(x - 9\frac{7}{9}) \cdot y + 0,5$, якщо $x = 16\frac{1}{2}$; $y = \frac{18}{33}$;

б) $0,5a + 3\frac{1}{2}(b - 1\frac{1}{7})$, якщо $a = 3\frac{1}{5}$; $b = 2$.

144. За формулою $S = vt$ знайдіть шлях (у кілометрах), якщо:

а) $v = 75$ км/год; $t = 0,6$ год;

б) $v = 75$ км/год; $t = 20$ хв;

в) $v = 20$ м/с; $t = 2$ год;

г) $v = 900$ м/хв; $t = 25$ с.

145. За формулою $S = vt$ знайдіть шлях (у метрах), якщо:
- а) $v = 8$ м/с; $t = 5$ хв; б) $v = 15$ км/год; $t = 6$ хв.
146. Для яких значень x значення виразу $2x + 5$ дорівнює 10?
147. Для яких значень x значення виразу $4 - 2x$ дорівнює 18?
148. Для яких значень x значення виразів $3x - 12$ і $-4 - x$ дорівнюють одне одному?
149. Відомо, що для деяких значень x та y значення виразу xy дорівнює 0,4. Якого значення для тих самих значень x та y набуває вираз:
- а) $10xy$; б) $0,1xy$; в) $\frac{xy}{2}$; г) $-1\frac{1}{3}xy$?
150. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 4 дають в остачі 1.
151. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 5 дають в остачі 2.
Запишіть у вигляді виразу число, яке має:
152. а) a десятків і b одиниць; б) a сотень і c одиниць;
в) a сотень, 7 десятків і b одиниць; г) a тисяч, b сотень і a одиниць.
153. а) a сотень і b десятків; б) 5 сотень, a десятків і b одиниць.
154. Запишіть у вигляді виразу площу поверхні прямокутного паралелепіпеда з вимірами a см, b см, c см.
155. Запишіть у вигляді виразу площу поверхні куба з ребром a см.

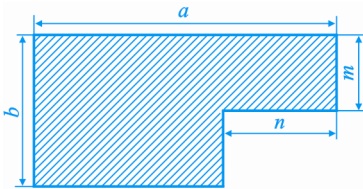


Рис. 2

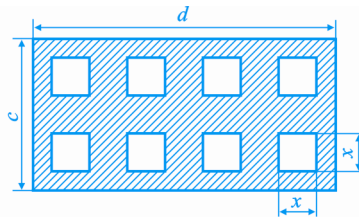


Рис. 3

156. Запишіть у вигляді виразу площу фігури, зображеної на рисунку 2.
157. Запишіть у вигляді виразу площу фігури, зображеної на рисунку 3.
158. На ділянці росло n кущів смородини. З цієї ділянки k кущів пересадили на іншу ділянку, а на ній посадили 30 нових кущів. Скільки кущів смородини стало на ділянці? Запишіть результат у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $n = 83$, $k = 45$.
159. Оксана купила n олівців по 25 к. і 4 зошити по a к., заплативши за зошити більше, ніж за олівці. На скільки більше заплатила Оксана за зошити, ніж за олівці? Запишіть результат у вигляді виразу і знайдіть його значення, якщо $n = 3$, $a = 65$.

160. Із двох міст одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі й зустрілися через 2 год. Один рухався зі швидкістю 80 км/год, а інший — зі швидкістю v км/год. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами.

Рівень В



161. Число d є добутком перших n натуральних чисел: $d = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Знайдіть d , якщо $n = 5$; $n = 7$. Скількома нулями закінчується запис числа d , якщо $n = 10$; $n = 100$?
162. Знайдіть найменше значення виразу: $x^2 + 5$; $|x| - 3$.
163. Знайдіть найбільше значення виразу: $1 - x^2$; $3 - |x|$.
164. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 9 дають в остачі 2. Знайдіть кількість таких чисел у межах від 100 до 300.
165. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 2 дають в остачі 1, а при діленні на 3 дають в остачі 2.

Вправи для повторення

166. Кавові зерна при смаженні втрачають 12% своєї маси.
- Скільки кілограмів смажених зерен вийде із 20 кг свіжих?
 - Скільки кілограмів свіжих зерен слід узяти, щоб отримати 22 кг смажених?
- Обчисліть раціональним способом:
167. а) $0,25 \cdot (-11) \cdot 4$; б) $9 \cdot 1,25 \cdot (-8)$; в) $-12,5 \cdot 2,5 \cdot (-8) \cdot 4$;
 г) $-\frac{2}{7} \cdot (-25) \cdot 3\frac{1}{2}$; д) $24 \cdot 8 - 28 \cdot 24$; е) $7 \cdot 35 - 26 \cdot 7 + 11 \cdot 7$;
 є) $5\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{7} - 2\frac{2}{9} \cdot \frac{3}{7}$; ж) $12 \cdot (\frac{1}{2} - \frac{1}{6})$; з) $(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}) \cdot (-30)$.
168. а) $34 \cdot 23 + 3 \cdot 23 - 37 \cdot 33$; б) $5,4 \cdot 16 - 22 \cdot 5,4 + 6 \cdot 6,4$.
169. Зведіть подібні доданки:
 а) $2x + 6x - 4x + x$; б) $4a + 9b + 2b - 5a$; в) $3a - 7 + 5a - 10a$.
170. Розкрийте дужки:
 а) $4(a + 2b)$; б) $(a + b - c) \cdot 3$; в) $5(a - 1) - (b - c)$.
171. Візьміть у дужки два останніх доданки, поставивши перед дужками знак «+»; знак «-»:
 а) $2x + y - 3$; б) $a - 3b + 4$; в) $m + n - 7 - mn$.

6. Тотожно рівні вирази. Тотожності

1. Тотожно рівні вирази. Знайдемо значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$, якщо $a = 4$, $b = 2$:

$$5a - 5b = 5 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 20 - 10 = 10; \quad 5(a - b) = 5 \cdot (4 - 2) = 5 \cdot 2 = 10.$$

Значення цих виразів для даних значень змінних дорівнюють одне одному (кажуть: якщо $a = 4$, $b = 2$, то відповідні значення виразів дорівнюють одне одному). З розподільної властивості множення щодо віднімання випливає, що й для будь-яких інших значень змінних відповідні значення виразів $5a - 5b$ і $5(a - b)$ теж дорівнюють одне одному. Такі вирази називають *тотожно рівними*.

Означення

Два вирази називають тотожно рівними, якщо для будь-яких значень змінних відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному.

Розглянемо тепер вирази $5a + b$ і $a + 5b$. Якщо $a = 1$ і $b = 1$, то відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному:

$$5a + b = 5 \cdot 1 + 1 = 6; \quad a + 5b = 1 + 5 \cdot 1 = 6.$$

Якщо ж $a = 2$, $b = 1$, то відповідні значення цих виразів різні:

$$5a + b = 5 \cdot 2 + 1 = 11; \quad a + 5b = 2 + 5 \cdot 1 = 7.$$

Отже, значення виразів $5a + b$ і $a + 5b$ для одних значень змінних дорівнюють одне одному, а для інших — ні. Такі вирази не є тотожно рівними.

2. Тотожності. Якщо два тотожно рівні вирази $5a - 5b$ і $5(a - b)$ сполучити знаком « \Rightarrow », то одержимо рівність $5a - 5b = 5(a - b)$, яка є правильною для будь-яких значень змінних. Таку рівність називають *тотожністю*.

Означення

Рівність, яка є правильною для всіх значень змінних, називають тотожністю.

Прикладами тотожностей є рівності, які виражають основні властивості додавання і множення чисел:

переставна властивість: $a + b = b + a; \quad ab = ba;$

сполучна властивість: $(a + b) + c = a + (b + c); \quad (ab)c = a(bc);$

розподільна властивість: $a(b + c) = ab + ac.$

Тотожностями є також рівності, які виражають правила розкриття дужок:

$$a + (b + c) = a + b + c, \quad a - (b + c) = a - b - c, \quad a - (b - c) = a - b + c.$$

Тотожностями є й такі рівності:

$$a - b = a + (-b), \quad a \cdot (-b) = -ab, \quad (-a) \cdot (-b) = ab;$$

$$a + 0 = a, \quad a + (-a) = 0, \quad a \cdot 0 = 0, \quad a \cdot 1 = a.$$

3. Тотожні перетворення виразів. У виразі $4a + 3a - 1$ зведемо подібні доданки $4a$ і $3a$:

$$4a + 3a - 1 = (4 + 3)a - 1 = 7a - 1.$$

Вираз $4a + 3a - 1$ замінили тотожно рівним йому виразом $7a - 1$.

Заміну одного виразу тотожно рівним йому виразом називають **тотожним перетворенням виразу**.

У математиці часто доводиться спрощувати вираз, тобто замінювати його тотожно рівним виразом, який має коротший запис або, як кажуть, є «більш компактним». Розглянемо приклади.

Приклад 1. Спростити вираз $7a + 23 + 2(-4a + 1)$.

- $7a + 23 + 2(-4a + 1) = \underline{7a} + 23 - \underline{8a} + 2 = -a + 25.$ •

Приклад 2. Спростити вираз $a + (2a - 3b) - (2 - 4b)$.

- $a + (2a - 3b) - (2 - 4b) = \underline{a} + \underline{2a} - \underline{3b} - 2 + \underline{4b} = 3a + b - 2.$ •

Тотожні перетворення використовують і для доведення тотожностей.

Щоб довести тотожність, можна використати один з таких способів:

- 1) ліву частину тотожності шляхом тотожних перетворень звести до правої частини;
- 2) праву частину звести до лівої частини;
- 3) обидві частини звести до одного й того ж виразу;
- 4) утворити різницю лівої та правої частин і довести, що вона дорівнює нулю.

Розглянемо приклади.

Приклад 3. Довести тотожність $a - 3 - (4a + 7) = -3a - 10$.

- Перетворюватимемо ліву частину рівності:

$$a - 3 - (4a + 7) = \underline{a} - 3 - \underline{4a} - 7 = -3a - 10.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву частину рівності звели до правої частини. Тому ця рівність є тотожністю. •

Приклад 4. Довести тотожність $15 = (27 - 5a) - (12 - 3a - 2a)$.

- Перетворюватимемо праву частину рівності:

$$(27 - 5a) - (12 - 3a - 2a) = 27 - \underline{5a} - 12 + \underline{3a} + \underline{2a} = 15.$$

Шляхом тотожних перетворень праву частину рівності звели до лівої частини. Тому ця рівність є тотожністю. •

Приклад 5. Довести тотожність $2c + 3 - 2(3 - 2c) = 3(2c - 3) + 6$.

- Перетворюватимемо ліву і праву частини рівності:

$$2c + 3 - 2(3 - 2c) = \underline{2c} + 3 - 6 + \underline{4c} = 6c - 3;$$

$$3(2c - 3) + 6 = 6c - 9 + 6 = 6c - 3.$$

Шляхом тотожних перетворень ліву і праву частини рівності звели до одного й того ж виразу $6c - 3$. Тому ця рівність є тотожністю. •

Приклад 6. Довести тотожність $3x - 2(2x - 3y) = 2x + 3(2y - x)$.

- Утворимо різницю лівої та правої частин і спростимо її:

$$\begin{aligned} 3x - 2(2x - 3y) - (2x + 3(2y - x)) &= 3x - 2(2x - 3y) - 2x - 3(2y - x) = \\ &= \underline{3x} - \underline{4x} + \underline{6y} - \underline{2x} - \underline{6y} + \underline{3x} = 0. \end{aligned}$$

Різниця лівої і правої частин рівності дорівнює нулю, тому дана рівність є тотожністю. •

Усно

172. Чи є тотожно рівними вирази:

- а) $5 + 6x$ і $6x + 5$; б) $a \cdot 5b$ і $5ab$; в) $a - b$ і $b - a$?

Відповіді обґрунтуйте.

173. Чи є тотожністю рівність:

- а) $ab + 2 = 2 + ab$; б) $a - 1 = -1 + a$; в) $2(a - 3) = 2a - 3$?

Відповіді обґрунтуйте.

174. Назвіть кілька виразів, які тотожно рівні виразу $x + 4x$.

175. Поясніть, на основі яких правил та яких властивостей дій здійснено такі тотожні перетворення:

$$\begin{aligned} -2b - (a - 3b) + 5a &= -2b - a + 3b + 5a = -2b + 3b - a + 5a = \\ &= (-2 + 3) \cdot b + (-1 + 5) \cdot a = b + 4a. \end{aligned}$$

176. Спростіть вираз:

- а) $-7 + 4a - 3a$; б) $4a \cdot 5b$; в) $5x + (2 - x)$.

Рівень А	
-----------------	--

Зведіть подібні доданки:

- 177.** а) $7a - 3a + 6$; б) $-4 + 3z - 8z$;
 в) $4b - 7 + 9$; г) $6,5b - 7a + 5a$;
 д) $-7,2x + 8y - 5x - 5y$; е) $m - 3n + 1,6n + 2n$.
- 178.** а) $5a - 6 + 3a$; б) $-3b + 4b - 2b$;
 в) $2c - 1 + 6c - 6$; г) $1,5a - 2,5b + 3,5a$;
 д) $-2x + 3y - 6x - 5y$; е) $3b - a + 0,6a + 1,2a$.

Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

- 179.** а) $5(8a + 9) + (4a - 5)$; б) $2(5b - 3a) - (1,5b - 2a)$;
 в) $-4(1,2x + 1,5y) + 4(1,2x + 1)$; г) $2(2x - 4y) - 3(2x + 5y + 2)$.
- 180.** а) $3(4x - 2z) - (5z + 10x)$; б) $-3(3a + 1) - 5(a - 3b)$.

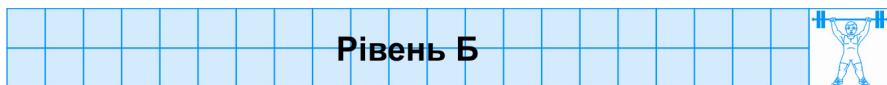
Спростіть вираз і знайдіть його значення:

- 181.** а) $0,7(a - 10) + a - 5$, якщо $a = 3$;
 б) $-2,5b - (11 - 1,5b) + b$, якщо $b = 0,2$;
 в) $2x - 3(1 - y) + 4y$, якщо $x = -2$; $y = 5$.

182. а) $6 + 3(2a - 4) - 8a$, якщо $a = -1$;
 б) $3(a + 6) - (a - 3b) - 4b$, якщо $a = 3$, $b = -3$.

Доведіть тотожність:

183. а) $(a + b) - (a - b) = 2b$; б) $2b \cdot (-4) + 8b - 4 = -4$;
 в) $2x - 1 - 5(1 - 2x) = 12x - 6$; г) $2(3a - 4) + 14 - 6a = 6$;
 д) $a - (4a - 3b) = 3(b - a)$; е) $2c = 12c - 5(2c + 3) + 15$.
184. а) $2b + 2(1 - b) = 2$; б) $2a - (1 + 2a) + 1 = 0$;
 в) $3a - 6(3 - 2a) = 3(5a - 6)$; г) $2x - 6 = -x - (7 - 3x) + 1$.
185. Ширина прямокутника дорівнює a см, а довжина на 3 см більша від ширини. Запишіть у вигляді виразу периметр прямокутника.
186. Сторони трикутника дорівнюють b см, b см і 5 см. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника.
187. На одній полиці стоїть n книжок, а на іншій — у 1,5 разу більше. Скільки книжок на обох полицях?
188. На одній полиці стоїть k книжок, а на іншій — на 12 книжок менше. Скільки книжок на обох полицях?
189. Один робітник виготовляє за годину c деталей, а інший — на 2 деталі менше. Запишіть у вигляді виразу кількість деталей, які виготовлять за 8 год обидва робітники.



Запишіть у вигляді тотожності твердження:

190. а) Сума числа і протилежного йому числа дорівнює нулю;
 б) сума числа a й числа, протилежного числу b , дорівнює різниці чисел a та b ;
 в) квадрат числа дорівнює квадрату модуля цього числа.
191. а) Добуток довільного числа і нуля дорівнює нулю;
 б) добуток двох чисел дорівнює добутку протилежних їм чисел;
 в) квадрат числа дорівнює квадрату протилежного йому числа.

Спростіть вираз:

192. а) $2(3c + 5) + 4(3 + 5c) + 4 + 2c$; б) $0,2(x - 1) - 0,4(5 - 2x) - 2,3$;
 в) $-(4x + y + 3z) + 3y - 2(x - 3z)$; г) $1\frac{1}{3}(2a - 7b) - \frac{2}{3}(3b + a) + 2a$;
 д) $4(2(x + 2) - 4x) + 2(x + 1)$; е) $5(m + 3(n - 1) - 1) - 5m$.
193. а) $-(3a - 6) + 3(2 - 2a) + 15a$; б) $0,9(a - 3b) - 0,2(5b - 3a) - 1,7b$;
 в) $4(5n - 2(n - 1)) + 10$; г) $\frac{2}{9} + \frac{2}{9}(2(x - y) - 4x) + \frac{2}{3}x$.

Доведіть тотожність:

194. а) $2(a + b + c) - (a + b - c) - (a - b + c) = 2(b + c)$;
 б) $28 + 2(2(b - 2) - 2) - 2 = 8b$.

195. а) $2(a - b - 1) - (a + b - 1) - (a - b + 1) = -2(b + 1)$;

б) $1 - x - (1 - (1 - (1 - x))) = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

196. а) $2(3x - 1) - 3(2 - x) = 1$;

б) $0,2(y - 2(y - 1) + 5) - 2y + 3 = 0$.

197. а) $-3(1 - y) + 3(1 - 2y) = 9$;

б) $2((x - 2) - 2(x - 1)) + 4x = 1$.

198. Перший лижник пробіг a м, другий — на b м менше, ніж перший, а третій — 1200 м. На скільки метрів менше пробіг другий лижник, ніж перший і третій разом? Запишіть результат у вигляді виразу.

199. На першій полиці є x книжок, а на другій — удвічі більше, ніж на першій. З першої полиці забрали 10 книжок, а на другу поставили 3 книжки. Якою стала загальна кількість книжок на полицях? Запишіть результат у вигляді виразу.

Рівень В



200. Нехай m і n — деякі натуральні числа. Доведіть, що:

а) різниця чисел $11m + 3n$ і $7m + 7n$ ділиться на 4;б) сума чисел $10m + 3n + 2$ і $2m - 7n + 6$ ділиться на 4.

201. Доведіть, що сума трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

202. Доведіть, що сума чотирьох послідовних цілих чисел не ділиться на 4.

203. Доведіть, що коли два цілі числа при діленні на 4 дають в остачі 2, то сума і різниця цих чисел діляться на 4.

204. Двоцифрове число, яке має a десятків і b одиниць, позначають через \overline{ab} .

Отже, $\overline{ab} = 10a + b$. Доведіть, що сума $\overline{ab} + \overline{ba}$ ділиться на 11.

205. Доведіть, що різниця числа \overline{abc} і суми його цифр ділиться на 9.

206. Доведіть, що коли два цілі числа при діленні на 3 дають рівні остачі, то різниця цих чисел ділиться на 3.

Вправи для повторення

207. Обчисліть:

а) $15^2 - 6^3$;

б) $(1,2^2 - 1,84)^3$;

в) $\left(2 - \frac{3}{7}\right)^2 - \left(\frac{6}{7}\right)^2$.

Розв'яжіть рівняння:

208. а) $(x - 7)(x + 9) = 0$;

б) $(2x + 7)(3x - 2) = 0$;

в) $(7 - 3x)(0,5x - 1) = 0$.

209. а) $|x| = 5$;

б) $|x + 5| = 2$;

в) $|3x + 9| = 0$.

210. Сума трьох чисел дорівнює 10, до того ж, перше число на 20 менше, а третє — на 15 більше, ніж друге. Знайдіть ці числа.

211*. Чоловік приїхав поїздом на станцію о 7 год 20 хв і пішки вирушив у село, розташоване у кількох кілометрах від станції. Йдучи зі сталою

швидкістю, чоловік розрахував, що приїде в село о 8 год 44 хв. Однак о 7 год 44 хв він сів у попутний автомобіль і прибув у село на 55 хв раніше. Знайдіть швидкість автомобіля, якщо вона на 55 км/год більша від швидкості чоловіка.

212. З урни, в якій є чотири кулі, пронумерованих числами 1, 2, 3 і 4, навмання беруть дві кулі. Знайдіть імовірність того, що серед вибраних куль є куля з номером 1.
213. Використовуючи тричі цифру 3, знаки дій і за потреби дужки, складіть числовий вираз, значення якого дорівнює: а) 18; б) 9; в) 4; г) 81; д) 0.

Цікаво знати



Записуючи вирази, рівняння, нерівності, ми користуємося математичними символами «+», «-», «=», «<», « a^2 » та багатьма іншими. Така єдина система умовних знаків, якою ми користуємося зараз, складалася в алгебрі поступово.

Ще у III ст. давньогрецький математик Діофант замість слова «рівний» використовував окремий знак — букву *i* — першу букву слова *isos*, тобто *рівний*. Подібні скорочення використовували й інші математики, проте запропоновані ними символи не були загальнозживаними.

Створення сучасної символіки відбулось у XIV–XVIII ст. Значну роль у цьому процесі відіграв французький математик **Франсуа Вієт**, який уперше за допомогою символів почав записувати рівняння.

Юрист за освітою, Вієт був радником французьких королів Генріха III і Генріха IV, славився як талановитий дешифрувальник. Під час війни з Іспанією Вієт знайшов ключ до дуже важливого шифру. Розшифровка французами секретних повідомлень іспанців привела до того, що Іспанія раз по раз почала зазнавати поразок. За це іспанська інквізиція засудила Вієта до спалення на вогнищі, але, на щастя, їм це не вдалося здійснити.

Незважаючи на велику службу завантаженість, Вієт написав багато математичних праць, головною з яких є «Вступ до мистецтва аналізу» (1591).



Франсуа Вієт (1540–1603), французький математик.

Першим увів єдину, послідовно проведену систему алгебраїчних символів

Найважливішим результатом наукової діяльності Ф. Вієта було те, що завдяки його працям алгебра стала наукою про алгебраїчні рівняння, яка ґрунтується на використанні символів (букв).

Запитання і вправи для повторення § 2

1. З чого утворюють вираз зі змінними?
 2. Що називають значенням виразу зі змінними?
 3. Які вирази називають цілими?
 4. Які два вирази називають тотожно рівними?
 5. Що таке тотожне перетворення виразу?
 6. Що називають тотожністю?
 7. Як доводять тотожність?
- 214.** Запишіть у вигляді виразу:
- а) різницю чисел $2,5$ і a ;
 - б) куб числа c ;
 - в) подвоєну суму чисел a і b ;
 - г) суму квадратів чисел m і n ;
 - д) різницю числа a і добутку чисел b та c .
- 215.** Автомобіль проїхав S км зі швидкістю 75 км/год. Скільки часу автомобіль був у дорозі? Запишіть результат у вигляді виразу.
- 216.** Олівець коштує a к., а ручка — b к. Запишіть у вигляді виразу вартість 2 олівців і 3 ручок.
- 217.** Є дві ділянки прямокутної форми. Довжина і ширина першої ділянки відповідно дорівнюють m м і n м. Довжина другої ділянки на 5 м більша від довжини першої, а ширина на 2 м менша від ширини першої. Запишіть у вигляді виразу площу другої ділянки. Знайдіть значення цього виразу, якщо $m = 50$, $n = 14$.
- 218.** Спростіть вираз:
- а) $6a + 5(7 - 12a)$;
 - б) $-3x - 5(3 - 2x) + 5 - 2x$;
 - в) $-4 + (5x - y) - 4x - (3y + 5)$;
 - г) $3b + 7 - 2(3 - 2(b + 1))$;
 - д) $0,3(x - 4) - 0,4(x - y) + 1,6y$;
 - е) $2,5(a - 2(b - 1) + 4) + 5b$.
- 219.** Спростіть вираз і знайдіть його значення:
- а) $24(a - 2) - 4a$, якщо $a = 0,05$;
 - б) $0,3(2b - 3) + 3 - 4,6b$, якщо $b = 0,5$.
- 220.** Знайдіть значення виразу $2(x + 8) - 3(5 + x - y) + 7y$, якщо $x = -6$; $y = 0,6$.
- 221.** Для яких значень x значення виразу $5x - 8$ дорівнює 1 ?
- 222.** Доведіть, що значення виразу $2(1 - 3x) - 3(1 - 2x)$ не залежать від значень x .

Доведіть тотожність:

223. а) $7(4 - a) - 3(-3a + 1) - 25 = 2a$;

б) $9,8b - 5 = 9b - 1,2b - 2(2,5 - b)$;

в) $4(n - 2) - 5(n - 1) = 3(n - 3) - 4(n - 1,5)$.

224. а) $5\frac{1}{3}\left(\frac{3}{8}a + 1,25b\right) - \left(-\frac{1}{12}b - 0,125a\right) - 6,75b = 2,125a$;

б) $\left(\frac{8}{11}x - \frac{7}{33}y\right) \cdot 22 + 0,75(x + 1) + 4\frac{2}{3}y + 3,25x = 20\left(x + \frac{3}{80}\right)$;

в) $-\frac{2}{3}(2,25m - 4,5n) + 1,125\left(-2\frac{2}{3}m - \frac{8}{9}n\right) = 2n - 4,5m$.

225. Доведіть, що вираз $4(a + b + 2c) - 3(a - b + c) - 2(-a + 2b + c)$ тотожно рівний виразу $3(a + b + c)$.

226. За перший день магазин продав b кг цукру, за другий — на 58 кг більше, ніж за перший, а за третій — на 12 кг менше, ніж за другий. Запишіть у вигляді виразу кількість кілограмів цукру, проданого магазином за 3 дні.

227. У 7-А класі навчається n учнів, що на 5 учнів більше, ніж у 7-Б, і на 3 учні менше, ніж у 7-В. Запишіть у вигляді виразу кількість учнів у цих трьох класах разом.

228. З міста A до міста B виїхав мотоцикліст і рухався зі швидкістю 54 км/год. Через 0,5 год назустріч йому з міста B виїхав автомобіль і за t год зустрів мотоцикліста. Запишіть у вигляді виразу відстань між містами, якщо швидкість автомобіля дорівнює 72 км/год.

229. Три екскаватори вирили траншею. Перший екскаватор вирив x м траншеї, або $\frac{2}{9}$ довжини всієї траншеї, другий — на 20 м більше, ніж перший. Скільки метрів траншеї вирив третій екскаватор? Запишіть результат у вигляді виразу.

230. Запишіть формулу цілих чисел, які при діленні на 4 дають в остачі: 1; 3.

231*. Деякі три цілих числа при діленні на 3 дають різні остачі. Доведіть, що сума цих чисел ділиться на 3.

232. Знайдіть усі цифри a і b , для яких число $\overline{7ab}$ ділиться на 25.

Завдання для самоперевірки № 2

Рівень 1

1. Який із записів є виразом зі змінними?

а) $2,5 : 5$;

б) $3x = 9$;

в) $y > 3$;

г) $2a + 3ab$.

2. Книжка коштує a грн., а зошит — b грн. Запишіть у вигляді виразу вартість книжки і зошита разом.

а) ab грн.;

б) $(a + b)$ грн.;

в) $(a - b)$ грн.;

г) $(b - a)$ грн.

3. Чому дорівнює значення виразу $2x - 4$, якщо $x = -3$?
а) 10; б) -10 ; в) 2; г) -2 .
4. Вкажіть вираз, тотожно рівний виразу $3y + 5 - 7y$:
а) y ; б) $5 + 4y$; в) $5 - 4y$; г) $3y - 2y$.
5. Спростіть вираз $4(5a - 3b) - (-b + 2a)$ і вкажіть правильну відповідь:
а) $18a + 11b$; б) $22a + 11b$; в) $18a - 11b$; г) $22a - 13b$.

Рівень 2

6. Кілограм цукерок коштує a грн., а кілограм печива — на b грн. менше. Запишіть у вигляді виразу вартість 1 кг печива й 1 кг цукерок разом.
7. Спростіть вираз $15a - 0,4(5a - 3) + 7$.
8. Спростіть вираз $5(-4x + 0,6) + 17,5x - \frac{1}{4}$ і знайдіть його значення, якщо $x = 0,8$.
9. Доведіть тотожність $3c - (5 - 11c) - 6c + 5 = 8c$.

Рівень 3

10. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:
 $1,5(2a - 4b) - (2 - 3(2b + a))$.
11. Знайдіть значення виразу $25x - 4(5x - 3y) - 2(5 + 3x - y)$, якщо $x = -7,6$, $y = 0,76$.
12. У першій книжці є a сторінок, у другій — на b сторінок менше, ніж у першій, а у третій — удвічі більше сторінок, ніж у другій. Запишіть у вигляді виразу кількість сторінок у трьох книжках разом.
13. Доведіть, що вирази $0,3(a - 3) - 0,5(a - 1)$ і $0,2(a - 6) - 0,4(a - 2)$ є тотожно рівними.

Рівень 4

14. Знайдіть значення виразу $\frac{a + \frac{a}{7} + \frac{a}{49} + \frac{a}{343}}{6 + \frac{6}{7} + \frac{6}{49} + \frac{6}{343}} : \left(-3\frac{8}{9}\right)$, якщо $a = 5$.
15. На першій полиці стоїть a книжок, на другій — утричі більше, ніж на першій, а на третій — на 17 книжок менше, ніж на першій і другій полицях разом. Запишіть у вигляді виразу кількість книжок на трьох полицях разом.
16. Натуральне число a при діленні на 5 дає в остачі 4, а натуральне число b при діленні на 4 дає в остачі 2. Доведіть, що число $4a + 5b$ не кратне 10.
17. Доведіть, що сума трицифрового числа і подвоєної суми його цифр ділиться на 3.

§ 3. ОДНОЧЛЕНИ

7. Степінь з натуральним показником

Нагадаємо, що добуток двох або трьох однакових множників, кожен з яких дорівнює a , — це відповідно квадрат або куб числа a . Наприклад:

$$5 \cdot 5 = 5^2; \quad 5^2 \text{ — квадрат числа } 5;$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3; \quad 5^3 \text{ — куб числа } 5.$$

Квадрат числа 5 називають ще другим степенем цього числа, а куб — третім степенем.

Відповідно добуток $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$ позначають 5^4 і називають четвертим степенем числа 5. У виразі 5^4 число 5 називають *основою степеня*, число 4 — *показником степеня*, а весь вираз 5^4 називають *степенем*.

Означення

Степенем числа a з натуральним показником n , більшим від 1, називають добуток n множників, кожен з яких дорівнює a . Степенем числа a з показником 1 називають саме число a .

Степінь з основою a й показником n записують так: a^n , читають: « a в степені n », або « n -ий степінь числа a ».

Отже, за означенням

$$a^n = \underbrace{aa\dots a}_{n \text{ разів}}, \text{ якщо } n > 1,$$

$$a^1 = a.$$

З'ясуємо знак степеня з натуральним показником.

1) $a = 0$, тоді $0^1 = 0$, $0^2 = 0 \cdot 0 = 0$, ... — будь-який натуральний степінь числа 0 дорівнює 0.

2) $a > 0$, тоді $a^1 = a > 0$, $a^2 = aa > 0$, ... — будь-який натуральний степінь додатного числа є число додатне.

3) $a < 0$, тоді $a^1 = a < 0$, $a^2 = aa > 0$, $a^3 = aaa < 0$, $a^4 = aaaa > 0$, Степінь від'ємного числа з парним показником є число додатне, оскільки добуток парного числа від'ємних чисел додатний. Степінь від'ємного числа з непарним показником є число від'ємне, оскільки добуток непарного числа від'ємних чисел від'ємний.

Підносити числа до степеня з натуральним показником можна за допомогою мікрокалькулятора. Обчислити, наприклад, значення $3,5^6$ можна за схемою:

3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	×	3,5	=
-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---	-----	---

або за більш зручною схемою:

3,5	×	=	=	=	=	=
-----	---	---	---	---	---	---

Отримаємо значення степеня: 1838,265625.

Піднесення до степеня — дія третього ступеня. Нагадаємо, що коли вираз без дужок містить дії різних ступенів, то спочатку виконують дії вищого ступеня, відтак — нижчого. Так, щоб знайти значення виразу $2 \cdot 3^2 - 64$, дії потрібно виконувати в такій послідовності: 1) піднесення до степеня; 2) множення; 3) віднімання.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Обчислити $4 \cdot (-5)^3 + 8 \cdot 0,5$.

• Виконуючи обчислення, можна:

а) записувати кожну дію окремо:

$$1) (-5)^3 = -125;$$

$$2) 4 \cdot (-125) = -500;$$

$$3) 8 \cdot 0,5 = 4;$$

$$4) -500 + 4 = -496;$$

б) записувати обчислення в рядок:

$$4 \cdot (-5)^3 + 8 \cdot 0,5 = 4 \cdot (-125) + 4 = -500 + 4 = -496.$$

Відповідь. -496 . •

Усно

233. Прочитайте вирази, назвіть основи й показники степенів:

$$a^{12}; \quad (-3)^4; \quad (-0,05)^{20}; \quad t^9; \quad 3^m; \quad \left(\frac{1}{3}\right)^3; \quad \left(-\frac{2}{5}\right)^7.$$

234. Обчисліть: 1^7 ; 2^4 ; $(-2)^4$; 3^3 ; $(-3)^3$; $(-5)^2$; 4^3 ; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $0,1^2$.

235. Значення яких степенів є додатними; від'ємними:

$$(-7)^4; \quad (-11)^3; \quad 15^6; \quad (-21)^2; \quad 3^3; \quad 17^{31}; \quad (-1,5)^{20}; \quad (-0,05)^{11}?$$

Рівень А



Запишіть добуток у вигляді степеня:

236. а) $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$;

б) $\underbrace{3 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 3}_{10 \text{ разів}}$;

в) $\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)$;

г) $\underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ разів;

д) $(-b) \cdot (-b) \cdot (-b) \cdot (-b)$;

е) $(x - y) \cdot (x - y) \cdot (x - y)$.

237. а) $(-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5)$;

б) $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$;

в) $\underbrace{(-1,5) \cdot (-1,5) \cdot \dots \cdot (-1,5)}_{12 \text{ разів}}$;

г) $(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot (ab)$.

238. Запишіть степені у вигляді добутку:

а) 6^4 ; $(-7)^6$; $1,2^5$;

б) a^5 ; $(2x)^3$; $(bc)^4$.

Знайдіть значення степеня:

239. а) 12^2 ;

б) 4^4 ;

в) $(-0,7)^3$;

г) $(-1,5)^4$;

д) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3$;

е) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$;

є) $\left(2\frac{1}{3}\right)^4$;

ж) $(-0,02)^3$.

240. а) 2^5 ;

б) $(-3)^4$;

в) $(-1)^5$;

г) $0,4^3$;

д) $1,1^3$;

е) $0,04^3$;

є) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3$;

ж) $\left(1\frac{2}{3}\right)^4$.

Обчисліть:

241. а) $6 \cdot (-2)^4$;

б) $6 \cdot (-2^4)$;

в) $5 \cdot (-3)^3$;

г) $5 \cdot (-3^3)$;

д) $5^3 - 5^2$;

е) $(-6 \cdot 0,5)^5$;

є) $0,1^3 - 0,1^2$;

ж) $(15 - 16)^{10}$.

242. а) $(3 - 7)^4$;

б) $2 \cdot (-7^3)$;

в) $2^6 + (-3)^3$;

г) $(-4 + 3)^9$.

243. Знайдіть значення виразів:

а) a^2 ; $(-a)^2$; $-a^2$, якщо $a = 3$;

б) a^3 ; $(-a)^3$; $-a^3$, якщо $a = 10$.

244. Знайдіть значення виразу:

а) $2a^3 + 1$, якщо $a = -2$; $a = 0$; $a = 2$; б) $(x + 1)^4$, якщо $x = -2$; $x = 2$.

Рівень Б



Заповніть таблицю:

245.

n	1	2	3	4	5
n^4					
4^n					

246.

n	1	2	3	4	5
n^3					
3^n					

Порівняйте значення виразів:

247. а) $(5 \cdot 2)^2$ і $5^2 \cdot 2^2$;

б) $(2 + 3)^3$ і $2^3 + 3^3$;

в) $7^4 - 6^4$ і 5^4 ;

г) $5^3 + 21^3$ і 26^3 .

248. а) $(7 - 5)^2$ і $7^2 - 5^2$;

б) $(10 : 2)^3$ і $10^3 : 2^3$;

в) $14^2 + 19^2$ і 33^2 ;

г) $12^4 - 3^5$ і $12^3 + 3^6$.

Знайдіть значення виразу:

249. $b^4 + b^3 + b^2 + b + 1$, якщо $b = -2$; $b = -1$; $b = 0$; $b = 1$; $b = 2$.

250. $x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x$, якщо $x = -1$; $x = 0$; $x = 2$.

Подайте у вигляді квадрата або куба числа:

251. 27; 144; -125; 216; 0,125; 0,001; $\frac{25}{81}$; $6\frac{1}{4}$; $-3\frac{3}{8}$.

252. 64; 1000; -8; 6,25; 0,008; $-\frac{27}{125}$; $1\frac{11}{25}$.

253. Доведіть, що вираз набуває лише додатних значень:

а) $a^2 + 1$; б) $a^{10} + 5$; в) $(a - 2)^2 + 2$; г) $(a + 4)^4 + 0,5$.



254. Знайдіть значення виразу, якщо $a = 0$; $a = 1$; $a = -1$:

а) $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{99} + a^{100}$ (ця сума має 100 доданків, кожен з яких є степенем числа a ; показники степенів — усі натуральні числа від 1 до 100 включно);

б) $a + a^2 + a^3 + \dots + a^{98} + a^{99}$; в) $aa^2a^3 \dots a^{99}a^{100}$; г) $aa^2a^3 \dots a^{98}a^{99}$.

255. Знайдіть найменше значення виразу:

а) $a^2 + 1$; б) $a^4 - 2$; в) $(a - 1)^2 + 12$; г) $(2a + 2)^4 - 5$.

Для якого значення a значення виразу є найменшим?

256. а) Доведіть, що вирази $x^2 + (x + 1)^2$ і $x^4 + |x + 1|$ набувають лише додатних значень.

б) Розв'яжіть рівняння: $x^2 + (x + 1)^2 = 0$; $x^4 + |x + 1| = -1$.

257. Знайдіть останню цифру числа 987^{987} .



258. Розв'яжіть рівняння:

а) $5x - 3 = 3x + 17$;

б) $7x + 32 = 12x + 25$;

в) $2(x - 11) - 5(5 - 2x) = -23$;

г) $8(-3x + 4) + 14(3 + 2x) = 4 + 2x$.

259. Футбольна команда у 15 матчах набрала 23 очка, програвши 6 матчів. У скількох матчах команда здобула перемогу і скільки матчів зіграла внічию? (За перемогу команді нараховується 3 очка, за нічию — 1 очко, за поразку — 0 очок.)

260. Середнє арифметичне трьох чисел дорівнює -8 . Перше число на 5 більше від другого, а друге — на 1 менше від третього. Знайдіть ці числа.

8. Властивості степеня з натуральним показником

1. Множення степенів з однаковими основами.

Розглянемо добутки двох степенів з основою a . Врахувавши, що $a^1 = a$, матимемо:

$$a^1 a^1 = aa = a^2 = a^{1+1}; \quad a^2 a^1 = (aa)a = aaa = a^3 = a^{2+1}.$$

Отже, $a^1 a^1 = a^{1+1}$, $a^2 a^1 = a^{2+1}$. У цих прикладах добуток степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією ж основою і показником, який дорівнює сумі показників степенів. Таку властивість має добуток будь-яких степенів з однаковими основами.

Властивість 1

Для будь-якого числа a й довільних натуральних чисел m і n справджується рівність

$$a^m a^n = a^{m+n}.$$

- *Доведення.* Врахувавши означення степеня, матимемо:

$$a^m a^n = \underbrace{(aa\dots a)}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{(aa\dots a)}_{n \text{ разів}} = \underbrace{(aa\dots a)}_{m+n \text{ разів}} = a^{m+n}. \bullet$$

Із властивості 1, яку ще називають *основною властивістю степеня*, випливає *правило множення степенів*:

Щоб перемножити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів додати.

Наприклад:

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3} = 3^5; \quad 2^4 \cdot 2 = 2^4 \cdot 2^1 = 2^{4+1} = 2^5; \quad b^7 \cdot b^8 = b^{7+8} = b^{15}.$$

Правило множення степенів поширюється на добуток трьох і більше степенів. Наприклад:

$$5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 = 5^{2+4+6} = 5^{12}; \quad b^5 \cdot b^3 \cdot b^7 \cdot b = b^{5+3+7+1} = b^{16}.$$

2. Ділення степенів з однаковими основами.

Розглянемо рівність $a^2 a^3 = a^5$, де $a \neq 0$. Із цієї рівності за означенням частки маємо: $a^5 : a^3 = a^2$. Рівність $a^5 : a^3 = a^2$ можна переписати так:

$$a^5 : a^3 = a^{5-3}.$$

У цьому прикладі частка степенів з однаковими основами дорівнює степеню з тією ж основою й показником, який дорівнює різниці показника степеня діленого й показника степеня дільника. Сформулюємо й доведемо відповідну властивість у загальному випадку.

Властивість 2

Для будь-якого числа $a \neq 0$ та довільних натуральних чисел m і n , де $m > n$, справджується рівність

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

- *Доведення.* Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n} \cdot a^n = a^m$, то за означенням частки маємо: $a^m : a^n = a^{m-n}$. •

З доведеної властивості випливає *правило ділення степенів*:

Щоб поділити степені з однаковими основами, потрібно основу залишити ту саму, а від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника.

Наприклад: $3^7 : 3^2 = 3^{7-2} = 3^5$; $x^4 : x = x^4 : x^1 = x^{4-1} = x^3$.

3. Піднесення степеня до степеня.

Піднесемо степінь a^2 до куба:

$$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{2+2+2} = a^{2 \cdot 3}.$$

Отже, $(a^2)^3 = a^{2 \cdot 3}$. Із прикладу видно: щоб піднести квадрат числа до куба, потрібно залишити ту ж основу й узяти показник, який дорівнює добутку показників. Сформулюємо й доведемо відповідну властивість у загальному випадку.

Властивість 3

Для будь-якого числа a та довільних натуральних чисел m і n справджується рівність

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

• *Доведення.*

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \dots a^m}_{n \text{ разів}} = a^{\overbrace{m+m+\dots+m}^{n \text{ разів}}} = a^{mn}. \bullet$$

Із властивості 3 випливає *правило піднесення степеня до степеня*:

Щоб піднести степінь до степеня, потрібно основу залишити ту саму, а показники степенів перемножити.

Наприклад: $(4^3)^5 = 4^{3 \cdot 5} = 4^{15}$; $(b^6)^4 = b^{6 \cdot 4} = b^{24}$.

4. Піднесення добутку до степеня.

Піднесемо добуток ab до куба:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3 b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3 b^3$. Із прикладу видно: щоб піднести до куба добуток, потрібно піднести до куба кожний множник і результати перемножити. Сформулюємо й доведемо відповідну властивість у загальному випадку.

Властивість 4

Для будь-яких чисел a та b і довільного натурального числа n справджується рівність

$$(ab)^n = a^n b^n.$$

• *Доведення.*

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ разів}} = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{bb \dots b}_{n \text{ разів}} = a^n b^n. \bullet$$

Маємо таке правило:

Щоб піднести до степеня добуток, досить піднести до цього степеня кожний множник і результати перемножити.

Це правило поширюється на добуток трьох і більше множників. Наприклад:

$$(5ab)^3 = 5^3 a^3 b^3 = 125a^3b^3; \quad (abxy)^n = a^n b^n x^n y^n.$$

Зауваження. Доведені тотожності $a^m a^n = a^{m+n}$, $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a^m)^n = a^{mn}$, $(ab)^n = a^n b^n$, які виражають властивості степеня, дозволяють не тільки замінювати вирази, що стоять у їхніх лівих частинах, виразами, що стоять у правих частинах, а й навпаки:

$$a^{m+n} = a^m a^n; \quad a^{m-n} = a^m : a^n; \quad a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m; \quad a^n b^n = (ab)^n.$$

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Спростити вираз $(a^2 a)^3 \cdot (a^3 a^2)^2$.

- $(a^2 a)^3 \cdot (a^3 a^2)^2 = (a^3)^3 \cdot (a^5)^2 = a^9 a^{10} = a^{19}$. •

Приклад 2. Обчислити:

а) $0,3^6 : 0,3^4 + 0,1^4 : 0,1$;

б) $2,5^5 \cdot 2^6 \cdot 0,4^5$.

- а) $0,3^6 : 0,3^4 + 0,1^4 : 0,1 = 0,3^2 + 0,1^3 = 0,09 + 0,001 = 0,091$;

- б) $2,5^5 \cdot 2^6 \cdot 0,4^5 = (2,5^5 \cdot 0,4^5) \cdot 2^6 = (2,5 \cdot 0,4)^5 \cdot 2^6 = 1^5 \cdot 2^6 = 64$. •

Приклад 3. Подати 4^{18} у вигляді степеня з основою 4^2 ; 4^3 ; 4^6 ; 4^9 .

- $4^{18} = 4^{2 \cdot 9} = (4^2)^9$; $4^{18} = (4^3)^6$; $4^{18} = (4^6)^3$; $4^{18} = (4^9)^2$. •

Приклад 4. Подати у вигляді степеня добуток $a^6 b^6$.

- $a^6 b^6 = (ab)^6$. •

Усно

261. Подайте у вигляді степеня добутки:

а) $b^4 b^3$; $c^3 c$; $7^2 \cdot 7^5$; $3^{10} \cdot 3$; б) $a^2 a^3 a^4$; $2 \cdot 2^3 \cdot 2^4$.

262. Подайте у вигляді степеня частки:

а) $a^6 : a^2$; $b^8 : b^3$; б) $7^{20} : 7^{17}$; $11^8 : 11$.

263. Піднесіть до степеня:

а) $(m^3)^4$; $(n^{10})^2$; $(b^{15})^4$; б) $(pq)^2$; $(2b)^3$; $(abc)^4$.

Рівень А



Подайте у вигляді степеня добутки:

264. а) $a^5 a^2$; б) $b^4 b^6$; в) xy^7 ; г) $x^{25} x^{73}$;
 д) $2^8 \cdot 2^{12}$; е) $0,3^{15} \cdot 0,3$; є) $5^3 \cdot 5 \cdot 5^4$; ж) $3^4 \cdot 3 \cdot 3^6 \cdot 3$.

265. а) $m^3 m^6$; б) $y^7 y^5$; в) $c^5 c$; г) $b^{15} b^{25}$;
 д) $10^5 \cdot 10^{10}$; е) $2,5 \cdot 2,5^3$; є) $2 \cdot 2^2 \cdot 2^7$; ж) $a^2 a^4 a a^2$.

Подайте у вигляді степеня частку:

266. а) $x^{10} : x^3$; б) $a^{15} : a^5$; в) $5^{28} : 5^{21}$; г) $0,1^8 : 0,1^2$.
 267. а) $c^{12} : c^9$; б) $b^{26} : b^8$; в) $4^{17} : 4^{15}$; г) $0,7^{10} : 0,7^4$.

268. Подайте степінь b^{15} у вигляді добутку двох степенів з основою b чотирма способами.

269. Подайте степінь x^{12} у вигляді добутку двох степенів, одним з яких є: x ; x^2 ; x^4 ; x^7 ; x^9 .

270. а) Подайте у вигляді степеня з основою b : $(b^3)^3$; $(b^4)^5$; $(b^5)^7$; $(b^{25})^4$.
 б) Подайте у вигляді степеня з основою ab : $a^3 b^3$; $a^5 b^5$.

271. а) Подайте у вигляді степеня з основою m : $(m^5)^3$; $(m^2)^7$; $(m^5)^4$.
 б) Подайте у вигляді степеня з основою mn : $m^2 n^2$; $m^7 n^7$.

Піднесіть до степеня:

272. а) $(ab)^5$; б) $(4c)^2$; в) $(-2x)^3$; г) $(-0,1a)^2$;
 д) $(3xy)^3$; е) $(-2mn)^5$; є) $(mnk)^8$; ж) $(4abcd)^4$.
 273. а) $(st)^7$; б) $(-3b)^3$; в) $(-2mn)^4$; г) $(5klm)^3$.

Знайдіть значення виразу:

274. а) $5^8 : 5^5$; б) $0,2^9 : 0,2^7$; в) $(-2)^7 : (-2)^4$; г) $(3^2)^3 : 3^4$;
 д) $8^7 : 8^5 - 3^2 \cdot 3$; е) $1,5^9 : 1,5^8 - 0,5^2$.
 275. а) $4^{18} : 4^{15}$; б) $0,5^8 : 0,5^6$; в) $3^5 : 3^2 + 4^6 : 4^4$; г) $(10^2)^2 - 5^6 : 5^3$.

Рівень Б



Подайте у вигляді степеня:

276. а) $2^4 \cdot 16$; б) $3^7 : 27$; в) $0,5^4 \cdot 0,25$; г) $0,001 \cdot 0,1^5$.
 277. а) $9^3 \cdot 81$; б) $64 \cdot 2^3$; в) $3^{10} : 81$; г) $1,21 \cdot 1,1^4$.

Знайдіть значення виразу:

278. а) $2^4 \cdot 5^4$; б) $4^3 \cdot 25^3$; в) $0,5^6 \cdot 2^6$; г) $1,25^5 \cdot 2^5 \cdot 4^5$;

д) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{10} : \left(1\frac{2}{3}\right)^7$;

е) $16^3 : (4^{12} : 8^4)$;

є) $(0,5^{18} : 0,5^6) \cdot (2^{16} : 2^4)$;

ж) $\left(2\frac{3}{7}\right)^5 : \left(2\frac{3}{7}\right)^3 - \left(\frac{3}{7}\right)^2$.

279. а) $5^3 \cdot 2^3$; б) $8^2 \cdot 125^2$; в) $0,25^9 \cdot 2^9 \cdot 2^9$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)^{11} : \left(\frac{3}{4}\right)^8$;

д) $(27^8 : 9^5) : (9^4 \cdot 3^2)$;

е) $\left(1\frac{1}{3}\right)^2 - \left(3\frac{1}{3}\right)^8 : \left(3\frac{1}{3}\right)^6$.

280. а) Подайте z^{20} у вигляді степеня з основою $z^2; z^4; z^5; z^{10}$.
 б) Подайте 2^{20} у вигляді степеня з основою 4; 16; 32.
281. а) Подайте c^{12} у вигляді степеня з основою $c^2; c^3; c^4; c^6$.
 б) Подайте 3^{12} у вигляді степеня з основою 9; 27; 81.
282. Подайте у вигляді степеня з основою a :
 а) $a^m a^2$; б) aa^k ; в) $(a^m)^2$; г) $(a^3)^k$.

Спростіть вираз:

283. а) $(a^3 a^4)^5$; б) $(a^7 : a)^3$; в) $(a^2)^3 \cdot (a^4)^4$; г) $(a^5)^5 : (aa^4)^2$.
284. а) $(a^5 a^6)^2$; б) $(a^8 : a^5)^5$; в) $(a^4)^2 \cdot (a^2)^4$; г) $(a^6)^3 : (a^3)^2$.

Рівень В



285. Подайте у вигляді степеня з основою a :
 а) $(a^m \cdot a^3)^n$; б) $(a^k \cdot a^k)^n$; в) $(a^{n+2} : a)^k$; г) $(a^2)^m \cdot (a^3)^k$.
286. Доведіть, що куб натурального числа, кратного 3, ділиться на 27.
287. Що більше: 2^{300} чи 3^{200} ?
288. Обчисліть: $\left(1\frac{1}{3}\right)^8 : \left(1\frac{7}{9}\right)^3 - \left(1\frac{1}{3}\right)^9 \cdot \left(-\frac{27}{64}\right)^3$.
289. Доведіть, що значення виразу $43^{43} \cdot 42^{43} - 33^{33} \cdot 37^{33}$ ділиться на 5.

Вправи для повторення

290. Спростіть вираз:
 а) $2x - 3 - (3x + 1)$; б) $6a + 3 - 2(a - 2)$;
 в) $-2(b - 1) + 3(5 - 2b) - 17$; г) $5(-3c + 5) + 4(3 - c) - 4 + 19c$.
291. Скільки одержимо числових виразів, якщо у виразі $2x - 5y$ змінній x надаватимемо значень 1, 3, 5, 7 або 9, а змінній y — значень 2, 4, 6 або 8?
292. Автомобіль проїхав деякий шлях за 1,5 год, рухаючись зі сталою швидкістю. Якби він їхав на 12 км/год швидше, то проїхав би цей шлях за 1,3 год. Який шлях проїхав автомобіль?
293. З басейну через дві труби випустили 450 м^3 води за 50 хв. Щохвилини через першу трубу виливалося води в 1,25 разу більше, ніж через другу. Скільки води витекло через першу трубу?

9. Одночлен та його стандартний вигляд

1. Одночлени. Розглянемо дві групи виразів:

$$a, b^3, 5, 3^2, 9ab^2, -2x^4y^3, \frac{3}{7}m^2n;$$

$$3 + 2a, a - b, 5 + x^2.$$

Яка особливість виразів першої групи? Чим вони відрізняються від виразів другої групи?

Вирази першої групи — це змінні, числа, їхні степені й добутки. Такі вирази називають *одночленами*. У загальному вигляді *одночлен* — це *добуток чисел, змінних та їхніх степенів*.

Вирази другої групи не є одночленами, бо містять дії додавання або віднімання.

Розглянемо одночлен $-4a^2b^3$. Він містить тільки один числовий множник, який стоїть на першому місці, і степені різних змінних. Такий одночлен називають *одночленом стандартного вигляду*.

Одночленом стандартного вигляду називають такий одночлен, який містить тільки один числовий множник, що стоїть на першому місці, і степені різних змінних.

Числовий множник одночлена стандартного вигляду називають *коефіцієнтом* одночлена. Коефіцієнт одночлена $-4a^2b^3$ дорівнює -4 . Вважають, що коефіцієнти одночленів a^3 і $-bc$ відповідно дорівнюють 1 і -1 , бо $a^3 = 1 \cdot a^3$ і $-bc = -1 \cdot bc$.

Одночлен $5a^3b^2a^4$ не є одночленом стандартного вигляду, бо містить два степені з основою a . Помноживши a^3 на a^4 , цей одночлен можна записати у вигляді одночлена стандартного вигляду: $5a^3b^2a^4 = 5(a^3a^4)b^2 = 5a^7b^2$.

2. Множення одночленів. Перемножимо одночлени $-3a^2b$ і $4ab^3$. Використовуючи властивості дії множення і властивості степенів, матимемо:

$$-3a^2b \cdot 4ab^3 = (-3 \cdot 4) \cdot (a^2a) \cdot (bb^3) = -12a^3b^4.$$

Отже, добутком одночленів $-3a^2b$ і $4ab^3$ є одночлен $-12a^3b^4$. Взагалі, добутком будь-яких одночленів є одночлен.

3. Піднесення одночлена до степеня. Піднесемо одночлен $-5a^2b$ до куба. Використовуючи властивості степенів, матимемо:

$$(-5a^2b)^3 = (-5)^3 \cdot (a^2)^3 \cdot b^3 = -125a^6b^3.$$

Отже, кубом одночлена $-5a^2b$ є одночлен $-125a^6b^3$. Взагалі, натуральним степенем будь-якого одночлена є одночлен.

4. Степінь одночлена. В одночлена $3a^2bx^3$ сума показників степенів усіх змінних дорівнює $2 + 1 + 3 = 6$. Цю суму називають *степенем одночлена*, кажуть, що $3a^2bx^3$ — одночлен шостого степеня.

Степенем одночлена називають суму показників степенів усіх змінних, що входять до нього. Якщо одночленом є число, відмінне від нуля, то вважають, що степінь такого одночлена дорівнює нулю.

Наприклад: $-a^2b^7$ — одночлен дев'ятого степеня; $2a^2$ — одночлен другого степеня; $3x$ — одночлен першого степеня; -2 — одночлен нульового степеня.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Записати вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

а) $6ab^2 \cdot (-4ab)$; **б)** $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3$; **в)** $(-x^2y \cdot 4xy^2)^3$.

• **а)** $6ab^2 \cdot (-4ab) = (6 \cdot (-4)) \cdot (aa) \cdot (b^2b) = -24a^2b^3$.

Скорочений запис: $6ab^2 \cdot (-4ab) = -24a^2b^3$.

б) $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3 = (-3 \cdot 4 \cdot 3) \cdot (a^3a^2) \cdot b \cdot (cc^3) = -36a^5bc^4$.

Скорочений запис: $-3a^3b \cdot 4a^2c \cdot 3c^3 = -36a^5bc^4$.

в) $(-x^2y \cdot 4xy^2)^3 = (-4x^3y^3)^3 = -64x^9y^9$. •

Приклад 2. Подати одночлен $4a^4b^6$ у вигляді:

а) добутку двох одночленів стандартного вигляду;

б) добутку двох одночленів, одним з яких є $2a^2b^2$;

в) квадрата одночлена стандартного вигляду.

• **а)** $4a^4b^6 = 4a^2b^4 \cdot a^2b^2$ (або $4a^4b^6 = 4a^4 \cdot b^6$, $4a^4b^6 = -2ab \cdot (-2a^3b^5)$ тощо);

б) $4a^4b^6 = 2 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot b^2 \cdot b^4 = 2a^2b^2 \cdot 2a^2b^4$;

в) $4a^4b^6 = (2a^2b^3)^2$. •

Усно

294. Які з наведених виразів є одночленами:

а) $\frac{a}{b}$;

б) $-3abc$;

в) $\frac{1}{2}a$;

г) $a + b$;

д) $-m$;

е) $0,3$;

є) $3a^3bc^3ab$;

ж) $b^?$

295. Назвіть одночлени стандартного вигляду та їхні коефіцієнти:

$2a^2ba$; $52ab$; $0,03ac^4$; x ; $-y$; $1,4a$; $4,8$; $5ab \cdot 3cd$.

296. Знайдіть степінь одночленів:

$4a^2b^2$; x^3y^5 ; $0,1a^2b^3c^4$; $7xy^2$; $6a^2$; $-y^3$; $4a$; cd ; 15 .

297. Перемножте одночлени:

а) $2a$ і $3b$;

б) $4c^2$ і $2c$;

в) $5a^2b$ і ab ;

г) $-xy^2$ і $2x$.

Рівень А



Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь і коефіцієнт:

298. а) $4x^2yx$; б) $5abc \cdot (-2)$; в) $0,4a^2 \cdot 4a^3b$; г) $-ab \cdot bc$;
 д) $\frac{1}{3}x^3y^2 \cdot 3x$; е) $-5c^3d \cdot 0,8c^2d$; є) $0,7c \cdot 4c \cdot c^2$; ж) $-6abc \cdot \frac{1}{3}b^3$.
299. а) $14y^5y$; б) $-0,3cc^3c$; в) $-\frac{2}{3}ab \cdot 3a^2$; г) $0,5aa^3 \cdot 2aa^2$.

Виконайте множення одночленів:

300. а) $5a \cdot 4b$; б) $-3a^2 \cdot 5a^3$; в) $0,3a^2b \cdot 2b$;
 г) $-4ax^2 \cdot 3bx^3$; д) $\frac{2}{3}m^3n \cdot (-6mn^2)$; е) $8a^2bc^2 \cdot (-\frac{1}{2}bc)$;
 є) $-4,3ax \cdot (-2a^2) \cdot 5x$; ж) $xy \cdot (-5xy^2) \cdot (-4)$; з) $-3cd \cdot (-2dc^2) \cdot cd$.
301. а) $2m \cdot 12mn^5$; б) $-cd \cdot 8c^4d$; в) $7a^3b^2c \cdot 0,8abc^3$;
 г) $-6n^3k \cdot (-\frac{2}{9})k$; д) $-ab \cdot (-5ab^2) \cdot 2b$; е) $1,5xy \cdot (-2x^2y^3) \cdot x^2y$.

Піднесіть одночлен до степеня:

302. а) $(3a^3b)^3$; б) $(-2mn^2)^4$; в) $(\frac{1}{2}x^2y^3)^3$; г) $(-0,5mn^3k^4)^2$.
303. а) $(-5mn^2)^2$; б) $(3a^3b^6)^3$; в) $(-xy^2z^3)^5$; г) $(2ab^4c^3)^4$.
304. Подайте одночлен $8x^2y^3$ у вигляді:
 а) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
 б) добутку двох одночленів, одним з яких є: $4x^2y^2$; $8xy$; $-2xy^3$.
305. Подайте одночлен $6b^3c^3$ у вигляді:
 а) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
 б) добутку двох одночленів, одним з яких є: $2b^2c^2$; $6bc$; $-3bc^3$.

Рівень Б



Спростіть вираз:

306. а) $1,5a^3b^3 \cdot (-\frac{5}{6}a^4b^2)$; б) $(3a^2b)^3 \cdot 0,01b^2$;
 в) $0,8xy^3 \cdot 2\frac{1}{2}x^3y^5 \cdot (-0,5x)$; г) $(-4a^2b^3)^2 \cdot (-ab^3)^2$;
 д) $(\frac{1}{3}mn^2)^4 \cdot (3m^3)^2 \cdot (-4,5)$; е) $4,4(a^2bc)^3 \cdot (-\frac{1}{2}b^2c)^2 \cdot ac^2$.

307. а) $15m^3n \cdot \left(-1\frac{2}{3}mn^2\right)$; б) $-\frac{1}{7}p^3q \cdot 2,1pq^2 \cdot \frac{1}{3}p$;
 в) $(-a^2b)^3 \cdot (-3a^3b)^2$; г) $\left(\frac{2}{3}xy^2z\right)^2 \cdot \left(-1\frac{1}{2}x^2z\right)^3 \cdot xyz$.

308. Як зміниться площа квадрата, якщо його сторону збільшити втричі?

309. Як зміниться об'єм куба, якщо його ребро збільшити удвічі?

310. Подайте одночлен $64a^6b^{18}$ у вигляді:

- а) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
 б) добутку трьох одночленів стандартного вигляду;
 в) добутку двох одночленів, одним з яких є $-4a^4b^6$;
 г) квадрата одночлена стандартного вигляду;
 д) куба одночлена стандартного вигляду.

311. Подайте одночлен $16x^{12}y^8$ у вигляді:

- а) добутку трьох одночленів стандартного вигляду;
 б) добутку двох одночленів, одним з яких є $-2x^3y^7$;
 в) квадрата одночлена стандартного вигляду;
 г) четвертого степеня одночлена стандартного вигляду.

312. Для деяких значень змінних значення виразу m^2n^3 дорівнює 2. Знайдіть для тих же значень змінних значення виразу:

а) $6m^2n^3$; б) m^4n^6 ; в) $4m^8n^{12}$; г) $-3m^6n^9$.

Знайдіть значення виразу:

313. а) $(2a^2b)^2 \cdot ab^3$, якщо $a = 2$; $b = 5$;

б) $(xy^2z)^3 \cdot xzy^8$, якщо $x = \frac{1}{7}$; $y = -1$; $z = 7$;

в) $(a^2bc^2)^2 \cdot abc \cdot b^2$, якщо $a = 1\frac{1}{3}$; $b = -0,5$; $c = 3$.

314. а) $(-mn^2)^3 \cdot 10m^4n$, якщо $m = 4$; $n = 0,25$;

б) $(2abc^4)^2 \cdot 0,25(ab)^6$, якщо $a = 1\frac{3}{7}$; $b = 14$; $c = -0,1$.

Рівень В



315. Подайте одночлен у стандартному вигляді:

а) $4((x^2)^3)^4 \cdot (-2(x^4)^3)^2$; б) $((x^4)^n)^3 \cdot 2((x^2)^n)^5$;

в) $(a^{n+1} \cdot b^{2n})^2 \cdot 2a^{2n} \cdot (2b)^2$; г) $((-x)^n)^3 \cdot ((-x)^{n+1})^5$.

316. Знайдіть значення виразу:

а) $(-4xy^2)^{2n} \cdot (4x^3y^2)^{2n}$, якщо $x = -\frac{1}{4}$; $y = 2$; $n = 80$;

б) $(5^k a^{k+1} b^{k+2})^2 \cdot (5ab)^k$, якщо $a = 0,1$; $b = 2$; $k = 51$.

317. Мило має форму прямокутного паралелепіеда. За тиждень користування всі його розміри зменшилися удвічі. У скільки разів зменшився об'єм мила?

Вправи для повторення

318. Розв'яжіть рівняння:

а) $2(x - 1) + 3(2 - x) = 2$;

б) $\frac{x+3}{12} - \frac{x-3}{8} = \frac{2}{3}$.

319. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

а) $7c - 5 + (3c + 1 - 8c)$;

б) $2a + 8 - (3a + 12 - 6a)$;

в) $(-2b + 4) - (4b - 1) + 6b$;

г) $(-3x + 5) - (3 - x) - (2 + 2x)$.

320. Для купівлі телевізора сім'я відкладала щомісяця одну й ту ж суму грошей. Після того як через 10 місяців необхідна сума була зібрана, підрахували, що якби щомісяця відкладали на 25 грн. більше, то зібрати необхідну суму грошей можна було б на 2 місяці раніше. Скільки коштує телевізор?

321. З міста A до міста B вийшов поїзд і йшов зі швидкістю 60 км/год, а через 3 год назустріч йому з міста B вийшов другий поїзд і йшов швидкістю 75 км/год. Коли поїзди зустрілися, з'ясувалося, що перший пройшов на 105 км більше, ніж другий. Знайдіть відстань між містами A та B .

322*. Числа a і b задовольняють умови: $a > 0$; $a + b < 0$.

а) Знайдіть знак числа b .

б) Що більше: $|a|$ чи $|b|$?

Цікаво знати



Поняття степеня з натуральним показником виникло ще в античні часи у зв'язку з обчисленням площ і об'ємів. Тлумачення степенів a^2 і a^3 було геометричним: a^2 — це площа квадрата зі стороною a , a^3 — об'єм куба з ребром a . Звідси і назви «квадрат» і «куб» для степенів a^2 і a^3 , які використовуються й досі. Щоправда, така геометрична прив'язка в ті часи послужила гальмом для розвитку алгебри. Степені a^4 («квадрато-квадрат»), a^5 («кубо-квадрат») і т. д. залишалися ніби «поза законом», оскільки не мали відповідного геометричного підґрунтя.

Лише у XVII ст. французький математик **Рене Декарт** (1596–1650) дав геометричне тлумачення добутку довільної кількості множників, після

чого й добуток $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n = a^n$ набув «офіційного статусу». Декарт же увів і сучасне позначення степеня з натуральним показником у вигляді a^n .

Запитання і вправи для повторення § 3

1. Що називають степенем числа з натуральним показником?
2. Наведіть приклад степеня з натуральним показником та назвіть його основу й показник.
3. Який знак має степінь з натуральним показником залежно від знака основи?
4. Сформулюйте й доведіть основну властивість степеня.
5. Сформулюйте й доведіть правила множення та ділення степенів з однаковими основами, піднесення добутку до степеня та піднесення степеня до степеня.
6. Наведіть приклади одночленів. З чого складається одночлен?
7. Який одночлен називають одночленом стандартного вигляду? Наведіть приклад такого одночлена.
8. Як знайти степінь одночлена?

323. Знайдіть значення степеня:

- а) 10^4 ; б) $(-3)^6$; в) $(-0,5)^3$; г) $(-2,4)^3$;
 д) $1,02^4$; е) $\left(\frac{2}{3}\right)^3$; є) $\left(-\frac{2}{5}\right)^4$; ж) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$.

324. Обчисліть:

- а) $(-4) \cdot 2^4$; б) $(-4) \cdot (-2^4)$; в) $5^2 \cdot (-2)^3$; г) $5^3 \cdot (-6^3)$;
 д) $(7^2 - 3^2)^2$; е) $(-4 \cdot 1,5 + 8)^5$; є) $2^8 + (-2)^5$; ж) $(-0,125 \cdot 2^3)^{15}$.

325. Знайдіть значення виразу:

- а) $a^4 - 81$, якщо $a = -3$; $a = 0$; $a = 3$;
 б) $(2x - 3)^3$, якщо $x = -1$; $x = 3$.

326. а) Подайте у вигляді квадрата число: 64; 169; 1,44; 0,0001; $\frac{49}{121}$; $7\frac{1}{9}$.

б) Подайте у вигляді куба число: 64; 1000; -27; 0,008; $-\frac{125}{216}$; $3\frac{3}{8}$.

Подайте вираз у вигляді степеня:

327. а) $a^3 a^5$; б) $b^9 : b^8$; в) $u u^8$; г) $a^5 a a^4$;
 д) $6^4 \cdot 6^{21}$; е) $(p^2)^5$; є) $(7^5)^4$; ж) $(5^3 : 5)^7$.

328. Подайте степінь 3^{24} у вигляді добутку двох степенів, одним з яких є: 3^2 ; 3^4 ; 3^9 ; 3^{15} .

329. а) Подайте степінь a^{36} у вигляді степеня з основою a^2 ; a^3 ; a^9 ; a^{12} .

б) Подайте степінь 4^{18} у вигляді степеня з основою 2; 16; 8.

330. Піднесіть одночлен до степеня:

а) $(xy)^4$; б) $(6a)^3$; в) $(-3x^2)^4$; г) $(-0,5a^4c^2)^2$.

331. Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь:

а) $-2a^4ba$; б) $0,5b^2 \cdot 2a^3b$; в) $-3x^3 \cdot \frac{1}{3}xy^2$;
 г) $-4a^2 \cdot 7a^5b \cdot 4b^3$; д) $2,5xz \cdot (-4x^3z^3) \cdot x^2z$; е) $(3a^3b^4c^5d)^4$;
 є) $1,2a^2b^3 \cdot \left(-\frac{1}{6}a^3b^2\right)$; ж) $7\frac{1}{2}x^2y^4 \cdot \left(-1\frac{1}{3}xy\right)$; з) $(-4m^2n^5)^3 \cdot (-2mn^3)^2$.

332. Подайте одночлен $49a^4b^{12}$ у вигляді:

- а) добутку двох одночленів стандартного вигляду;
 б) добутку двох одночленів, одним з яких є $-7a^3b^7$;
 в) квадрата одночлена стандартного вигляду.

333. Знайдіть значення виразу:

а) $(3x^2y)^3 \cdot y^3$, якщо $x = 2$; $y = 0,5$;
 б) $(a^2bc)^2 \cdot 5abc^3$, якщо $a = 1\frac{1}{6}$; $b = -4$; $c = \frac{6}{7}$.

334*. Спростіть вираз:

а) $(a^4)^{2n} \cdot (a^4a^{n+2})^2$; б) $(-2y^k)^8 \cdot (-y^3)^5$;
 в) $2^{2n} \cdot 3^n \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^n$; г) $(2 \cdot (-1)^n)^3 \cdot (2 \cdot (-1)^{n+2})^5$.

335*. Якою цифрою закінчується число 3^{81} ?

336*. Що більше: 80^{20} чи 9^{40} ?

337*. Розв'яжіть рівняння:

а) $(2x)^2 + (256x)^8 = 0$; б) $(x-2)^2 + (x+2)^2 = 0$; в) $x^6 + |3x| = 0$.

Завдання для самоперевірки № 3

Рівень 1

1. Яка з рівностей є правильною:

а) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5 \cdot 3$; б) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 5^3$; в) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5$?

2. Вкажіть правильну рівність:

а) $2^5 = 10$; б) $2^5 = 32$; в) $2^5 = 25$; г) $2^5 = 16$.

3. Вкажіть правильну рівність:

а) $2^4 \cdot 2^3 = 2^{12}$; б) $2^4 \cdot 2^3 = 4^{12}$; в) $(3^2)^3 = 6^3$; г) $(3^2)^3 = 3^6$.

4. Подайте одночлен $-3x^2y^5$ у стандартному вигляді:

а) $-3yx^2x^5$; б) $-3x^{10}y$; в) $-3x^7y$; г) $-3(xy)^7$.

§ 4. МНОГОЧЛЕНИ

10. Многочлен і його стандартний вигляд

1. Многочлени. Вираз $2a^2 - 3ab - 2b + 5$ є сумою одночленів $2a^2$, $-3ab$, $-2b$ і 5 . Такий вираз називають *многочленом*.

Означення | Многочленом називають суму кількох одночленів.

Одночлени, які складають многочлен, називають *членами* цього многочлена.

Наприклад, членами многочлена $2a^2 - 3ab - 2b + 5$ є $2a^2$, $-3ab$, $-2b$ і 5 .

Многочлен, який складається з двох членів, називають двочленом, многочлен, який складається із трьох членів, — тричленом і т. д. Так,

$a^2 + b$, $2x - 3$ — двочлени;

$a^2 - ab + b^2$, $x + 2y - 1$ — тричлени.

Вважають, що кожний одночлен є многочленом, який складається з одного члена.

2. Многочлен стандартного вигляду. Розглянемо многочлен $4xy - 6 + y - 2xy + 3$. Два його члени $4xy$ і $-2xy$ є подібними доданками, бо відрізняються лише числовими множниками. Члени -6 і 3 не містять змінних. Вони також є подібними доданками. Подібні доданки многочлена називають *подібними членами* многочлена.

Зведемо у многочлені $4xy - 6 + y - 2xy + 3$ його подібні члени:

$$4xy - 6 + y - 2xy + 3 = (4xy - 2xy) + y + (-6 + 3) = 2xy + y - 3.$$

Многочлен $2xy + y - 3$ вже не має подібних членів, і кожний його член є одночленом стандартного вигляду. Такий многочлен називають *многочленом стандартного вигляду*.

Означення | Многочлен, який є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних членів, називають *многочленом стандартного вигляду*.

Серед многочленів

$$a^2 + 4ab - 3b^2,$$

$$x^2yx - 2,$$

$$4ab + 2b^2 - ab$$

лише перший є многочленом стандартного вигляду, а два інші — ні, бо у другого многочлена перший член не є одночленом стандартного вигляду, а третій многочлен має подібні члени.

3. Степінь многочлена. Многочлен $2x^2y^2 + y^3 - 2x$ має стандартний вигляд, і його членами є одночлени відповідно четвертого, третього і першого степенів. Найбільший із цих степенів називають степенем даного многочлена. Отже, $2x^2y^2 + y^3 - 2x$ — многочлен четвертого степеня.

Означення

Степенем многочлена стандартного вигляду називають найбільший із степенів одночленів, які утворюють даний многочлен.

За цим означенням $2a + 1$ і $3x - 4y + 3$ — многочлени першого степеня; $ab - 3a^2 + b$ — многочлен другого степеня; $-x^2y^4 + x^3 + 2y$ — многочлен шостого степеня.

Члени многочлена можна записувати в довільній послідовності. Для многочленів стандартного вигляду, які містять одну змінну, члени, як правило, упорядковують за спаданням або зростанням показників степенів. Наприклад:

$$5x^4 + x^3 - 4x^2 + 3x + 2; \quad 2 + 3x - 4x^2 + x^3 + 5x^4.$$

Кожний многочлен є цілим виразом. Однак не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $2(a + 5)$, $(a - b)^2$ — не многочлени, бо вони не є сумами одночленів.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Записати у стандартному вигляді многочлен:

а) $2x^2 + 3xy - 4x^2 + 1 - xy$; б) $a^2b - 2aba + 12 + 4a^2 \cdot 2b - 15$.

• а) $\underline{2x^2} + \underline{3xy} - \underline{4x^2} + 1 - \underline{xy} = -2x^2 + 2xy + 1$;

б) $a^2b - 2aba + 12 + 4a^2 \cdot 2b - 15 = \underline{a^2b} - \underline{2a^2b} + \underline{12} + \underline{8a^2b} - \underline{15} = 7a^2b - 3$. •

Усно

338. Які з наведених виразів є многочленами:

а) $3a^3 + bc^2 - ab$; б) $3x + 5$; в) a ;

г) $a^2 + \frac{1}{2}a$; д) $m(2n - k)$; е) $(x - 3y)^3$;

є) $\frac{2a - 3b}{2c}$; ж) $-2k$; з) $4,5$?

339. Назвіть подібні члени многочлена:

а) $4a - 3 - a + 1,5$; б) $4xy + 4x + 4y$;

в) $3n^2 + 4n - 2n^2 + n - 1$; г) $a^2 + ab + b^2 + ba$.

340. Назвіть многочлени стандартного вигляду та знайдіть їх степені:

а) $c^2 + 4c - 2$; б) $x + y + 1$; в) x ;

г) $6a - a^2 + 5a + 2$; д) $4y - y \cdot 2y$; е) $bc + 3$.

341. Подайте многочлен у стандартному вигляді:

а) $4a + 3 + a - 2$; б) $2aba + 3$; в) $x + y + 2x - y$.

Рівень А



Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:

342. а) $3x - 2 + 2x - 5$; б) $1,2a + a + 3,5 - 2a - 4$;
 в) $4m + 3 + n - 3 - n + 2m$; г) $x^2 + x + 2x^2 - 3x + 3$;
 д) $-3a^3 + 5a^2 - 5a^3 - 3a^2 + 7a$; е) $-b^2 \cdot 5b - 3b^3 + 2b \cdot 3b - 2b^2$.
343. а) $5a + 6 - 3a - 4$; б) $10k + 5,5 - 2,5k - 4,5k$;
 в) $2x^2 + 3x + x^2 - 3x - 3 + 2x$; г) $-2b^3 + 3b + 2b^2 - 3b^3 + b$.
344. Розташуйте члени многочлена за спаданням показників степенів:
 а) $5x - 4x^3 + 5 + x^2 - 3x^4$; б) $3a^6 + 5a - 7a^2 - 2a^4 - 2a^7 - 4$.
345. Розташуйте члени многочлена за зростанням показників степенів:
 а) $6b^3 + 2b - 1 + 3b^4 + b^2$; б) $x^5 + 2x^6 - 3x - 3x^4 + 2 + 8x^8$.

Знайдіть значення многочлена:

346. а) $2a^2 + 3a - 2$, якщо $a = 2$;
 б) $3x - x^2 + 1 + 2x^2 - 3x$, якщо $x = -1, 1$;
 в) $5ab - a^2 + 4ab + a^2$, якщо $a = -0,5$; $b = 4$.
347. а) $4x^2 + 9x - 4x + 2$, якщо $x = 2$;
 б) $2bc + 2,5bc - 3 - 5bc$, якщо $b = 1,5$; $c = -4$.

Рівень Б



Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:

348. а) $4x^2y - 6x^2y - 3 + 0,3x^2y$;
 б) $1,2abc + \frac{5}{6}a^2b - 0,8abc - 1\frac{1}{3}a^2b$;
 в) $3x^2 \cdot 0,4x - 0,9x^3 + x \cdot 4y - 2xy$;
 г) $7a^5b - 4b^5a + 8a^5b - 3a^5 - 5ab^5$.
349. а) $-3,5ab - a^2b + 3 + ab + 3a^2b$; б) $-5c^3d - 2c^2dc + 4\frac{3}{7}c^3d - 1$.

Знайдіть значення многочлена:

350. а) $6x^4 - 4x^2 - 8x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 1$, якщо $x = -1, 2$;
 б) $-4a^2b^3 + 7ab^3 - ab^3a + b^2ab - 8ab^3$, якщо $a = -0,5$; $b = 2$.
351. а) $3a^7 - 3a^4 + 6 - 4a^7 + 5a^4 + a^7$, якщо $a = -3$;
 б) $2m^4n^2 + 4m^2n^2m^2 - 8nm^4n + 4m^2n$, якщо $m = -0,5$; $n = 4$.

Запишіть у вигляді многочлена число, яке має:

352. а) a сотень, b десятків і c одиниць; б) m тисяч, n сотень і k одиниць.
 353. а) a десятків і b одиниць; б) a тисяч, b десятків і c одиниць.

Рівень В



354. Запишіть у вигляді многочлена n -цифрове число, записане за допомогою однієї цифри a .
355. Чи існують такі цілі значення x , для яких значення многочлена $4x^2 + 2x + 11$ є парним числом?
356. Доведіть, що для цілих значень x значення многочлена $x^5 - 6x^2 + 1$ не дорівнює нулю.
357. Семицифрове число ділиться на 7. Крайні цифри цього числа поміняли місцями. Чи ділиться одержане число на 7?

Вправи для повторення

358. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:
- а) $4a - 3 + (3a + 5 - 2a)$; б) $2x + 12 - (4x + 12 - 3x)$;
 в) $(-3a + 4b) - (2a - 1) + 6b$; г) $(-4x + 4) - (3x - y) - (2 + 2y)$.
359. Розв'яжіть рівняння:
- а) $4 - 3y = 2(3y + 11)$; б) $0,5(9z + 2) = 7z + 2,5$;
 в) $-1,2(m - 1) + 0,7 = m + 0,8$; г) $2(-4x + 4) - 3(3x - 2) - 3x = -1$.
360. Човен проплив 84 км за 4,5 год, до того ж, протягом 2,5 год він плыв за течією річки і протягом 2 год — проти течії. Яка швидкість човна у стоячій воді, якщо швидкість течії річки дорівнює 2,4 км/год?

11. Додавання і віднімання многочленів

1. Додавання многочленів. Додамо многочлени $4a^2 - 6a + 5$ і $-2a^2 + 3a + 2$:

$$(4a^2 - 6a + 5) + (-2a^2 + 3a + 2) = \underline{4a^2} - \underline{6a} + 5 - \underline{2a^2} + \underline{3a} + 2 = 2a^2 - 3a + 7.$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, ми записали суму даних многочленів у вигляді многочлена. Отже, сумою многочленів $4a^2 - 6a + 5$ і $-2a^2 + 3a + 2$ є многочлен $2a^2 - 3a + 7$.


У такий же спосіб додають три й більше многочленів. Суму будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

2. Віднімання многочленів. Віднімемо від многочлена $4x^2 - 4x + 7$ многочлен $2x^2 - 3x + 5$:

$$(4x^2 - 4x + 7) - (2x^2 - 3x + 5) = \underline{4x^2} - \underline{4x} + 7 - \underline{2x^2} + \underline{3x} - 5 = 2x^2 - x + 2.$$

Розкривши дужки та звівши подібні доданки, ми записали різницю даних многочленів у вигляді многочлена. Отже, різницею многочленів $4x^2 - 4x + 7$ і $2x^2 - 3x + 5$ є многочлен $2x^2 - x + 2$.

Різницю будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ	
-----------------------------------	---



Приклад 1. Знайти суму многочленів:

а) $-5x^2 + 2xy - 4$ і $4x^2 - 6xy$; б) $2a^2b - 2$; $5a^2b + 2a$ і $-3a^2b + 6a$.

• а) $(-5x^2 + 2xy - 4) + (4x^2 - 6xy) = \underline{-5x^2} + \underline{2xy} - 4 + \underline{4x^2} - \underline{6xy} =$
 $= -x^2 - 4xy - 4.$

б) $(2a^2b - 2) + (5a^2b + 2a) + (-3a^2b + 6a) =$
 $= \underline{2a^2b} - 2 + \underline{5a^2b} + \underline{2a} - \underline{3a^2b} + \underline{6a} = 4a^2b + 8a - 2.$ •

Приклад 2. Знайти різницю многочленів $5a^2 - 1 + 4ab$ і $8a^2 - 3ab$.

• $(5a^2 - 1 + 4ab) - (8a^2 - 3ab) = \underline{5a^2} - 1 + \underline{4ab} - \underline{8a^2} + \underline{3ab} = -3a^2 + 7ab - 1.$ •

Приклад 3. Розв'язати рівняння $4x^3 - 2x - (4x + 9 + 4x^3) = 0$.

• $4x^3 - 2x - 4x - 9 - 4x^3 = 0$; $-6x - 9 = 0$; $-6x = 9$; $x = -1,5$.

Відповідь. $-1,5$. •

Приклад 4. Довести, що сума трьох послідовних непарних чисел ділиться на 3.

• Нехай із трьох послідовних непарних чисел найменшим є $2n + 1$, де n — деяке ціле число. Тоді наступні непарні числа — $2n + 3$ і $2n + 5$. Сума цих трьох чисел

$$2n + 1 + 2n + 3 + 2n + 5 = 6n + 9 = 3(2n + 3)$$

ділиться на 3, бо має дільником число 3. •

Усно

361. Знайдіть суму многочленів:

а) $2a^2 - a$ і $a^2 - 3a$; б) $4x + 1$ і $x^2 + 2x + 4$.

362. Знайдіть різницю многочленів:

а) $5a^2 + 4a$ і $4a^2 + 2a$; б) $5y^2 + 4y + 4$ і $4y^2 + 4y$.

Рівень А	
-----------------	---



363. Дано два многочлени: $3x^2 + 2x - 5$ і $2x^2 - 2x + 3$. Запишіть та подайте у вигляді многочлена стандартного вигляду:

- а) суму цих многочленів;
 б) різницю першого і другого многочленів;
 в) різницю другого й першого многочленів.

364. Запишіть суму та різницю многочленів $6y^2 - 4y + 3$ і $5y^2 + 6y - 3$. Подайте суму та різницю у вигляді многочленів стандартного вигляду.

Знайдіть суму многочленів:

- 365.** а) $2a^3 - 4a^2 + a$ і $a^3 + 3a^2 - 2a + 2$; б) $5x + 2$; $-x^2 + 4x - 3$ і $3x^2 - 4$;
 в) $a^2 - 2ab + b^2$ і $a^2 + 2ab + b^2$; г) $4xy - 6x$; $2x - 6xy$ і $-xy - x$.
366. а) $-3x^4 + 5x^2 - 5$ і $x^4 - 3x^2 + 4$; б) $-2b^2 - 3$; $3b^2 + 2$ і $-2b^2 + 1$.

Знайдіть різницю многочленів:

- 367.** а) $3c^3 + 3c^2 - 4c + 1$ і $2c^3 - 3c^2 + c - 5$;
 б) $5x^3 - 4x^2 + 3x - 4$ і $7x^3 - 4x^2 + 3x + 11$;
 в) $2a^2 - 8a + 5$ і $2a^2 - 2a - 5$;
 г) $-a^4 + 3a^2 + 3$ і $2a^4 - 5 + 3a^3$.
368. а) $4x^3 + 3x^2 + x - 4$ і $2x^3 - x^2 + 2x + 7$;
 б) $-4m^3 + 4m^2 + m - 1$ і $-4m^3 + 4m^2 + m + 1$;
 в) $5a^2 + 3a + 6$ і $8a^3 + 2a^2 + 6$.

369. Знайдіть суму та різницю многочленів:

- а) $a + b$ і $a - b$; б) $a - b$ і $b - a$.

Спростіть вираз:

- 370.** а) $4a - (5a^2 + 3a - 2)$; б) $4,5ab + 3a + (-2,6ab - 2,9)$;
 в) $(4m^2 - 3m + n) - (-5m + m^2 - 3n)$; г) $x^2 + y - (2x^2 - y) - (-3x^2 + y)$.
371. а) $(-a + a^2) - (3a^2 - 2 + 2a)$; б) $(7x^3 - 4x) - (8x - 3x^3) - (x^3 + x)$.

Розв'яжіть рівняння:

- 372.** а) $2x^2 - 3x - (2x - 4 + 2x^2) = 0$; б) $-x^3 - 4 - (4x - x^3 + 4) = 0$.
373. а) $-5x + x^2 + 3 - (x + x^2) = 0$; б) $3x^2 + 4x + 6 - (-6x + 3x^2 - 2) = 0$.

Рівень Б



Спростіть вираз:

- 374.** а) $(-2a^2b^3 + ab^3) - (a^2b^3 - 3ab^3) - (4ab^3 - 4a^2b^3)$;
 б) $3x^5 + x^4 - (2x - 3x^4 + 12) - (3x^5 + 2x^4 - 3) - (3x^4 + 2)$;
 в) $5xy - (x^2 + 4xy - (-x^2 + xy))$;
 г) $-4a^2 + b + (-7b - 2 + a^2 - (2a^2 - (b - 1)))$.
375. а) $7x^4 - (4x^2 - x^4 + 3x) - (-3x^2 + 8x^4 + 2x)$;
 б) $6ab + 3b^2 - (1 + 2b^2) - (-2ab - 3b^2) + 1$;
 в) $2n^2 + 3n - (-3n - 1 + 2n^2 - (n - 1 - n^2))$.

376. Знайдіть такий многочлен P , для якого рівність є тотожністю:

- а) $P + (2x^2 + x - 2) = -x^2 + 1$;
 б) $P - (x^2 - 3x + 3) = 3x - 1$;
 в) $(4x^2 - 2x + 1) - P = x^2 - 2x + 1$.

377. Знайдіть многочлен, який у сумі з многочленом $2x^2 + x - 4$ дає многочлен $3x + 2$.

Розв'яжіть рівняння:

378. а) $4x^2 - (5x - 10 + x^2) = 3x^2$;

б) $-(x^4 - 1) - (3 - 5x^4 + 4x) = 4x^4 + 5$.

379. а) $-(1 + 2x - x^2) - (3x + 5) = x^2$;

б) $2 - (-6 + x - 4x^3) = 4x^3 + x + 4$.

Рівень В



380. Доведіть, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.

381. Доведіть, що сума чотирьох послідовних непарних чисел ділиться на 8.

382. Учитель задав на уроці цікаву задачу. Кількість хлопців, які розв'язали задачу, виявилась такою ж, як і кількість дівчат, які її не розв'язали. Кого у класі більше: тих, хто розв'язав задачу, чи дівчат?

383. Знайдіть такі числа a і b , щоб сумою многочленів $x^2 - abx + 3$ і $ax^2 + 2x - 4$ був многочлен $3x - 1$.

Вправи для повторення

384. Обчисліть, використавши розподільну властивість множення:

а) $18 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)$;

б) $24 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)$;

в) $\left(0,5 - \frac{1}{3}\right) \cdot 30$.

385. Спростіть вираз:

а) $a^2b^3 \cdot 2ab^2$;

б) $(4a^2b)^2 \cdot 2ab^2$;

в) $(-3xy^2)^3 \cdot 2(xy)^2$.

386. Запишіть у вигляді виразу:

а) подвоєний добуток виразів $3ab$ та $4ab^3$ і подайте його у вигляді одночлена стандартного вигляду;

б) суму квадратів виразів $5a^3b$ та $-2a^2b$ і подайте її у вигляді многочлена стандартного вигляду;

в) різницю квадратів виразів $-4x^2y^3$ та x^3y і подайте її у вигляді многочлена стандартного вигляду.

387. Маса великої деталі на 120 г більша, ніж малої. Яка маса обох деталей разом, якщо маса малої деталі становить 0,35 маси обох деталей?

12. Множення одночлена на многочлен

Помножимо одночлен $2a$ на многочлен $a^2 - 3a + 4$. Використовуючи розподільну властивість множення, матимемо:

$$2a(a^2 - 3a + 4) = 2a \cdot a^2 - 2a \cdot 3a + 2a \cdot 4 = 2a^3 - 6a^2 + 8a.$$

Отже, добутком одночлена $2a$ і многочлена $a^2 - 3a + 4$ є многочлен $2a^3 - 6a^2 + 8a$. Щоб знайти добуток, ми помножили одночлен на кожний член многочлена й одержані результати додали.

Щоб помножити одночлен на многочлен, треба одночлен помножити на кожний член многочлена й одержані добутки додати.

За цим правилом можна множити і многочлен на одночлен. Наприклад:

$$(3x^2 - x + 2) \cdot 3x = 3x^2 \cdot 3x - x \cdot 3x + 2 \cdot 3x = 9x^3 - 3x^2 + 6x.$$

Добуток будь-якого одночлена і будь-якого многочлена завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Виконати множення:

а) $2a^2b \cdot (-5b^2 + 2ab)$;

б) $(2a + b - 3c) \cdot (-4a)$.

• а) $2a^2b \cdot (-5b^2 + 2ab) = 2a^2b \cdot (-5b^2) + 2a^2b \cdot 2ab = -10a^2b^3 + 4a^3b^2$.

Скорочений запис: $2a^2b \cdot (-5b^2 + 2ab) = -10a^2b^3 + 4a^3b^2$.

б) $(2a + b - 3c) \cdot (-4a) = 2a \cdot (-4a) + b \cdot (-4a) - 3c \cdot (-4a) = -8a^2 - 4ab + 12ac$.

Скорочений запис: $(2a + b - 3c) \cdot (-4a) = -8a^2 - 4ab + 12ac$. •

Приклад 2. Спростити вираз $5x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(3x - 1)$.

• $5x(x^2 + 4x - 2) - 2x^2(3x - 1) = \underline{5x^3} + \underline{20x^2} - 10x - \underline{6x^3} + \underline{2x^2} = -x^3 + 22x^2 - 10x$. •

Приклад 3. Розв'язати рівняння $2x(2x + 3) - 7 = 4x^2 - 4$.

• $4x^2 + 6x - 7 = 4x^2 - 4$; $4x^2 + 6x - 4x^2 = 7 - 4$; $6x = 3$; $x = 0,5$.

Відповідь. 0,5. •

Усно

388. Виконайте множення:

а) $a(a + 1)$;

б) $a(a^2 - 2a)$;

в) $x(x^2 + x - 4)$;

г) $(a + 4) \cdot a$;

д) $(b + 2a) \cdot b$;

е) $(y^2 + 4y + 4) \cdot y$.

Рівень А



Перемножте вирази:

389. а) $x(2x - 5)$;

б) $2a^2(5a + 3)$;

в) $b(4b^2 + 3b)$;

г) $-a^2(a^2 - 2a + 1)$;

д) $4c^2(2c^3 - c^2 + 5)$;

е) $-ab(2a - 3b - 2)$;

є) $(x^2 - 5x) \cdot x^2$;

ж) $(-y^3 + 5y^3) \cdot (-4y)$;

з) $(y^2 - x - 3) \cdot 2xy$.

390. а) $a(2a + 3)$;

б) $3x(x^2 - 4x + 3)$;

в) $-2b(b^2 + 2b - 3)$;

г) $3c^2(-2c^4 + c^2 + 3)$;

д) $(-3n^2 + 2n) \cdot 2n$;

е) $(2a^2 - 2a - 5) \cdot (-3a)$.

Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

391. а) $-x(4x - 3) + 3$;

б) $(5a + 2) \cdot (-4a) + 10a^2$;

в) $a^2(2a^3 + a) - 2a^3$;

г) $4x(2x - 3x^2) - 8x^2 - 2x$.

392. а) $-3a^2(a-1) - 3a^2$;

б) $2b(3b^2 - 2) - 2b^3 + 1$.

Спростіть вираз:

393. а) $a(2a + b) - ab$;

б) $4y(2x - y) - 8xy + 2y^2$;

в) $2(4m^2 - 3) + m(-8m - 3)$;

г) $-x(2x - y) - (-2x^2 + xy)$.

394. а) $c(c^2 + 3c) - 3c^2$;

б) $-5x(x^2 + 3x - 4) - 20x$;

в) $2a(3a - 4b) + 8ab - 2a^2$;

г) $-4ab + 2a(2b + 3) - 6a$.

Розв'яжіть рівняння:

395. а) $2(2x - 1) + 3 = x - 2$;

б) $9 - 4(1 - 2x) = 10x$;

в) $-1,5(6x + 1) + 3x = 3$;

г) $4x(1 - 2x) + 8x^2 = 24$.

396. а) $2 + 3(5x - 3) = 8x$;

б) $24 - 2(2x + 6) = x$.

Рівень Б



Спростіть вираз:

397. а) $2a(-a + 2a^2) - 4(a^3 + 2a - 2)$;

б) $5x^3(3x^3 - 2x + 1) - x^2(8x^2 + 5x)$;

в) $-8m^3n(mn^2 - mn - n^2) - (2mn)^3$;

г) $2xy^2 - \frac{1}{3}x(6x + 6y^2 - 1) + \frac{2}{3}x$;

д) $2ab(5c + 2a) - a(4ab - bc)$;

е) $-5x^3y(2x^2y + 4y^3x) - 4x^4(2xy^2 - 5y^4)$.

398. а) $a^2(1 + 2a + b^2) - (a^2b^2 + a^2)$;

б) $4xy(2x - y) - 2x(4xy - 1)$;

в) $-2m^2n^3(4mn^2 - 8m^2n) - (4m^2n^2)^2$;

г) $\frac{2}{3}ab(6a^2 - ab) - 4a^3(a + b)$.

399. Доведіть, що для всіх значень x вираз $x^2(x-2) - x(x^2+2) + 2x(1+x) + 3$ набуває одного й того ж значення.400. Доведіть, що значення виразу $x(x^2 + 2y) - y(y + x) + y(y - x)$ не залежать від значень y .401. Доведіть, що для кожного від'ємного значення a значення виразу $a^2(a^3 - a^2 + a - 1) - a(a^4 - a^3 + a^2 - a + 1)$ є додатним.402. Доведіть, що для будь-яких значень x , y та z значення виразу $x(x - y + z) + y(y - z + x) + z(z - x + y)$ є невід'ємним.

Доведіть тотожність:

403. а) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b) = 0$;

б) $a(b^2 - bc + c^2) + ab(c - b) + ac(b - c) = abc$;

в) $x^4(x^3 - x^2) - x^3(x^4 - x^3) + x^2(x^5 - x^4) - x(x^6 - x^5) = 0$;

г) $ab(c - ab) + bc(a - bc) + ca(b - ca) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 3abc$.

404. а) $x(x - yz) + y(y - zx) + z(z - xy) + 3xyz = x^2 + y^2 + z^2$;

б) $a(a^4 - 2a^3 + 3a^2) - a^2(a^3 - a^2 + 2a) + a^3(a - 1) = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

405. а) $5(3x - 6) + 4(3 - 2x) = 5x - 8$; б) $0,4(2x - 7) + 1,2(3x + 0,7) = 1,6x$;

в) $x(3 + 2x + 4x^2) - 2x^2(2x + 1) = 9$; г) $2,5x - 2x(1,5x + 1) = 1 - 3x^2$.

406. а) $-5(4x + 3) + 3x = -12(x - 5)$; б) $9(x - 3) - 4(7 - 3x) - 3 = -8x$;

в) $3x^2(x + 1) - (3x^3 + 3x^2 + x - 1) = 0$; г) $1,2x(x + 2) - 3(0,4x^2 + 1) = 0,6$.

407. а) $\frac{1-x}{6} - \frac{2x+4}{9} = \frac{1}{9}$;

б) $\frac{4x+1}{36} = \frac{x-3}{12} + \frac{x+3}{18}$.

408. а) $\frac{2+3x}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7-2x}{6}$;

б) $-\frac{x}{4} = \frac{2x-5}{6} - \frac{3x+2}{12}$.

409. Сума двох чисел дорівнює 10, а сума їх добутку і квадрата меншого числа дорівнює 15. Знайдіть ці числа.

410. Знайдіть площу прямокутника за такими даними: його довжина у 2,4 разу більша від ширини; якщо ширину прямокутника збільшити на 2 см, то площа збільшиться на 24 см².

411. Дано три ділянки прямокутної форми. Довжина першої ділянки удвічі більша від її ширини. Друга ділянка має таку ж ширину, як перша, а довжину на 4 м більшу, ніж перша. Третя ділянка має таку ж довжину, як перша, а ширину на 4 м більшу, ніж перша. Знайдіть площу першої ділянки, якщо площа другої ділянки менша від площі третьої на 40 м².

Рівень В



412. Спростіть вираз (n — натуральне число):

а) $x^{n+2}(x^{n+3} - 1) - x^n(x^{n+5} - x^2)$;

б) $a^{n+1}(a^{n+1} - 4) - a^n(a^{n+2} - 4a + 1)$;

в) $x^n(x^{n+1}(x^{n+2} + x^{n+1}(x^2 - x + 1)))$.

413. Доведіть тотожність:

$$a(1 + a + a^2 + \dots + a^9 + a^{10}) - (1 + a + a^2 + \dots + a^9 + a^{10}) = a^{11} - 1.$$

414. Доведіть, що значення виразу

$$3x^{n+2}y^{n+1}(2x^2y^3 - 4xy + 6) - 2x^{n+1}y^n(3x^3y^4 - 6x^2y^2 + 9xy),$$

де n — натуральне число, не залежать від значень x і y .

415. Учні 7 класу прийшли до театру. В антракті всі вони побігли в буфет. Кожен хлопець купив пиріжок, а кожна дівчина — булочку. Якби кожна дівчина купила пиріжок, а кожен хлопець — булочку, то вони разом витратили б на 50 к. менше. Пиріжок дорожчий від булочки на 10 к. Кого було більше — хлопців чи дівчат — і на скільки більше?

416. У банці було 3 л спирту. З неї відлили x л спирту і долили таку ж кількість води. Потім, коли спирт і вода змішалися, з банки відлили x л суміші. Скільки літрів спирту залишилося в банці?

Вправи для повторення

- 417.** Перший автомобіль долає шлях між двома містами за 1,5 год, а другий — за 1,2 год. Швидкість другого автомобіля більша від швидкості першого на 15 км/год. Знайдіть відстань між містами.
- 418.** З міста A до міста B одночасно виїхали легковий автомобіль і автофургон. Коли через 2,5 год легковий автомобіль прибув до міста B , автофургону залишалося їхати до міста B ще 30 км. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість легкового автомобіля в 1,2 разу більша від швидкості автофургона.
- 419*.** Пірати захопили скриню із золотими монетами й вирішили поділити здобич порівну. Якби піратів було на 10 менше, то кожному дісталось б монет в 1,2 разу більше. Скільки було піратів?
- 420.** Виконайте множення одночленів:
- а) $5a^2 \cdot 3a^3$; б) $0,2a^3b \cdot 10a$; в) $2ax \cdot (-0,3ax^2)$;
 г) $4m \cdot 3m^2n$; д) $-2cd \cdot (-3c^4d)$; е) $4a^3b \cdot (-0,5a^2b^3)$.
- 421.** Запишіть у вигляді виразу:
- а) добуток двочленів $a - b$ і $2a + b$;
 б) добуток суми виразів $2a$ і $3b$ та їх різниці.



13. Множення многочлена на многочлен

Помножимо многочлен $a + b$ на многочлен $c + d$. Зведемо множення цих многочленів до множення многочлена на одночлен. Для цього позначимо многочлен $c + d$ через x . Тоді:

$$(a + b)(c + d) = (a + b)x = ax + bx.$$

Повернувшись до заміни $x = c + d$, матимемо:

$$ax + bx = a(c + d) + b(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Отже, добутком многочлена $a + b$ і многочлена $c + d$ є многочлен $ac + ad + bc + bd$:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Вираз $ac + ad + bc + bd$ ми одержали б одразу, якби помножили a на c і d , потім b на c і d і одержані добутки додали. Можна сказати й так: добуток $ac + ad + bc + bd$ можна одержати, якщо помножити кожний член многочлена $a + b$ на кожний член многочлена $c + d$ й одержані добутки додати.

Приходимо до такого правила:

Щоб помножити многочлен на многочлен, досить кожний член одного многочлена помножити на кожний член іншого многочлена й одержані добутки додати.

Помножимо за цим правилом многочлен $2a^2 + b^2$ на многочлен $2a - b$:

$$\begin{aligned}(2a^2 + b^2)(2a - b) &= 2a^2 \cdot 2a + 2a^2 \cdot (-b) + b^2 \cdot 2a + b^2 \cdot (-b) = \\ &= 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

Виконуючи множення многочленів, проміжні результати можна не записувати:

$$(2a^2 + b^2)(2a - b) = 4a^3 - 2a^2b + 2ab^2 - b^3.$$

У кожному з наведених прикладів добуток двох многочленів ми записували у вигляді многочлена. Взагалі, добуток будь-яких многочленів завжди можна записати у вигляді многочлена.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Виконати множення:

а) $(2x^2 - xy + 4y^2)(2x - 3y)$; **б)** $(a + b)(a + 1)(b - 1)$.

• **а)** $(2x^2 - xy + 4y^2)(2x - 3y) = 4x^3 - \underline{6x^2y} - \underline{2x^2y} + \underline{3xy^2} + \underline{8xy^2} - 12y^3 =$
 $= 4x^3 - 8x^2y + 11xy^2 - 12y^3.$

б) Знайдемо добуток перших двох многочленів, а потім одержаний добуток помножимо на третій многочлен:

$$\begin{aligned}(a + b)(a + 1)(b - 1) &= (a^2 + a + ba + b)(b - 1) = \\ &= a^2b - a^2 + \underline{ab} - a + b^2a - \underline{ba} + b^2 - b = a^2b - a^2 - a + ab^2 + b^2 - b. \bullet\end{aligned}$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $(x - 2)(2x + 3) - x(2x + 4) = 3$.

• $2x^2 + 3x - 4x - 6 - 2x^2 - 4x = 3$; $-5x - 6 = 3$; $-5x = 9$; $x = -1,8$.

Відповідь. $-1,8$. •

Усно

422. Виконайте множення:

а) $(a + 2)(b + 1)$; **б)** $(a + b)(c - d)$; **в)** $(x + y)(a + b - c)$.

Рівень А



Перемножте многочлени:

423. а) $(x+2)(y+z)$; б) $(b+a)(c-3)$; в) $(m-4)(n+k)$;
 г) $(a-b)(x-y)$; д) $(2a-3b)(2c+5)$; е) $(4a+6b)(3d-2c)$;
 є) $(x+y)(a-5b+2)$; ж) $(2-c)(a-b-2)$; з) $(m-n+1)(k+l)$.
 424. а) $(a+b)(c+3)$; б) $(2x+y)(3-3z)$; в) $(a-2b)(3x-4y)$;
 г) $(m+n)(a-b+1)$; д) $(a+b-2)(c+5)$; е) $(2x-y-1)(a-3b)$.

Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

425. а) $(a+3)(4a-3)$; б) $(5b-4)(3b-2)$;
 в) $(a^2+3a-4)(3a-2)$; г) $(n-m)(n+4m)$;
 д) $(a-6b)(2a-b)$; е) $(4c-3d)(3c+d)$.
 426. а) $(a-2)(a+3)$; б) $(3x+2)(2x-1)$;
 в) $(a+5b)(a-b)$; г) $(4x-3y)(x-2y)$.

Спростіть вираз:

427. а) $(3a-4)(2a+1)+5a$; б) $(y+3)(y-4)-y(y-1)$;
 в) $(2x-5)(2x+3)-4(x^2-x)$; г) $(a^2+a-2)(a+3)+6-4a^2$;
 д) $(a+b)(a-3b)+2ab$; е) $(-x+4y)(2x-y)+2x^2-9xy$.
 428. а) $(x+2)(2x+3)-2x^2$; б) $(a-4)(3a-4)+16a-16$;
 в) $(a+2b)(3a-4b)+3ab-3a^2$; г) $-7mn+(m+5n)(2m-3n)$.

Розв'яжіть рівняння:

429. а) $(x-1)(x+2)-x^2=3$; б) $(2y-1)(2-y)+2y^2=1$.
 430. а) $(x+3)(x-1)-x^2=5$; б) $5x^2+(1-x)(5x+2)=5$.

Рівень Б



Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

431. а) $(-3a+2)(2a^2+2a-3)$; б) $(3x^2-2x+1)(2x^2+5x)$;
 в) $(n^2-n+3)(n^2+2n+2)$; г) $(2b^2-3b-2)(4b^2+b-4)$;
 д) $(c+2)(c+3)(c-5)$; е) $(2x+1)(2x-5)(x^2+3x+2)$;
 є) $\left(\frac{2}{9}x-\frac{5}{6}\right)\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}\right)$; ж) $\left(2\frac{2}{9}a+3\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{19}a-\frac{9}{19}\right)$.
 432. а) $(4a+3)(a^2-4a+2)$; б) $(b^2-2b+3)(3b^2-2b+1)$;
 в) $(x-2)(x+5)(x-4)$; г) $(2y-3)(y+2)(4y^2+3y-3)$;
 д) $\left(\frac{4}{9}b-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}b+1\right)$; е) $\left(1\frac{2}{7}x+2\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}x\right)$.

433. а) $(a + b)(a^2 + 5ab - b^2)$; б) $(4x^2 - 3xy + y^2)(2x - 7y)$;
 в) $(3n^2 - 2nm - m^2)(3n - 2m)$; г) $(3a - 2b)(a - 2b)(a^2 + 2ab)$.
 434. а) $(2x + y)(x^2 + 2xy - 2y^2)$; б) $(a - b)(a + 2b)(3a - 2b)$.

Спростіть вираз:

435. а) $(3a - 1)(2a + 5) + (2a - 5)(3a + 1)$;
 б) $(x + 7)(8x - 1) - (2x + 3)(4x - 1)$;
 в) $(a - 2)(1 - 2a + 2a^2) - 2(a^3 - 3a^2 - 1)$;
 г) $(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b) - a^3 - b^3$;
 д) $(3xy^2 - 7x^2y)(3xy^2 - 2x^2y) + (3xy)^3 - (3xy^2)^2$.
 436. а) $(4x - 3)(3x + 4) + (2x - 3)(3x + 1)$;
 б) $(2b - 7)(4b - 1) - (8b - 3)(b + 1)$;
 в) $(x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) - 18y^3$;
 г) $(a + b)(a + b - 1) - a(a - 1) - b(b - 1)$.

Розв'яжіть рівняння:

437. а) $(x - 1)(x - 3) = (x - 2)(x + 3)$;
 б) $(2y - 1)(1 - y) + (y + 1)(2y - 3) = 0$;
 в) $(0,5x - 3,5)(6x + 2) + 30x = 3x(x - 3) - 26$;
 г) $\left(\frac{1}{6}x + \frac{1}{3}\right)(x - 1) = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right)$.
 438. а) $(x + 6)(x - 4) = (x - 5)(x + 4)$;
 б) $(0,5x + 7)(4x - 1) - (x + 14)(2x - 1) = 9$;
 в) $\left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}\right)(2x + 3) = (3x - 1)\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}\right)$.

Доведіть, що значення виразу не залежать від значень x:

439. а) $(x + 1)(x + 4) - (x + 2)(x + 3)$;
 б) $(1 - x)(2 - x)(3 - x) + (x - 4)(x^2 - 2x + 3)$.
 440. $(x - 3)(x^2 + 7x - 3) - (x + 2)(x^2 + 2x - 28)$.

Доведіть, що для кожного цілого значення k значення виразу:

441. $(2k + 1)(3k + 2) - (2k - 1)(3k - 2)$ ділиться на 14.
 442. $(3k + 2)(4k - 3) - (2k + 3)(k - 2)$ ділиться на 10.
 443. Доведіть, що вираз $(a^2 + 3)(a^2 - 1) - (a^2 + 4)(a^2 - 2)$ набуває лише додатних значень.

Доведіть тотожність:

444. а) $(x + 3)(x^2 - 1) = (x^2 + 2x - 3)(x + 1)$;
 б) $(a - b)(b - c)(c - a) = ab(b - a) + bc(c - b) + ca(a - c)$.
 445. а) $(a + 2)(a^2 - 2a - 3) = (a - 3)(a^2 + 3a + 2)$;
 б) $(a + b)(b - c) - (a - b)(b + c) = 2(b^2 - ac)$.

446. Знайдіть три послідовних цілих числа, квадрат найменшого з яких на 11 менший від добутку двох інших чисел.
447. Довжина прямокутника в 1,8 разу більша від ширини. Якщо довжину прямокутника збільшити на 3 см, а ширину зменшити на 2 см, то площа зменшиться на 9 см^2 . Знайдіть довжину і ширину прямокутника.
448. Довжина прямокутника на 4 см більша від ширини. Якщо довжину прямокутника зменшити на 1 см, а ширину збільшити на 2 см, то площа збільшиться на 10 см^2 . Знайдіть довжину і ширину прямокутника.

Рівень В



449. Спростіть вираз $(x - a)(x - b)(x - c) \dots (x - z)$, що є добутком 26 множників, у яких від змінної x віднімаються змінні, позначені всіма 26 буквами латинського алфавіту.
450. Спростіть вираз (n — натуральне число):
а) $(a^n + b^n)(a^n - b^n + 1) - a^{2n} + b^{2n}$; б) $(1 + 2^{n+1})(5 - 2^{n+1}) + 4^{n+1}$.
451. Доведіть тотожність:
а) $(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$;
б) $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$, якщо $a + b + c = 0$.
452. а) Одне із цілих чисел при діленні на 6 дає в остачі 2, а інше — в остачі 3. Доведіть, що добуток цих чисел ділиться на 6 без остачі.
б) Числа a, b і c при діленні на 4 дають в остачі відповідно 1, 2 і 3. Доведіть, що число $abc + 2$ ділиться на 4 без остачі.
453. Дано чотири послідовних цілих числа. Що більше — добуток найменшого і найбільшого із цих чисел чи добуток інших двох чисел — і на скільки більше?
454. Дві ділянки прямокутної форми мають рівні площі. Довжина другої ділянки на 2 м менша, ніж довжина першої, а ширина другої ділянки на 1 м більша, ніж ширина першої. Доведіть, що довжина першої ділянки удвічі більша від ширини другої.
455. Дано два многочлени:
 $x^4 + 987x^3 - 876x^2 + 765x - 654$ і $9876x^4 - 9800x^2 - 75$.
Чому дорівнює сума коефіцієнтів многочлена стандартного вигляду, який є добутком даних многочленів?

Вправи для повторення

456. За 2 ручки і 8 зошитів Олег заплатив 4 грн. 20 к. Скільки коштує ручка, якщо вона на 10 к. дорожча від зошита?

457. Моторний човен проплив 72 км, рухаючись 3 год проти течії річки і 2 год — за течією. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 15 км/год.
458. Від пристані A до пристані B катер плив на 20 хв довше, ніж від B до A . Знайдіть відстань між пристанями, якщо швидкість катера у стоячій воді дорівнює 19,2 км/год, а швидкість течії річки — 2,4 км/год.
459. Розв'яжіть рівняння:
а) $|3x - 6| = 9$; **б)** $2|x| - 3 = |x|$;
в) $|x - 4| = 3(4 - |x - 4|)$; **г)** $|x|(|x| - 1) = 2 + |x|^2$.
460. Обчисліть:
а) $37 \cdot 48 + 37 \cdot 52$; **б)** $9,3 \cdot 5,6 - 9,3 \cdot 5,5$; **в)** $1,6 \cdot 8,8 - 3,8 \cdot 1,6$.
461. Запишіть одночлен $24a^3b^4$ у вигляді добутку двох одночленів, одним із яких є:
а) $3a^2b^2$; **б)** $8b^3$; **в)** $-4ab^4$; **г)** $-12a^3$.

14. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки

1. У шостому класі ми розкладали на множники числа. Наприклад, число 60 можна записати у вигляді добутку двох чисел 12 і 5:

$$60 = 12 \cdot 5.$$

Кажуть, що число 60 розкладено на два множники 12 і 5.

Розкласти на множники можна і многочлени. Наприклад,

$$ab + ac = a(b + c).$$

Записавши многочлен $ab + ac$ у вигляді добутку $a(b + c)$, кажуть, що многочлен $ab + ac$ *розкладено на два множники* a і $b + c$. Кожний із цих множників є многочленом (перший многочлен складається лише з одного члена).

Розкласти многочлен на множники означає подати його як добуток кількох многочленів.

Порівняйте

$a(b + c) = ab + ac$	помножили одночлен на многочлен; результат — многочлен
$ab + ac = a(b + c)$	розклали многочлен на множники; результат — добуток одночлена і многочлена

2. Розглянемо один зі способів розкладання многочленів на множники. Виконаємо множення одночлена на многочлен:

$$x(x + y) = x \cdot x + x \cdot y = x^2 + xy.$$

Перепишемо ці рівності у зворотному порядку:

$$x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y = x(x + y).$$

Многочлен $x^2 + xy$ розклали на два множники x та $x + y$. Щоб розкласти многочлен $x^2 + xy$ на множники, досить у його членах x^2 та xy виділити спільний множник x : $x^2 + xy = x \cdot x + x \cdot y$, а потім на основі розподільної властивості множення записати одержаний вираз у вигляді добутку многочленів x та $x + y$.

Описаний спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом винесення спільного множника за дужки*.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розкласти на множники многочлен $12x^3y - 18x^2y^2$.

• Спочатку знайдемо спільний числовий множник для коефіцієнтів 12 і -18 . Якщо коефіцієнтами є цілі числа, то за спільний числовий множник беруть, як правило, найбільший спільний дільник модулів цих коефіцієнтів. У нашому випадку це число 6. Степені з основою x входять в обидва члени многочлена. Оскільки перший член містить $x^3 = x^2 \cdot x$, а другий — x^2 , то спільним множником для степенів з основою x є x^2 (за дужки виносять змінну з меншим показником). У члени многочлена входять відповідно множники y і y^2 , за дужки можна винести y . Отже, за дужки можна винести одночлен $6x^2y$:

$$12x^3y - 18x^2y^2 = 6x^2y \cdot 2x - 6x^2y \cdot 3y = 6x^2y(2x - 3y). \bullet$$

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен $-2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2$.

$$\bullet -2a^2b - 8a^2b^2 + 10ab^2 = -2ab(a + 4ab - 5b). \bullet$$

Приклад 3. Розкласти на множники: $5b(a - c) + 3(a - c)$.

• Даний вираз є сумою двох доданків, для яких спільним множником є вираз $a - c$. Винесемо цей множник за дужки:

$$5b(a - c) + 3(a - c) = (a - c)(5b + 3). \bullet$$

Приклад 4. Розкласти на множники: $2x(m - n) + y(n - m)$.

• Доданки мають множники $m - n$ і $n - m$, які відрізняються тільки знаками. У виразі $n - m$ винесемо за дужки -1 , тоді другий доданок матиме вигляд $-y(m - n)$ й обидва доданки матимуть спільний множник $m - n$.

Отже,

$$2x(m - n) + y(n - m) = 2x(m - n) - y(m - n) = (m - n)(2x - y). \bullet$$

Приклад 5. Знайти значення виразу $8,5a^2 + a^3$, якщо $a = 1,5$.

• Розкладемо спочатку многочлен $8,5a^2 + a^3$ на множники:

$$8,5a^2 + a^3 = a^2(8,5 + a).$$

Якщо $a = 1,5$, то:

$$a^2(8,5 + a) = 1,5^2 \cdot (8,5 + 1,5) = 2,25 \cdot 10 = 22,5. \bullet$$

Приклад 6. Розв'язати рівняння $4x^2 + 5x = 0$.

• Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$x(4x + 5) = 0.$$

Добуток $x(4x + 5)$ дорівнює нулю лише тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю:

$$x = 0 \text{ або } 4x + 5 = 0, \text{ звідки } x = 0 \text{ або } x = -1,25.$$

Відповідь. 0; -1,25. ●

Усно															
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

462. Знайдіть спільний множник членів многочлена:

- а) $8 + 4b$; б) $15x - 10$; в) $3a + 3ab$;
 г) $a^2 - 2a$; д) $mn - n^2 + n$; е) $18a^4b^3 - 6a^2b^2$.

463. Чи правильно розкладено на множники многочлен:

- а) $6a + 6 = 6(a + 0)$; б) $6a + 6 = 6(a + 6)$; в) $6a + 6 = 6(a + 1)$;
 г) $4xy - 2y = y(4x - 2)$; д) $4xy - 2y = -y(-4x + 2)$; е) $4xy - 2y = 2y(2x - 1)$?

Рівень А															
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--



Винесіть за дужки спільний множник:

464. а) $3a + 3b$; б) $3a + 6$; в) $9a - 18b$;
 г) $-6a + 6b$; д) $3y^2 + 3y - 6$; е) $-15c - 10$.
 465. а) $5a + 5$; б) $5a + 15b$; в) $15x - 25y$;
 г) $2x - 4y + 8z$; д) $-7k + 7m$; е) $-4m - 2n$.

Розкладіть на множники і зробіть перевірку:

466. а) $4a + 12$; б) $5ab + 10a$; в) $4ab - 2b$.
 467. а) $2b - 8a$; б) $6xy + 24x$; в) $9mn - 6m$.

Розкладіть на множники:

468. а) $ax + bx$; б) $ym - yn$; в) $-ca + cb$; г) $-xz - yz$.
 469. а) $km + kn$; б) $-xa + ya$; в) $-bx - ax$; г) $ta - tb$.
 470. а) $9ax - 9bx$; б) $3ay - 6y$; в) $-7ab + 14b$;
 г) $10x^2 - 15x^3$; д) $32b^2 - 24b^4$; е) $-8c^3 - 10c^5$.
 471. а) $5xy - 5y$; б) $8ac - 6ab$; в) $c^2 + c^5$;
 г) $3x^2 + 9x$; д) $15y^2 - 12y^4$; е) $-24n - 18n^3$.
 472. а) $a^3 + 3a^2 - 10a$; б) $4x^5 - 8x^3 + 4x^2$; в) $-9a^5 - 27a^3 + 18a^4$.
 473. а) $2x^4 - x^3 - x^2$; б) $2c - 4c^2 + 8c^3$; в) $-5b^4 + 10b^2 + 5b^5$.

Знайдіть значення многочлена:

474. а) $x^3 - 1,5x^2$, якщо $x = 2,5$; б) $xy + y^2$, якщо $x = -0,3$; $y = 10,3$.
 475. а) $2,4a^2 - a^3$, якщо $a = 1,4$; б) $m^2 + mn$, якщо $m = 2,8$; $n = 7,2$.

Розв'яжіть рівняння:

476. а) $x^2 - 5x = 0$; б) $5x^2 + 15x = 0$.
 477. а) $x^2 + 2x = 0$; б) $4x - 2x^2 = 0$.

Рівень Б



Розкладіть на множники:

- 478.** а) $a^2b^3 + ab^4 - a^2b^4$; б) $36x^4y^3 - 48x^6y^4$;
 в) $24a^2b^3 - 16a^3b^3 - 40a^3b^2$; г) $-3m^4n^6 + 1,2m^5n^5 - 4,2m^5n^6$;
 д) $\frac{2}{15}x^3y^4z^2 - \frac{4}{15}x^2y^3z^3 + \frac{14}{15}x^3y^3z^4$; е) $\frac{4}{9}abc^2 + \frac{8}{9}ab^2c - 1\frac{7}{9}a^2bc$.
- 479.** а) $2x^4z^3 + 4x^4z^4 - 4x^4z^5$; б) $45a^4b^2 - 60a^3b^3 + 75a^2b^4$;
 в) $-3,6m^2n^5 + 5,4m^3n^4 - 9m^2n^4$; г) $\frac{6}{7}x^5y^3z^4 - \frac{3}{7}x^3y^5z^4 + 1\frac{5}{7}x^3y^3z^5$.
- 480.** а) $a(m+k) - b(m+k)$; б) $2a(x-y) + 3(x-y)$;
 в) $x(a-2b+1) + y(a-2b+1)$; г) $m(a-b) + 3(b-a)$;
 д) $a^2(n-3) - 5(3-n)$; е) $(x-2)^2 + 4(x-2)$;
 є) $2x(a-b) - (a-b)^2$; ж) $4x(a+b) + 2x(a+b)^2$.
- 481.** а) $m(x-k) - n(x-k)$; б) $c(a+b+2) + 3(a+b+2)$;
 в) $a(s-t) + b(t-s)$; г) $2(a-b) - x(b-a)$;
 д) $(m-4)^2 - 5(m-4)$; е) $x(m-n) + 2(m-n)^2$.

Знайдіть значення многочлена:

- 482.** а) $\frac{4}{5}xy^2 - \frac{2}{5}y^2$, якщо $x = 3$; $y = 0,5$;
 б) $\frac{1}{3}a^2 + \frac{2}{3}ab - 1\frac{1}{3}a$, якщо $a = 2\frac{3}{7}$; $b = 1\frac{2}{7}$.
- 483.** а) $\frac{2}{9}m^2n + \frac{4}{9}m^2$, якщо $m = -0,5$; $n = 88$;
 б) $\frac{1}{11}xy - \frac{2}{11}y^2 + 1\frac{1}{11}y$, якщо $x = \frac{2}{3}$; $y = 6\frac{1}{3}$.

Розв'яжіть рівняння:

- 484.** а) $4y + 0,2y^2 = 0$; б) $0,6x^2 - 0,24x = 0$; в) $\frac{5}{6}x^2 - \frac{1}{3}x = 0$.
- 485.** а) $0,4x - 2x^2 = 0$; б) $1,5x^2 + 0,3x = 0$; в) $\frac{3}{4}x - \frac{3}{7}x^2 = 0$.

Доведіть, що значення виразу:

- 486.** а) $19^8 - 19^7$ ділиться на 18; б) $49^9 + 49^{10}$ ділиться на 50;
 в) $3 \cdot 7^6 - 7^5$ ділиться на 20; г) $3^{10} + 2 \cdot 3^{12} + 3^{11}$ ділиться на 22.
- 487.** а) $11^9 + 11^8$ ділиться на 12; б) $5^{12} - 2 \cdot 5^{10}$ ділиться на 23.

Рівень В



488. Внесіть за дужки спільний множник:

- а) $a^n + a^{n+2}$; б) $2^{n+m} + 2^n$; в) $4a^{2n} - 4a^n$;
 г) $a^{2n}b^n + a^n b^{2n}$; д) $x^n + 2x^{n+2} + 3x^{n+3}$; е) $x^{2m} + 2x^m + x^{m+2}$.

489. Доведіть, що значення виразу:

- а) $15 \cdot 16^7 - 4^{14}$ ділиться на 14; б) $3 \cdot 2^{15} + 2^{12} - 2^{14}$ ділиться на 21.

490. Доведіть, що коли:

- а) $a + b = 4$, то $a^3b^2 + a^2b^3 - 4a^2b^2 = 0$;
 б) $a^2 + b^2 = 3ab$, то $a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 = 4a^3b^3$;
 в) $x + y + 2 = xy$, то $x^4y^4 - x^3y^4 - x^4y^3 = 2x^3y^3$.

491. Номер автобусного квитка складається з шести цифр. Квиток вважають «щасливим», якщо в його номері сума перших трьох цифр дорівнює сумі трьох останніх. Доведіть, що:

- а) якщо квиток з номером \overline{abcdef} є «щасливим», то й квиток з номером \overline{defabc} — «щасливий»;
 б) сума номерів «щасливих» квитків \overline{abcdef} і \overline{defabc} ділиться на 1001;
 в) сума номерів усіх можливих «щасливих» квитків ділиться на 1001.

Вправи для повторення

492. Периметр трикутника дорівнює 27 см. Знайдіть довжини сторін трикутника, якщо перша його сторона в 1,2 разу довша від другої, а друга — на 5 см довша від третьої.

493. Автомобіль мав проїхати деякий шлях, рухаючись зі швидкістю 70 км/год. Якби він їхав зі швидкістю на 5 км/год більшою, то здолав би цей шлях на 20 хв швидше. Який шлях мав проїхати автомобіль?

494. Перемножте многочлени:

- а) $(5a - 7b)(4 - b)$; б) $(x^2 - y)(7x - y^3)$;
 в) $(y + 3)(y^2 - y + 4)$; г) $(a^2 - 5a + 3)(a - 7)$.

495. Візьміть у дужки два останні доданки, поставивши перед дужками знак «+»; знак «-»:

- а) $2 + c + d$; б) $a + b - 4$ в) $x - y - 3$; г) $2m - 3n + k$.

496. Обчисліть:

- а) $2,3 \cdot 2,8 + 0,33 \cdot 10,78 + 2,3 \cdot 7,2 - 0,33 \cdot 0,78$;
 б) $7,7 \cdot 1,6 - 0,03 \cdot 500 + 1,8 \cdot 1,6 + 1,6 \cdot 0,5$;
 в) $2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} - 10\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9} + 2\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{8} + 1\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{9}$.

15. Розкладання многочленів на множники способом групування

Вивчення цього способу розкладання многочленів на множники почнемо із прикладу на множення многочленів. Виконаємо множення двочлена $a - b$ на двочлен $x + y$ таким чином:

$$(a - b)(x + y) = a(x + y) - b(x + y) = ax + ay - bx - by.$$

Проводячи перетворення у зворотному порядку, многочлен $ax + ay - bx - by$ можна розкласти на два множники $a - b$ і $x + y$:

$$ax + ay - bx - by = (ax + ay) + (-bx - by) = a(x + y) - b(x + y) = (x + y)(a - b).$$

Проаналізуємо останні перетворення. Маємо многочлен, члени якого можна групувати так, щоб кожна група мала спільний множник: для групи $ax + ay$ — спільний множник a , для групи $-bx - by$ — спільний множник $-b$. У кожній групі виносимо спільний множник за дужки. В утвореній різниці $a(x + y) - b(x + y)$ маємо спільний множник $x + y$. Виносимо його за дужки й одержуємо $(x + y)(a - b)$.

Описаний спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом групування*. Застосовуючи цей спосіб, потрібно утворювати такі групи членів, щоб вони мали спільний множник. Після винесення в кожній групі спільного множника за дужки повинен утворитися спільний множник для всіх груп, який знову ж таки потрібно винести за дужки.

Многочлен $ax + ay - bx - by$ можна розкласти на множники, групуючи його члени по-іншому:

$$ax + ay - bx - by = (ax - bx) + (ay - by) = x(a - b) + y(a - b) = (a - b)(x + y).$$

Порівняйте

$(a - b)(x + y) = ax + ay - bx - by$	помножили многочлен на многочлен; результат — многочлен
$ax + ay - bx - by = (a - b)(x + y)$	розклали многочлен на множники; результат — добуток многочленів

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розкласти на множники многочлен $3ax - 12bx + 9a - 4bx^2$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad 3ax - 12bx + 9a - 4bx^2 &= (3ax + 9a) - (4bx^2 + 12bx) = \\ &= 3a(x + 3) - 4bx(x + 3) = (x + 3)(3a - 4bx). \bullet \end{aligned}$$

Приклад 2. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 5x + 6$.

$$\begin{aligned} \bullet \quad \text{Подамо другий член } -5x \text{ у вигляді } -3x - 2x. \text{ Тоді:} \\ x^2 - 5x + 6 &= x^2 - 3x - 2x + 6 = x(x - 3) - 2(x - 3) = (x - 3)(x - 2). \bullet \end{aligned}$$

Усно

497. Вкажіть у кожному многочлені групи членів, які мають спільний множник, та назвіть цей множник:

а) $ax + ay + 5x + 5y$;

б) $2a - 2b + an - bn$.

Рівень А



Розкладіть на множники:

498. а) $ax + ay + 4x + 4y$;

в) $6m - 6n + am - an$;

д) $ma - na + mb - nb$;

е) $a + 2nb - b - 2na$;

499. а) $2a + 2b + xa + xb$;

в) $ka - kb - 5a + 5b$;

д) $x + y - bx - by$;

500. а) $a^3 + a^2 + a + 1$;

в) $b^2 - ab - 2b + 2a$;

д) $3a - ax + 3x - x^2$;

501. а) $x^3 + 2x^2 + x + 2$;

в) $a^2 + 2ab + 3a + 6b$;

б) $7x + by + 7y + bx$;

г) $6m - 6n - am + an$;

е) $5a - bx - 5b + ax$;

ж) $4ay + 3 - 3y - 4a$.

б) $ma - mb + 3a - 3b$;

г) $6c - ac - ab + 6b$;

е) $7am - 7m + 5ax - 5x$.

б) $x^3 - 4x^2 + 2x - 8$;

г) $10x + xy + 10y + x^2$;

е) $xya - xy + 5a - 5$.

б) $a^6 + 5a^4 + 5a^2 + 25$;

г) $x^2 + 3xa - 2x - 6a$.

Рівень Б



Розкладіть на множники:

502. а) $a^2 + b^2 - a^3y - ab^2y$;

в) $3a^2c + 6a^2 - 10bc - 5bc^2$;

д) $0,9ay + 1,2y^2 - 1,2ax - 1,6xy$;

503. а) $x^2y^2 + 2y^3 - ax^2 - 2ay$;

в) $6x^3y + 12y^2z^2 + 9y^3 + 8x^3z^2$;

504. а) $xa - xb + xc + 3a - 3b + 3c$;

в) $-5a - 5b + 3na + 3nb - ma - mb$;

505. а) $a^2b + a + ab^2 + b + 2ab + 2$;

в) $2a^3 + 2a^2b + 2ab + 2b^2 - a - b$.

б) $b^2n + y^2 - bny - by$;

г) $12x^2 + 18y + 10x^3 + 15xy$;

е) $\frac{3}{17}x^2yz - \frac{1}{17}x + \frac{12}{17}xy^2z^2 - \frac{4}{17}yz$.

б) $2a^2b + 2c - 4abc - a$;

г) $0,2mn^3 - 1,5m^2 + 0,6m^3n - 0,5n^2$.

б) $ax^2 - ay^2 + 4az - 4bx^2 + 4by^2 - 16bz$;

г) $bn^2 + cn^2 - bp + bp^2 - cp + cp^2$.

б) $ca - cb + c + ad - bd + d$;

Знайдіть значення виразу:

506. а) $p^3 + pq^2 - p^2q - q^3$, якщо $p = 1,5$; $q = 0,5$;

б) $2a^3 - 6ab + a^2b - 3b^2$, якщо $a = 8$; $b = 21$;

в) $4x^3 + 4x^2y - 4x^2 + 3y^3 + 3xy^2 - 3y^2$, якщо $x = \frac{2}{7}$; $y = \frac{5}{7}$.

507. а) $2a^2 + ac - 2ac^2 - c^3$, якщо $a = 17$; $c = 4$;

б) $m^3 + m^2n - 10m + n^3 + n^2m - 10n$, якщо $m = \frac{1}{3}$; $n = \frac{2}{3}$.

Рівень В



508. Розкладіть на множники: $a^3 - a^2 + b^3 - b^2 + a^2b + b^2a$.

509. Дано многочлен $x^3 - x^2 + 3x - 3$. Доведіть, що для $x > 1$ він набуває лише додатних значень.510. Для яких значень x значення многочлена $3x^3 - 9x^2 + 4x - 12$ додатні; від'ємні?

511. Розв'яжіть рівняння: $(x^2 - x)(6 + 5x + x^2) = x^3(x + 4) - 5$.

512. Розкладіть на множники тричлен:

а) $a^2 - 7a + 10$;

б) $x^2 + 5x + 4$;

в) $x^2 + 3xy + 2y^2$;

г) $a^2 - 7ab + 12b^2$.

Розв'яжіть рівняння:

513. а) $x^2 - 3x + 2 = 0$;

б) $x^2 + 8x + 15 = 0$.

514. а) $(x - 2)^2 + 6(x - 2) + 8 = 0$;

б) $(x^2 - 5x)^2 + 10(x^2 - 5x) + 24 = 0$.

Вправи для повторення

515. Обчисліть:

а) $3^3 \cdot 9^3 - 27^3$;

б) $4^5 \cdot 0,25^5 + 2^3 \cdot 4^3 \cdot 0,25^3$;

в) $2^5(2^6 - 1) - 2^3(2^8 - 2^2)$;

г) $3^3(3^3 - 4) - 3^2(3^4 + 4)$.

516. За 3 товстих і 5 тонких зошитів Олег заплатив 5 грн. 60 к. Товстий зошит дорожчий від тонкого на 80 к. Скільки коштує товстий зошит?

517. На двох полицях було 95 книжок. Коли четверту частину книжок, які стояли на першій полиці, переставили на другу, то на другій полиці книжок стало на 5 більше, ніж на першій. Скільки книжок було на кожній полиці спочатку?

518. Площа першої ділянки дорівнює 63 га, а другої — 53 га. З першої ділянки господарство зібрало картоплі в $1\frac{1}{8}$ разу більше, ніж із другої. Яка врожайність картоплі на кожній ділянці, якщо врожайність на першій ділянці на 1,5 т менша, ніж на другій?

519. Прочитайте вираз словами:

а) $a + b$;

б) $a - b$;

в) $a^2 - b^2$;

г) $(a - b)(a + b)$.

Запитання і вправи для повторення § 4

1. Дайте означення многочлена. Наведіть приклади многочленів.
 2. Який многочлен називають многочленом стандартного вигляду?
 3. Що називають степенем многочлена? Наведіть приклад многочлена другого степеня.
 4. Знайдіть суму та різницю многочленів $2x + 4$ і $x + 2$.
 5. Як помножити одночлен на многочлен?
 6. Як помножити многочлен на многочлен?
 7. Що означає розкласти многочлен на множники?
 8. Як розкладають многочлен на множники способом винесення спільного множника за дужки? Поясніть це на прикладі многочлена $2a^2 + 4ab$.
 9. На прикладі многочлена $2a - 2b + na - nb$ поясніть, як розкладають многочлен на множники способом групування.
- 520.** Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:
- | | |
|---|--|
| а) $4a^2 - 3a + 1 + a^2 - 5a + 7$; | б) $2x^3 + 2 - 2x^3 + 5x - 3 + 3x^2$; |
| в) $3aba - 2a^2b + b^2a^2 + ab \cdot 4a$; | г) $x^2y - xy^2 + 2x - 6xy \cdot (-x) - 3x$. |
- 521.** Знайдіть суму многочленів:
- | | |
|--|--|
| а) $2a + 3$ і $5a - 2$; | б) $5x^3 - 3x^2 + 2x$ і $x^3 + 3x^2 - 2$; |
| в) $2x^2 - 3xy + y^2$ і $x^2 + 2xy - y^2$; | г) $-x^2 - 2x + 3$; $2x^2 - 5$ і $-2x + 2$. |
- 522.** Знайдіть різницю многочленів:
- | | |
|--|--|
| а) $3c^2 - 4c + 1$ і $3c^2 + c - 5$; | |
| б) $3x^3 - 4x^2 + 3x - 4$ і $-3x^3 - 4x^2 + 11$; | |
| в) $2a^5 - 8a^4 + a^2 + 5$ і $-8a^4 + a^3 - 2a - 5$; | |
| г) $-ab + 3a^2b + 3$ і $2ab - 5 + 3a^2b$. | |
- Виконайте множення і результат запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:*
- | | |
|---------------------------------------|---|
| 523. а) $a(4a - 3)$; | б) $2b(b^2 + 5b - 2)$; |
| в) $(x^2 + 3x + 2) \cdot 2x$; | г) $(3c^2 + 3c - 2) \cdot (-2c^2)$; |
| д) $(a - 2)(3a - 4)$; | е) $(n - 2m)(n + 2m)$; |
| є) $(a - 6)(2a^2 - a + 3)$; | ж) $(2c - d + 3)(3c + 2d)$. |
- | | |
|--|---|
| 524. а) $(x^2 - 2x + 1)(x^2 + x - 4)$; | б) $(x + 2)(3x - 1)(2x + 7)$; |
| в) $(m - 4n)(4m^2 + mn - n^2)$; | г) $(-ab^2 + 4a^3)(4a^2b + b^3)$. |
- 525.** Спростіть вираз:
- | | |
|---|--|
| а) $(4 - 3b)(b - 3) + (5b - 4)(3b - 3)$; | |
| б) $(8 - 2x)(2 + x) + (x - 2)(4 + 2x)$; | |
| в) $ab(2a - b - 1) - (2a - 1)(ab - 1)$; | |
| г) $(n + 2)(n^2 - 2n - 3) - (n - 3)(n^2 + 3n + 2)$; | |
| д) $(a + b - c)(a - b + c) - (a - b - c)(a + b + c)$; | |

е) $x^6(x^7 - (x^8 + x^7(x^2 - x + 1))) + x^{15}$.

526. Доведіть тотожність:

а) $(a + 1)(a^2 - 4) = (a^2 - a - 2)(a + 2)$;

б) $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$;

в) $b^8 + b^4 + 1 = (b^4 - b^2 + 1)(b^4 + b^2 + 1)$;

г) $a^4 + a^2b^2 + b^4 = (a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2)$.

527. Розв'яжіть рівняння:

а) $4x(2x + 1) - 8x^2 = -4$;

б) $(x + 3)(x - 1) + 6 = x^2$;

в) $\frac{2x+1}{6} - \frac{x-2}{4} = 2$;

г) $\frac{1-3x}{8} + \frac{5+4x}{12} = 1\frac{5}{6}$.

528. Доведіть, що значення виразу $(3n + 1)(2n - 1) + n + 7$ для кожного цілого значення n ділиться на 6.

529. Доведіть, що значення виразу $(5x + 1)(5x + 3) - 5x(5x + 4)$ не залежать від значень x .

530. Периметр прямокутника дорівнює 24 см. Якщо його довжину збільшити на 3 см, а ширину зменшити на 2 см, то площа зменшиться на 5 см^2 . Знайдіть довжину і ширину прямокутника.

531*. Розв'яжіть рівняння:

а) $-(x - 1)(x - 3) + x(x + 1)(x^4 + 1) = x^6 + x^5$;

б) $(2|x| - 3)(3|x| + 2) = (2|x| + 1)(3|x| - 2)$;

в) $(x^n + x)(x^n + 1) - x^n(x^n + x + 1) = 2x + 1$, де n — натуральне число.

Розкладіть на множники:

532. а) $2ax - 2ay$;

б) $8c^4 + 12c^2$;

в) $x^4 + 2x^3 - 3x^2$;

г) $-8a^3 - 12a^2 + 8a$;

д) $-0,6a^3b^4 + 0,4a^2b^3$;

е) $\frac{1}{4}xy - \frac{1}{2}xz + 2x^2$.

533. а) $2a + 2b + xa + xb$;

б) $3x - 3y - ax + ay$;

в) $x^3 + 2x^2 + x + 2$;

г) $0,1x - 0,2xy + 0,2y - 0,4y^2$;

д) $5a^2b + 10a^2 - 20bc - 10b^2c$;

е) $4x^2z + 25y^3 - 5x^2y - 20y^2z$.

534*. а) $x^2 - 9x + 14$;

б) $x^2 + 8x + 12$.

Розв'яжіть рівняння:

535. а) $y^2 - 3y = 0$;

б) $x^2 + 2x = 0$.

в) $0,8x^2 + 2x = 0$;

г) $1\frac{3}{8}x^2 = 3\frac{2}{3}x$.

536*. а) $x^2 - 5x + 6 = 0$;

б) $y^2 + 4y + 3 = 0$.

537. Знайдіть значення виразу:

а) $bc + c^2 - 5b - 5c$, якщо $b = 3,6$; $c = 1,4$;

б) $m^2 - mn - 4m + 4n$, якщо $m = 12,5$; $n = 2,5$;

- в) $4ay - 4ax - 2x + 2y$, якщо $a = -2$; $x = 0,01$; $y = -6,99$.
538. Доведіть, що значення виразу:
 а) $3^{14} - 3^{12}$ ділиться на 8; б) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.
- 539*. Доведіть, що значення виразу $2^{42} + 4^{20} + 8^{15} - 16^{12}$ ділиться на 219.
- 540*. Сума чисел x та y дорівнює 1. Доведіть, що для цих чисел правильною є рівність $x^2 + xy - 2x - y + 1 = 0$.
- 541*. Розв'яжіть рівняння $2x^3 - x^2 + 8x - 4 = 0$.

Завдання для самоперевірки № 4

Рівень 1

- Зведіть подібні члени многочлена $x^2 + 3x - x + 1 + 2x^2 - 2$ і вкажіть правильну відповідь:
 а) $3x^2 + 2$; б) $3x^2 - 2x + 1$; в) $3x^2 + 2x - 1$; г) $3x^2 - 2x - 1$.
- Спростіть вираз $2x^2 - 2x + 5 - (x^2 + 3x - 1)$ і вкажіть правильну відповідь:
 а) $x^2 + x + 4$; б) $3x^2 + x + 4$; в) $x^2 - 5x + 6$; г) $x^2 - 5x + 4$.
- Виконайте множення $c(3c - 4)$ і вкажіть правильну відповідь:
 а) $3c - 4c$; б) $3c^2 - 4c$; в) $3c^2 - 4$; г) $4c - 4$.
- Виконайте множення $(a - 1)(2a + 3)$ і вкажіть правильну відповідь:
 а) $2a^2 + a + 3$; б) $2a^2 - a - 3$; в) $2a^2 + 5a - 3$; г) $2a^2 + a - 3$.
- Розв'яжіть рівняння $2(x - 2) = x$ і вкажіть правильну відповідь:
 а) 2; б) -4; в) 4; г) $1\frac{1}{3}$.
- У виразі $3x - 3y$ винесіть спільний множник за дужки і вкажіть правильну відповідь:
 а) $3(x - 3y)$; б) $3(x - y)$; в) $3(x + y)$; г) $3(3x - y)$.

Рівень 2

- Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:
 а) $3(4a - 1) - (12a + 3) + 2a$; б) $x^2 - 2x - 8 - (2x^2 + x - 7)$.
- Виконайте множення:
 а) $2x^2(3x^2 - x + 1)$; б) $(3a - 2b)(2a - 5b)$.
- Винесіть за дужки спільний множник:
 а) $4x - 12x^2$; б) $-20 - 10a$; в) $2a^2b + 4a^3b - 2a^4b$.
- Знайдіть значення виразу $2,5a + a^2$, якщо $a = 7,5$.
- Розв'яжіть рівняння:
 а) $x - 2x^2 = 0$; б) $2x^2 + 8x = 0$.

Рівень 3

12. Знайдіть різницю многочленів $5x^4 - 4x^3 + 3x - 4$ і $-4x^3 + 4x^2 - 4$.
13. Виконайте множення:
а) $2x^3y^2(-1,6x^4y^3 + 3,4x^2y)$; б) $(a - 4b)(2a^2 + ab - 2b^2)$.
14. Розв'яжіть рівняння:
а) $\frac{3x-5}{8} - \frac{3+5x}{12} = -1$; б) $(2x-3)(3x+2) = (2x+3)(x-2)$.
15. Розкладіть на множники:
а) $(m-n)(m-2n) + 3m - 3n$; б) $a^2m + x^2 - amx - ax$.
16. Доведіть, що для кожного цілого значення k значення виразу $(k+5)(k^2-k+1) - 4k(k+1) - k^3 + 3$ ділиться на 8.

Рівень 4

17. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:
а) $\left(2\frac{1}{3}a^2 - 2\frac{4}{5}ab\right)\left(\frac{3}{7}ab - \frac{5}{7}b^2\right)$; б) $(x+y)(x+2y)(x+3y)$.
18. Обчисліть: $(2^{15} + 3)(2^{14} + 4^7 - 3) - 2^{30}$.
19. Розв'яжіть рівняння:
а) $x^3 + 6x^2 + 2x + 12 = 0$; б) $(|x| - 1)(2|x| - 3) = 2x^2$.
20. Розкладіть на множники:
а) $\frac{2}{9}a - \frac{2}{9}b + (a-b)^2$; б) $x^2 + (a+2)x + 2a$.
21. Периметри двох прямокутників дорівнюють по 18 см. Ширина та площа першого прямокутника більші від ширини та площі другого прямокутника відповідно на 2 см і 6 см^2 . Знайдіть площу кожного прямокутника.

§ 5. ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

16. Множення різниці двох виразів на їх суму

Помножимо різницю $a - b$ на суму $a + b$:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже,

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2.$$

Одержана тотожність дозволяє множити різницю двох виразів на їх суму не за правилом множення двох многочленів, а скорочено: відразу записувати добуток у вигляді $a^2 - b^2$. Тому доведену тотожність називають *формулою скороченого множення*. Формулюють її так:

Добуток різниці двох виразів та їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Помножимо за цим правилом різницю $2x - 3y$ на суму $2x + 3y$:

$$(2x - 3y)(2x + 3y) = (2x)^2 - (3y)^2 = 4x^2 - 9y^2.$$

З переставної властивості множення випливає, що добуток суми двох виразів та їх різниці теж дорівнює різниці квадратів цих виразів:

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$$

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Виконати множення:

а) $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3)$; **б)** $(-a - 2b)(a - 2b)$; **в)** $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9)$.

• **а)** $(3a^2 + 5b^3)(3a^2 - 5b^3) = (3a^2)^2 - (5b^3)^2 = 9a^4 - 25b^6$;

б) $(-a - 2b)(a - 2b) = -(a + 2b)(a - 2b) = -(a^2 - 4b^2) = 4b^2 - a^2$;

в) $(x - 3)(x + 3)(x^2 + 9) = (x^2 - 9)(x^2 + 9) = (x^2)^2 - 9^2 = x^4 - 81$. •

Приклад 2. Обчислити $3,2 \cdot 2,8$.

• $3,2 \cdot 2,8 = (3 + 0,2)(3 - 0,2) = 3^2 - 0,2^2 = 9 - 0,04 = 8,96$. •

Усно

542. Вкажіть правильну рівність:

а) $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 - 2b^2$;

б) $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 + 4b^2$;

в) $(a - 2b)(a + 2b) = (a - 2b)^2$;

г) $(a - 2b)(a + 2b) = a^2 - 4b^2$.

Рівень А



Перемножте многочлени:

543. а) $(k - n)(k + n)$;

б) $(m - 4)(m + 4)$;

в) $(1 - b)(1 + b)$;

г) $(4a + 5b)(4a - 5b)$.

544. а) $(b+c)(b-c)$; б) $(4+n)(4-n)$; в) $(3y-2z)(3y+2z)$.

545. а) $(b+a)(-a+b)$; б) $(x+2)(-x+2)$; в) $(-1+b)(1+b)$.

Запишіть у вигляді многочлена:

546. а) $(y^2-1)(y^2+1)$; б) $(2+b^3)(2-b^3)$; в) $(m-3m^2)(m+3m^2)$;

г) $(2ab+5)(2ab-5)$; д) $(4n^2+k)(-4n^2+k)$; е) $(-a^2+3b)(a^2+3b)$.

547. а) $(a^2+3)(a^2-3)$; б) $(2x^3-7)(2x^3+7)$; в) $(6-5zt)(6+5zt)$;

г) $(-2+c)(2+c)$; д) $(4x+3y)(-4x+3y)$; е) $(-2a+5b)(2a+5b)$.

548. Знайдіть значення виразу $(x-y)(x+y)$, якщо:

а) $x=100$ і $y=2$; б) $x=10$ і $y=0,2$; в) $x=1$ і $y=0,02$.

Обчисліть:

549. а) $99 \cdot 101$; б) $198 \cdot 202$; в) $53 \cdot 47$; г) $85 \cdot 95$;

д) $10,2 \cdot 9,8$; е) $7,7 \cdot 8,3$; є) $1,02 \cdot 0,98$; ж) $4,95 \cdot 5,05$.

550. а) $49 \cdot 51$; б) $73 \cdot 67$; в) $20,5 \cdot 19,5$;

г) $9,6 \cdot 10,4$; д) $5,03 \cdot 4,97$; е) $1,96 \cdot 2,04$.

Рівень Б



Спростіть вираз:

551. а) $(a+1)(a-1) + (2-a)(2+a)$; б) $(b+3)(b-3) - (b-2)(b+2)$;

в) $(5x-2x^2)(5x+2x^2) - 25x^2$; г) $c^4 - (c^2+8c^4)(c^2-8c^4)$;

д) $(3ab-4c^2)(3ab+4c^2) + (2c)^4$;

е) $(-a+2b)(a+2b) - (2b+3a)(2b-3a)$;

є) $(4-3b^2)(4+3b^2) - (2-3b)(8+3b^3)$.

552. а) $(x+3)(x-3) - (x-4)(x+4)$; б) $(5-2c)(5+2c) - 2c(1-2c)$;

в) $a^2(a^2+7)(a^2-7) + 49a^2$; г) $(-xy-2z^2)(-xy+2z^2) - (xy)^2$;

д) $(a+b)(a-b) + (b+c)(b-c) + (c+a)(c-a)$.

553. а) $(z-\frac{2}{3})(z+\frac{2}{3}) + 1\frac{4}{9}$; б) $(\frac{3}{7}a + \frac{2}{5}b)(\frac{3}{7}a - \frac{2}{5}b) + b^2$;

в) $(1\frac{1}{3}-x)(1\frac{1}{3}+x) - 2\frac{4}{9}$; г) $(\frac{1}{3}a^2 - 1\frac{1}{9})(\frac{1}{3}a^2 + 1\frac{1}{9}) + a^4 + 1\frac{19}{81}$.

554. а) $(\frac{1}{2}a - \frac{3}{7})(\frac{1}{2}a + \frac{3}{7}) + \frac{9}{49}$; б) $(2\frac{1}{3}b + 1\frac{2}{3})(2\frac{1}{3}b - 1\frac{2}{3}) + \frac{5}{9}b^2$.

555. а) $(b+1)(b-1)(b^2+1)$; б) $(2x-1)(2x+1)(4x^2+1)$;

в) $(2-y)(2+y)(4+y^2)$; г) $(4+3n)(-4+3n)(16+9n^2)$;

д) $(y-2z)(y+2z)(y^2+4z^2)$; е) $(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)$.

556. а) $(3-c)(3+c)(9+c^2)$; б) $(z+5)(z-5)(z^2+25)$;

в) $(4x-y)(4x+y)(16x^2+y^2)$; г) $(2+3k^2)(-2+3k^2)(9k^4+4)$.

557. Доведіть, що значення виразу $(8n + 5)(8n - 5) - (7n - 5)(7n + 5)$ для кожного цілого значення n ділиться на 15.

558. Доведіть, що значення виразу $(4x + 3)(4x - 3) - (4x - 5)(4x + 5)$ не залежать від значень x .

Розв'яжіть рівняння:

559. а) $(y - 3)(y + 3) + y(2 - y) = 1$; **б)** $(2x - 0,5)(2x + 0,5) = x(4x - 0,5)$;

в) $x^2 + (-4 - x)(-4 + x) = 8(x + 1)$; **г)** $(-z^2 + 1)(z^2 + 1) = 1 - z(1 + z^3)$.

560. а) $2x(1 - 8x) + (4x - 1)(4x + 1) = 0$; **б)** $(2 - 3y)(2 + 3y) = (9y - 2)(2 - y)$.

Рівень В



561. Спростіть вираз:

а) $(a + b - c)(a - b) + (b + c - a)(b - c) + (c + a - b)(c - a)$;

б) $(a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8)(a^{16} + b^{16})$.

562. Доведіть, що коли $a - b = 1$, то:

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) = a^{16} - b^{16}.$$

563. Доведіть, що $(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) = 2^{32} - 1$.

564. Розв'яжіть рівняння $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 + x$.

565. Дано квадрат і прямокутник. Довжина прямокутника на 2 см більша, а ширина — на 2 см менша, ніж сторона квадрата. Що більше — площа квадрата чи площа прямокутника?

Вправи для повторення

566. Швидкість велосипедиста у 2,5 разу більша від швидкості пішохода. За 2 год пішохід долає відстань, що на 2,5 км менша від відстані, яку долає велосипедист за 1 год. Знайдіть швидкість пішохода.

567. Вкладник вніс до банку 4000 грн. За перший рік йому нарахували 8%-річних, а потім банківський відсоток збільшився. У кінці другого року на рахунку вкладника було 4752 грн. Скільки відсотків річних став нараховувати банк після збільшення ставки?

568*. Сплав міді й цинку, загальна маса якого дорівнює 3,6 кг, містить 45% міді. Скільки кілограмів міді потрібно додати до цього сплаву, щоб одержати новий сплав, який містив би 60% міді?

569. Замініть степінь добутком і запишіть одержаний добуток у вигляді многочлена:

а) $(a + 1)^2$;

б) $(2b - 1)^2$;

в) $(5 - 2x)^2$.

570. Запишіть у вигляді виразу:

а) суму квадратів змінних x і y ; **б)** квадрат суми змінних x і y ;

в) різницю квадратів змінних a і c ; **г)** квадрат різниці змінних a і c .

17. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів

1. Квадрат суми двох виразів. Піднесемо до квадрата суму $a + b$:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Одержану тотожність називають *формулою квадрата суми*. Вона є формулою скороченого множення, бо дозволяє підносити до квадрата суму довільних двох виразів не за правилом множення двох многочленів, а скорочено: відразу записувати квадрат у вигляді тричлена $a^2 + 2ab + b^2$. Формулюють формулу квадрата суми так:

Квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу плюс подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

Піднесемо до квадрата суму $2x + 3y$:

$$(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

При піднесенні суми $2x + 3y$ до квадрата проміжні перетворення можна виконувати усно:

$$(2x + 3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2.$$

2. Квадрат різниці двох виразів. Піднесемо до квадрата різницю $a - b$:

$$(a - b)^2 = (a + (-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Отже, маємо таку *формулу квадрата різниці*:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу мінус подвоєний добуток цих виразів плюс квадрат другого виразу.

Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів ще називають *квадратом двочлена*.

Квадрати протилежних чисел дорівнюють один одному: $(-a)^2 = a^2$. Тому при піднесенні до квадрата виразів $-a - b$ та $-a + b$ можна користуватися формулами:

$$(-a - b)^2 = (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(-a + b)^2 = (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Для тих, хто хоче знати більше



Щоб піднести суму або різницю двох виразів до куба, можна використовувати *формули куба суми або куба різниці*:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Виведемо ці формули.

$$1. (a + b)^3 = (a + b)(a + b)^2 = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2) =$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$2. (a - b)^3 = (a + (-b))^3 = a^3 + 3a^2(-b) + 3a(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Формулюють формулу куба суми так:

Куб суми двох виразів дорівнює кубу першого виразу плюс потроєний добуток квадрата першого виразу і другого плюс потроєний добуток першого виразу і квадрата другого плюс куб другого виразу.

Формулу куба різниці формулюють аналогічно.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Піднести до квадрата вираз:

а) $xy - 2z^2$; **б)** $-3m - n$; **в)** $-x + 5y$; **г)** $a + b - c$.

• **а)** $(xy - 2z^2)^2 = (xy)^2 - 2 \cdot xy \cdot 2z^2 + (2z^2)^2 = x^2y^2 - 4xyz^2 + 4z^4$;

б) $(-3m - n)^2 = (3m + n)^2 = 9m^2 + 6mn + n^2$;

в) $(-x + 5y)^2 = (x - 5y)^2 = x^2 - 10xy + 25y^2$;

г) $(a + b - c)^2 = ((a + b) - c)^2 = (a + b)^2 - 2(a + b)c + c^2 =$
 $= a^2 + 2ab + b^2 - 2ac - 2bc + c^2$. •

Усно

571. Піднесіть до квадрата двочлен:

а) $x + y$; **б)** $x - y$; **в)** $a + 1$; **г)** $a - 1$.

Рівень А



Піднесіть до квадрата:

572. **а)** $(k + n)^2$; **б)** $(b + 2)^2$; **в)** $(c - 4)^2$;

г) $(3 + a)^2$; **д)** $(5 - b)^2$; **е)** $(a + 15)^2$;

є) $(x - 0,5)^2$; **ж)** $(1,2 - c)^2$; **з)** $(n + 2,5)^2$.

573. **а)** $(b - c)^2$; **б)** $(x + 4)^2$; **в)** $(a - 2)^2$;

г) $(3 - n)^2$; **д)** $(0,3 + z)^2$; **е)** $(1,5 - b)^2$.

574. **а)** $(2a + 1)^2$; **б)** $(2c - 5)^2$; **в)** $(3 - 4a)^2$;

г) $(4c - 0,5)^2$; **д)** $(2b - 0,5c)^2$; **е)** $(5x - 0,2)^2$.

575. **а)** $(3b - 1)^2$; **б)** $(5z + 2)^2$; **в)** $(6a + b)^2$;

г) $(4x - 5y)^2$; **д)** $(0,3a + 10b)^2$; **е)** $(8b - 0,5)^2$.

Спростіть вираз:

576. **а)** $(a + 1)^2 + (a - 1)^2$; **б)** $(b + 2)^2 - 4(b + 1)$;

в) $(5 - 2x)^2 - 25 - 4x^2$; **г)** $x^2 - 1 - (x - 1)^2$.

577. а) $(4 - b)^2 + 8b - b^2$;

б) $(x + 2)^2 + (x - 2)^2$.

Розв'яжіть рівняння:

578. а) $(x + 2)^2 - x^2 = 8$;

б) $(x - 3)^2 - x^2 = 21$.

579. а) $(x - 1)^2 - x^2 = 11$;

б) $(x + 4)^2 - x^2 = 24$.

Рівень Б



Піднесіть до квадрата:

580. а) $(-b + c)^2$;

б) $(-x - y)^2$;

в) $(-2a + 3)^2$;

г) $(-4x + 5y)^2$;

д) $(-2m - 10n)^2$;

е) $(-2,5a + 4)^2$.

581. а) $(-m - n)^2$;

б) $(-b + 5)^2$;

в) $(-3x + y)^2$;

г) $(-4c - 3d)^2$;

д) $(-k - 1,5)^2$;

е) $(-0,5z + 2)^2$.

Подайте у вигляді многочлена стандартного вигляду:

582. а) $(y^2 + 1)^2$;

б) $(2 - x^3)^2$;

в) $(2m - m^2)^2$;

г) $(-4a^2 + a)^2$;

д) $(4a^2 - ac)^2$;

е) $(-4a^2 - 3b)^2$.

є) $(-m^2 - 0,5nk)^2$;

ж) $(3x^2 - \frac{2}{3}x)^2$;

з) $(\frac{1}{4}ab + \frac{2}{5}ac)^2$.

583. а) $(a^2 + 2)^2$;

б) $(2b^3 - 4)^2$;

в) $(-2x - x^2)^2$;

г) $(-2a^2 + 5ab)^2$;

д) $(\frac{3}{4}xy - \frac{1}{3})^2$;

е) $(\frac{2}{7}x - 2\frac{1}{3}x^2)^2$.

Піднесіть до квадрата:

584. а) $(a - b + 1)^2$;

б) $(3c - 2a + 3)^2$;

в) $(3 - x - 2x^2)^2$.

585. а) $(2 - x + y)^2$;

б) $(-2m + 1 - 3n)^2$;

в) $(a^2 + 5a + 4)^2$.

Доведіть тотожність:

586. а) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

б) $(2xy)^2 + (x^2 - y^2)^2 = (x^2 + y^2)^2$;

в) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

587. а) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$;

б) $(a - b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc$.

Спростіть вираз:

588. а) $(2a - 1)^2 - (2a + 1)^2$;

б) $(x^2 + 1)^2 - x^2(x^2 + 2)$;

в) $(2n - 1)^2 + (2n)^2 + (2n + 1)^2$;

г) $(a + b - 4)^2 + 8(a + b - 2)$.

589. а) $(-a + 2b)^2 + (a + 2b)^2$;

б) $(x^2 - 3)^2 + (3x - 1)(2x + 9)$;

в) $(a - b + 1)^2 - 2(1 - b)(1 + a)$.

Розв'яжіть рівняння:

590. а) $(5x + 4)^2 = (1 - 5x)^2$;

б) $(3x - 5)(3x + 5) = 7 + (3x - 4)^2$;

в) $(2y + 3)^2 - (4y - 2)(y - 6) = 16$;

г) $(3x - 1)^2 + (4x - 1)^2 = (5x - 1)^2$.

591. а) $(2x - 3)^2 - 3 = (2x + 1)^2 - 11$;

б) $16y^2 - (4y - 3)^2 = 15y - 90$;

в) $3(x - 1)^2 - (2 - x)(2 + x) = (2x - 1)^2$.

Рівень В



592. Піднесіть до куба:

а) $(a + 1)^3$;

б) $(2x - y)^3$;

в) $(3m + 4n)^3$.

593. Спростіть вираз: $(a^{10} - b^{10})^2(a^{10} + b^{10})^2 - (a^{20} + b^{20})^2$.

594. Доведіть, що для кожного натурального значення n значення виразу $(5^n + 2)^2 - 2(5^n + 2)(5^n - 2) + (5^n - 2)^2$ ділиться на 16.

595. Доведіть, що вираз $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x + y)^4 + 2xy(x + y)^2$ набуває лише невід'ємних значень.

596. Ціле число при діленні на 7 дає в остачі 3. Яку остачу при діленні на 7 дає квадрат цього числа?

597. Ціле число m не ділиться на 5. Доведіть, що число $m^4 - 1$ ділиться на 5.

598. Число a є квадратом деякого натурального числа. Чи може запис числа a закінчуватися двома шістками?

Вправи для повторення

599. Одне число становить 0,8 іншого числа і менше від нього на 12. Знайдіть ці числа.

600. Одне із чисел на 80% більше від іншого. Якщо від більшого числа відняти 3,4, а до меншого додати 2,2, то одержимо однакові результати. Знайдіть ці числа.

601. Робітник і його учень виготовили 81 деталь, до того ж, робітник виготовив на 70% деталей більше, ніж учень. Скільки деталей виготовив робітник і скільки учень?

602. Подайте у вигляді квадратів числа: 81; 441; 625; 3,24; 0,09; 0,36; $\frac{16}{49}$; $11\frac{1}{9}$.

603. Подайте вираз у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду:

а) $16x^2$;

б) $196c^4$;

в) $0,25b^2c^2$;

г) $\frac{9}{64}x^4y^6z^2$.

604. Розкладіть на множники:

а) $(2x - 3y)(2x + 3y) + 9y^2 + 4x$;

б) $a^6 + 2a^4 + 2a^2 + 4$.

18. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів

У тотожності $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Одержану тотожність називають *формулою різниці квадратів* двох виразів. Формулюють її так:

Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів та їх суми.

Формула різниці квадратів дає можливість розкласти на множники двочлен $a^2 - b^2$. Її використовують для розкладання на множники різниці квадратів двох довільних виразів. Наприклад:

$$4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3).$$

Порівняйте

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	помножили різницю двох виразів на їх суму; результат — многочлен (різниця квадратів двох виразів)
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$	розклали на множники різницю квадратів двох виразів; результат — добуток різниці виразів та їх суми

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розкласти на множники:

а) $16x^4 - 2,25y^2z^2$;

б) $(4a - b)^2 - a^2$.

• а) $16x^4 - 2,25y^2z^2 = (4x^2)^2 - (1,5yz)^2 = (4x^2 - 1,5yz)(4x^2 + 1,5yz)$;

б) $(4a - b)^2 - a^2 = (4a - b - a)(4a - b + a) = (3a - b)(5a - b)$. •

Приклад 2. Обчислити $75^2 - 65^2$.

• $75^2 - 65^2 = (75 - 65)(75 + 65) = 10 \cdot 140 = 1400$. •

Приклад 3. Розв'язати рівняння $(x - 3)^2 - 36 = 0$.

• $(x - 3)^2 - 36 = 0$; $(x - 3)^2 - 6^2 = 0$; $(x - 3 - 6)(x - 3 + 6) = 0$;

$(x - 9)(x + 3) = 0$; $x - 9 = 0$ або $x + 3 = 0$; $x = 9$ або $x = -3$.

Відповідь. 9; -3. •

Усно

605. Розкладіть на множники:

а) $x^2 - y^2$;

б) $p^2 - 4$;

в) $16 - c^2$.

Рівень А



Розкладіть на множники:

606. а) $a^2 - 9$;

б) $b^2 - 1$;

в) $1 - x^2$;

г) $16 - y^2$;

д) $4z^2 - 36$;

е) $49a^2 - 9b^2$;

є) $100x^2 - 121y^2$;

ж) $9 - a^2b^2$.

607. а) $b^2 - 25$; б) $9c^2 - 1$; в) $25 - 64y^2$;
 г) $36m^2 - 49n^2$; д) $400 - z^2$; е) $81p^2 - 121q^2$.

Обчисліть:

608. а) $45^2 - 44^2$; б) $81^2 - 71^2$; в) $138^2 - 38^2$; г) $6,7^2 - 3,3^2$.

609. а) $29^2 - 28^2$; б) $205^2 - 105^2$; в) $78^2 - 22^2$; г) $9,5^2 - 8,5^2$.

Знайдіть значення виразу:

610. $x^2 - y^2$, якщо $x = 42$ і $y = 32$; $x = 2,8$ і $y = 7,2$; $x = 54$ і $y = -46$.

611. $m^2 - n^2$, якщо $m = 116$ і $n = 16$; $m = 5,7$ і $n = -4,7$.

Розв'яжіть рівняння:

612. а) $x^2 - 4 = 0$; б) $25x^2 - 16 = 0$.

613. а) $y^2 - 36 = 0$; б) $100x^2 - 49 = 0$.

Рівень Б



Розкладіть на множники:

614. а) $a^4 - b^2$; б) $25m^2 - 64n^8$; в) $36 - 4a^6c^2$;
 г) $0,01 - 6,25x^8y^{10}$; д) $\frac{9}{49}a^2 - 16x^4y^8$; е) $2\frac{7}{9} - 0,81a^4b^8c^{12}$.

615. а) $4a^8 - 25b^2c^2$; б) $1,96m^{20} - 0,09n^2$; в) $\frac{4}{9}a^8b^4c^2 - 2\frac{1}{4}x^6$.

616. а) $(a + 2)^2 - 1$; б) $(3b - 1)^2 - 4$; в) $16 - (3b + 2)^2$;
 г) $(2a - 5)^2 - 25b^2$; д) $(4x + 3)^2 - (3x + 2)^2$; е) $(a - 3b)^2 - (3a + 5b)^2$.

617. а) $(2x - 1)^2 - 9$; б) $4a^2 - (4a + 3)^2$; в) $(4x - y)^2 - (5x - 2y)^2$.

Знайдіть значення виразу:

618. $a^2 - 4b^2$, якщо $a = 3,28$ і $b = 3,36$; $a = 1\frac{4}{7}$ і $b = \frac{2}{7}$.

619. $9p^2 - q^2$, якщо $p = 2,3$ і $q = -1,9$; $p = \frac{3}{14}$ і $q = \frac{5}{14}$.

Розв'яжіть рівняння:

620. а) $(x + 3)^2 - 1 = 0$; б) $(5y - 2)^2 - 9 = 0$;
 в) $(3z + 5)^2 - 4z^2 = 0$; г) $(2x - 3)^2 - (3x + 3)^2 = 0$.

621. а) $(2x - 5)^2 - 1 = 0$; б) $(4y - 7)^2 - (y + 2)^2 = 0$.

622. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

а) $4575^2 - 1425^2$ на 1000; б) $843^2 - 257^2$ на 200.

Рівень В



623. Візьмемо два числа a і b , що дорівнюють одне одному: $a = b$. Обидві частини рівності помножимо на a і потім віднімемо від обох частин b^2 .

Отримаємо:

$$a^2 = ab; \quad a^2 - b^2 = ab - b^2; \quad (a + b)(a - b) = b(a - b).$$

Звідси $a + b = b$. З одержаної рівності, врахувавши, що $a = b$, матимемо:

$$b + b = b; \quad 2b = b; \quad b = \frac{b}{2}.$$

Отже, отримали, що будь-яке число дорівнює своїй половині.

Знайдіть помилку в проведених міркуваннях.

624. Доведіть, що значення виразу $(4k + 2)^2 - (4k - 2)^2$ для будь-якого цілого значення k ділиться на 32.

625. Розкладіть на множники:

а) $a^8 - b^8$;

б) $1 - x^{16}$.

626. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^4 - 16 = 0$;

б) $x^8 - 1 = 0$;

в) $(x^2 + 4x - 7)^2 - (x^2 + 4x + 7)^2 = 0$.

627. Доведіть, що різниця квадратів двох цілих чисел, одне з яких при діленні на 5 дає в остачі 3, а інше — 2, кратна 5.

Вправи для повторення

628. Обчисліть:

а) $1,8 \cdot \left(0,5 - \frac{1}{3} + 1\frac{1}{6}\right)$;

б) $4\frac{7}{20} : 1\frac{9}{20} - 20 \cdot \left(3\frac{1}{5} - 2\frac{1}{4}\right)$.

629. Батькові 36 років, а синові — 12.

а) Через скільки років батько буде удвічі старший від сина?

б) Скільки років тому батько був у 5 разів старший від сина?

630. З міста A до міста B , відстань між якими дорівнює 250 км, виїхав автобус. Через 40 хв з міста B назустріч йому виїхав автомобіль, швидкість якого на 20 км/год більша від швидкості автобуса. Через 1,5 год після виїзду автомобіля він зустрів автобус. Яка швидкість автомобіля?

631. Піднесіть до квадрата:

а) $(m - 5)^2$;

б) $(3a + 1)^2$;

в) $(4b - 3)^2$;

г) $(-2a - 5b)^2$.

19. Розкладання многочленів на множники з використанням формул квадрата суми і квадрата різниці

Запишемо формули квадрата суми і квадрата різниці двох виразів (квадрата двочлена), помінявши в них ліві та праві частини:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b);$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b).$$

Перша із цих формул дає розклад на множники тричлена $a^2 + 2ab + b^2$, а друга — тричлена $a^2 - 2ab + b^2$.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розкласти на множники тричлен $9a^2 - 24ab + 16b^2$.

$$\bullet 9a^2 - 24ab + 16b^2 = (3a)^2 - 2 \cdot 3a \cdot 4b + (4b)^2 = (3a - 4b)^2. \bullet$$

Приклад 2. Знайти значення виразу $x^2 + 8x + 16$, якщо $x = 16$; $x = -11$.

- Запишемо спочатку тричлен $x^2 + 8x + 16$ у вигляді квадрата двочлена:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2.$$

Якщо $x = 16$, то: $(x + 4)^2 = (16 + 4)^2 = 20^2 = 400$.

Якщо $x = -11$, то: $(x + 4)^2 = (-11 + 4)^2 = (-7)^2 = 49$. •

Усно

632. Розкладіть на множники:

а) $x^2 + 2xy + y^2$;

б) $x^2 - 2xb + b^2$;

в) $x^2 + 2x + 1$.

Рівень А



Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена:

633. а) $p^2 + 2pq + q^2$;

б) $c^2 - 2c + 1$;

в) $b^2 + 4b + 4$;

г) $x^2 - 6x + 9$;

д) $36 + 12b + b^2$;

е) $25 + z^2 - 10z$.

634. а) $4a^2 - 4a + 1$;

б) $16x^2 + 8x + 1$;

в) $1 - 14b + 49b^2$;

г) $4x^2 + 12x + 9$;

д) $25b^2 - 20b + 4$;

е) $-40b + 16 + 25b^2$.

635. а) $4x^2 + 4xz + z^2$;

б) $m^2 - 6mn + 9n^2$;

в) $16a^2 - 8ab + b^2$;

г) $4c^2 + 12ca + 9a^2$;

д) $49x^2 - 28xy + 4y^2$;

е) $25p^2 + 9q^2 - 30pq$.

636. а) $x^2 + 4x + 4$;

б) $a^2 - 10a + 25$;

в) $16 - 8b + b^2$;

г) $9k^2 - 6k + 1$;

д) $4b^2 + 16b + 16$;

е) $64 - 80s + 25s^2$;

є) $16a^2 + 8ab + b^2$;

ж) $25m^2 - 20mn + 4n^2$;

з) $9b^2 + 16c^2 - 24bc$.

Знайдіть значення виразу:

637. а) $x^2 - 4x + 4$, якщо $x = 12$; $x = 2,1$; $x = -18$;

б) $9a^2 - 6a + 1$, якщо $a = 7$; $a = -33$.

638. $4a^2 + 4a + 1$, якщо $a = 4,5$; $a = -5,5$.

Рівень Б



Розкладіть на множники:

639. а) $0,25m^2 + 2mn + 4n^2$; б) $0,36c^2 - 0,6cx + 0,25x^2$;
 в) $6,25x^2 + 1,5xyz + 0,09y^2z^2$; г) $196a^4x^4 - 2,8a^2b^2x^2y^4 + 0,01b^4y^8$;
 д) $x^2 + x + \frac{1}{4}$; е) $a^2 - 2\frac{2}{3}a + 1\frac{7}{9}$.
 640. а) $0,01a^2 + 4ab + 400b^2$; б) $0,64x^2 - 0,32xy + 0,04y^2$;
 в) $1,44m^4n^2 - 1,2m^2nk^3 + 0,25k^6$; г) $p^2 - \frac{1}{3}p + \frac{1}{36}$.

Знайдіть значення виразу:

641. а) $4x^2 + 4xy + y^2$, якщо $x = \frac{1}{7}$; $y = \frac{5}{7}$;
 б) $a^2 - 3a + 2,25$, якщо $a = 11,5$; $a = -7,5$.
 642. $m^2 - 6mn + 9n^2$, якщо $m = \frac{2}{3}$; $n = \frac{1}{3}$.

Розв'яжіть рівняння:

643. а) $x^2 - 8x + 16 = 0$; б) $y^2 + 12y + 36 = 0$.
 644. а) $z^2 - 6z + 9 = 0$; б) $x^2 + 10x + 25 = 0$.

Рівень В



645. Знайдіть таке число b , для якого даний вираз є квадратом двочлена:

- а) $64x^2 + 80x + b$; б) $b + \frac{2}{45}y^2 + 0,04y^4$.
 646. Подайте многочлен у вигляді суми квадратів двох виразів:
 а) $2y^2 + 2y + 1$; б) $a^4 + 3a^2 + 1$;
 в) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$; г) $m^2 + 2mn + 2n^2 + 2n + 1$.
 647. Подайте многочлен $9x^2 + 6xy + 2y^2 + 4y + 4$ у вигляді суми квадратів двох виразів. Для яких значень x та y значення цього многочлена дорівнює нулю?
 648. Розв'яжіть рівняння: $(x^2 + 4x + 4)^2 - (x + 2)^4 = 0$.

Вправи для повторення

649. Знайдіть значення виразу:

- а) $(a^2bc^2)^2 \cdot b^2$, якщо $a = 4$; $b = -0,3$; $c = 0,25$;
 б) $(5a^3b)^2 \cdot ab^5$, якщо $a = 0,2$; $b = 5$.
 650. Для яких значень x значення виразу $(2x + 1)^2 - 4(x^2 + 3x)$ дорівнює: 1 ; -1 ?

- 651*. У першій чашці є кава, у другій — стільки ж молока. З першої чашки в другу перелили ложечку кави, потім таку ж ложечку суміші перелили з другої чашки в першу. Чого більше: молока у першій чашці чи кави в другій?
652. Запишіть у вигляді виразу:
- а) куб суми чисел m і n ; б) суму кубів чисел m і n ;
 в) куб різниці чисел a і c ; г) різницю кубів чисел a і c .
653. Запишіть у вигляді куба вираз:
- а) $8x^3$; б) $-8x^3$; в) $64a^9$; г) $-0,027a^6b^{12}$.
654. Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:
- а) $(x+4)(x^2+2x-3)$; б) $(a-2b)(a^2-2ab+2b^2)$.

20. Різниця і сума кубів двох виразів

Різницю квадратів двох виразів можна розкласти на множники за формулою різниці квадратів. Розкладаючи на множники різницю кубів двох виразів, використовують *формулу різниці кубів*:

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Доведемо цю тотожність, перемноживши вирази $a - b$ і $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \underline{a^2b} + \underline{ab^2} - \underline{a^2b} - \underline{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3.$$

У формулі різниці кубів тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають *неповним квадратом суми виразів a і b* (він нагадує тричлен $a^2 + 2ab + b^2$, який є «повним» квадратом суми виразів a і b). Отже, формулу різниці кубів можна сформулювати так:

Різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Розкладаючи на множники суму кубів двох виразів, використовують *формулу суми кубів*:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Доведемо цю тотожність:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \underline{a^2b} + \underline{ab^2} + \underline{a^2b} - \underline{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3.$$

Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають *неповним квадратом різниці виразів a і b* . Отже,

Сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

Приклади розв'язання вправ




Приклад 1. Розкласти на множники:

- а) $a^3 - 64$; б) $27a^3 + 125b^3$; в) $-x^3 - y^6$.

- а) $a^3 - 64 = a^3 - 4^3 = (a - 4)(a^2 + 4a + 16)$;
- б) $27a^3 + 125b^3 = (3a)^3 + (5b)^3 = (3a + 5b)(9a^2 - 15ab + 25b^2)$;
- в) $-x^3 - y^6 = -(x^3 + (y^2)^3) = -(x + y^2)(x^2 - xy^2 + y^4)$. •

Усно														
------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

655. Назвіть неповний квадрат різниці виразів:
 а) x і y ; б) c і d ; в) p і 1 ; г) 2 і c .
656. Назвіть неповний квадрат суми виразів:
 а) m і n ; б) p і q ; в) a і 1 ; г) 3 і x .
657. Розкладіть на множники: а) $x^3 - y^3$; б) $m^3 + n^3$.

Рівень А															
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

Розкладіть на множники:

658. а) $p^3 - q^3$; б) $b^3 - 1$; в) $x^3 - 27$; г) $64 - y^3$;
 д) $b^3 + c^3$; е) $a^3 + 8$; є) $1 + y^3$; ж) $125 + b^3$.
659. а) $m^3 - n^3$; б) $b^3 - 8$; в) $27 - a^3$; г) $1 - z^3$;
 д) $x^3 + y^3$; е) $k^3 + 64$; є) $p^3 + 1$; ж) $27 + c^3$.
660. а) $27x^3 - 1$; б) $1 + 64b^3$; в) $8a^3 - 27$; г) $125 - 27y^3$;
 д) $64m^3 - 27$; е) $b^3 + \frac{1}{8}$; є) $\frac{1}{27}y^3 - 1$; ж) $\frac{1}{8}x^3 + 1$.
661. а) $m^6 - n^3$; б) $a^9 + b^6$; в) $a^6 + c^6$; г) $x^{12} - y^9$.
662. а) $8z^3 + 1$; б) $1 - 125p^3$; в) $27x^3 + 64$; г) $125c^3 - 8$;
 д) $\frac{1}{8}a^3 - 1$; е) $27m^3 + \frac{1}{27}$; є) $y^3 - x^9$; ж) $p^6 + q^{12}$.

Рівень Б															
----------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

663. Запишіть у вигляді добутку:
 а) $-a^3 + 8$; б) $-b^3 - c^3$; в) $-27 + y^3$; г) $-64 - z^3$.

Розкладіть на множники:

664. а) $64a^3 - 27b^3$; б) $\frac{1}{64}p^3 - 8q^3$; в) $27a^6 - 125$;
 г) $0,001a^6 - b^3c^3$; д) $8x^9 + 125y^6$; е) $1000 - a^3b^9c^{12}$.
665. а) $216b^3 - 27c^3$; б) $125m^3 + \frac{64}{125}n^6$; в) $0,064x^9y^6z^3 - 27$.

Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

666. а) $921^3 - 821^3$ на 100; б) $57^3 + 28^3$ на 85.

667. а) $27^3 + 37^3$ на 64;

б) $75^3 - 46^3$ на 29.

Спростіть вираз:

668. а) $(a - b)(a^2 + ab + b^2) + b^3$;

б) $(x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1) + 1$;

в) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - a^6 - b^6$;

г) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a - 2)(a^2 + 2a + 4)$.

669. а) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - 27$;

б) $(b - 1)(b^2 + b + 1) + (b + 1)(b^2 - b + 1)$.

Розв'яжіть рівняння:

670. а) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 4x$;

б) $(y^2 - 3y + 9)(y + 3) = 6y + y^3$.

671. а) $(1 - x)(1 + x + x^2) = x - x^3$;

б) $-8z + z^3 = (z - 4)(z^2 + 4z + 16)$.

Рівень В



672. Доведіть тотожність:

а) $(a + b)(a^2 - ab + b^2 + 3a - 3b + 3) = (a + 1)^3 + (b - 1)^3$;

б) $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$;

в) $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$;

г) $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.

Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

673. а) $124^5 - 74^5$ на 50;

б) $87^5 + 88^5$ на 175.

Вказівка. Використайте тотожності в) і г) задачі 672.

674. а) $6^{10} + 8^{10}$ на 100;

б) $3^{15} - 2^{20}$ на 11.

675. Сума і добуток двох чисел дорівнюють відповідно 3,5 і 3. Знайдіть суму кубів цих чисел.

Вправи для повторення

676. Спростіть вираз:

а) $(2x - y)(x - 2y) + 5xy$;

б) $(3a - b)(-a + 3b) + 3(a^2 + b^2)$;

в) $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1) - (a^2 + 1)^2$.

677. Обчисліть:

а) $4^{10} - (4^5 + 3)(4^5 - 3)$;

б) $2^{12} \cdot 3^{12} - 4 - (6^6 + 4)(6^6 - 4)$.

678. Поїзд затримали на станції А на 10 хв, однак він надолужив згаяний час на перегоні між станціями А і В, пройшовши його зі швидкістю 105 км/год, замість запланованої швидкості 90 км/год. Знайдіть відстань між станціями А і В.

679*. Розв'яжіть рівняння:

а) $|2x + 5| = |3x - 2|$;

б) $|x(x + 1)| = |2x|$.

21. Застосування кількох способів для розкладання многочленів на множники

Часто, розкладаючи многочлен на множники, потрібно використати кілька способів. Якщо це можливо, то розкладання доречно починати з винесення спільного множника за дужки.

Розглянемо кілька прикладів.

1. Розкладемо на множники многочлен $7a^2b^2 - 7b^4$.

$$7a^2b^2 - 7b^4 = 7b^2(a^2 - b^2) = 7b^2(a - b)(a + b).$$

Спочатку винесли спільний множник $7b^2$ за дужки, а потім застосували формулу різниці квадратів.

2. Розкладемо на множники многочлен $6ac - 9c - 24abc + 36bc$.

Усі члени многочлена мають спільний множник $3c$. Винесемо його за дужки:

$$6ac - 9c - 24abc + 36bc = 3c(2a - 3 - 8ab + 12b).$$

Многочлен $2a - 3 - 8ab + 12b$ розкладемо на множники способом групування:

$$2a - 3 - 8ab + 12b = (2a - 3) - 4b(2a - 3) = (2a - 3)(1 - 4b).$$

Отже,

$$6ac - 9c - 24abc + 36bc = 3c(2a - 3)(1 - 4b).$$

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розкласти на множники тричлен:

а) $x^2 - 6x - 16$;

б) $a^2 + 2ab - 8b^2$.

• а) Якщо до виразу $x^2 - 6x = x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x$ додати 3^2 , тобто 9, то одержимо вираз $x^2 - 6x + 9$, який є квадратом двочлена $x - 3$. Тому, виділивши квадрат цього двочлена, матимемо:

$$\begin{aligned} x^2 - 6x - 16 &= x^2 - 6x + 9 - 9 - 16 = (x - 3)^2 - 25 = (x - 3)^2 - 5^2 = \\ &= (x - 3 - 5)(x - 3 + 5) = (x - 8)(x + 2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } a^2 + 2ab - 8b^2 &= a^2 + 2ab + b^2 - b^2 - 8b^2 = (a + b)^2 - 9b^2 = \\ &= (a + b - 3b)(a + b + 3b) = (a - 2b)(a + 4b). \end{aligned} \bullet$$

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен $m^2 - 4n^2 - mk - 2nk$.

$$\begin{aligned} \bullet m^2 - 4n^2 - mk - 2nk &= m^2 - (2n)^2 - (mk + 2nk) = \\ &= (m - 2n)(m + 2n) - k(m + 2n) = (m + 2n)(m - 2n - k). \end{aligned} \bullet$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння $18x^3 - 2x = 0$.

• Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$18x^3 - 2x = 2x(9x^2 - 1) = 2x(3x - 1)(3x + 1).$$

Маємо рівняння

$$2x(3x - 1)(3x + 1) = 0,$$

звідки: $x = 0$, або $3x - 1 = 0$, або $3x + 1 = 0$; $x = 0$, або $x = \frac{1}{3}$, або $x = -\frac{1}{3}$.

Відповідь. $0; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}$.

Рівень А



Розкладіть на множники:

- 680.** а) $7a^2 - 7b^2$; б) $kn^2 - kn^2$; в) $9x^2 - 36$; г) $4a^3 - 4a$;
 д) $x^4 - x^2$; е) $ca^2 - 9cb^2$; є) $2a^3 - 2b^3$; ж) $27c + b^3c$.
- 681.** а) $5p^2 - 5q^2$; б) $3b^2 - 27$; в) $24 - 6a^2$; г) $3y^4 - 3y^2$;
 д) $18xy^2 - 2x$; е) $4k^3 + 32$; є) $6a - 6ab^3$; ж) $a^3 - a^5$.
- 682.** а) $3p^2 + 6pq + 3q^2$; б) $-b^2 + 2bc - c^2$; в) $81 - 54b + 9b^2$;
 г) $2xb^2 + 8xb + 8x$; д) $9a^3 + 6a^2 + a$; е) $m - 10m^2 + 25m^3$.
- 683.** а) $4x^2 + 8x + 4$; б) $n - 14nc + 49nc^2$;
 в) $-6a^2 + 24ab - 24b^2$; г) $x^3 - 12x^2 + 36x$.

Знайдіть значення виразу:

- 684.** а) $4x^2 - 4y^2$, якщо $x = 51$; $y = 49$;
 б) $5a^2 - 10ab + 5b^2$, якщо $a = 7,3$; $b = 2,3$.
- 685.** а) $3m^2 + 6mn + 3n^2$, якщо $m = 4,8$; $n = 5,2$;
 б) $10a^2 - 10b^2$, якщо $a = 63$; $b = 37$.

Розв'яжіть рівняння:

- 686.** а) $8x^2 - 72 = 0$; б) $12x^2 - 3 = 0$.
687. а) $5x^2 - 125 = 0$; б) $50x^2 - 2 = 0$.

Рівень Б



Розкладіть на множники:

- 688.** а) $a^4 - n^4$; б) $k^4 - 16$.
689. а) $x^4 - 1$; б) $81 - b^4$.
690. а) $3mn + 24n - 9m - 72$; б) $bx^4 - x^4 + bx^3 - x^3$;
 в) $-4abc - 32bc - 12ac - 96c$; г) $2y^4 - 2y^3a + 2y^2ab - 2y^3b$;
 д) $1,5a^2 - 0,5a^2x + 1,5ax - 0,5ax^2$; е) $x^2y^2a - x^2y^2 + 5axy - 5xy$.
691. а) $4ac + 2bc + 4xac + 2xbc$; б) $m^2a - m^2b + 3am - 3bm$;
 в) $-a^3b - a^2b^2 - a^2b - ab^2$; г) $0,2x^4 + 0,6x^3y - 0,4x^3 - 1,2x^2y$.
692. а) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; б) $\frac{4}{9}x^2 - a^2 - 2ab - b^2$;
 в) $c^2 + 9 - 6c - k^2$; г) $4x^2 - 4y - y^2 - 4$.

693. а) $m^2 + 2mn + n^2 - k^2$;

б) $\frac{9}{16}a^2 - 4x^2 - 4xy - y^2$;

в) $a^2 - 8a - b^2 + 16$;

г) $p^2 - 25 + 10q - q^2$.

694. Розкладіть многочлен $a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2c - 1$ на множники. Доведіть, що коли $a + b + c = 1$, то значення цього многочлена дорівнює нулю.

695. Розкладіть на множники многочлен $a^2 + 2a + 1 - b^2 - c^2 + 2bc$ та знайдіть його значення, якщо $a = -1$ і $b = c$.

Розкладіть на множники:

696. а) $a^2 - b^2 + a + b$;

б) $x^2 - a^2 + x - a$;

в) $4x^2 + y - 2x - y^2$;

г) $3,5x^2 - 3,5y^2 - x + y$.

697. а) $c^2 - b^2 + c - b$;

б) $x + y + x^2 - y^2$;

в) $a^2 + 4,8ab - x^2 - 4,8xb$.

Розкладіть на множники та знайдіть значення виразу:

698. а) $x^2 - y^2 + (x + y)^2$, якщо $x = 3\frac{2}{3}$; $y = 5\frac{1}{3}$;

б) $a^2 + (a + 4)^2 - 16$, якщо $a = 96$.

699. а) $a^2 - b^2 + (a - b)^2$, якщо $a = 5\frac{1}{6}$; $b = 2\frac{1}{6}$;

б) $(m - 2)^2 + m^2 - 4$, якщо $m = 102$.

Розв'яжіть рівняння:

700. а) $x^3 - x = 0$;

б) $1,6y^3 - 0,4y = 0$;

в) $x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = 0$;

г) $2z^3 - z^2 = 8z - 4$;

д) $x^4 - x^3 - x^2 + x = 0$;

е) $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$.

701. а) $x^3 - 4x = 0$;

б) $1,2z^3 - 0,3z = 0$;

в) $x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0$;

г) $4y^3 - y^2 = 4y - 1$.



Розкладіть на множники:

702. а) $x^2 + 2x - 8$;

б) $a^2 - 8a + 12$;

в) $4c^2 - 4c - 3$;

г) $x^2 - 6xy + 5y^2$;

д) $a^2 + 12ab + 11b^2$;

е) $9a^2 - 6ab - 8b^2$.

703. а) $2a^2 + a - 4ab - b + 2b^2$;

б) $a^3 - b^3 - (a - b)^3$.

704. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 8x + 7 = 0$;

б) $y^2 + 12y + 20 = 0$;

в) $(x - 1)^2 - 6(x - 1) + 8 = 0$;

г) $(x - 1)(x - 3)(x^2 - 3) = (x - 1)(x - 3)$.

705. Доведіть тотожність:

$$a^6 - b^6 = (a - b)(a + b)(a^2 - ab + b^2)(a^2 + ab + b^2).$$

706. Доведіть, що значення виразу $3^{34} + 9^{92} - 3^{30} - 9^{90}$ ділиться на 80.

707. Доведіть, що значення виразу $11^{10} + 4 \cdot 7^{49} + 11^{11} - 4 \cdot 7^{48}$ ділиться на 12.

708. Доведіть, що рівність $a^3 + b^2 = ab(a + 1)$ є правильною тільки тоді, коли $b = a$ або $b = a^2$.

Вправи для повторення

709. Подайте у вигляді многочлена:

а) $(3a + 2b)(4a - b) + 2b^2$;

б) $2x(y + 15x) + (x - 6y)(5y + 2x)$.

710. Розв'яжіть рівняння:

а) $\frac{5x}{6} + \frac{2x}{9} = 38$;

б) $\frac{1-3x}{5} = \frac{19+x}{8}$.

711. Запишіть у вигляді виразу:

а) подвоєний добуток змінної a та суми змінних m і n ;

б) різницю квадратів виразів $a - 1$ і bc .

712. Сплав срібла і міді, загальна маса якого дорівнює 2 кг, містить 80% міді. Знайдіть масу срібла у сплаві.

713. Сплав міді й цинку має масу 4,2 кг. Знайдіть масу міді, якщо її у сплаві на 10% більше, ніж цинку.

714. До сплаву міді й олова, загальна маса якого дорівнює 2 кг, додали 200 г міді й одержали новий сплав, у якому міді стало в 1,2 разу більше, ніж олова. Скільки відсотків міді містив перший сплав?

Для тих, хто хоче знати більше



22. Застосування перетворень виразів

Нам уже траплялося чимало завдань, для розв'язання яких треба було перетворювати той чи інший вираз. Здебільшого ми використовували перетворення виразів, коли розв'язували рівняння, доводили тотожності, знаходили значення виразів. Розглянемо ще деякі задачі, пов'язані з перетвореннями виразів.

1. Порівняння значень многочлена з нулем.

Приклад 1. Довести, що многочлен $x^2 - 8x + 18$ набуває лише додатних значень.

• Виділивши із тричлена $x^2 - 8x + 18$ квадрат двочлена, матимемо:

$$x^2 - 8x + 18 = x^2 - 8x + 16 - 16 + 18 = (x - 4)^2 + 2.$$

Ми подали многочлен у вигляді суми двох доданків $(x - 4)^2$ і 2. Доданок $(x - 4)^2$ для будь-яких x набуває лише невід'ємних значень, доданок 2 — додатний. Тому вираз $(x - 4)^2 + 2$ набуває лише додатних значень. Оскільки $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 + 2$, то й вираз $x^2 - 8x + 18$ набуває лише додатних значень. •

2. Знаходження найбільшого і найменшого значень виразів.

Виходячи з рівності $x^2 - 8x + 18 = (x - 4)^2 + 2$, одержаної у прикладі 1, можна вказати найменше значення многочлена $x^2 - 8x + 18$. Воно дорівнює 2, до того ж, цього найменшого значення многочлен набуває, якщо $x = 4$.

Приклад 2. Знайти найбільше значення многочлена $-x^2 + 4x + 1$.

- Перетворимо даний многочлен так:

$$\begin{aligned} -x^2 + 4x + 1 &= -(x^2 - 4x - 1) = -(x^2 - 4x + 4 - 4 - 1) = \\ &= -((x - 2)^2 - 5) = -(x - 2)^2 + 5. \end{aligned}$$

Найбільше значення многочлена дорівнює 5. •

3. Розв'язування задач на подільність.

Приклад 3. Довести, що значення виразу $(2n + 3)^2 - (2n - 3)(2n + 5)$ ділиться на 8 для будь-якого цілого значення n .

- Спростимо даний вираз:

$$\begin{aligned} (2n + 3)^2 - (2n - 3)(2n + 5) &= 4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 10n - 6n - 15) = \\ &= 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 - 4n + 15 = 8n + 24 = 8(n + 3). \end{aligned}$$

Для будь-якого цілого значення n добуток $8(n + 3)$ ділиться на 8, а тому й значення виразу $(2n + 3)^2 - (2n - 3)(2n + 5)$ ділиться на 8. •

4. Знаходження значень многочлена за допомогою мікрокалькулятора.

Приклад 4. За допомогою мікрокалькулятора знайти значення многочлена $12x^3 - 24x^2 + 15x - 8$, якщо $x = 2,8$.

- Значення даного многочлена шукати зручніше, якщо його попередньо перетворити так:

$$12x^3 - 24x^2 + 15x - 8 = (12x^2 - 24x + 15)x - 8 = ((12x - 24)x + 15)x - 8.$$

Якщо $x = 2,8$, то схема обчислень є такою:

12	×	2,8	-	24	×	2,8	+	15	×	2,8	-	8	=
----	---	-----	---	----	---	-----	---	----	---	-----	---	---	---

Виконавши обчислення, знайдемо значення многочлена. Воно дорівнює 10-9,264. •

Усно												
-------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

715. Знайдіть найменше значення виразу:

а) $x^2 + 7$;

б) $(a - 6)^2$;

в) $(b - 1)^2 + 3$.


716. Знайдіть найбільше значення виразу:

а) $7 - x^2$;

б) $1 - (x - 2)^2$;

в) $5 - (x + 5)^2$.

Для якого значення x вираз набуває найбільшого значення?

Рівень А													
-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	---

Доведіть, що вираз набуває лише невід'ємних значень:

717. а) $x^2 + 2x + 1$;

б) $4m^2 + 4mn + n^2 + 3$.

718. а) $a^2 - 4a + 4$;

б) $x^2 - 2xy + y^2 + 4$.

Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

719. а) $245^2 - 236^2$ на 9;

б) $438^2 - 62^2$ на 500;

в) $52^3 - 36^3$ на 16;

г) $75^3 + 25^3$ на 100.

720. а) $811^2 - 712^2$ на 99; б) $48^3 - 19^3$ на 29.

За допомогою мікрокалькулятора знайдіть значення многочлена:

721. а) $4x^3 - 6x^2 + 5x - 3$, якщо $x = 5$; $x = 3,2$; $x = -2,6$;

б) $1,2x^3 + 2,4x^2 + 0,5x - 1$, якщо $x = 1,7$;

в) $4,5x^4 + 4x^3 - 3,5x^2 + 2x - 1,8$, якщо $x = 4$.

722. а) $15x^3 - 8x^2 + 12x - 30$, якщо $x = 2$; $x = 1,2$; $x = -4$;

б) $2,4x^4 - 7,2x^3 - 3,3x^2 + 4,5x$, якщо $x = 3$.

Рівень Б



Доведіть, що вираз набуває лише від'ємних значень:

723. а) $-(a^2 - 2a + 4)$;

б) $-x^2 + 4x - 5$.

724. а) $-(x^2 - 2x + 2)$;

б) $-y^2 + 2y - 4$.

Знайдіть найменше значення виразу та значення змінної, для якого вираз набуває найменшого значення:

725. а) $x^2 - 4x + 4$;

б) $x^2 - 4x + 7$.

726. а) $a^2 + 6a + 9$;

б) $x^2 - 6x + 10$.

Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу ділиться на дане число:

727. а) $(n - 2)^2 + 3n^2$ на 4;

б) $(n - 2)(2n - 7) - 2n^2 - 3$ на 11.

728. $(n + 2)^2 - n(n - 2) + 2$ на 6.

Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу не ділиться на дане число:

729. а) $(n - 5)^2 + (2n - 3)(2n + 8)$ на 5; б) $(n - 3)(n^2 - 3) - (n^3 - 1)$ на 3.

730. $(n + 3)^2 - (n - 3)^2 + 3$ на 12.

731. Доведіть, що значення виразу $5^{33} - 5^{30}$ ділиться на 124.

Рівень В



732. Знайдіть найбільше значення виразу та значення змінної, для якого вираз набуває найбільшого значення:

а) $-x^2 + 2x - 8$;

б) $-a^2 - 4a + 3$.

733. Чи може значення виразу $a^2 - 4a + 7$ дорівнювати 1?

Розв'яжіть рівняння:

734. а) $x^2 - 7x + 12 = 0$;

б) $x^2 - x - 12 = 0$.

735. а) $(x - 1)^2 + (x - 3)^2 = 0$;

б) $(x^2 - 1)^2 + (x - 1)^4 = 0$.

736. Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

а) $3^{10} + 9^6$ на 10;

б) $2^{20} + 2^{25} - 2^{22}$ на 29.

737. Доведіть, що не існує чисел x та y , для яких виконувалася б рівність:

а) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 3 = 0$;

б) $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 3 = 0$.

738. Запишіть число 4 у вигляді суми таких двох доданків, щоб їх добуток був найбільшим.
739. Різниця двох непарних натуральних чисел ділиться на 5. Чи ділиться різниця кубів цих чисел на 10?

Вправи для повторення

740. Довжина прямокутника дорівнює n м, а ширина на k м менша. Запишіть у вигляді виразів периметр та площу прямокутника.
741. Турист деяку відстань проплив моторним човном проти течії річки за 1,2 год, а назад повертався плотом протягом 7,2 год. Знайдіть швидкість течії річки, якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 21 км/год.
742. Поле, площа якого дорівнює 568 га, поділено на 3 ділянки так, що площа третьої ділянки на 52 га менша від суми площ перших двох ділянок, а площа першої ділянки відноситься до площі другої як 2:3. Знайдіть площу кожної ділянки.
743. Для яких значень коефіцієнта a рівняння $ax = 3$ має єдиний корінь? Чи існує таке значення a , для якого це рівняння не має коренів?

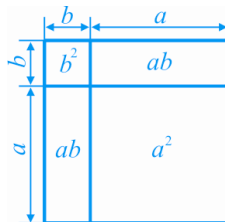
Цікаво знати



Античні математики використовували формули скороченого множення задовго до нашої ери. На той час формули подавалися не у звичному нам символічному вигляді, а формулювалися словами.

Учені Давньої Греції алгебраїчні твердження, формули, що виражають певні залежності між величинами, трактували геометрично. Так, добуток ab вони розглядали як площу прямокутника зі сторонами a та b .

Наведемо приклад алгебраїчного твердження, яке було відомим давньогрецьким ученим, і яке в геометричній термінології формулювалося так: *площа квадрата, побудованого на сумі двох відрізків, дорівнює сумі площ квадратів, побудованих на кожному з цих відрізків, плюс подвоєна площа прямокутника, побудованого на цих відрізках.*



Не важко здогадатися, що йдеться про формулу квадрата суми, яку ми зараз символічно записуємо так:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Запитання і вправи для повторення § 5

1. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів та їх суми?
 2. Запишіть і сформулюйте формулу квадрата суми двох виразів; квадрата різниці двох виразів.
 3. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
 4. Наведіть приклад тричлена, який можна записати у вигляді квадрата суми; квадрата різниці.
 5. Чому дорівнює сума кубів двох виразів?
 6. Чому дорівнює різниця кубів двох виразів?
 7. Які способи розкладання многочленів на множники вам відомі?
- 744.** Виконайте множення:
 а) $(5 - a)(5 + a)$; б) $(3b + 2a)(3b - 2a)$; в) $(x + y^2)(x - y^2)$;
 г) $(-c + 0,4)(0,4 + c)$; д) $(-m - 5n)(m - 5n)$; е) $(ab + 2a^2)(ab - 2a^2)$.
- 745.** Піднесіть до квадрата:
 а) $(a - 2b)^2$; б) $(3x + 2x^2)^2$; в) $(-0,5ab - 2c)^2$.
- 746.** Спростіть вираз:
 а) $(a - 6)(a + 6) + (3 - a)(3 + a)$;
 б) $(3x^2 - 1)(3x^2 + 1) - (1 - 3x^2)^2$;
 в) $(5a - 2b)^2 + (2a + 5b)^2 - 29b^2$;
 г) $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 - 2(a^2 + b^2 + c^2)$;
 д) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) + a^8 + b^8$.
- 747.** Доведіть тотожність:
 а) $(a + b)(a - b) - (a - c)(a + c) = (c - b)(c + b)$;
 б) $(n + 1)^2 + (n + 5)^2 - 3 = (n + 2)^2 + (n + 4)^2 + 3$;
 в) $(m - 2)(m + 2)(m^2 + 4)(m^4 + 16) = m^8 - 256$.
- 748.** Обчисліть:
 а) $96 \cdot 104$; б) $52 \cdot 48$; в) $19,8 \cdot 20,2$; г) $7,5 \cdot 8,5$.
- 749.** Розв'яжіть рівняння:
 а) $(x - 3)(x + 3) - x(x + 2) = 1$; б) $(2x + 5)^2 = (2x - 3)^2$;
 в) $\left(\frac{1}{5} + 10x\right) - 4\left(\frac{1}{5} + 25x^2\right) = 0$; г) $(5x + 3)(5x - 3) + 9\frac{1}{9} = (5x - 1)^2$.
- 750.** Доведіть, що для кожного цілого значення n значення виразу:
 а) $(2n + 1)(2n - 1) - (n + 1)^2 - n - 1$ ділиться на 3;
 б) $(2n + 7)(8n - 8) - (4n + 5)^2$ не ділиться на 6.
- 751.** Доведіть, що значення виразу $(k - 2)^2 + (k + 2)^2 - 2(k - 4)(k + 4)$ не залежать від значень k .

Розкладіть на множники:

752. а) $3a^2 - 3$; б) $x^3 - 4x$; в) $x^4y^2 - x^2y^4$;
 г) $1,44a^2 - b^4$; д) $(c^2 + 1)^2 - 4c^2$; е) $a^2 - 2ab + b^2 - 1$;
 є) $25m^2 - (4m - 4)^2$; ж) $x^2 - y^2 - x - y$; з) $2a^2 - 2b^2 - (a - b)^2$.
 753. а) $a^3 - 64$; б) $x^3 + 8z^3$; в) $(x + 2)^3 - y^3$.
 754. а) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$; б) $z^4 + z^3 - 8z - 8$; в) $2x^4 - 2x^3 - 2x + 2$.
 755*. а) $(x^2 + xy + y^2)^2 - (x^3 - y^3)^2$; б) $x^4 + 4$.

Розв'яжіть рівняння:

756. а) $x^3 - 9x = 0$; б) $y(y^2 + 3) = 4y$;
 в) $x^3 - 5x^2 - x + 5 = 0$; г) $2z^3 + 3z^2 = 2z + 3$.
 757*. а) $x^2 - 4x + 4 + 2(x - 1)^2 = 0$; б) $(x^2 + 1)^2 + (x^2 - x)^2 = 1$;
 в) $|x(x - 1)| + x^2 - 2x + 1 = 0$.

Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:

758. а) $401^2 - 199^2$ на 600; б) $85^3 - 48^3$ на 37;
 в) $58^3 + 42^3$ на 100; г) $7^{33} + 7^{31}$ на 50.
 759. а) $8^{25} - 64^{12}$ на 7; б) $16^9 - 32^8 + 8^{12}$ на 7.
 760. Доведіть, що вираз $x^2 - 14x + 50$ набуває лише додатних значень.
 761. Доведіть, що вираз $4x - x^2 - 5$ набуває лише від'ємних значень.
 762. Знайдіть найменше значення виразу:
 а) $x^2 + 8x + 17$; б) $a^2 - 8ac + 16c^2 + 16$.
 763. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних цілих чисел є непарним числом.
 764. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться на 8.
 765*. Доведіть, що значення виразу $15^{10} - 15^3 + 225^6 - 211^3$ ділиться на 226.
 766*. Доведіть, що різниця квадратів двох цілих чисел, які не діляться на 3, кратна 3.
 767*. Доведіть, що не існує чисел x та y , для яких виконувалася б рівність:
 а) $x^2 + y^4 - 4x - 2y^2 + 7 = 0$; б) $2x^2 + 4y^2 - 4xy - 2x + 3 = 0$.

Завдання для самоперевірки № 5

Рівень 1

- Виконайте множення $(a - x)(a + x)$ та вкажіть правильну відповідь:
 а) $a^2 - 2ax + x^2$; б) $a^2 + 2ax + x^2$; в) $a^2 + x^2$; г) $a^2 - x^2$.
- Піднесіть до квадрата $(b - 4)^2$ та вкажіть правильну відповідь:
 а) $b^2 - 4b + 16$; б) $b^2 - 16$; в) $b^2 - 8b + 16$; г) $b^2 + 8b + 16$.
- Розкладіть на множники многочлен $y^2 - 9$ та вкажіть правильну відповідь:
 а) $(y - 9)(y + 9)$; б) $(y - 3)(y - 3)$; в) $(y - 3)(y + 3)$; г) $(y + 3)(y + 3)$.

4. Обчисліть $85^2 - 15^2$ та вкажіть правильну відповідь:
 а) 140; б) 4900; в) 7000; г) 6125.
5. Подайте тричлен $x^2 + 4x + 4$ у вигляді квадрата двочлена та вкажіть правильну відповідь:
 а) $(x - 2)^2$; б) $(x + 4)^2$; в) $(x - 4)^2$; г) $(x + 2)^2$.
6. Подайте тричлен $a^2 - 10a + 25$ у вигляді квадрата двочлена та вкажіть правильну відповідь:
 а) $(a - 10)^2$; б) $(a - 5)^2$; в) $(a - 3)^2$; г) $(a + 5)^2$.

Рівень 2

7. Спростіть вираз $(3 - a)(3 + a) + (1 - a)^2$ та знайдіть його значення, якщо $a = 0,5$.
8. Піднесіть до квадрата:
 а) $(4 + 3b)^2$; б) $(2a - 5)^2$.
9. Розв'яжіть рівняння:
 а) $(x - 2)^2 - x^2 = 12$; б) $(x + 3)(x - 3) - x^2 = 3x$.
10. Розкладіть на множники:
 а) $9y^2 - 16$; б) $3x^2 - 3y^2$; в) $27a^3 - b^3$.
11. Подайте у вигляді квадрата двочлена:
 а) $9a^2 + 12a + 4$; б) $100a^2 - 20ab + b^2$.

Рівень 3

12. Спростіть вираз:
 а) $(2x - 7y)^2 + (2x + 7y)^2 - 8x^2$; б) $(2 - 3b^2)(3b^2 + 2) + (3b^2 - 1)^2$.
13. Доведіть тотожність: $(a + 1)(a - 1)(a^2 + 1) - (a^2 - 1)^2 - 2a^2 = -2$.
14. Розкладіть на множники:
 а) $b^6 - 4b^4$; б) $0,001a^3 - 27b^3$; в) $0,8a^3 + 0,4a^2 + 0,4a^4$.
15. Доведіть, що вираз $-x^2 + 10x - 27$ набуває лише від'ємних значень.
16. Розв'яжіть рівняння:
 а) $-(2x + 3)^2 + (x + 5)(2x + 5) = 16$; б) $x^2 - 2x - 35 = 0$.

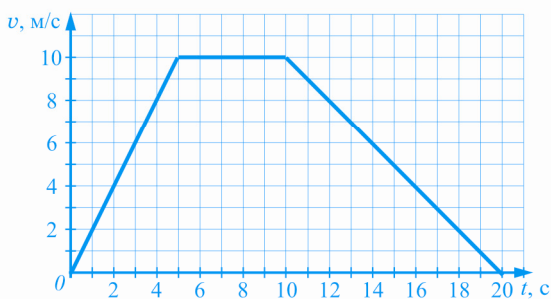
Рівень 4

17. Спростіть вираз:
 а) $((x + 2y^2)(x - 2y^2))^2 - 16y^8$; б) $(a + 1)(a - 1)(a^2 + a + 1)(a^2 - a + 1)$.
18. Розкладіть на множники:
 а) $m^3 - n^3 + 3m^2 + 3mn + 3n^2$; б) $a^2 + b^2 + c^2 - x^2 + 2ab + 2bc + 2ca$.
19. Розв'яжіть рівняння:
 а) $(x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = x^8 + 4x$; б) $x^3 - 9 = x - 9x^2$.
20. При діленні на 5 число n дає в остачі 3, а число m — 4. Доведіть, що число $n^2 + m^2$ ділиться на 5.
21. Доведіть, що многочлен $4x^2 + a^2 - 4x + 1$ набуває лише невід'ємних значень.

Розділ III. ФУНКЦІЇ

Усе в природі змінюється і розвивається. Вивчаючи явища, пов'язані із цією невід'ємною рисою природи, вчені дійшли до понять змінної величини і функції.

У даному розділі ми з'ясуємо, що таке функція, графік функції, що таке лінійна функція та які її властивості.



§ 6. ФУНКЦІЇ

23. Функція. Способи задання функції

1. Функції та способи їх задання. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр — P см. Знаючи сторону a , за формулою $P = 4a$ можна знайти відповідне їй значення периметра P . Наприклад,

якщо $a = 6$, то $P = 4 \cdot 6 = 24$;

якщо $a = 0,1$, то $P = 4 \cdot 0,1 = 0,4$;

якщо $a = 2,5$, то $P = 4 \cdot 2,5 = 10$.

Бачимо, що значення периметра *залежать* від того, яких значень ми надавали довжині сторони квадрата. Зауважимо також, що кожному значенню довжини сторони відповідає одне певне значення периметра. Так, значенню $a = 6$ *відповідає* значення $P = 24$, значенню $a = 0,1$ — значення $P = 0,4$.

У даному прикладі маємо дві залежні змінні a і P — довжину сторони квадрата і його периметр. Значення змінної a можна вибрати довільно, а значення змінної P залежать від вибраних значень a . Тому a називають *незалежною змінною*, а P — *залежною змінною*.

Розглянемо ще один приклад залежності між змінними.

Водій вирішив простежити за лічильником, який шлях він проїде за 1 год, 2 год, 3 год, 4 год, 4,5 год, 5 год. Результати спостережень він записав у вигляді таблиці:

t , год	1	2	3	4	4,5	5
S , км	82	170	225	300	335	380

У даному прикладі маємо дві залежні змінні: час t і шлях S , пройдений за цей час. Значення шляху залежать від значень часу. Так, часу $t = 2$ відповідає значення шляху $S = 170$, часу $t = 4,5$ — значення шляху $S = 335$. До того ж, кожному значенню часу відповідає одне певне значення шляху. Тому в даному випадку t є *незалежною змінною*, а S — *залежною змінною*.

У математиці, як правило, незалежну змінну позначають буквою x , а залежну змінну — буквою y . У розглянутих прикладах *кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної*. За таких умов для залежної змінної використовують термін «функція».

Означення

Змінну y називають функцією від змінної x , якщо *кожному значенню змінної x відповідає одне певне значення змінної y* .

Для незалежної змінної теж є спеціальний термін: її називають *аргументом*. Кажуть: y є функцією від аргументу x .

Отже, в розглянутих прикладах:

периметр P квадрата є функцією від довжини його сторони a ; тут P — функція, a — аргумент;

шлях S є функцією від часу t ; тут S — функція; t — аргумент.

Перша функція задана *формулою* $P = 4a$. Друга функція задана *таблицею*.

2. Область визначення та область значень функції. Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення* функції; усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень* функції.

Так, область визначення функції, що задається формулою $P = 4a$, утворюють усі значення, яких може набувати змінна a . Оскільки ця змінна визначає довжину сторони квадрата, то a може набувати лише додатних значень. Отже, область визначення цієї функції утворюють усі додатні числа.

Область значень функції, що задається формулою $P = 4a$, утворюють усі значення, яких може набувати залежна змінна P . Периметр P не може дорівнювати від'ємному числу або нулю, однак може дорівнювати будь-якому додатному числу. Наприклад, P може дорівнювати 2, бо 2 — це периметр квадрата зі стороною 0,5. Отже, область значень цієї функції утворюють усі додатні числа.

Область визначення функції, заданої таблицею, утворюють числа 1; 2; 3; 4; 4,5; 5 (числа першого рядка таблиці); область значень цієї функції утворюють числа 82; 170; 225; 300; 335; 380 (числа другого рядка таблиці).

Розглянемо функцію, задану формулою $y = x^2 + 1$, де $0 \leq x \leq 10$. Такий запис означає, що область визначення функції утворюють усі значення x , які задовольняють нерівності $0 \leq x \leq 10$.

Якщо функція задана формулою $y = x^2 + 1$ і не вказано, яких значень можна надавати аргументу, то вважають, що область визначення функції утворюють усі числа.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Автомобіль, рухаючись зі швидкістю 80 км/год, проходить за t год шлях S км. Задати формулою функцію S від t . Знайти значення функції, які відповідають значенням аргументу: 2; 2,5; 4.

• Функція задається формулою $S = 80t$. Якщо $t = 2$, то $S = 80 \cdot 2 = 160$; якщо $t = 2,5$, то $S = 80 \cdot 2,5 = 200$; якщо $t = 4$, то $S = 80 \cdot 4 = 320$. •

- б) Яке значення функції відповідає значенню аргументу $x = 2$; $x = -1$?
 в) Якому значенню аргументу відповідає значення функції $y = 5$; $y = 0$?

770. Залежності змінної y від змінної x задані таблицями:

а)

x	1	2	3
y	1	1	1

б)

x	1	3	9
y	1	1; 3	1; 3; 9

(У таблиці б) числам 1, 3, 9 відповідають їхні дільники.) Яка з таблиць задає функцію? Для функції вкажіть область визначення та область значень.

771. Функція задана таблицею:

x	-2	0	1	3	4
y	3	-1	5	7	7

- а) Чому дорівнює значення функції, якщо $x = -2$; $x = 1$; $x = 4$?
 б) Для яких значень аргументу значення функції дорівнює -1; 7; 3?
 в) Яка область визначення функції?
 г) Яка область значень функції?

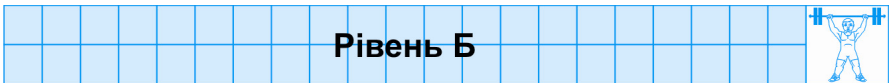


772. Одна сторона прямокутника дорівнює 6 см, а суміжна — x см. За якою формулою можна обчислити площу S прямокутника? Чи задає ця формула функцію?
773. Густина сталі дорівнює 7800 кг/м^3 . Запишіть формулу, за якою можна обчислити масу сталевого куба з ребром a м. Яка область визначення функції, що задається цією формулою? Знайдіть значення функції, якщо $a = 0,2$.
774. Автомобіль рухається зі швидкістю 75 км/год . За час t год він проходить шлях S км. Задайте формулою шлях S як функцію від часу t . Знайдіть значення функції, якщо $t = 2,4$.
775. Довжина прямокутного паралелепіпеда дорівнює $7,5$ см, ширина — 4 см, а висота — x см. Задайте формулою об'єм V паралелепіпеда як функцію від висоти x . Знайдіть значення функції, якщо $x = 2,5$.
776. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = 2x^2 - x$, якщо $x = 2$; $x = 0$; $x = -1$.
777. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = 2x + 1$, якщо $x = 5$; $x = 0,5$; $x = -2$.
778. Функція задана формулою $y = 18 - 3x$. Складіть таблицю значень функції для значень аргументу: -3 ; -2 ; 0 ; 1 ; 6 .
779. Функція задана формулою $y = 2x^2 + 1$. Складіть таблицю значень функції для значень аргументу: -4 ; -2 ; 0 ; 2 ; 4 .

- 780.** Функція задана формулою $y = 4x - 5$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює 0; 3?
- 781.** Функція задана формулою $y = -2x + 3$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює 1; 5?
- 782.** Функція задана таблицею:

x	-4	-2	0	2	4
y	-2	-1	0	1	2

- а) Знайдіть значення функції, якщо $x = -2$; $x = 2$.
- б) Для яких значень x значення функції дорівнює -1; 1?
- в) Яка область визначення функції?
- г) Яка область значень функції?



- 783.** Функція задана формулою $y = 12x$. Заповніть таблицю:


x	-4	-3					1,5	2		3,5
y			-12	-6	-3	2			27	

- 784.** Функція задана формулою $y = x + 6$. Заповніть таблицю:

x	-12	-6					24	-24
y			2	3	-4	-6		

- 785.** Велосипедист має подолати шлях від села до автостанції завдовжки 7 км, рухаючись зі швидкістю 10 км/год. Нехай S км — шлях, який залишилося проїхати велосипедистові через t год після початку руху. Задайте формулою шлях S як функцію від часу t . Знайдіть значення функції, якщо $t = 0,5$. Яка область визначення і область значень цієї функції?
- 786.** Натуральне число m при діленні на 4 дає неповну частку n і остачу 1. Задайте формулою m як функцію від n . Знайдіть значення функції, якщо $n = 50$. Яка область визначення і область значень цієї функції?
- 787.** Функція задана формулою $y = x^2 - 4x + 2$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює: а) 2; б) -2?
- 788.** Функція задана формулою $y = x^2 + 2x - 3$. Для яких значень аргументу значення функції дорівнює: а) -3; б) -4?
- 789.** Функція задана формулою $y = 3x - 1$, де змінна x може набувати значень -6; -3; 0; 3; 6; 9. Задайте цю функцію таблицею.

Рівень В



790. Доведіть, що функція $y = x^2 + 6x + 10$ не може набувати від'ємних значень.
791. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 4x + 2$.
792. Для яких значень аргументу значення функції $y = x^2 - 4|x|$ дорівнюють нулю?
793. Функція задана формулою $y = x^2 + 2ax$, де a — деяке додатне число. Чи набуває ця функція від'ємного значення?

Вправи для повторення

794. З міста A до міста B , відстань між якими дорівнює 40 км, виїхав велосипедист, а через 40 хв назустріч йому з міста B — мотоцикліст. Швидкість велосипедиста дорівнює 15 км/год, а мотоцикліста — 45 км/год. Через скільки годин після виїзду велосипедиста вони зустрінуться?
- 795*. Скільки трицифрових чисел можна записати за допомогою цифр 0, 3, 6 і 9, якщо у запису чисел цифри можуть повторюватися?
796. На координатній площині позначте точки $A(-4; 0)$, $B(0; 1)$, $C(4; -1)$ та точку D з абсцисою -3 й ординатою 2 .
797. Через точку $A(3; 0)$ проведіть пряму, паралельну осі y , а через точку $B(0; 2)$ — пряму, паралельну осі x . Знайдіть координати точки перетину проведених прямих.
798. Знайдіть периметр і площу прямокутника $ABCD$, якщо $A(-1; -1)$, $B(3; -1)$, $C(3; 1)$.

24. Графік функції. Функція як математична модель реальних процесів

1. Графік функції. Розглянемо функцію, задану формулою $y = 0,5x^2$, де $-3 \leq x \leq 2$. Знайдемо значення цієї функції для цілих значень аргументу й занесемо результати в таблицю:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	4,5	2	0,5	0	0,5	2

Значення x ми вибрали так, що кожне наступне на 1 більше від попереднього. Тому кажуть, що таблиця значень функції складена з кроком 1.

Позначимо на координатній площині точки, абсциси яких дорівнюють вибраним значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції (рис. 4).

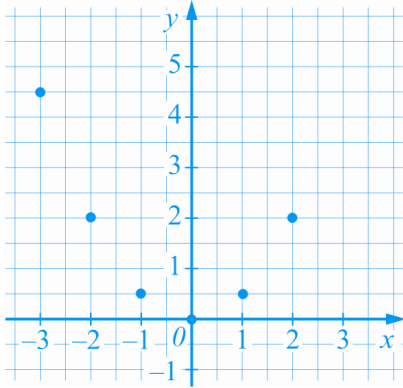


Рис. 4

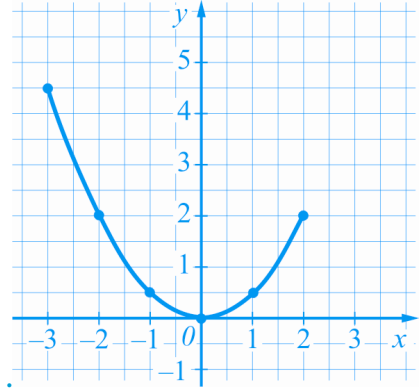


Рис. 5

Добираючи інші значення x , що задовольняють нерівності $-3 \leq x \leq 2$, й обчислюючи відповідні значення y , отримаємо інші пари значень x та y . Кожній із цих пар також відповідає певна точка на координатній площині. Усі такі точки утворюють фігуру, яку називають *графіком* функції, заданої формулою $y = 0,5x^2$, де $-3 \leq x \leq 2$ (рис. 5).

Графік функції утворюють точки координатної площини, абсциси яких дорівнюють усім значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

2. Графічний спосіб задання функції. Маючи графік функції, можна знаходити її значення за відомим значенням аргументу і навпаки: знаходити значення аргументу за відомим значенням функції.

Розглянемо, наприклад, функцію, графік якої зображений на рисунку 6. (Про таку функцію кажуть, що вона задана *графічно*.)

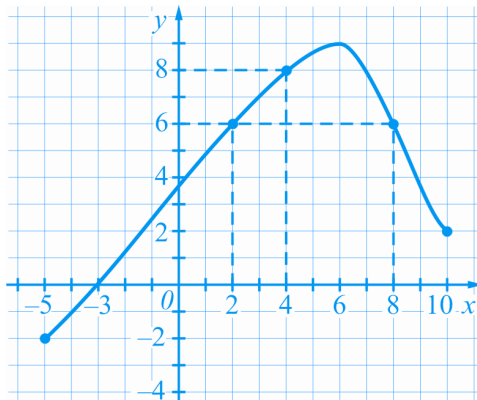


Рис. 6

Знайдемо за допомогою графіка значення функції, якщо $x = 4$. Для цього через точку осі x з абсцисою 4 проведемо пряму, паралельну осі y . Точка її

перетину із графіком функції має координати (4; 8). Отже, якщо $x = 4$, то значення функції дорівнює 8. Знайдемо за допомогою цього ж графіка значення аргументу, для яких значення функції дорівнює 6. Для цього через точку осі y з ординатою 6 проведемо пряму, паралельну осі x . Одержимо дві точки її перетину із графіком функції: (2; 6) і (8; 6). Отже, функція набуває значення 6, якщо $x = 2$ або $x = 8$.

Деяка лінія на координатній площині задає функцію, якщо, користуючись нею, для кожного значення змінної x можна знайти тільки одне значення змінної y .

Дивлячись на графік, зображений на рисунку 6, можна відмітити деякі властивості функції, заданої цим графіком.

1) Область визначення функції утворюють усі значення x , що задовольняють нерівності $-5 \leq x \leq 10$.

2) Найбільше значення функції дорівнює 9 (цього значення функція набуває, якщо $x = 6$).

3) Найменше значення функції дорівнює -2 (цього значення функція набуває, якщо $x = -5$).

4) Область значень функції утворюють усі значення y , що задовольняють нерівності $-2 \leq y \leq 9$.

5) Значення функції дорівнює нулю, якщо $x = -3$. Ті значення аргументу, для яких значення функції дорівнюють нулю, називають *нулями* функції. Отже, значення $x = -3$ є нулем даної функції.

6) Функція набуває додатних значень, якщо $-3 < x \leq 10$; від'ємних значень — якщо $-5 \leq x < -3$.

3. Функція як математична модель реальних процесів. Розглянемо рисунок 7, на якому зображено графік зміни температури води протягом 20 хв.

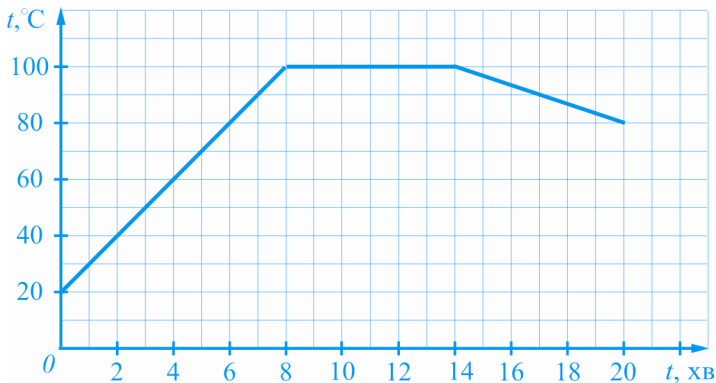


Рис. 7

Із графіка видно, що початкова температура води дорівнювала 20°C ; протягом перших 8 хв температура води підвищилась до 100°C , потім протягом 6 хв (від 8 хв до 14 хв) температура води не змінювалась, а протягом наступних 6 хв температура води знизилась до 80°C .

Функція, графік якої зображено на рисунку 7, описує реальний процес зміни температури води. Кажуть, що ця функція моделює даний процес, або що вона є *математичною моделлю* даного процесу.

Якщо тіло рухається рівномірно зі швидкістю 15 м/с, то шлях S м, пройдений ним за час t с, можна обчислити за формулою $S = 15t$. У цьому випадку функція, задана формулою $S = 15t$, є математичною моделлю рівномірного руху.

У сьомому та наступних класах ми ознайомимося з багатьма функціями, які можна використати для моделювання реальних процесів та залежностей між різними величинами.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Побудувати графік функції, заданої формулою:

- а) $y = 0,5x + 1$, де $-4 \leq x \leq 4$, склавши таблицю значень функції з кроком 1;
 б) $y = 1 - x^2$, де $-2 \leq x \leq 2$.
- а) Складемо таблицю значень функції:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3

Позначимо точки, координати яких подані в таблиці, на координатній площині. Якщо до цих точок прикласти лінійку, то побачимо, що всі вони лежать на одній прямій. Сполучимо відрізком крайні позначені точки. Цей відрізок і є графіком функції $y = 0,5x + 1$, де $-4 \leq x \leq 4$ (рис. 8).

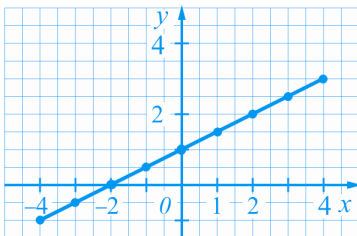


Рис. 8

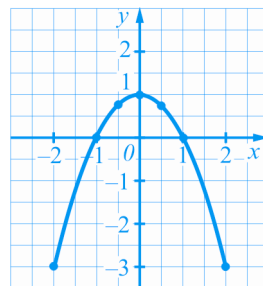


Рис. 9

б) Складемо таблицю значень функції:

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	-3	0	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	-3

Позначимо точки, координати яких подані в таблиці, на координатній площині. Сполучимо їх плавною лінією. Маємо графік функції, заданої формулою $y = 1 - x^2$, де $-2 \leq x \leq 2$ (рис. 9). ●

Приклад 2. Чи належить графіку функції $y = 2x^2$ точка $A(3; 9)$; $B(2; 8)$?

● Точка $A(3; 9)$ належатиме графіку даної функції, якщо значення функції для $x = 3$ дорівнює 9.

Знаходимо: якщо $x = 3$, то $y = 2 \cdot 3^2 = 18$. Значення функції не дорівнює 9. Отже, точка $A(3; 9)$ графіку функції не належить.

Для точки $B(2; 8)$ матимемо: якщо $x = 2$, то $y = 2 \cdot 2^2 = 8$. Точка $B(2; 8)$ належить графіку функції. ●

Приклад 3. На рисунку 10 зображено графік функції. Користуючись графіком, заповнити таблицю:

x	-6	-2	8			
y				-4	-1,5	1

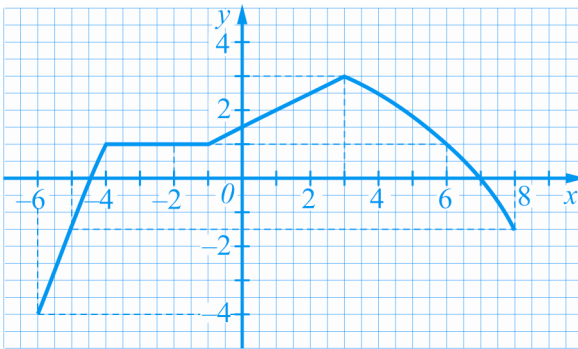


Рис. 10

● Заповнимо таблицю:

x	-6	-2	8	-6	-5; 8	$-4 \leq x \leq -1$; 6
y	-4	1	-1,5	-4	-1,5	1

●

Усно

- 799.** Функція задана графіком (див. рис. 11). Знайдіть значення функції, якщо $x = -2$. Якому значенню аргументу відповідає значення функції $y = 2$? Яка область визначення та область значень функції?
- 800.** Чи є лінія, зображена на рисунку 12, графіком деякої функції? Відповідь обґрунтуйте.

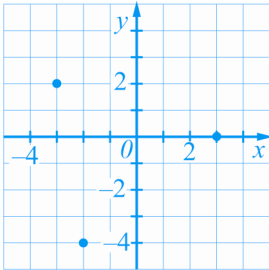


Рис. 11

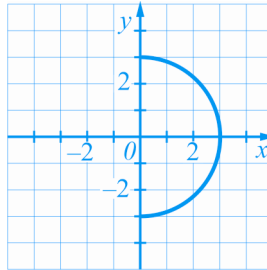


Рис. 12

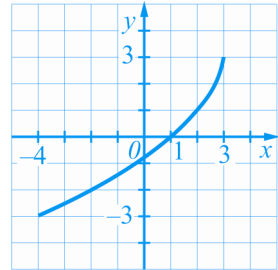


Рис. 13

- 801.** Функція задана графіком (див. рис. 13).
- Знайдіть значення функції, якщо $x = -4$; $x = -2$; $x = 2$.
 - Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = -2$; $y = 0$; $y = 3$.
 - Яка область визначення та область значень функції?
 - Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції?
 - Вкажіть нулі функції.
 - Для яких значень x функція набуває додатних значень; від'ємних значень?
- 802.** На рисунку 14 показано графік зміни об'єму води в баку залежно від часу.

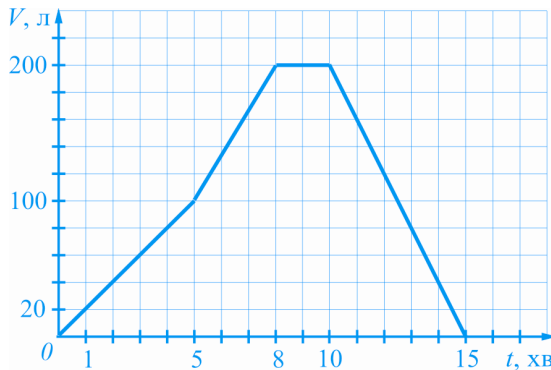



Рис. 14

- а) Скільки води було в баку у початковий момент часу?
- б) Скільки води поступило в бак протягом перших 5 хв; 8 хв; 10 хв?
- в) Скільки часу об'єм води в баку не змінювався?
- г) Протягом скількох хвилин спорожнів бак?

Рівень А



803. На рисунку 15 зображено графік функції. Користуючись цим графіком, заповніть таблицю:

x	-3	-2	0	1	4,5				
y						-1,5	-1	0	4

Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнює найменше значення функції? Для яких значень x функція набуває додатних значень?

804. На рисунку 16 зображено графік функції. Користуючись цим графіком, заповніть таблицю:

x	-2,5	-1	3	4				
y					-1,5	0	1	4

Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнює найбільше значення функції? Вкажіть нулі функції. Для яких значень x функція набуває від'ємних значень?

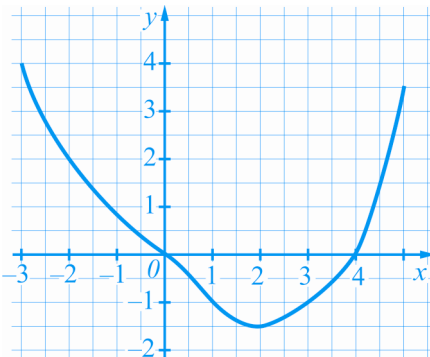


Рис. 15

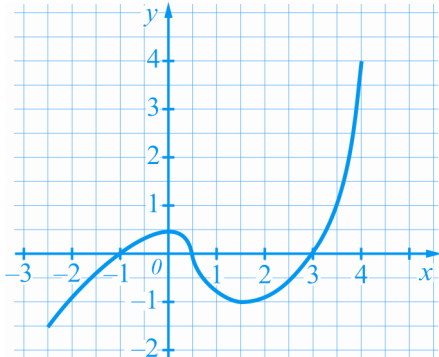


Рис. 16

805. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 2x + 1$, де $-3 \leq x \leq 3$, склавши таблицю значень функції з кроком 1. Чи належать графіку

функції точки $A(-2; -3)$, $B(0; -1)$? Користуючись графіком, знайдіть: значення функції, якщо $x = -1,5$; $x = 0,5$; значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 0$; $y = 1$.

- 806.** Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = -3x - 1$, де $-2 \leq x \leq 2$, склавши таблицю значень функції з кроком 1. Чи належать графіку функції точки $M(0; -1)$, $N(2; 5)$?

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

807. а) $y = \frac{1}{4}x - 1$, де $-4 \leq x \leq 6$; б) $y = x^2 - 1$, де $-2 \leq x \leq 2$.

808. а) $y = \frac{1}{2}x + 2$, де $-6 \leq x \leq 4$; б) $y = x^2$, де $-1 \leq x \leq 3$.

- 809.** На рисунку 17 показано графік залежності висоти польоту літака від часу. а) На якій максимальній висоті летів літак? б) Скільки часу літак набрав висоту?

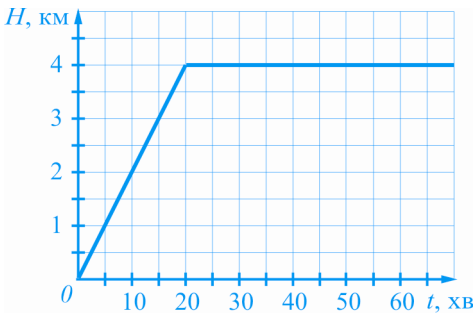


Рис. 17

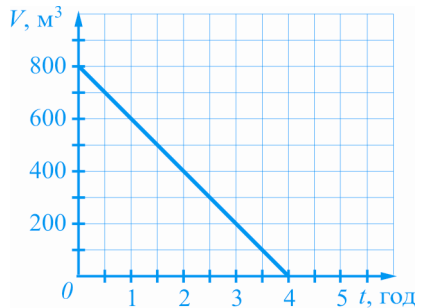
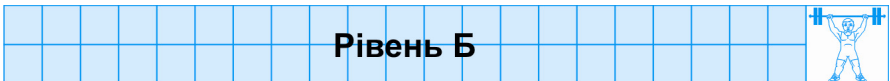


Рис. 18

- 810.** На рисунку 18 показано графік зміни об'єму води в басейні. а) Який процес зображує цей графік: вода поступає в басейн чи витікає з басейну? б) Скільки води було в басейні в початковий момент часу; через 4 год?



- 811.** На рисунку 19 зображено графік зміни температури повітря протягом доби.

а) Якою була температура повітря о 2 год; о 9 год; о 18 год; о 24 год?

- б) О котрій годині температура повітря дорівнювала -2° ; 0° ; 6° ?
 в) О котрій годині температура повітря була найнижчою; найвищою?



Рис. 19

812. На рисунку 20 зображено графік залежності швидкості тіла від часу.

- а) Яку швидкість мало тіло через 2 с після початку руху; через 5 с; через 10 с; через 20 с?
 б) У який момент часу швидкість тіла дорівнювала 4 м/с; 6 м/с; 8 м/с?
 в) У який момент часу швидкість тіла була найменшою?
 г) Вкажіть час, протягом якого тіло рухалось зі сталою швидкістю. Який шлях пройшло тіло за цей час?

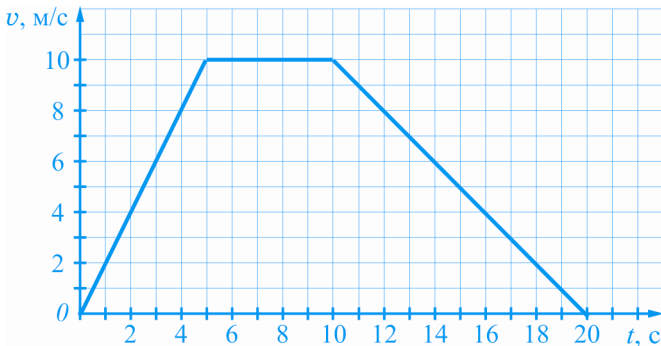


Рис. 20

813. На рисунку 21 зображено графік руху групи туристів від табору до автостанції.

- а) Скільки часу рухалися туристи та який шлях вони подолали?
 б) Скільки часу витратили туристи на привал?
 в) З якою швидкістю рухалися туристи протягом перших двох годин; після привалу?
 г) Яка середня швидкість руху туристів?

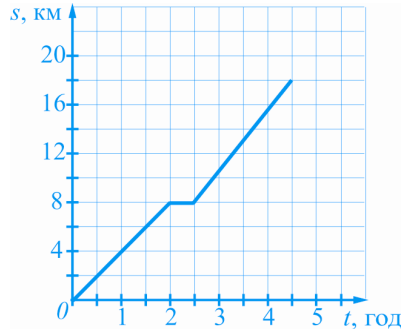


Рис. 21

814. Графіком функції є ламана $ABCD$ (сукупність трьох відрізків AB , BC і CD), де $A(-2; -3)$, $B(0; 3)$, $C(4; 3)$, $D(6; 1)$. Накресліть графік функції та заповніть таблицю:

x	-1	1,33			4,5	
y			-2	3		1,5

Яка область визначення та область значень функції? Вкажіть нулі функції. Для яких значень x функція набуває додатних значень; від'ємних значень?

815. Графіком функції є ламана $KLMN$, де $K(-4; 4)$, $L(-2; 2)$, $M(2; 2)$, $N(3; 3)$. Накресліть графік функції та заповніть таблицю:

x	-3			1,25	2,5	
y		3,5	2			3

Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції? Чи має функція нулі? Для яких значень x функція набуває додатних значень; від'ємних значень?

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

816. а) $y = x(4 - x)$, де $-1 \leq x \leq 5$; б) $y = x^2 + 4x + 3$, де $-3 \leq x \leq 1$.

817. а) $y = x^2 - 2x$, де $-2 \leq x \leq 3$; б) $y = (1 - x)(3 + x)$, де $-2 \leq x \leq 1$.

Рівень В



818. Побудуйте графік функції, заданої формулою:

а) $y = |x|$, де $-3 \leq x \leq 3$; б) $y = |x| - 2$, де $-3 \leq x \leq 3$.

Вправи для повторення										
-----------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

819. Для яких значень x значення виразу $15x - 6$ дорівнює 3?

820. Розв'яжіть рівняння:

а) $(2x + 3)(4 - (2x + 3)) = 0$; б) $\frac{2x-1}{3} - \frac{3x-1}{2} = 1$.

821. У першому сплаві є 40% міді, а в другому — 10%. Скільки кілограмів другого сплаву потрібно додати до 10 кг першого, щоб отримати 30-відсотковий сплав міді?

822. Відстань між містами A і B дорівнює 190 км. З міста A до міста B виїжджає автомобіль і рухається зі швидкістю 90 км/год. На якій відстані від міста B він буде через t год? Запишіть розв'язок у вигляді виразу зі змінною. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 1,2$.

25. Лінійна функція

1. Що таке лінійна функція. Розглянемо кілька прикладів.

Нехай тіло рухається рівномірно і прямолінійно зі швидкістю 20 м/с й напрям його руху збігається з напрямом осі x (рис. 22). Якщо в початковий момент руху тіло перебувало на відстані 35 м від початку відліку, то через t с тіло перебуватиме на відстані $S = 20t + 35$ метрів від нього.



Рис. 22

Нехай у басейн через трубу щохвилини вливається $2,5 \text{ м}^3$ води. Якщо в початковий момент часу в басейні було 70 м^3 води, то об'єм V води (у м^3), яка буде у басейні через t хв, можна обчислити за формулою $V = 2,5t + 70$.

Формулами $S = 20t + 35$, $V = 2,5t + 70$, де t — незалежна змінна, задаються функції, які називають *лінійними*.

Означення | Лінійною функцією називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа.

У формулі $y = kx + b$ змінній x можна надавати будь-яких значень, тому область визначення лінійної функції утворюють усі числа.

2. Графік лінійної функції. Побудуємо графік лінійної функції $y = 0,5x - 1$. Для цього складемо таблицю кількох значень x та відповідних значень y :

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5

Позначимо точки, координати яких подані в таблиці, на координатній площині (рис. 23). Приклавши лінійку, переконаємося, що усі позначені точки лежать на одній прямій. Якби для інших значень x обчислили відповідні значення y і позначили б точки з такими координатами на координатній площині, то й вони лежали б на цій прямій.

Через позначені точки проведемо пряму. Вона є графіком лінійної функції $y = 0,5x - 1$.

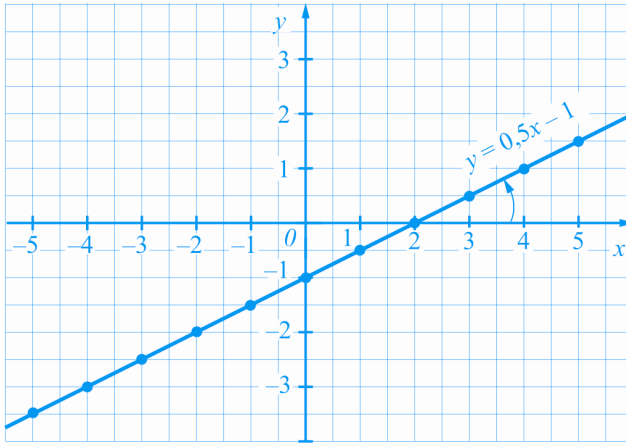


Рис. 23

Взагалі, графіком лінійної функції є пряма.

Щоб побудувати графік лінійної функції, досить знайти координати лише двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині й провести через них пряму. Так, щоб побудувати графік функції $y = 0,5x - 1$, досить було взяти дві точки, наприклад, $(0; -1)$ і $(2; 0)$ та провести через них пряму.

3. Кутовий коефіцієнт. У формулі лінійної функції $y = 0,5x - 1$ коефіцієнт біля змінної x додатний: $k = 0,5 > 0$. Графік цієї функції утворює гострий кут з додатним напрямом осі x (див. рис. 23). На рисунку 24 зображено графік лінійної функції $y = -2x + 1$. Для цієї функції $k = -2 < 0$ і її графік утворює тупий кут з додатним напрямом осі x .

Отже, від коефіцієнта k залежить кут, який утворює графік функції $y = kx + b$ з додатним напрямом осі x . Тому число k називають **кутовим коефіцієнтом прямої** $y = kx + b$.

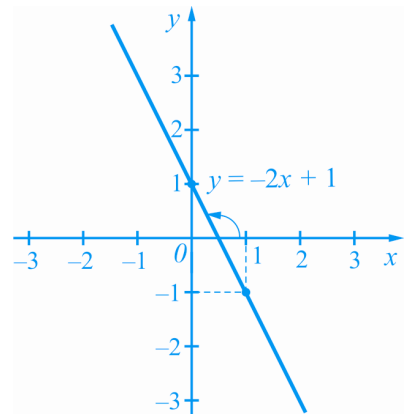


Рис. 24

Якщо $k > 0$, то пряма $y = kx + b$ утворює з додатним напрямом осі x гострий кут, якщо $k < 0$, — тупий кут.

Якщо $k = 0$, то формула, якою задається лінійна функція, має вигляд $y = 0x + b$, тобто $y = b$. Така функція для всіх значень x набуває одного й того ж значення b . Наприклад, лінійна функція $y = 2$ для всіх значень x набуває значення 2. Тому графіком функції є пряма, утворена точками $(x; 2)$, де x — будь-яке число. Ця пряма паралельна осі x (рис. 25).

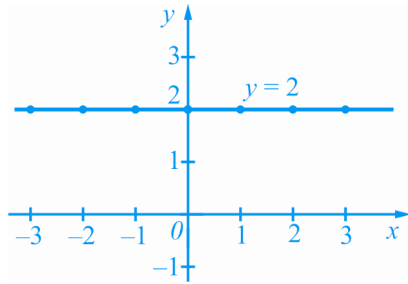


Рис. 25

Щоб побудувати графік функції $y = 2$, досить було позначити на осі y точку з ординатою 2 і провести через неї пряму, паралельну осі x .

4. Властивості лінійної функції $y = kx + b$.

- 1) Область визначення функції утворюють усі числа.
- 2) Якщо $k \neq 0$, то область значень функції утворюють усі числа; якщо $k = 0$, то функція набуває лише одного значення $y = b$.
- 3) Графіком функції є пряма.
- 4) Графік функції утворює з додатним напрямом осі x гострий кут, якщо $k > 0$, тупий кут, — якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то графік паралельний осі x , зокрема, якщо $k = 0$ і $b = 0$, то він збігається з віссю x .

5. Функція $y = kx$. У формулі $y = kx + b$, якою задається лінійна функція, покладемо $b = 0$. Одержимо формулу $y = kx$, якою задається функція, яка є окремим, але досить важливим випадком лінійної функції і служить моделлю багатьох реальних процесів. Розглянемо приклади.

1. Нехай тіло рухається зі швидкістю 20 м/с. Тоді шлях S м, пройдений ним за час t с, можна обчислити за формулою $S = 20t$. Ця формула задає шлях S як функцію від часу t .

2. Густина заліза дорівнює $7,8 \text{ г/см}^3$. Масу m г заліза, об'єм якого дорівнює $V \text{ см}^3$, можна обчислити за формулою $m = 7,8V$. Ця формула задає масу m як функцію від об'єму V .

Перейшовши у прикладах до прийнятих позначень аргументу і функції, матимемо функції, що задаються формулами $y = 20x$ та $y = 7,8x$, тобто формулами виду $y = kx$, де $k \neq 0$.

Функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x — незалежна змінна, k — деяке число, $k \neq 0$, називають ще прямою пропорційністю.

Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції, то графіком прямої пропорційності є пряма. Ця пряма проходить через початок координат (бо якщо $x = 0$, то $y = k \cdot 0 = 0$).

Для побудови графіка прямої пропорційності досить знайти яку-небудь точку графіка, відмінну від початку координат, і провести через цю точку та початок координат пряму.

Побудуємо графік функції $y = \frac{1}{3}x$. Знайдемо координати якої-небудь точки графіка, відмінної від початку координат: якщо $x = 3$, то $y = 1$. Позначимо на координатній площині точку $(3; 1)$ і проведемо через неї та через початок координат пряму (рис. 26). Ця пряма є графіком функції $y = \frac{1}{3}x$.

На рисунку 27 зображено графіки функцій виду $y = kx$ для різних значень k .

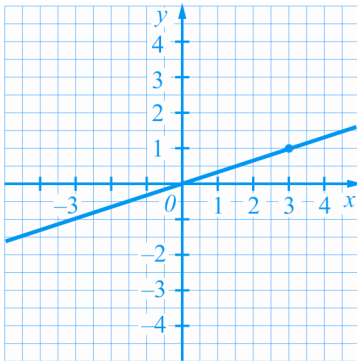


Рис. 26

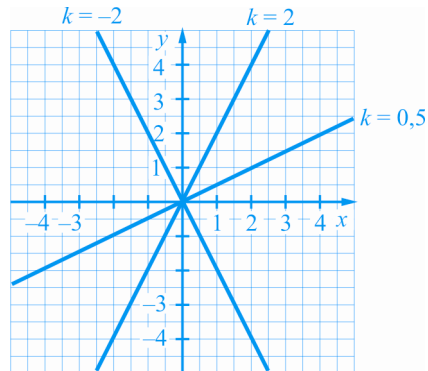


Рис. 27

Якщо $k > 0$, то графік функції $y = kx$ розміщений у першій і третій координатних чвертях, а якщо $k < 0$, — у другій і четвертій чвертях.

Для тих, хто хоче знати більше



6. Точки перетину графіків функцій.

На рисунку 28 зображені графіки двох лінійних функцій $y = -0,25x + 4$ та $y = x - 1$. Якщо $x = 4$, то функції набувають одного й того ж значення $y = 3$. Отже, графіки функцій мають спільну точку $(4; 3)$. Ще кажуть, що графіки перетинаються в точці $(4; 3)$.

Взагалі, графіки двох функцій мають спільну точку, якщо існує значення x , для якого обидві функції набувають одного й того ж значення.

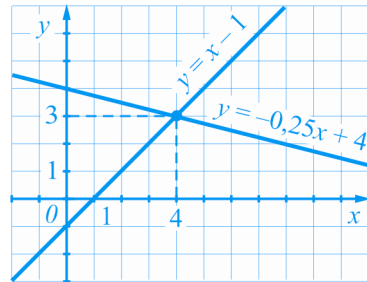


Рис. 28

7. Взаємне розміщення графіків лінійних функцій. Розглянемо дві лінійні функції $y = 0,5x - 2$ і $y = 0,6x + 1$, формули яких мають різні коефіцієнти біля x . З'ясуємо, чи перетинаються графіки цих функцій (рис. 29). Для цього перевіримо, чи існує значення x , для якого обидві функції набувають одного й того ж значення; іншими словами: чи існує значення x , для якого виконується рівність $0,5x - 2 = 0,6x + 1$. Розв'яжемо дане рівняння:

$$0,5x - 0,6x = 2 + 1; \quad -0,1x = 3; \quad x = -30.$$

Якщо $x = -30$, то обидві функції набувають одного й того ж значення:

$$y = 0,5 \cdot (-30) - 2 = -15 - 2 = -17 \quad \text{і} \quad y = 0,6 \cdot (-30) + 1 = -18 + 1 = -17.$$

Отже, графіки функцій перетинаються в точці $(-30; -17)$.

Розглянемо дві лінійні функції $y = 0,5x - 2$ і $y = 0,5x + 1$, формули яких мають однакові коефіцієнти біля x . Рівняння $0,5x - 2 = 0,5x + 1$ не має коренів. Тому прямі, що є графіками функцій $y = 0,5x - 2$ і $y = 0,5x + 1$ (рис. 30), не мають спільних точок (ці прямі паралельні).

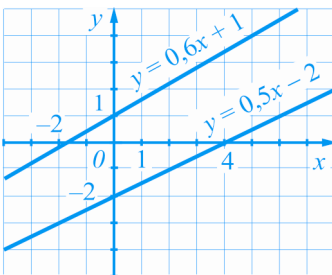


Рис. 29

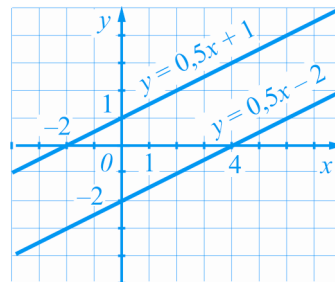


Рис. 30

Взагалі, графіки функцій виду $y = k_1x + b_1$ та $y = k_2x + b_2$ перетинаються, якщо $k_1 \neq k_2$ (коефіцієнти біля x різні), і паралельні, якщо $k_1 = k_2$ (коефіцієнти біля x однакові) та $b_1 \neq b_2$.

Приклади розв'язання вправ



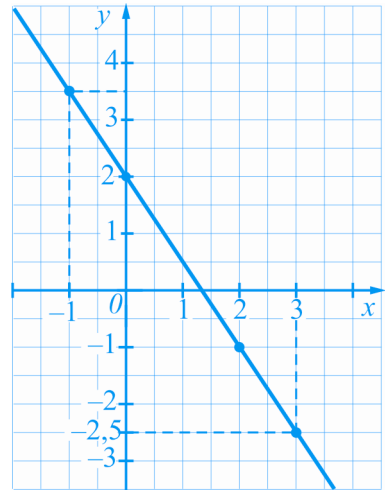
Приклад 1. Побудувати графік функції, заданої формулою $y = -1,5x + 2$. Користуючись графіком, знайти:

- значення y , яке відповідає $x = -1$;
 - значення x , якому відповідає $y = -2,5$.
- Будуємо графік функції.

$y = -1,5x + 2$		
x	0	2
y	2	-1

а) Нехай $x = -1$. Через точку $(-1; 0)$ проводимо пряму, паралельну осі y , і знаходимо точку її перетину з графіком. Це точка $(-1; 3,5)$. Отже, значенню $x = -1$ відповідає значення $y = 3,5$.

б) Нехай $y = -2,5$. Через точку $(0; -2,5)$ проводимо пряму, паралельну осі x , і знаходимо точку перетину цієї прямої з графіком. Це точка $(3; -2,5)$. Отже, значення $y = -2,5$ відповідає значенню $x = 3$. ●



Приклад 2. Дано функцію $y = 2,4x - 6$. Не будуючи графік функції, знайти координати точок його перетину з осями координат та нулі функції.

● Точки перетину графіка з осями координат — це точки графіка, абсциса або ордината яких дорівнює нулю.

Якщо $x = 0$, то $y = 2,4 \cdot 0 - 6 = -6$.

$(0; -6)$ — точка перетину графіка з віссю y .

Якщо $y = 0$, то: $0 = 2,4x - 6$; $-2,4x = -6$; $x = 2,5$.

$(2,5; 0)$ — точка перетину графіка з віссю x .

Значення функції дорівнює нулю ($y = 0$), якщо $2,4x - 6 = 0$, звідки $x = 2,5$. Отже, нулем функції є $x = 2,5$. ●

831. Чи проходить графік функції $y = 1,8x + 9$ через точки: $A(10; 27)$; $B(50; 89)$, $C(-20; -27)$?

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

832. а) $y = 2x - 3$; б) $y = -0,5x + 1$; в) $y = 0,5x + 2$; г) $y = -3x$.

833. а) $y = x - 2$; б) $y = -2x + 0,5$; в) $y = -2,5$.

В одній системі координат побудуйте графіки функцій:

834. а) $y = -1,5x$; $y = -1,5x - 2$; $y = -1,5x + 2$;

б) $y = 4$; $y = 1,5$; $y = -2$.

835. $y = 2x$; $y = 2x - 2$; $y = 2x + 1$.

836. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = -1,5x + 1,5$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) значення y , яке відповідає $x = -4$; $x = 0$; $x = 2$;

б) значення x , якому відповідає $y = -3$; $y = 1,5$;

в) нуль функції;

г) значення x , для яких функція набуває додатних значень.

837. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 0,5x - 3$. Користуючись графіком, знайдіть:

а) значення y , яке відповідає $x = -2$; $x = 2$; $x = 4$;

б) значення x , якому відповідає $y = -2$; $y = 1$;

в) нуль функції;

г) значення x , для яких функція набуває від'ємних значень.

838. Пряма пропорційність задана формулою $y = 4x$. Заповніть таблицю:

x	-3		-1	2	3	
y		-8				20

839. Пряма пропорційність задана формулою $y = -2x$. Заповніть таблицю:

x	-5		-2			3
y		6		0	-4	

Побудуйте в одній системі координат графіки функцій:

840. а) $y = 4x$; б) $y = -4x$; в) $y = -\frac{2}{3}x$.

841. а) $y = -3x$; б) $y = 3x$; в) $y = \frac{1}{2}x$.

842. Побудуйте графік функції $y = -\frac{1}{2}x$. Користуючись графіком, знайдіть значення аргументу, яким відповідають такі значення функції: -1; 2; 3.

843. Побудуйте графік функції $y = 2x$. Користуючись графіком, знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: $-1,5$; $2,5$.
844. Чи належить графіку прямої пропорційності $y = 14x$ точка: $A(-2; -28)$;
 $B(0,5; 7)$; $C(-\frac{2}{7}; 4)$?
845. Які з точок належать графіку прямої пропорційності $y = -4x$: $K(4; -1)$;
 $M(0,3; -1,2)$; $N(0; -4)$?

Рівень Б



Побудуйте графіки функцій та знайдіть координати точки їх перетину:

846. а) $y = 4x - 1$ і $y = 2x + 2$; б) $y = -3x + 2$ і $y = x - 2$;
 в) $y = \frac{1}{3}x - 1$ і $y = 1$.
847. а) $y = 3x - 2$ і $y = 2x - 1$; б) $y = -x + 2$ і $y = 1,5x + 2$.

848. Чи перетинаються графіки функцій:

- а) $y = -2,5x + 1$ і $y = 2,5x - 1$; б) $y = 2x + 2$ і $y = 2x + 3$?

Не будуючи графік функції, знайдіть координати точок його перетину з осями координат та нулі функції:

849. а) $y = -1,6x + 4$; б) $y = 0,3x - 21$; в) $y = -8$.

850. а) $y = 8 - 2,5x$; б) $y = -1,6x + 4,8$; в) $y = 6$.

851. Запишіть формулу прямої пропорційності, якщо її графік проходить через точку: а) $(1; 17)$; б) $(-2; -4)$.

852. Функція $y = kx$ для $x = 2$ набуває значення 7. Знайдіть k .

853. Знайдіть значення функції $y = 2,5x$, якщо $x = -2$ та $x = 4$. Порівняйте дані значення аргументів і відповідні значення функції.

854. На рисунку 31 зображено графік прямої пропорційності.

а) Запишіть формулу, якою задається ця функція.

б) Вкажіть значення y , які відповідають значенням $x \geq 0$.

855. В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = 3,5$ та $y = 2x$. Для яких значень x точки першого графіка лежать вище від точок другого графіка?

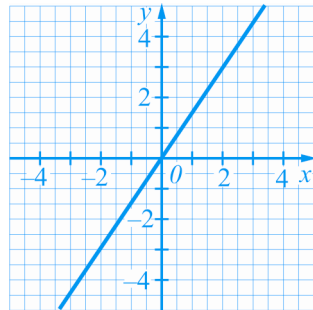


Рис. 31

- 856.** Для яких значень x графік функції $y = 0,5x$ лежить нижче від графіка функції $y = 2$?
- 857.** Одна сторона прямокутника дорівнює 2 см, а друга — x см, де $x \geq 1$. Запишіть формулу, яка задає площу y прямокутника (y квадратних сантиметрах) як функцію від x . Побудуйте графік цієї функції.
- 858.** У початковий момент часу велосипедист перебував на відстані 60 м до фінішу. На рисунку 32 зображено графік зміни відстані від велосипеда до фінішу відповідно до зміни часу.
- Через який час велосипедист досяг фінішу?
 - З якою швидкістю рухався велосипедист?
 - Який шлях проїхав велосипедист за дві останні секунди?

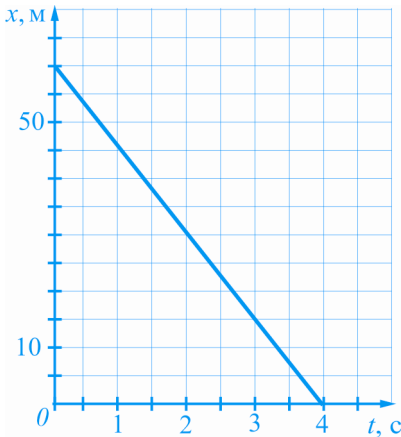


Рис. 32

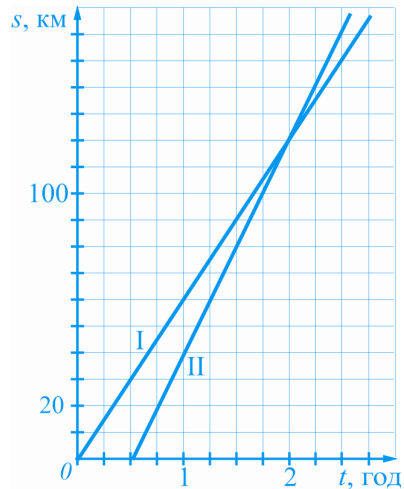


Рис. 33

- 859.** На рисунку 33 зображено графіки руху двох автобусів, що вирушили з однієї станції.
- Через який час після відходу першого автобуса вирушив другий?
 - З якими швидкостями рухалися автобуси?
 - На якій відстані від станції другий автобус наздогнав перший?
 - Якою формулою задається шлях, пройдений першим автобусом, залежно від часу?
- 860.** Олег і Петро змагалися у плаванні на дистанції 200 м у 50-метровому басейні. На рисунку 34 зображено графіки зміни відстані від кожного з хлопців до місця старту.

- а) Скільки часу витратив кожен із хлопців на подолання перших 50 м дистанції?
 б) Хто переміг у змаганні?
 в) На скільки секунд відстав переможений від переможця?
 г) Яка середня швидкість руху кожного із хлопців на першій стометрівці?
 д) Що означають точки перетину графіків?

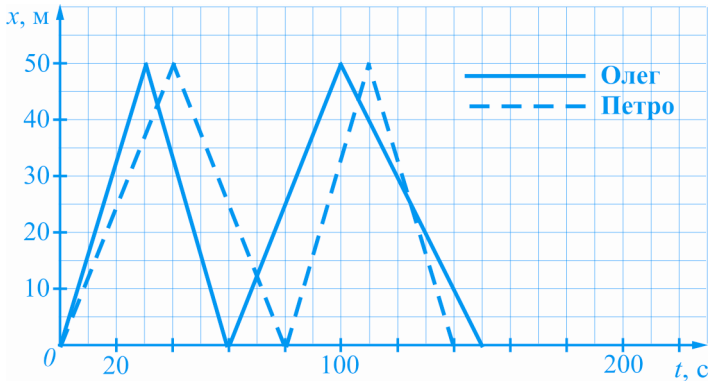


Рис. 34

- 861.** Вартість телеграми визначається так: кожне слово коштує 5 к., додають ще 5 к. і до одержаної суми додають 20% для податку на додану вартість. Запишіть формулу для знаходження вартості телеграми, що складається з n слів. Знайдіть вартість телеграми, що складається з 21 слова.
- 862.** Абонентна плата за телефон становить 7 грн. 34 к. Вартість однієї хвилини місцевих розмов дорівнює 2 к., до того ж, вартість 100 хв розмов входить до абонентної плати. Запишіть формулу для знаходження плати за телефон за місяць, якщо протягом місяця абонент здійснював лише місцеві розмови, загальна тривалість яких дорівнює n хв, де $n > 100$. Знайдіть плату за телефон, якщо $n = 320$.

Рівень В



- 863.** Знайдіть координати точки перетину графіків функцій:

а) $y = 14x - 8$ і $y = 7x + 8$;

б) $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{3}$ і $y = \frac{1}{4}x$.

- 864.** Чи проходить графік функції $y = x + 4$ через точку перетину графіків функцій $y = 2x + 5$ і $y = -5x - 2$?
- 865.** Знайдіть таке число a , щоб точка перетину прямих $y = ax$ та $y = 6x - 2$ мала абсцису 2.

Побудуйте графік функції, заданої формулою:

- 866.** а) $y = |x| - 2$; б) $y = 5 - |x|$.
- 867.** а) $y = x + 2|x|$; б) $y = 2x - |x|$.

Вправи для повторення

- 868.** Спростіть вираз:
 а) $(2a - c)^2 - (2a + c)^2 + 8ac$; б) $(2 - x^2)(x^2 + 2) + (x^2 - 2)^2$.
- 869.** Знайдіть значення виразу $4a^2 - 4b^2$, якщо:
 а) $a = 6,75$; $b = 3,25$; б) $a = 12\frac{4}{7}$; $b = 5\frac{4}{7}$.
- 870.** Доведіть, що значення виразу $(k + 3)(k^2 - k + 4) - (k - 4)(k + 3)^2 + 32k$ ділиться на 48 для кожного цілого значення k .
- 871.** До 30-відсоткового розчину солі, маса якого дорівнює 750 г, долили 150 г води. Скільки відсотків солі містить утворений розчин?
- 872.** У першому бідоні було молока утричі більше, ніж у другому. Коли з першого бідона перелили 12 л молока у другий, то в другому бідоні його стало в 1,4 разу більше, ніж у першому. Скільки молока було в кожному бідоні спочатку?
- 873.** Швидкість теплохода у стоячій воді дорівнює 28 км/год. Відомо, що за 2 год він проходить за течією річки на 41 км менше, ніж за 4 год проти течії. Яка швидкість течії річки?

Цікаво знати



«В одну ріку не можна увійти двічі» — ці слова приписують давньогрецькому філософу Геракліту Ефеському (з міста Ефес). Вони відображають суттєву особливість реального світу: усе в ньому перебуває у стані безперервної зміни і розвитку. Саме шукаючи закономірності у нескінченному морі видозмін природи, вчені дійшли до понять змінної величини і функції.

Поняття змінної величини вперше було введено в математику французьким математиком Рене Декартом (1596–1650) у його знаменитому творі «Геометрія» у 1637 році. Саме після введення цього поняття починає створюватись сучасне уявлення про функцію як про залежність однієї змінної вели-

чини від іншої. Слід зазначити, що хоча деякі залежності між величинами, які ми називаємо функціями, використовувалися ще у давні часи, математика до першої половини XVII ст. залишалася наукою про сталі величини.

Термін «функція» (від латинського *functio* — виконання, звершення) вперше увів німецький математик Готфрід Вільгельм Лейбніц у 1694 році.

Завдяки працям Лейбніца та відомого англійського фізика й математика Ісаака Ньютона (1643–1727) сформувалася нова гілка математики — математичний аналіз, у якому поняття функції є одним із головних. Лейбніцем та Ньютоном були розроблені методи дослідження функцій, які вже понад 300 років служать потужним засобом вивчення навколишнього світу за допомогою математики.

Про вагому роль функцій як математичних моделей реальних процесів Ньютон писав так: «Я не зміг би отримати багатьох своїх фундаментальних результатів, якби не відмовився від безпосереднього розгляду самих тіл і не звів усе просто до дослідження функцій».



Готфрід Вільгельм Лейбніц
(1646–1716),
німецький філософ,
математик, фізик

Запитання і вправи для повторення § 6

1. Наведіть приклад залежності між змінними.
2. Поясніть на прикладі, що таке аргумент і що таке функція.
3. Які ви знаєте способи задання функції? Наведіть приклад функції, заданої за допомогою формули.
4. Що називають областю визначення і областю значень функції?
5. Які точки координатної площини утворюють графік функції?
6. Як за допомогою графіка функції знайти її значення за відомим значенням аргументу?
7. Яку функцію називають лінійною? Наведіть приклади лінійних функцій.
8. Що є графіком лінійної функції?
9. Яку функцію називають прямою пропорційністю? Наведіть приклади прямої пропорційності.

- 874.** Функція задана формулою $y = 5x - 3$.
- Знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: -8 ; 0 ; 16 .
 - Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції: -3 ; 1 .
 - Для якого значення x значення функції дорівнює значенню аргументу?
- 875.** У деяких країнах (наприклад, у США, Канаді) температуру повітря вимірюють у градусах Фаренгейта. Температура в градусах Фаренгейта (t_F) виражається через температуру в градусах Цельсія (t_C) за формулою $t_F = 1,8t_C + 32$.
- Знайдіть t_F , якщо $t_C = 20^\circ\text{C}$; $t_C = -15^\circ\text{C}$.
 - Знайдіть t_C , якщо $t_F = 5^\circ\text{F}$; $t_F = 50^\circ\text{F}$.
 - Знайдіть у градусах Фаренгейта температуру плавлення льоду, температуру кипіння води.
- 876.** Функція задана формулою $y = x^2 - 3$, де змінна x може набувати значень: -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 . Задайте цю функцію таблицею.
- 877.** На рисунку 35 зображено графік зміни температури тіла протягом 20 хв.
- Якою була початкова температура тіла?
 - На скільки градусів збільшилась температура тіла протягом перших 4 хв?
 - На скільки градусів змінилась температура тіла протягом останніх 6 хв?
 - Протягом скількох хвилин температура тіла не змінювалась?

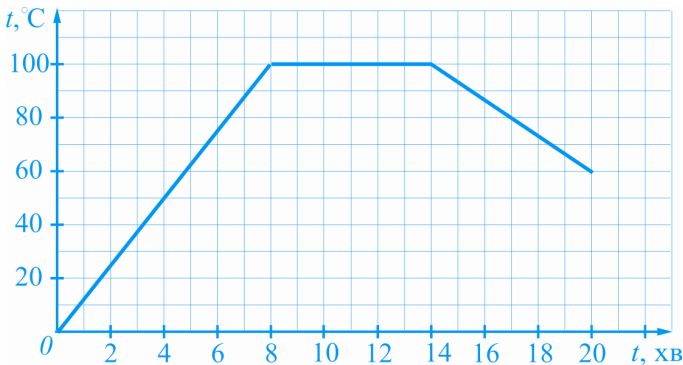


Рис. 35

- 878.** Графіком функції є ламана ABC , де $A(-2; 2)$, $B(1; -1)$, $C(5; 1)$. Накресліть графік функції. Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції? Вкажіть нулі функції. Для яких значень x функція набуває додатних значень; від'ємних значень?

- 879.** Побудуйте графік функції $y = -3x - 1$. За допомогою графіка знайдіть:
- а)** значення функції, якщо $x = -1,5$; $x = 1,5$;
 - б)** значення x , для якого $y = 5$.

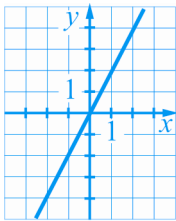
Побудуйте графік функції:

- 880.** **а)** $y = 2x + 1$, де $-3 \leq x \leq 1$; **б)** $y = 0,5x^2 - 0,5$, де $-2 \leq x \leq 2$.
- 881.** **а)** $y = -3x$; **б)** $y = 1,5x - 1$.
- 882*.** **а)** $y = 2|x|$; **б)** $y = x + |x|$.
- 883.** Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 1,5 см, 2 см та x см, де $x \geq 1$. Запишіть формулу, яка задає об'єм паралелепіпеда (у кубічних сантиметрах) як функцію від x . Побудуйте графік цієї функції.
- 884.** Запишіть формулу прямої пропорційності, якщо її графік проходить через точку $A(-3; 1)$.
- 885.** Графік функції $y = kx$ проходить через точку $A(-8; 4)$. Знайдіть k . Чи проходить графік цієї функції через точку: $B(2; -1)$; $C(-\frac{1}{3}; \frac{1}{6})$?
- 886.** Знайдіть координати точок перетину графіка функції $y = -4x + 6$ з осями координат.
- 887.** Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:
- а)** $y = 3x$ і $y = -3x + 6$;
 - б)** $y = x + 7$ і $y = 5 - 4x$.
- 888*.** В одній системі координат побудуйте графіки функцій $y = |x|$ та $y = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$. Знайдіть точки перетину графіків. Використовуючи графіки функцій, розв'яжіть рівняння $|x| = \frac{1}{3}x + 1\frac{1}{3}$.
- 889*.** Функція задана формулою $y = kx + 3$.
- а)** Для яких значень k графік цієї функції проходить через точку $(2; 4)$?
 - б)** Для яких значень k графік цієї функції паралельний графіку функції $y = 5x - 8$?

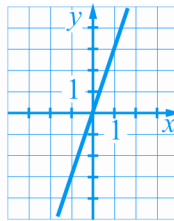
Завдання для самоперевірки № 6

Рівень 1

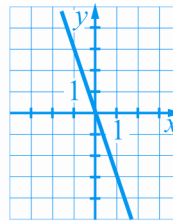
- Чому дорівнює значення функції $y = 2x - 0,5$, якщо $x = 1,5$?
а) 1,5; б) 1; в) $-2,5$; г) 2,5.
- Знайдіть значення функції $y = -4x$, якщо $x = 0,5$.
а) $-3,5$; б) $-4,5$; в) -2 ; г) 2.
- Для якого значення аргументу значення функції $y = 4x$ дорівнює 10?
а) 40; б) 2,5; в) 5; г) 2,4.
- Який із графіків є графіком функції $y = 3x$ (рис. 36)?



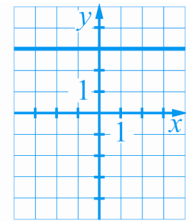
а)



б)



в)



г)

Рис. 36

- Яка з точок належить графіку функції $y = 2x + 1$?
а) $A(-4; 9)$; б) $B(4; 9)$; в) $C(4; 7)$; г) $D(-4; -9)$.
- Вкажіть правильні твердження:
а) графіком лінійної функції є пряма;
б) формулою $y = 5x - 3$ задається пряма пропорційність;
в) графік функції $y = 2x + 3$ проходить через точку $(5; 2)$;
г) функція, графік якої зображено на рисунку 36.г), задається формулою $y = 3$.

Рівень 2

- Функція задана формулою $y = 2x^2 - 4$. Для кожного значення аргументу вкажіть відповідне значення функції:
а) $x = -2$; 1) $y = -4$;
б) $x = 0,5$; 2) $y = -3,5$;
в) $x = 3$; 3) $y = 4$;
г) $x = 0$; 4) $y = 14$.

8. Функція задана формулою $y = -4x - 1$. Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції -9 ; 9 .
9. Користуючись графіком функції (рис. 37), знайдіть:
- значення функції, якщо $x = -3$;
 - значення аргументу, яким відповідає значення функції -2 .
10. Побудуйте графік функції $y = -2x$.
11. Чи проходить графік функції, заданої формулою $y = 4 - x^2$, через точку $(3; -5)$?

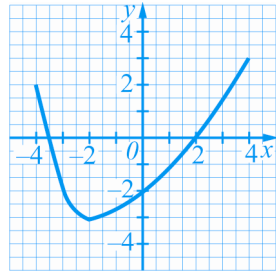


Рис. 37

Рівень 3

12. Знайдіть область визначення і область значень функції, графік якої зображений на рисунку 37. Для яких значень x функція набуває від'ємних значень?
13. Функція задана формулою $y = x^2 - 6x + 2$. Знайдіть значення аргументу, яким відповідає значення функції $y = 2$.
14. Побудуйте графік функції $y = -2x - 2$. Вкажіть значення x , яке є нулем функції. Для яких значень x функція набуває від'ємних значень?
15. Знайдіть координати точки перетину графіків функцій $y = 3x - 5$ і $y = 9 - 2x$.
16. Графік функції $y = kx$ проходить через точку $A(2, 5)$. Чи проходить графік цієї функції через точку $B(-3; -6)$?

Рівень 4

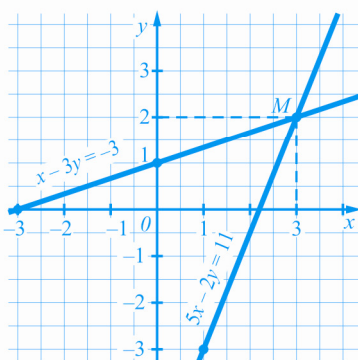
17. Знайдіть найменше значення функції, заданої формулою $y = x^2 - 6x + 2$.
18. Функція задана формулою $y = (x - 2)(x + 4)$. Знайдіть значення аргументу, яким відповідає значення функції $y = -5$.
19. Чи проходить графік функції $y = 0,4x + 1,4$ через точку перетину графіків функцій $y = 3x + 4$ і $y = -2x - 1$?

-
20. За допомогою графіків функцій знайдіть значення x , для яких значення функції $y = -x + 2$ більші, ніж відповідні значення функції $y = 0,5x + 3,5$.
21. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 2|x| - 1$.

Розділ IV. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

Є чимало задач, розв'язуючи які, отримують рівняння, що містять не одну, а кілька змінних.

У даному розділі ми з'ясуємо, що таке лінійне рівняння із двома змінними та його розв'язок, що таке система двох лінійних рівнянь із двома змінними та її розв'язок, які основні способи розв'язування систем лінійних рівнянь із двома змінними.



$$\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3 \end{cases}$$
 система двох лінійних рівнянь із двома змінними;
 $x = 3, y = 2$ — розв'язок цієї системи рівнянь.

§ 7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

26. Рівняння із двома змінними

1. Поняття рівняння із двома змінними. Ви вже вмієте розв'язувати лінійні рівняння з однією змінною та рівняння, що зводяться до лінійних. Нагадаємо, що лінійне рівняння з однією змінною — це рівняння виду $ax = b$, де a і b — деякі числа, а x — змінна.

Розглянемо приклад, який приводить до рівняння із двома змінними.

Нехай відомо, що сума деяких двох чисел дорівнює 8. Якщо одне із чисел позначити через x , а друге — через y , то матимемо рівняння

$$x + y = 8,$$

яке містить дві змінні: x та y . Таке рівняння називають *рівнянням із двома змінними*.

Рівняння

$$3x - 2y = 1, \quad 0x + 4y = 5, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad xy = 10$$

теж є рівняннями із двома змінними. Перші два із цих рівнянь є рівняннями виду $ax + by = c$, де a , b і c — числа. Такі рівняння називають *лінійними рівняннями із двома змінними*.

Означення

Лінійним рівнянням із двома змінними називають рівняння виду $ax + by = c$, де x та y — змінні, a , b і c — деякі числа (коефіцієнти рівняння).

2. Розв'язки рівняння із двома змінними. Розглянемо рівняння $x + y = 8$. Якщо $x = 2$, $y = 6$, то це рівняння перетворюється у правильну числову рівність $2 + 6 = 8$. Кажуть, що пара значень змінних $x = 2$, $y = 6$ є *розв'язком* рівняння $x + y = 8$.

Означення

Розв'язком рівняння із двома змінними називають пару значень змінних, для яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Розв'язками рівняння $x + y = 8$ є й такі пари чисел:

$$x = 4, y = 4; \quad x = 4,5, y = 3,5; \quad x = 10, y = -2.$$

Скорочено ці розв'язки записують так: $(4; 4)$; $(4,5; 3,5)$; $(10; -2)$. У цих записях на першому місці пишуть значення змінної x , а на другому — значення змінної y . Це пов'язано з тим, що змінну x умовно вважають першою змінною, а змінну y — другою.

Щоб знайти розв'язок рівняння із двома змінними, можна підставити в рівняння довільне значення однієї змінної і, розв'язавши одержане рівняння з

однією змінною, знайти відповідне значення іншої змінної. Для прикладу знайдемо кілька розв'язків рівняння $x + y = 8$.

Нехай $x = 7$, тоді $7 + y = 8$, звідки $y = 8 - 7$; $y = 1$.

Нехай $x = -3$, тоді $-3 + y = 8$, звідки $y = 8 + 3$; $y = 11$.

Ми знайшли два розв'язки $(7; 1)$ і $(-3; 11)$. Надаючи змінній x інших значень, одержимо інші розв'язки рівняння. Рівняння $x + y = 8$ має безліч розв'язків.

Шукати розв'язки рівнянь із двома змінними можна іншим способом, який обумовлюється властивостями рівнянь.

3. Властивості рівнянь із двома змінними. Властивості рівнянь із двома змінними такі ж, як і рівнянь з однією змінною, а саме:

1. У будь-якій частині рівняння можна виконати тотожні перетворення виразів (розкрити дужки, звести подібні доданки).

2. Будь-який доданок можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний.

3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те ж, відмінне від нуля, число.

Розглянемо рівняння

$$3x + 2y = 9.$$

Використовуючи властивості рівнянь, виразимо з цього рівняння одну змінну через іншу, наприклад, y через x . Для цього перенесемо доданок $3x$ у праву частину, змінивши його знак на протилежний:

$$2y = -3x + 9.$$

Поділимо обидві частини одержаного рівняння на 2:

$$y = -1,5x + 4,5.$$

Користуючись формулою $y = -1,5x + 4,5$, можна знайти скільки завгодно розв'язків даного рівняння. Для цього досить узяти довільне значення x і обчислити відповідне значення y . Пари деяких відповідних значень x та y подамо у вигляді таблиці.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = -1,5x + 4,5$	10,5	9	7,5	6	4,5	3	1,5	0	-1,5

Пари чисел кожного стовпчика — розв'язки рівняння $3x + 2y = 9$.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Знайти значення коефіцієнта a , для яких одним із розв'язків рівняння $3x + ay = -1$ є пара чисел $(-1; 2)$.

• Якщо пара чисел $(-1; 2)$ є розв'язком рівняння $3x + ay = -1$, то має виконуватися рівність $3 \cdot (-1) + a \cdot 2 = -1$. Розв'яжемо одержане рівняння зі змінною a :

$$-3 + 2a = -1; \quad 2a = -1 + 3; \quad 2a = 2; \quad a = 1.$$

Відповідь. $a = 1$. •

															Усно																													
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

890. Серед поданих рівнянь назвіть лінійні рівняння із двома змінними:


- а) $xy = 3$; б) $x + 2y = 7$; в) $x + y^2 = 4$;
 г) $x - y = 1$; д) $12x + 10y = 0$; е) $0x - 2y = 3$;
 є) $3x + 0y = 0$; ж) $0x + 0y = 0$; з) $0x + 0y = 1$.

891. Чи є розв'язком рівняння $2x - y = 3$ пара чисел:

- а) $x = 2, y = 1$; б) $x = 1, y = 2$?

892. Чи є розв'язками рівняння $x + 3y = 9$ пари чисел $(1; 1)$; $(6; 1)$?

893. Вкажіть кілька розв'язків рівняння $x + y = 7$.

															Рівень А																													
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

894. Які з пар чисел $(2; 2)$, $(1; 3)$, $(1; 3,5)$, $(4; -1)$, $(\frac{2}{3}; 4)$ є розв'язками рівняння $3x + 2y = 10$?

895. Які з пар чисел $(2; 2)$, $(-1; -2)$, $(1; 1)$, $(1; \frac{2}{3})$ є розв'язками рівняння $4x - 3y = 2$?

Знайдіть які-небудь два розв'язки рівняння:


896. а) $2x + 3y = 8$; б) $x - 3y = -1$.

897. а) $x + 2y = 7$; б) $3x - y = 2$.

Складіть яке-небудь лінійне рівняння, розв'язком якого є пара чисел:

898. а) $x = 1, y = 3$; б) $(-2, 1)$.

899. а) $x = 2, y = 1$; б) $(2, -2)$.

															Рівень Б																													
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

900. З рівняння $2x + y = 5$ виразіть:

- а) змінну x через змінну y ; б) змінну y через змінну x .

Виразіть з рівняння змінну y через змінну x та знайдіть два які-небудь розв'язки рівняння:

901. а) $x - y = 7$;

б) $3x + 2y = 15$.

902. а) $2x + y = 5$;

б) $5x - 2y = 10$.

903. Серед розв'язків рівняння $3x + 5y = 16$ знайдіть таку пару чисел, яка складається із двох однакових чисел.

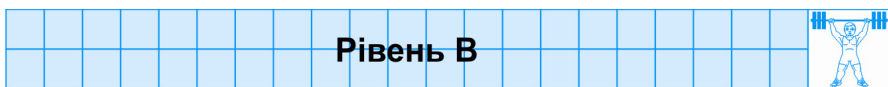
904. Знайдіть значення коефіцієнта a в рівнянні $ax + 3y = 10$, коли відомо, що розв'язком цього рівняння є пара чисел $(1; 2)$.

905. Пара чисел $(3; 2)$ є розв'язком рівняння $2x + by = 12$. Знайдіть b .

906. Розв'яжіть рівняння:

а) $0x - 2y = 6$;

б) $3x + 0y = 9$.



907. Розв'яжіть рівняння в цілих числах (тобто знайдіть усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння):

а) $2x - 5y = 7$;

б) $3x + 2y = 10$;

в) $-4x + 9y = 6$.

Розв'язання. а) Вибираємо змінну, коефіцієнт біля якої має менший модуль, тобто змінну x . Виразимо цю змінну через змінну y :

$$2x - 5y = 7; \quad 2x = 5y + 7; \quad x = \frac{5}{2}y + \frac{7}{2}.$$

Перетворимо праву частину одержаної формули так:

$$x = \frac{5}{2}y + \frac{7}{2} = 2y + \frac{1}{2}y + 3 + \frac{1}{2} = 2y + 3 + \frac{1}{2}(y + 1).$$

Отже,

$$x = 2y + 3 + \frac{1}{2}(y + 1).$$

Нехай для деяких цілих значень змінних остання рівність є правильною. Оскільки x та $2y + 3$ — цілі числа, то $\frac{1}{2}(y + 1)$ також має бути цілим числом. Отже, $y + 1$ має ділитися на 2, звідки: $y + 1 = 2k$; $y = 2k - 1$, де k — деяке ціле число. Підставивши $y = 2k - 1$ у формулу для змінної x , матимемо:

$$x = 2(2k - 1) + 3 + \frac{1}{2}(2k - 1 + 1) = 4k - 2 + 3 + k = 5k + 1.$$

Якщо $x = 5k + 1$, $y = 2k - 1$, то рівняння $2x - 5y = 7$ перетворюється у правильну числову рівність. Справді,

$$2(5k + 1) - 5(2k - 1) = 10k + 2 - 10k + 5 = 7.$$

Отже, розв'язками рівняння $2x - 5y = 7$ є пари цілих чисел: $x = 5k + 1$; $y = 2k - 1$, де k — довільне ціле число.

(Надаючи k у формулах для x та y різних цілих значень, одержуватимемо різні цілі розв'язки рівняння $2x - 5y = 7$. Наприклад, якщо $k = 0$, то маємо розв'язок $x = 1$, $y = -1$; якщо $k = 1$, — розв'язок $x = 6$, $y = 1$.)

908. Знайдіть усі натуральні розв'язки рівняння $5x + 6y = 57$.

909. Знайдіть усі значення a , для яких одним із розв'язків рівняння $2(5a + 1)^2x - 5(2a - 1)^2y = 7$ є пара чисел $(2; 5)$.

Вправи для повторення

910. У січні підприємство випустило 8000 одиниць продукції, у лютому — на 3,75% менше, ніж у січні, а в березні — на 4% більше, ніж у лютому. Скільки одиниць продукції випустило підприємство в березні?

911. Перше число становить 40% від другого. Скільки відсотків становить друге число від першого?

912. На координатній площині побудуйте точки $A(-2; 2)$ та $B(4; -1)$. Проведіть пряму AB і знайдіть координати точок її перетину з осями координат.

913. Побудуйте графік функції:

а) $y = 1,5x - 2$;

б) $y = -x + 1$.

27. Графік лінійного рівняння із двома змінними

Розглянемо рівняння

$$3x - 2y = 2.$$

Розв'язками цього рівняння є, наприклад, пари чисел $(0; -1)$ і $(2; 2)$. Цим розв'язкам на координатній площині відповідають точки з координатами $(0; -1)$ і $(2; 2)$. Якщо на координатній площині зобразимо всі точки, координати яких є розв'язками рівняння $3x - 2y = 2$, то одержимо *графік* цього рівняння.

Графік рівняння із двома змінними утворюють усі точки координатної площини, координати яких є розв'язками даного рівняння.

Щоб з'ясувати, що є графіком рівняння $3x - 2y = 2$, виразимо з нього змінну y через змінну x :

$$-2y = -3x + 2; \quad y = 1,5x - 1.$$

Формулою $y = 1,5x - 1$ задається лінійна функція, графіком якої є пряма. Якщо $x = 0$, то $y = 1,5 \cdot 0 - 1 = -1$; якщо $x = 2$, то $y = 1,5 \cdot 2 - 1 = 2$. Провівши через точки $(0; -1)$ і $(2; 2)$ пряму (рис. 38), одержимо графік функції $y = 1,5x - 1$. Ця пряма є й графіком рівняння $3x - 2y = 2$.

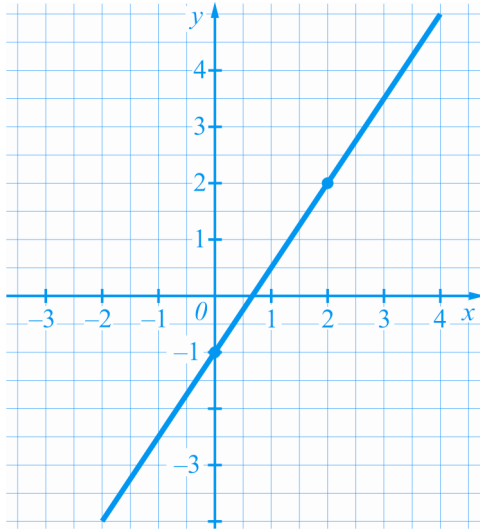


Рис. 38

Взагалі, графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.

Щоб побудувати графік такого рівняння, можна: 1) виразити змінну y через змінну x (якщо це можливо) і побудувати графік відповідної лінійної функції або 2) знайти два розв'язки рівняння, позначити на координатній площині точки, що відповідають цим розв'язкам, і провести через них пряму.

На рисунках 39 і 40 зображені графіки лінійних рівнянь, у яких один з коефіцієнтів біля змінних дорівнює 0:

$$0x + y = 2, \text{ або } y = 2;$$

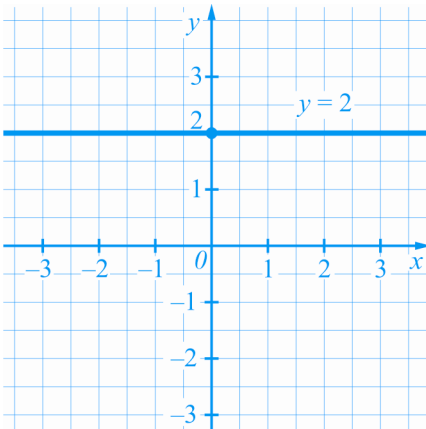


Рис. 39

$$2x + 0y = 6, \text{ або } x = 3.$$

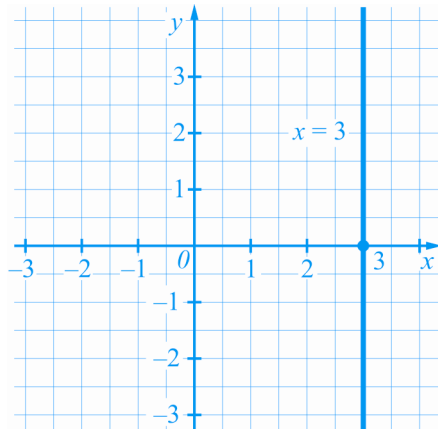


Рис. 40

Графіком рівняння $y = 2$ є графік функції $y = 2$, тобто пряма, паралельна осі x , що проходить через точку $(0; 2)$.

Розв'язками рівняння $2x + 0y = 6$ (або $x = 3$) є всі пари чисел $(x; y)$, у яких $x = 3$, а y — довільне число. Точки координатної площини, які відповідають таким розв'язкам, утворюють пряму, паралельну осі y , що проходить через точку $(3; 0)$.

Для тих, хто хоче знати більше



Рівняння $ax + by = c$, у якому $a = 0$ і $b = 0$, має вигляд $0x + 0y = c$. Якщо $c = 0$, то будь-яка пара чисел є розв'язком цього рівняння, а його графіком є вся координатна площина. Якщо $c \neq 0$, то рівняння не має розв'язків і його графік не містить жодної точки.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Побудувати графік рівняння $5x + 2y = 4$.

- Спочатку знайдемо два розв'язки рівняння.

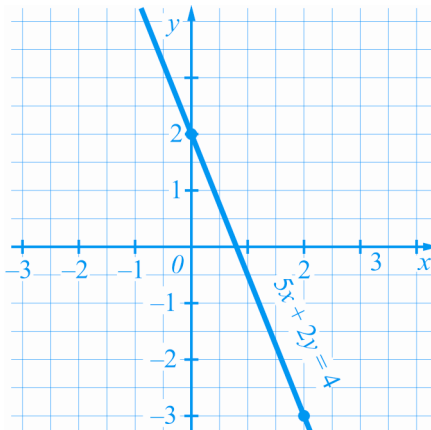
Нехай $x = 0$, тоді: $2y = 4$; $y = 2$. $(0; 2)$ — розв'язок.

Нехай $x = 2$, тоді: $10 + 2y = 4$; $2y = -6$; $y = -3$. $(2; -3)$ — розв'язок.

Розв'язки рівняння можна подавати у вигляді таблиці.

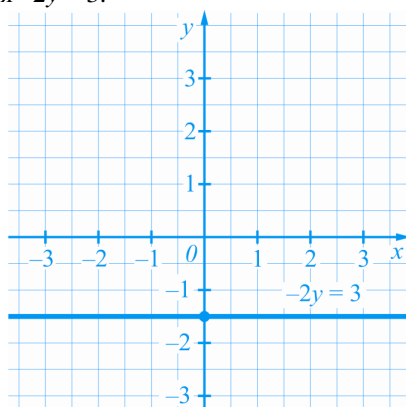
x	0	2
y	2	-3

На координатній площині позначаємо точки $(0; 2)$ та $(2; -3)$ і проводимо через них пряму. Ця пряма є шуканим графіком.



Приклад 2. Побудувати графік рівняння $-2y = 3$.

• У даному рівнянні маємо одну змінну y . Якщо потрібно побудувати графік такого рівняння, то вважають, що це є лінійне рівняння із двома змінними x та y , в якому коефіцієнт біля змінної x дорівнює 0, тобто $0x - 2y = 3$. Графіком рівняння є пряма $y = -1,5$, яка паралельна осі x і проходить, наприклад, через точку $(0; -1,5)$. •



Усно

- 914.** Назвіть координати кількох точок, що належать графіку рівняння $-x + y = 1$ (рис. 41).
- 915.** Які з даних точок належать графіку рівняння $2x - y = 1$:
а) $A(1; 1)$; **б)** $B(2; 1)$;
в) $C(0; 1)$; **г)** $D(0; -1)$?
- 916.** Вкажіть координати кількох точок, які належать графіку рівняння $x - 2y = 0$.
- 917.** Графік якого рівняння зображено на рисунку 42; рисунку 43?

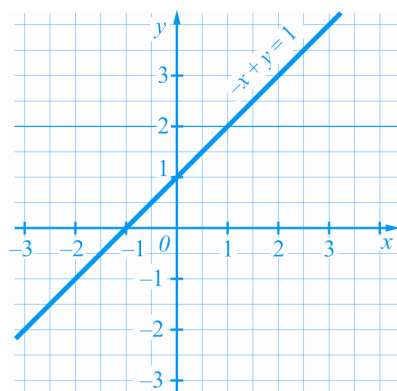


Рис. 41

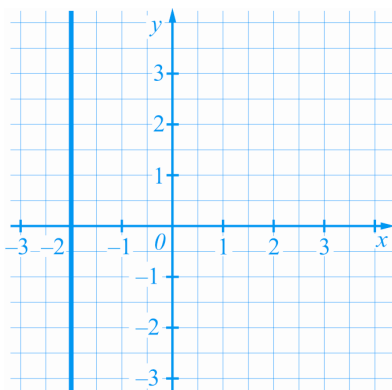


Рис. 42

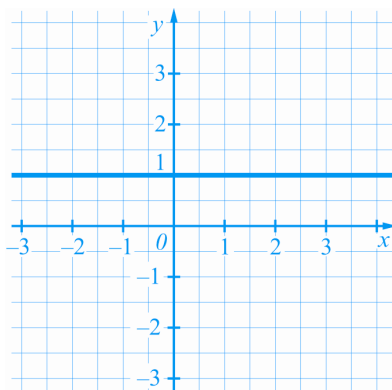



Рис. 43

Рівень А															
-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 918.** Які з точок $K(-2; 0,5)$, $L(0; 2)$, $M(2; 4)$, $N(3; 0,25)$ не належать графіку рівняння $-3x + 4y = 8$?
- 919.** Які з точок $A(2; 11)$, $B(3; 12)$, $C(0; 7)$, $D(-1; 5)$ належать графіку рівняння $-2x + y = 7$?

Побудуйте графік рівняння:

- 920.** а) $x - 3y = 6$; б) $3x + y = -1$; в) $x - 2y = 0$;
 г) $4x + y = 0$; д) $1,5x = 6$; е) $-0,3y = 0,6$.
- 921.** а) $x + 2y = 3$; б) $3x - y = 0$;
 в) $8x = 24$; г) $0,7y = -2,8$.


Рівень Б															
-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 922.** В одній системі координат побудуйте графіки рівнянь:
 а) $x + y = 2$; б) $-x - y = -2$; в) $2x + 2y = 4$.
 Що можна сказати про графіки цих рівнянь?
- 923.** В одній системі координат побудуйте графіки рівнянь:
 а) $x - y = -2$; б) $x - y = 0$; в) $x - y = 2$.

Що можна сказати про графіки цих рівнянь?

Побудуйте графік рівняння:

- 924.** а) $5x - 6y = 4$; б) $8x + 16y = 24$.
925. а) $4x + 7y = 3$; б) $12x - 4y = 8$.
- 926.** На прямій, яка є графіком рівняння $7x - 5y = 9$, узято точку, абсциса якої дорівнює 2. Знайдіть ординату цієї точки.
- 927.** На прямій, яка є графіком рівняння $4x + 9y = 1$, узято точку, ордината якої дорівнює 1. Знайдіть абсцису цієї точки.
- 928.** Знайдіть значення коефіцієнта a в рівнянні $ax + 3y = 4$, коли відомо, що графік рівняння проходить через точку $(1; 2)$. Побудуйте графік рівняння.
- 929.** Знайдіть значення коефіцієнта c в рівнянні $5x - 2y = c$, коли відомо, що графік рівняння проходить через точку $(2; 4)$. Побудуйте графік рівняння.

Рівень В															
-----------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 930.** Чи існує значення a , для якого графіки двох рівнянь $a^2x + 4y = 5$ і $(a + 1)x - y = 1$ проходили б через точку $(1; 1)$?

Побудуйте графік рівняння:

- 931.** а) $|x| - y = 0$; б) $|2x| + y = 0$;
 в) $2|x| - |y| = 0$; г) $|x + y| = 2$.
- 932.** а) $(y + 3x)(y - 2x) = 0$; б) $y^2 - 10x + 5xy - 2y = 0$;
 в) $(y + 2)^2 + (y + x)^2 = 0$.

Вправи для повторення

933. Розкладіть на множники:

а) $7x + ay + 7y + ax$;

б) $(x - 2)^2 - 1$;

в) $8x^3 + 125y^3$;

г) $(a + b + c)^2 - (a + b)^2$.

934. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 8x + 1$.

935. Одне число більше від іншого на 12, а їх сума дорівнює 44. Знайдіть ці числа.

936*. Розв'яжіть у цілих числах рівняння $3x + 5y = 7$.

28. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними

1. Системи лінійних рівнянь із двома змінними та їх розв'язки.

Розглянемо задачу.

У 7-А і 7-Б класах навчаються разом 56 учнів, до того ж, у 7-А класі на 4 учні більше, ніж у 7-Б. Скільки учнів у кожному класі?

Для розв'язання задачі позначимо кількість учнів 7-А класу через x , а кількість учнів 7-Б класу — через y . За умовою задачі, у 7-А і 7-Б класах разом навчаються 56 учнів, тобто $x + y = 56$. У 7-А класі на 4 учні більше, ніж у 7-Б, тому різниця $x - y$ дорівнює 4: $x - y = 4$.

Маємо два лінійні рівняння із двома змінними:

$$x + y = 56;$$

$$x - y = 4.$$

І в першому, і в другому рівняннях змінні позначають одні й ті ж величини — кількості учнів 7-А і 7-Б класів. Тому потрібно знайти такі значення змінних, які перетворюють у правильну числову рівність і перше, і друге рівняння, тобто потрібно знайти спільні розв'язки цих рівнянь.

Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють **систему рівнянь**.

Систему рівнянь записують за допомогою фігурної дужки. Систему лінійних рівнянь із двома змінними, складену за умовою нашої задачі, записують так:

$$\begin{cases} x + y = 56; \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Спільним розв'язком обох рівнянь цієї системи є пара значень змінних $x = 30$, $y = 26$, бо рівності $30 + 26 = 56$ і $30 - 26 = 4$ є правильними. Цю пару чисел називають **розв'язком** системи рівнянь.

Означення

Розв'язком системи двох рівнянь із двома змінними називають пару значень змінних, для яких кожне рівняння системи перетворюється у правильну числову рівність.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

2. Розв'язування систем лінійних рівнянь графічним способом.

Розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = -3; \\ -x + 3y = 5. \end{cases}$$

Побудуємо в одній системі координат графіки обох рівнянь системи. На рисунку 44 пряма AB — графік рівняння $2x + y = -3$, а пряма CD — графік рівняння $-x + 3y = 5$. Координати будь-якої точки прямої AB є розв'язком першого рівняння системи, а координати будь-якої точки прямої CD є розв'язком другого рівняння. Будь-яка спільна точка цих прямих має координати, які є розв'язком як першого, так і другого рівнянь, тобто є розв'язком системи. Оскільки прямі AB і CD перетинаються в єдиній точці $M(-2; 1)$, то система рівнянь має єдиний розв'язок $x = -2; y = 1$. Цей розв'язок можна записувати й у вигляді пари $(-2; 1)$.

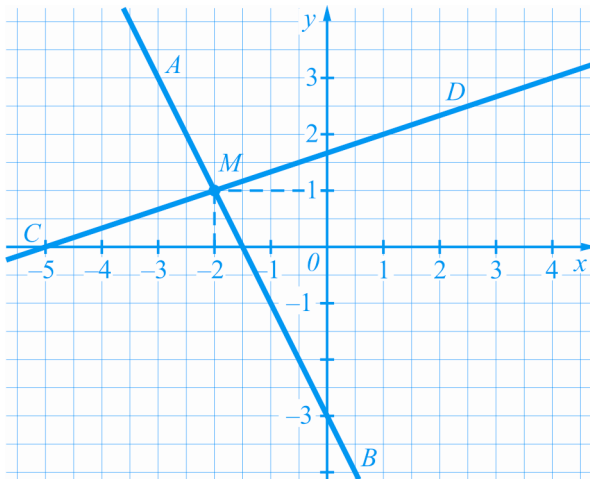


Рис. 44

Спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь, який ми щойно використали, називають *графічним*.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь графічним способом, потрібно побудувати графіки рівнянь системи в одній системі координат і знайти координати спільних точок цих графіків.

Якщо в кожному з рівнянь системи хоча б один з коефіцієнтів біля змінних відмінний від нуля, то графіками таких рівнянь є прямі. Оскільки прямі можуть перетинатися, співпадати або бути паралельними, то такі системи рівнянь можуть мати один розв'язок, безліч розв'язків або не мати розв'язків.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розв'язати графічно систему рівнянь
$$\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3. \end{cases}$$

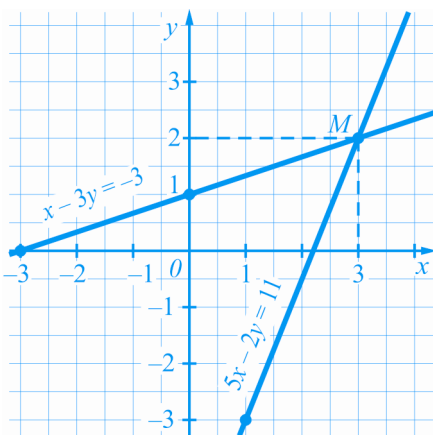
- Побудуємо графіки обох рівнянь системи.

$5x - 2y = 11$		
x	1	3
y	-3	2

$x - 3y = -3$		
x	0	-3
y	1	0

Графіки перетинаються в єдиній точці — точці $M(3; 2)$. Отже, система рівнянь має єдиний розв'язок $(3; 2)$. •

Примітка. Щоб не помилитися, визначаючи за графіками координати точки M , варто перевірити, чи справді знайдені координати є розв'язком системи. Перевіримо: якщо $x = 3$; $y = 2$, то $5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 11$ і $3 - 3 \cdot 2 = -3$ — правильні рівності. Пара $(3; 2)$ є розв'язком системи.

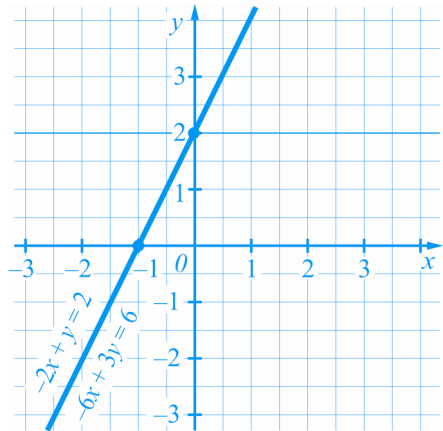


Приклад 2. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} -2x + y = 2; \\ -6x + 3y = 6? \end{cases}$$

• Побудуємо графіки рівнянь системи.

$-2x + y = 2$		
x	0	-1
y	2	0

$-6x + 3y = 6$		
x	0	-1
y	2	0



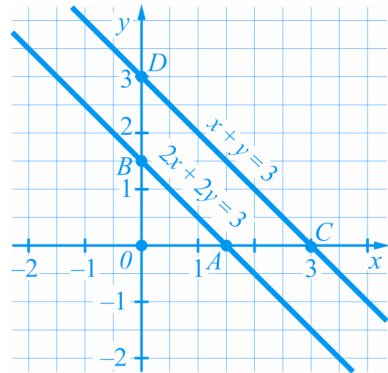
Графіки співпадають. Система рівнянь має безліч розв'язків. •

Приклад 3. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} x + y = 3; \\ 2x + 2y = 3? \end{cases}$$

• Побудуємо графіки рівнянь системи.

$x + y = 3$		
x	0	3
y	3	0

$2x + 2y = 3$		
x	0	1,5
y	1,5	0



Графіками рівнянь є паралельні прями (бо $\angle OAB = \angle OCD = 45^\circ$). Система рівнянь розв'язків не має. •

Усно

937. Чи є розв'язком системи рівнянь
$$\begin{cases} x - 2y = 0; \\ x + 3y = 5 \end{cases}$$
 пара чисел:

а) $x = 2; y = 1;$

б) $x = 0; y = 0?$

938. Скільки розв'язків має система, графіки рівнянь якої зображені на рисунку 45; рисунку 46 (на рисунку 46 прями паралельні)?

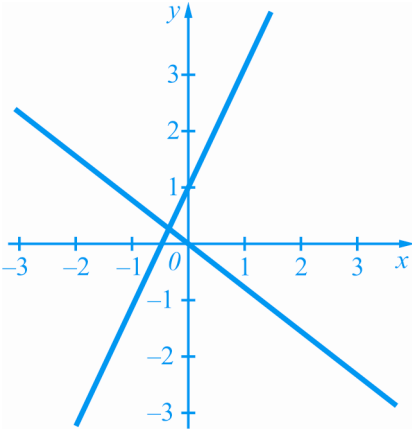


Рис. 45

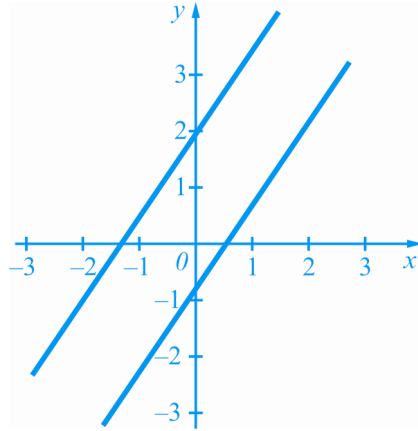


Рис. 46

Рівень А



Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

939. а) $\begin{cases} x - y = 2; \\ 2x - 3y = 2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - y = -4; \\ x + 2y = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 2y = 4; \\ 2x + 3y = 7; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 3x - 4y = -7; \\ 2x + 3y = 1. \end{cases}$

940. а) $\begin{cases} x - y = 0; \\ 2x + 5y = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y = 2; \\ x + 2y = -5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - y = 8; \\ 2x + y = 10. \end{cases}$

941. Чи є пара чисел $(-1; 3)$ розв'язком системи рівнянь:

а) $\begin{cases} 5x + 2y = 1; \\ -2x + y = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -3x - y = 0; \\ 4x + 2y = -2? \end{cases}$

Рівень Б



942. Складіть яку-небудь систему рівнянь, що має розв'язок $x = -2; y = 1$.

943. Складіть яку-небудь систему рівнянь, що має розв'язок $(3; -1)$.

Скільки розв'язків має система рівнянь:

944. а) $\begin{cases} x - 2y = -3; \\ 2x - 4y = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - y = 2; \\ 6x - 2y = -3; \end{cases}$

$$\text{в)} \begin{cases} x + 3y = 4; \\ 4x + y = -5; \end{cases} \quad \text{г)} \begin{cases} y = 2x - 4; \\ 4x - 2y = 8? \end{cases}$$

$$945. \text{ а)} \begin{cases} x + 3y = -2; \\ 2x + 6y = -4; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} 3x - 2y = 1; \\ 9x - 6y = -2; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} x - 2y = -2; \\ x + 4y = 0? \end{cases}$$

$$946. \text{ Знайдіть які-небудь два розв'язки системи рівнянь } \begin{cases} 2x - 3y = -2; \\ 6x - 9y = -6. \end{cases}$$

Рівень В



947. Для яких значень коефіцієнтів a та b пара чисел $(2; -1)$ є розв'язком системи рівнянь

$$\begin{cases} 5x - ay = 10; \\ bx + 2y = 4? \end{cases}$$

948. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\text{а)} \begin{cases} |x| - y = 0; \\ x - y = -2; \end{cases} \quad \text{б)} \begin{cases} |2x| - y = 0; \\ y = 3; \end{cases} \quad \text{в)} \begin{cases} |x| - y = 0; \\ x - 3y = -4. \end{cases}$$

Вправи для повторення

949. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а)} 2x - 6 = 2(1 - x); \quad \text{б)} 3(6y - 4) + 2y = 0;$$

$$\text{в)} \frac{5x - 1}{6} - 2x = \frac{x - 1}{4} - 7; \quad \text{г)} \frac{2y + 3}{3} - y = y - 3.$$

950. Доведіть, що значення виразу $(n + 2)^2 - (n - 2)^2$ ділиться на 8 для будь-якого цілого значення n .

951*. Кожен із 28 туристів розмовляє англійською або французькою мовами. Відомо, що англійською мовою розмовляють 20 туристів, а французькою — 15. Яка ймовірність того, що навмання вибраний турист розмовляє і англійською, і французькою мовами?

952. З рівняння $2x - 3y = -4$ виразіть:

$$\text{а)} \text{ змінну } x \text{ через змінну } y; \quad \text{б)} \text{ змінну } y \text{ через змінну } x.$$

29. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки

Розглянемо правильну рівність $7 + 2 = 9$. Якщо у цій рівності число 2 замінити числовим виразом $2(3 - 2)$, значення якого дорівнює 2, то одержимо правильну рівність $7 + 2(3 - 2) = 9$. Навпаки, якщо у правильній рівності $7 + 2(3 - 2) = 9$ вираз $2(3 - 2)$ замінити його значенням 2, то одержимо правильну рівність $7 + 2 = 9$.

На цих властивостях числових рівностей базується розв'язування систем лінійних рівнянь *способом підстановки*. Розглянемо приклад.

Нехай треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 3; \\ 3x - 2y = 8. \end{cases} \quad (1)$$

З першого рівняння системи виразимо змінну y через змінну x :

$$y = 3 - 2x.$$

Підставимо y друге рівняння системи замість y вираз $3 - 2x$. Одержимо систему

$$\begin{cases} y = 3 - 2x; \\ 3x - 2(3 - 2x) = 8. \end{cases} \quad (2)$$

Системи (1) і (2) мають одні й ті ж розв'язки (доведення у рубриці «Для тих, хто хоче знати більше»). Друге рівняння системи (2) має лише одну змінну x . Розв'яжемо його:

$$3x - 6 + 4x = 8; \quad 7x = 14; \quad x = 2.$$

У перше рівняння системи (2) підставимо замість x число 2 і знайдемо відповідне значення y :

$$y = 3 - 2 \cdot 2 = -1.$$

Пара чисел $(2; -1)$ — розв'язок системи (2), а також і системи (1).

Спосіб, використаний для розв'язання системи (1), називають *способом підстановки*.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь способом підстановки, потрібно:

- 1) виразити з якого-небудь рівняння системи одну змінну через іншу;
- 2) підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної одержаний вираз;
- 3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Для тих, хто хоче знати більше



Доведемо, що системи (1) і (2) мають одні й ті ж розв'язки.

Нехай пара чисел $(a; b)$ — довільний розв'язок системи (1). Тоді правильними є числові рівності $2a + b = 3$ і $3a - 2b = 8$, а отже, і рівність $b = 3 - 2a$. Замінімо в рівності $3a - 2b = 8$ число b виразом $3 - 2a$, одержимо правильну рівність $3a - 2(3 - 2a) = 8$. Оскільки рівності $b = 3 - 2a$ і $3a - 2(3 - 2a) = 8$ є правильними, то пара чисел $(a; b)$ є розв'язком системи (2). Ми показали, що довільний розв'язок системи (1) є розв'язком системи (2).

Навпаки, нехай пара чисел $(c; d)$ — довільний розв'язок системи (2). Тоді правильними є числові рівності $d = 3 - 2c$ і $3c - 2(3 - 2c) = 8$. Замінімо в рівності $3c - 2(3 - 2c) = 8$ вираз $3 - 2c$ числом d , одержимо правильну рівність $3c - 2d = 8$. З рівності $d = 3 - 2c$ випливає, що $2c + d = 3$. Оскільки рівності $2c + d = 3$ і $3c - 2d = 8$ є правильними, то пара чисел $(c; d)$ є розв'язком системи (1). Ми показали, що довільний розв'язок системи (2) є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають одні й ті ж розв'язки.

*Системи рівнянь із двома змінними, які мають одні й ті ж розв'язки, називають **рівносильними**.* Отже, розв'язуючи систему рівнянь (1), ми замінили її рівносильною системою (2).

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 4x - 5y = 7; \\ 3x + 4y = -18. \end{cases}$$

- Виразимо з першого рівняння змінну y через змінну x :

$$5y = 4x - 7; \quad y = \frac{4x - 7}{5}.$$

Підставимо у друге рівняння системи замість y вираз $\frac{4x - 7}{5}$ і розв'яжемо одержане рівняння:

$$3x + 4 \cdot \frac{4x - 7}{5} = -18;$$

$$15x + 4(4x - 7) = -90;$$

$$15x + 16x - 28 = -90;$$

$$31x = -62;$$

$$x = -2.$$

Знайдемо відповідне значення змінної y :

$$y = \frac{4 \cdot (-2) - 7}{5} = -3.$$

Відповідь. $(-2; -3)$. •

Приклад 2. Для яких значень коефіцієнта a система рівнянь $\begin{cases} 3x - ay = 2; \\ x - 2y = 3 \end{cases}$ не має розв'язку?

- Виразимо із другого рівняння змінну x через змінну y : $x = 2y + 3$.

Підставивши у перше рівняння системи замість x вираз $2y + 3$, одержимо рівняння:

$$3(2y + 3) - ay = 2.$$

Далі матимемо:

$$6y + 9 - ay = 2; \quad 6y - ay = 2 - 9; \quad (6 - a)y = -7.$$

Останнє рівняння не має коренів лише у випадку, коли коефіцієнт біля y дорівнює нулю: $6 - a = 0$; $a = 6$. Для цього значення a система рівнянь не має розв'язку.

Відповідь. $a = 6$. •

Приклад 3. Графіком функції є пряма, що проходить через точки $A(-1; 2)$ і $B(2; 5)$. Задати цю функцію формулою.

• Пряма є графіком лінійної функції. Нехай шукана лінійна функція задається формулою $y = kx + b$, де k і b — поки що невідомі числа. Оскільки графік функції проходить через точки $A(-1; 2)$ і $B(2; 5)$, то повинні виконуватися дві рівності

$$2 = k \cdot (-1) + b \quad \text{і} \quad 5 = k \cdot 2 + b.$$

Розв'язавши систему $\begin{cases} 2 = -k + b; \\ 5 = 2k + b, \end{cases}$ знайдемо: $k = 1$, $b = 3$. Отже, функція

задається формулою $y = x + 3$. •



Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

953. а) $\begin{cases} y = 2x + 1; \\ 3x + 2y = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x - 2y = 30; \\ x = 4y + 25. \end{cases}$

954. а) $\begin{cases} x + y = 4; \\ 4x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} u - 3v = 1; \\ 2u + v = 9; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x - 3y = 3; \\ x - y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 7s + 2t = 3; \\ 5s - t = 7; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x + 9y = 4; \\ x + 3y = 1; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3x = y + 7; \\ 4y = 3x - 1. \end{cases}$

955. а) $\begin{cases} x - 2y = 4; \\ 2x - 5y = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + y = 11; \\ 4x - y = 7; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x - 6y = 18; \\ 2x + y = 1; \end{cases}$

$$\text{г) } \begin{cases} 5u + 4v = 11; \\ u + 6v = -3; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 2a - 5b = 9; \\ a - 7b = 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0; \\ 3x - y = 4. \end{cases}$$

Рівень Б



Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$956. \text{ а) } \begin{cases} 5x - 6y = 1; \\ 3x + 4y = 12; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + 4y = -5; \\ 5x - 3y = 11; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 0,2x - 4y = 2; \\ 0,5x + 2y = 11; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 0,7x - 0,3y = 1,2; \\ -2x + 5y = 9. \end{cases}$$

$$957. \text{ а) } \begin{cases} 3x - 2y = 2; \\ 4x - 6y = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x + 4y = 1; \\ 4x - 3y = 7; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 4x - 0,5y = 3; \\ 7x + 0,2y = 16. \end{cases}$$

Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь, не виконуючи побудов:

$$958. \text{ а) } x - y = 4 \text{ і } x + 2y = -2;$$

$$\text{б) } 5x - 2y = 10 \text{ і } 3x - 4y = -8.$$

$$959. 7x + 4y = 9 \text{ і } 2x + 5y = -9.$$

Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

$$960. \text{ а) } \begin{cases} 5(x - 4) + 2x = x - 2; \\ 4(y + 3) - 5 = x - 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -2(6x + 3) + 1 = 2y - 3; \\ 11 - 4(x - 2) = y - 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 8(x + 3) - 17 = -5(y + 3); \\ 0,2(y - 5) + 1 = -0,9 - 0,3x; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} p + 5(q - p) = 3p - 2q + 6; \\ 2q - p = 3p - 2q - 20; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 1; \\ 4(x + y) + 5(x - y) = 3; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y - 2 = 0; \\ 4x - y = 56. \end{cases}$$

$$961. \text{ а) } \begin{cases} 7(x - 2) + 3x + 7 = 3y + 1; \\ 10 - 5x = 4(x - 3) + 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 8(x - 3y) + 25y = 5x - 7; \\ 0,3(x - 9y) = 0,2x - 2y + 0,5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3(x - 2y) + 2(x - y) = 2; \\ 5(x - 2y) + 3(x - y) = 4; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{1}{5}x - \frac{1}{9}y = \frac{2}{3}; \\ 2x - 3y = 1. \end{cases}$$

962. Доведіть, що графіками рівнянь $4x - 2y = 5$ і $6x - 3y = 6$ є паралельні прямі.

963. Графіком функції є пряма, що проходить через точки $A(-2; 6)$, $B(3; 1)$. Задайте цю функцію формулою.

964. Графіком функції є пряма, що проходить через точки $A(-3; 2)$, $B(3; -1)$.
Задайте цю функцію формулою.

Рівень В



965. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 3; \\ x^2 - y^2 = 15; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x + y = 7; \\ x^2 - y^2 = 7; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y+1}{3} = 0; \\ \frac{x-2}{6} = \frac{y}{4}; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{x-2y}{3} + 3 = \frac{3x-y}{5}; \\ \frac{2(3x-y)}{3} = \frac{x-2y}{2} + 10; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} 4(2x+3y+1) - (2x-3y-1) = 7; \\ 6(2x+3y+1) - 7(2x-3y-1) = 5. \end{cases}$$

966. Для яких значень коефіцієнта a система рівнянь $\begin{cases} 4x - y = 9; \\ 6x + ay = 4 \end{cases}$ не має розв'язку?

967. Для яких значень коефіцієнта b система рівнянь $\begin{cases} 5x + by = 8; \\ 10x + 3y = 16 \end{cases}$ має безліч розв'язків?

Вправи для повторення

968. Розкладіть на множники:

$$\text{а) } 2x - 6 - xy + 3y;$$

$$\text{б) } y^3 - 10y^2 + 25y;$$

$$\text{в) } (a-2b)^2 - 4a^2;$$

$$\text{г) } 27a^3 - b^3.$$

969. Доведіть, що значення виразу $4(a-2)^2 - (2a-3)^2 + 4a$ не залежать від значень a .

970. Відомо, що $a^2 + b^2 = 25$ і $ab = -12$. Знайдіть: $(a+b)^2$; $(a-b)^2$.

- 971*. Вираз $2a^2 - ab$ для $a = -2$ і деякого значення b набуває значення 4. Якого значення набуває для тих самих значень a і b вираз $a + 2(a + (2a - b))$?

- 972*. Чи можна розмістити 100 книжок на трьох полицях так, щоб на другій полиці було на 20 книжок більше, ніж на першій, і на 7 книжок менше, ніж на третій?

30. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання

Розглянемо дві правильні рівності:

$$7 + 5 = 12;$$

$$8 + 6 = 14.$$

Додамо почленно ці рівності: ліву частину до лівої й праву до правої:

$$(7 + 5) + (8 + 6) = 12 + 14.$$

Знову одержали правильну рівність. Ця властивість правильних числових рівностей лежить в основі способу розв'язування систем рівнянь, який називають *способом додавання*. Розглянемо приклад.

Нехай треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 2y = 21; \\ 5x - 2y = 19. \end{cases} \quad (1)$$

Додамо почленно ліві й праві частини рівнянь:

$$(3x + 2y) + (5x - 2y) = 21 + 19; \quad 8x = 40.$$

Замінімо одне з рівнянь системи (1), наприклад, перше, рівнянням $8x = 40$. Одержимо систему

$$\begin{cases} 8x = 40; \\ 5x - 2y = 19. \end{cases} \quad (2)$$

Системи (1) і (2) мають одні й ті ж розв'язки (доведення подане в рубриці «Для тих, хто хоче знати більше»). Розв'яжемо систему (2). З першого рівняння знаходимо: $x = 5$. Підставивши це значення у друге рівняння, матимемо:

$$5 \cdot 5 - 2y = 19; \quad 25 - 2y = 19; \quad -2y = -6; \quad y = 3.$$

Пара чисел (5; 3) — розв'язок системи (2), а також і системи (1).

Розв'язуючи систему (1), ми скористалися тим, що в рівняннях коефіцієнти біля змінної y є протилежними числами і після почленного додавання рівнянь одержали рівняння з однією змінною x .

Розв'яжемо ще одну систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12; \\ 2x - 3y = -26. \end{cases} \quad (3)$$

У цій системі рівнянь коефіцієнти біля змінної x і коефіцієнти біля змінної y не є протилежними числами. Однак, помноживши обидві частини першого рівняння на 2, а другого — на -3 , одержимо систему

$$\begin{cases} 6x + 8y = 24; \\ -6x + 9y = 78, \end{cases}$$

у якій коефіцієнти біля x — протилежні числа. Додавши почленно рівняння останньої системи, матимемо:

$$17y = 102; \quad y = 6.$$

Підставивши значення y в перше рівняння системи (3), знаходимо:

$$3x + 4 \cdot 6 = 12; \quad 3x = -12; \quad x = -4.$$

Отже, розв'язком системи (3) є пара чисел $(-4; 6)$.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь способом додавання, потрібно:

- 1) помножити обидві частини рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти біля однієї зі змінних в обох рівняннях системи стали протилежними числами;
- 2) додати почленно ліві й праві частини рівнянь;
- 3) розв'язати одержане рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Для тих, хто хоче знати більше



Доведемо, що системи (1) і (2) мають одні й ті ж розв'язки.

Нехай пара чисел $(a; b)$ — довільний розв'язок системи (1), тоді правильними є числові рівності $3a + 2b = 21$ і $5a - 2b = 19$. Додавши ці рівності, одержимо правильну рівність $8a = 40$. Оскільки рівності $8a = 40$ і $5a - 2b = 19$ правильні, то пара чисел $(a; b)$ є розв'язком системи (2). Ми показали, що довільний розв'язок системи (1) є розв'язком системи (2).

Навпаки, нехай пара чисел $(c; d)$ — довільний розв'язок системи (2), тоді правильними є числові рівності $8c = 40$ і $5c - 2d = 19$. Віднімемо від першої із цих рівностей другу. Одержимо правильну рівність $3c + 2d = 21$. Оскільки рівності $3c + 2d = 21$ і $5c - 2d = 19$ правильні, то пара чисел $(c; d)$ є розв'язком системи (1). Ми показали, що довільний розв'язок системи (2) є розв'язком системи (1).

Отже, системи (1) і (2) мають одні й ті ж розв'язки.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Розв'язати способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + 5y = 9; \\ 6x + 7y = 9. \end{cases}$$

• Помножимо обидві частини першого рівняння системи на -2 . Отримаємо систему

$$\begin{cases} -6x - 10y = -18; \\ 6x + 7y = 9. \end{cases}$$

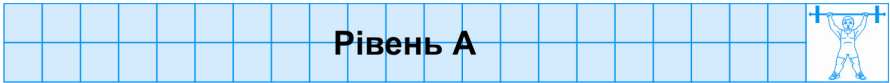
Почленно додавши рівняння останньої системи, матимемо:

$$-3y = -9; \quad y = 3.$$

Підставимо у перше рівняння системи замість y число 3 і розв'яжемо одержане рівняння:

$$3x + 15 = 9; \quad 3x = -6; \quad x = -2.$$

Відповідь. $(-2; 3)$. ●



Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

973. а) $\begin{cases} x - y = 1; \\ x + y = 7; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - 8y = 18; \\ -3x + 4y = -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 5y = 6; \\ 8x - 5y = -1. \end{cases}$

974. а) $\begin{cases} 4x + 5y = 6; \\ 4x + 3y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5m + 2n = -2; \\ 3m + 2n = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x - 3y = 12; \\ 3x + 2y = 17. \end{cases}$

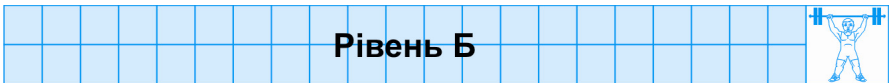
975. а) $\begin{cases} x - y = 4; \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + y = -2; \\ -5x + 3y = -6; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 2x + 3y = 7; \\ 2x + y = 1. \end{cases}$

976. а) $\begin{cases} 3x - 5y = 2; \\ 2x + 3y = -5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 2y = 6; \\ 3x + 7y = -8; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 8x - 3y = 41; \\ 7x + 5y = 13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2x + 4y = -1; \\ 9x + 7y = 1; \end{cases}$ д) $\begin{cases} 5x + 3y = 2; \\ 3x + 5y = -2; \end{cases}$ е) $\begin{cases} -9x + 8y = -25; \\ 5x + 3y = -1. \end{cases}$

977. а) $\begin{cases} 2x - 3y = 8; \\ 5x + 2y = 1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x - 4y = 1; \\ -2x + 5y = 20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - 8y = 11; \\ 4x - 6y = 17; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 3x - 5y = -2; \\ 7x - 8y = 10. \end{cases}$



Знайдіть розв'язки системи рівнянь:

978. а) $\begin{cases} 0,1x + 3y = 5; \\ 0,3x - 7y = -1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1,2x + 0,7y = 28; \\ -0,6x + 0,5y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 1; \\ 6x - 5y = 13; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 1; \\ \frac{1}{3}x - \frac{2}{5}y = 0. \end{cases}$

$$979. \text{ а) } \begin{cases} 0,8x + 0,3y = 5; \\ 2x - 0,6y = -1; \end{cases}$$

$$\text{ б) } \begin{cases} \frac{5}{6}x + \frac{1}{3}y = -\frac{1}{3}; \\ x + \frac{2}{3}y = \frac{2}{3}. \end{cases}$$

$$980. \text{ а) } \begin{cases} 19(x-3) = 5(y-2) - 3; \\ 3(y+1) = 7 + 19(x-3); \end{cases}$$

$$\text{ б) } \begin{cases} 5(x+2y) - 1 = 6y + 2; \\ 2(x+6y) - 1 = 7y; \end{cases}$$

$$\text{ в) } \begin{cases} \frac{1}{2}(x+7) - 6 = 5y; \\ \frac{2}{3}x - 5y = 3; \end{cases}$$

$$\text{ г) } \begin{cases} \frac{p-q}{3} = \frac{p+q}{5}; \\ 7(p-q) = 5(p+q) + 1. \end{cases}$$

$$981. \text{ а) } \begin{cases} 5(2x-3y) = 4x; \\ 6x-4y = 4(2x-1) - 5; \end{cases}$$

$$\text{ б) } \begin{cases} \frac{3}{7}(x-2) + \frac{2}{7}(x+y) = 4; \\ 3(x-2) + 5(x+y) = 7. \end{cases}$$

982. Чи має розв'язок система рівнянь:

$$\text{ а) } \begin{cases} 11x + 17y = 25; \\ 11x + 17y = 27; \end{cases}$$

$$\text{ б) } \begin{cases} 2x - 7y = 6; \\ -4x + 14y = -12? \end{cases}$$

Рівень В



983. Чи має розв'язок система рівнянь:

$$\text{ а) } \begin{cases} 2x + 5y = 13; \\ 4x - 2y = -10; \\ 3x + 2y = 3; \end{cases}$$

$$\text{ б) } \begin{cases} 8x + 3y = 2; \\ 6x + 2y = 1; \\ 4x + 4y = 1? \end{cases}$$

984. Доведіть, що графіки рівнянь $6x + 5y = -7$, $2x - 3y = 7$ і $4x + y = 0$ проходять через одну й ту ж точку.

985. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{ а) } \begin{cases} 4x + y^2 = -8; \\ x^2 - y^2 = 4; \end{cases}$$

$$\text{ б) } \begin{cases} 2x + |y| = 7; \\ x - |y| = 2; \end{cases}$$

$$\text{ в) } \begin{cases} (x-4)^2 - (x+4)^2 = 4y; \\ (y+2)^2 - (y+1)^2 = 2x; \end{cases}$$

$$\text{ г) } \begin{cases} 4(x+3) - 5(x^2 - y - 3) = 9; \\ 6(x+3) + 5(x^2 - y - 3) = 1. \end{cases}$$

986. Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} ax - 3y = 5; \\ 4x - 6y = 10 \end{cases}$ залежно від значень коефіцієнта a ?

987. Знайдіть такі числа a, b, c і d , для яких є правильною кожна з рівностей:

$$a = bcd; \quad a + b = cd; \quad a + b + c = d; \quad a + b + c + d = 1.$$

Вправи для повторення

988. Запишіть відповідні рівності:
- а) сума чисел x та y у 5 разів більша від їх різниці;
 - б) добуток чисел a і b на 12 більший від їх частки;
 - в) сума чисел x та y становить третину їх добутку.
989. Одне число більше від іншого втричі, а їх сума дорівнює 36. Знайдіть ці числа.
990. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 49, а різниця — 17.
991. Брат старший від сестри удвічі. А 5 років тому він був старший від сестри на 7 років. Скільки років кожному?
992. Вкладник зняв з рахунку в банку 20% усіх грошей, а через годину — 30% залишку. Після цього на його рахунку залишилося 280 грн. Який був початковий вклад?

31. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь

Ви вже розв'язували задачі за допомогою рівнянь з однією змінною. Розв'яжемо задачу, склавши систему рівнянь.

Задача. Швидкість моторного човна за течією річки дорівнює 24 км/год, а проти течії — 19 км/год. Яка швидкість човна у стоячій воді та яка швидкість течії річки?

• Нехай швидкість човна у стоячій воді дорівнює x км/год, а швидкість течії річки — y км/год. Швидкість човна за течією річки (24 км/год) дорівнює сумі його швидкості у стоячій воді та швидкості течії річки, тому маємо рівняння

$$x + y = 24.$$

Швидкість човна проти течії річки (19 км/год) дорівнює різниці швидкості човна у стоячій воді та швидкості течії річки, тому

$$x - y = 19.$$

Щоб відповісти на запитання задачі, потрібно знайти такі значення x та y , які задовольняли б і перше, і друге рівняння, тобто які задовольняли б систему цих рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 24; \\ x - y = 19. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо: $x = 21,5$; $y = 2,5$.

Відповідь. Швидкість човна у стоячій воді дорівнює 21,5 км/год; швидкість течії річки — 2,5 км/год. •

Цю задачу можна було б розв'язати, склавши рівняння з однією змінною. Однак для складання такого рівняння довелося б провести складніші міркування.

Щоб розв'язати задачу за допомогою систем рівнянь, поступають так:

- 1) позначають деякі дві невідомі величини буквами;
- 2) використовуючи умову задачі, складають два рівняння з вибраними невідомими;
- 3) записують систему цих рівнянь і розв'язують її;
- 4) відповідають на поставлені в задачі запитання.

Приклади розв'язання вправ



Приклад 1. Якщо відкрити кран теплої води на 7 хв, а потім кран холодної — на 3 хв, то у ванну наллється 54 л води. Якщо ж відкрити кран теплої води на 8 хв, а потім кран холодної — на 6 хв, то у ванну наллється 72 л води. Скільки літрів води наливається у ванну через кожний кран за хвилину?

• Нехай за 1 хв через перший кран (теплої води) наливається x л води, а через другий кран (холодної води) — y л. Тоді за 7 хв через перший кран наллється $7x$ л води, а через другий кран за 3 хв — $3y$ л. У результаті, за умовою задачі, у ванні буде 54 л води. Маємо рівняння:

$$7x + 3y = 54.$$

У другому випадку за 8 хв через перший кран наллється $8x$ л води, а через другий кран за 6 хв — $6y$ л, що, за умовою задачі, дорівнює 72 л води. Маємо друге рівняння:

$$8x + 6y = 72.$$

$$\text{Одержали систему рівнянь } \begin{cases} 7x + 3y = 54; \\ 8x + 6y = 72. \end{cases}$$

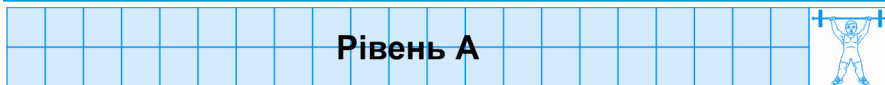
Розв'яжемо цю систему способом додавання:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 54; \\ -4x - 3y = -36; \end{cases} \quad 3x = 18; \quad x = 6.$$

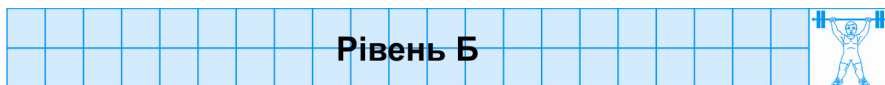
З першого рівняння системи знаходимо y :

$$7 \cdot 6 + 3y = 54; \quad 3y = 12; \quad y = 4.$$

Відповідь. 6 л; 4 л. •



993. Мама за 2 кг помідорів і 1 кг огірків заплатила 8 грн. Якби вона купувала 1 кг помідорів і 2 кг огірків, то їй потрібно було б заплатити 7 грн. Скільки коштує 1 кг помідорів і скільки 1 кг огірків?
994. За 2 альбоми і 5 зошитів Марійка заплатила 9 грн. Скільки коштує 1 альбом і скільки 1 зошит, якщо 3 зошити дорожчі від 1 альбому на 1 грн.?
995. До магазину завезли 5 ящиків слив і 7 ящиків винограду, загальна маса яких дорівнює 89 кг. Знайдіть масу одного ящика слив і масу одного ящика винограду, якщо 1 ящик слив легший від 2 ящиків винограду на 6 кг.
996. Два автомобілі різної вантажності вивезли за перший день 50 т зерна, до того ж, перший автомобіль зробив 5 рейсів, а другий — 6. За другий день автомобілі вивезли 75 т зерна, до того ж, перший зробив 10 рейсів, а другий — 7. Яка вантажність кожного автомобіля?
997. Сума двох чисел дорівнює 104. Одне з них на 11 більше від іншого. Знайдіть ці числа.
998. Різниця двох чисел дорівнює 48, до того ж, одне з них у 5 разів більше від іншого. Знайдіть ці числа.
999. Група туристів здійснила похід на 14 човнах. Частина човнів були двомісними, а частина — тримісними. Скільки було двомісних і скільки тримісних човнів, якщо група складалася із 37 туристів, й усі місця були зайняті?
1000. На теплоході є двомісні та чотиримісні каюти, в яких можна перевезти 78 пасажирів. Скільки тих та інших кают на теплоході, якщо усього їх є 25?
1001. Із двох міст, відстань між якими дорівнює 280 км, одночасно назустріч один одному виїхали два автомобілі і зустрілися через 2 год. Відомо, що до моменту зустрічі один з автомобілів проїхав на 40 км більше, ніж інший. Знайдіть швидкості автомобілів.
1002. Два робітники за 4 год виготовили 80 деталей, до того ж, другий робітник виготовив на 16 деталей більше, ніж перший. Скільки деталей виготовляв за годину кожен робітник?



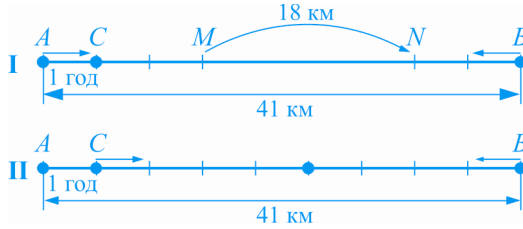
1003. На двох полицях стоїть 60 книжок. Коли четверту частину книжок першої полиці переставили на другу, то на другій полиці книжок стало утричі більше, ніж на першій. Скільки книжок стояло на кожній полиці спочатку?

Вказівка. Розв'язуючи задачу, використайте таблицю:

	I полиця	II полиця	
Було книжок	x	y	Разом 60
Стало книжок	$x - \frac{1}{4}x = \frac{3}{4}x$	$y + \frac{1}{4}x$	На другій утрічі більше, ніж на першій

- 1004.** На двох гілках сиділо 25 горобців. Коли з першої гілки на другу перелетіло 5 горобців, а з другої полетіло 7 горобців, то на першій гілці їх стало удвічі більше, ніж на другій. Скільки горобців було на кожній гілці спочатку?
- 1005.** За 3 год за течією річки і 5 год проти течії теплохід проходить 338 км, а за 1 год проти течії і 30 хв за течією — 63 км. Знайдіть швидкість теплохода у стоячій воді і швидкість течії річки.
- 1006.** Теплохід проходить за 2 год за течією річки і 3 год проти течії 222 км. Він же за 3 год за течією річки проходить на 60 км більше, ніж за 2 год проти течії. Знайдіть швидкість теплохода у стоячій воді і швидкість течії річки.
- 1007.** Летіли галки і побачили палки. Якщо на кожную палку сяде по дві галки, то одна палка залишиться без галок. Якщо на кожную палку сяде одна галка, то одна галка залишиться без палки. Скільки було палок і скільки летіло галок?
- 1008.** Кінь і мул йшли поруч з важкими ношами на спинах. Кінь скаржився, що його ноша дуже важка. «Чого ти скаржишся?», — відповів йому мул. — «Адже якщо я візьму у тебе один мішок, то моя ноша стане вдвічі важчою від твоєї. А ось якби ти забрав з моєї спини один мішок, то твоя ноша стала б однаковою з моєю». Скільки мішків ніс кінь і скільки мул?
- 1009.** Мале підприємство має на двох рахунках у банку 24 тис. грн. Скільки грошей є на кожному рахунку, якщо 35% грошей на одному з них дорівнює 85% на іншому?
- 1010.** На двох складах було 102 т цукру. Коли з першого складу забрали 15% цукру, то на ньому все ж залишилося на 9 т цукру більше, ніж на другому. Скільки цукру було на кожному складі спочатку?
- 1011.** Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо цифри числа переставити місцями, то одержимо число, яке менше від даного на 18. Знайдіть це число.
- 1012.** З пункту A в пункт B , відстань між якими дорівнює 41 км, вийшов турист. Через 1 год назустріч йому з пункту B вийшов інший турист. Через 2 год після виходу другого туриста відстань між ними була 18 км, а ще через 2 год вони зустрілися. Знайдіть швидкості туристів.

Вказівка. Розв'язуючи задачу, використайте схеми:



- 1013.** З пунктів A і B , відстань між якими дорівнює 240 км, вирушають одночасно два автомобілі. Якщо автомобілі рухатимуться назустріч один одному, то зустрінуться через 2 год. Якщо ж вони їхатимуть в одному напрямку, то автомобіль, що виїхав з пункту B , наздожене автомобіль, який виїхав з пункту A , через 12 год. Знайдіть швидкість кожного автомобіля.

Рівень В



- 1014.** Різниця $\frac{1}{5}$ першого числа і $\frac{1}{3}$ другого дорівнює 4. Перше число, зменшене на $\frac{1}{4}$ його частину, у сумі з другим числом, збільшеним на $\frac{1}{6}$ його частину, дає 102. Знайдіть ці числа.
- 1015.** У першій посудині є 25 л води, а в другій — 45 л. Якщо першу посудину долити доверху водою із другої посудини, то друга посудина буде наповнена лише на третину. Якщо ж другу посудину долити доверху водою з першої, то перша посудина буде наповнена водою лише на одну п'яту. Знайдіть місткість кожної посудини.
- 1016.** Банк купив 10000 акцій підприємства A і 20000 акцій підприємства B на загальну суму 50 000 грн. Коли ціна акцій підприємства A зросла на 25%, а ціна акцій підприємства B упала на 10%, то банк продав усі акції за 52 000 грн. Яка початкова ціна акції кожного підприємства?
- 1017.** Антикварний магазин купив два предмети на загальну суму 360 грн. Продавши їх, магазин одержав 25% прибутку. За скільки був проданий кожний предмет, якщо на перший була націнка 50%, а на другий — 12,5%?
- 1018.** Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 12. Якщо до цього числа додати 36, то отримаємо число, записане тими самими цифрами, але у зворотному порядку. Знайдіть це число.

- 1019.** З пункту A в пункт B одночасно виїхали два мотоциклісти. Коли через 1,5 год перший мотоцикліст прибув у пункт B , другому до пункту B залишалось проїхати ще 9 км. Не затримуючись у пункті B , перший мотоцикліст вирушив у зворотний шлях і через 5 хв зустрів другого мотоцикліста. Знайдіть швидкості мотоциклістів і відстань між пунктами.
- 1020.** Шлях між пунктами A і B пролягає спочатку по шосе, а потім — ґрунтовою дорогою. Рухаючись по шосе зі швидкістю 60 км/год, а ґрунтовою дорогою — зі швидкістю 45 км/год, автомобіль проїхав шлях від A до B за 1,5 год. На зворотному шляху автомобіль підвищив швидкість на ґрунтовій дорозі на 3 км/год, а на шосе знизив швидкість на 4 км/год і проїхав шлях від B до A знову ж таки за 1,5 год. Знайдіть довжину шосе і довжину ґрунтової дороги.
- 1021.** Моторний човен пройшов за течією річки від пристані A до пристані B , а потім проти течії від B повз A до пристані C і затратив на весь цей шлях 9 год 20 хв. Після цього човен за 9 год пройшов шлях від C до B і від B до A . Знайдіть відстань між пристанями A і C , якщо швидкість човна у стоячій воді дорівнює 10 км/год, а швидкість течії річки — 2 км/год.

Вправи для повторення															
-----------------------	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

- 1022.** Спростіть вираз:
а) $(m + 2n)(2m - n) + 2n^2$; б) $a^2(b + 5a) + (a - 2b)(2b - 5a^2)$.
- 1023.** Розкладіть на множники:
а) $a + 3ab - c - 3bc$; б) $x^2 - y^2 + 2(x + y)$;
в) $a^2 - 4b^2 + a - 2b$; г) $c^2 - 3ac + 2a^2$.
- 1024.** Доведіть, що значення виразу ділиться на дане число:
а) $725^3 - 375^3$ на 350; б) $72^3 + 88^3$ на 80.
- 1025.** Доведіть, що сума квадратів трьох послідовних цілих чисел при діленні на 3 дає в остачі 2.
- 1026*.** Доведіть, що не існує чисел x та y , для яких виконувалася б рівність:
 $x^2 - 4x + y^2 - 4y + 9 = 0$.
- 1027.** Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{2}x + 2$ та знайдіть координати точок його перетину з осями координат.

Цікаво знати



У книзі «Геометрія», виданій 1637 року, відомий французький математик **Рене Декарт** (1596–1650) запропонував новий метод математичних досліджень — метод координат. Суть цього методу полягає в тому, що кожній геометричній фігурі на координатній площині ставиться у відповідність рівняння чи нерівність, яким задовольняють координати кожної точки фігури і тільки вони. Так, кожній прямій ставиться у відповідність рівняння цієї прямої виду $ax + by = c$. Якщо, наприклад, потрібно довести, що деякі дві прямі є паралельними, то досить записати рівняння обох прямих і довести, що система цих рівнянь не має розв'язку. Як бачимо, геометрична задача завдяки методу координат зводиться до алгебраїчної задачі. Таке нововведення Декарта дало початок новій геометрії, яку зараз називають аналітичною геометрією.

Рене Декарт народився в департаменті Турень (Франція) в сім'ї дворян. Після здобуття освіти служив офіцером в армії Моріса Оранського, брав участь у Тридцятирічній війні. Завершивши військову службу, Декарт поїхав у Голландію, де написав більшу частину своїх наукових робіт і завоював славу великого вченого.

Декарт зробив ряд відкриттів, які стали поворотними пунктами в усій математиці. Він увів поняття змінної величини і функції, прямокутної системи координат, яку ми на його честь називаємо ще прямокутною декартовою системою координат.

З рівняннями з кількома змінними пов'язана одна з найвідоміших математичних теорем, про яку тривалий час точаться розмови й у середовищі, далекому від математики. Йдеться про **Велику теорему Ферма**. Ця теорема стверджує, що *рівняння із трьома змінними виду $x^n + y^n = z^n$ не має розв'язків у цілих числах, якщо показник степеня $n > 2$.*

Як виявилось, у цьому простому, на перший погляд, математичному твердженні криється надзвичайна складність. Причина ж величезного ажіотажу, що розгорівся довкола теореми П'єра Ферма, така.



Рене Декарт
(1596–1650),

французький філософ і математик. Розробив метод координат, створив основи аналітичної геометрії

1636 року в книзі Діофанта Олександрійського (III ст.) «Арифметика», яку Ферма частенько студіював, роблячи помітки на її широких полях, і яку зберіг для потомків його син, був зроблений запис, що він, Ферма, має доведення теореми, але воно доволі велике, щоб його можна було розмістити на полях.

Відтоді розпочався пошук доведення, адже в інших матеріалах Ферма його так і не виявили.

Хто тільки не намагався довести теорему. Чи не кожен математик вважав за свій обов'язок докластися до Великої теореми, але зусилля виявлялися марними. За доведення бралися й найвідоміші математики XVII–XX століть. Ейлер довів теорему для степенів $n = 3$ і $n = 4$, Лежандр — для $n = 5$, Діріхле — для $n = 7$. У загальному ж вигляді теорема залишалась недоведеною.

На початку XX ст. (1907) заможний німецький любитель математики Вольфскель заповідав сто тисяч марок тому, хто запропонує повне доведення теореми Ферма. Через деякий час з'явилися доведення для показника степеня $n < 100$, потім для $n < 619$. Багатьом математикам здавалося, що вони знайшли доведення, але згодом в цих «доведеннях» знаходили помилки.

Були й спроби заперечити Велику теорему шляхом пошуку хоча б одного розв'язку рівняння $x^n + y^n = z^n$ для $n > 2$. Проте навіть перебір цілих чисел з використанням комп'ютерів не давав результату — для яких би значень n теорему не перевіряли, вона завжди виявлялась правильною.

Лише у 1995 році англійському професорові математики з Принстонського університету (США) **Ендрю Вайлзу** вдалося довести Велику теорему. Доведення було надруковане в одному з провідних математичних журналів і зайняло увесь номер — понад сто аркушів.

Таким чином, лише у кінці XX ст. увесь світ визнав, що на 360 році свого життя Велика теорема Ферма, яка насправді весь цей час була гіпотезою, стала-таки доведеною теоремою.



П'єр Ферма
(1601–1665),

французький математик, зробив значний внесок у розвиток теорії чисел. Разом з Рене Декартом є основоположником аналітичної геометрії

1034. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 3; \\ x - 3y = -1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x - 2y = -1; \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

1035. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

$$\text{а) } \begin{cases} x + 3y = 1; \\ 2x - y = 9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2m - n = 6; \\ 3m + 2n = 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x - 4y = 5; \\ 4x - 3y = 5. \end{cases}$$

1036. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

$$\text{а) } \begin{cases} 6x + y = 1; \\ 3x - y = 8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x - 4y = 9; \\ 3x + 2y = -9; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 5x - 7y = 1; \\ 6x - 5y = 8. \end{cases}$$

1037. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $2x - 3y = 1$ і $x + 3y = 5$.

1038. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 2,8x - 1,5y = -1; \\ 21x + 25y = 355; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 99x - 114y = 282; \\ 11x - 14y = 30; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2(x-1) + y = x-4; \\ 4(x+1) - 5 = -y; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2(2x+1) - (2y-3) = 3; \\ -4(2x-1) + 3(y-2) = 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } \begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{15} = 1; \\ 5x - 3y = -15; \end{cases}$$

$$\text{е) } \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y+1}{3}; \\ \frac{y}{7} = \frac{x+2}{6}. \end{cases}$$

1039*. Розв'яжіть систему рівнянь:
$$\begin{cases} (x+3)^2 - (x+2)^2 = -2y+5; \\ (y-5)^2 - (y+3)^2 = 4+4x. \end{cases}$$

1040. Відомо, що 5 тонких і 3 товстих зошити коштують 5 грн. 60 к., а 4 тонких і 2 товстих зошити — 4 грн. Скільки коштує один тонкий зошит і скільки — товстий?

1041. В Андрія є 20 монет по 10 к. і 25 к., усього на суму 3 грн. 80 к. Скільки монет по 10 к. і скільки по 25 к. має Андрій?

1042. У пекарні було 18 мішків борошна першого гатунку і 12 мішків борошна другого гатунку, загальна маса яких дорівнює 1248 кг. Коли використали 4 мішки борошна першого гатунку і 6 мішків борошна другого гатунку, то залишилося 824 кг борошна. Яка маса мішка борошна кожного гатунку?

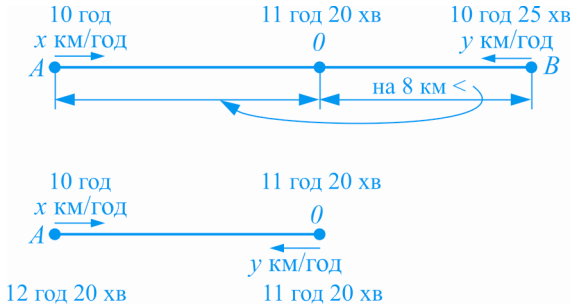
1043. Сума двох чисел дорівнює 4,5. Знайдіть ці числа, якщо половина одного з них дорівнює 75% іншого.

1044. З міст A і B , відстань між якими дорівнює 110 км, о 9 год 15 хв виїхали назустріч один одному два автобуси й рухалися з однаковою швидкістю. О 9 год 30 хв з міста A до міста B виїхав легковий автомобіль, який

о 10 год зустрів автобус, що їхав до міста A , а о 10 год 30 хв наздогнав автобус, що їхав до міста B . Знайдіть швидкості автобусів і автомобіля.

- 1045***. З міста A до міста B о 10 год виїхав автобус, а з міста B до міста A о 10 год 25 хв — автомобіль. До моменту зустрічі об 11 год 20 хв автомобіль проїхав на 8 км менше, ніж автобус. Знайдіть швидкості автобуса й автомобіля, якщо до міста A автомобіль приїхав о 12 год 20 хв.

Вказівка. Розв'язуючи задачу, використайте схему:



- 1046***. Володя за 3 товстих і 5 тонких зошитів заплатив 5 грн. 60 к., а Сергій за 2 товстих і 4 тонких зошити — 4 грн. Олег купив тільки товсті зошити. Для розрахунку 5 грн. було замало, і він дав продавцеві 7 грн. Скільки грошей одержав Олег на здачу?

Вказівка. Встановіть, що ціна товстого зошита дорівнює 1 грн. 20 к. Олег купив більше, ніж чотири таких зошити, бо заплатив більше, ніж 5 грн., однак менше, ніж шість зошитів, бо для розрахунку вистачило 7 грн. Отже, він купив 5 товстих зошитів.

Завдання для самоперевірки № 7

Рівень 1

- Вкажіть розв'язки рівняння $x - y = 2$:

а) (3; 2); б) (3; 1); в) (5; 2); г) (-3; -2).
- Яка з пар чисел є розв'язком системи рівнянь $\begin{cases} 2x - y = 3; \\ 3x + y = 7? \end{cases}$

а) (3; 3); б) (2; 2); в) (2; 1); г) (-1; 5).
- Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} y = 2 - x; \\ 3x + y = 6 \end{cases}$ способом підстановки та вкажіть правильну відповідь:

а) (1; 1); б) (0; 2); в) (2; 0); г) (4; -2).

4. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + y = 6; \\ 3x - y = 2 \end{cases}$ способом додавання та вкажіть правильну відповідь:

а) $(-2; 8)$; б) $(-4; 10)$; в) $(4; 2)$; г) $(2; 4)$.

5. Сума двох чисел дорівнює 21, до того ж, одне з них на 5 більше від іншого. Знайдіть ці числа.

Нехай більше число дорівнює x , а менше — y . Яка система рівнянь відповідає умові задачі?

а) $\begin{cases} x + y = 21; \\ y - x = 5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y = 5; \\ y - x = 21; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x + y = 5; \\ x - y = 21; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x + y = 21; \\ x - y = 5. \end{cases}$

Рівень 2

6. Доберіть замість зірочок такі числа, щоб пари $(3; *)$ і $(*; 2)$ були розв'язками рівняння $5x - 2y = 9$.

7. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} x - y = 2; \\ x + 3y = 6. \end{cases}$

8. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} x + 2y = 11; \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$ способом підстановки.

9. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3x + 2y = 6; \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ способом додавання.

10. У магазині борошно продають у малій та великій упаковках. Загальна маса малої та великої упаковок борошна дорівнює 7 кг, а 2 малі й 3 великі упаковки мають загальну масу 19 кг. Яка маса малої упаковки борошна і яка великої?

Рівень 3

11. Знайдіть таке число a , щоб графік рівняння $2x - ay = 2$ проходив через точку $(-1; 2)$.

12. Розв'яжіть графічно систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 5y = -1; \\ 3x + 2y = 8. \end{cases}$

13. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 2x - 0,3y = 2; \\ 5x + 0,2y = 24 \end{cases}$ способом додавання.

14. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases} 3(2x - y) - 2(x - y) = 1; \\ 4x - 5(x + 2y) = 51. \end{cases}$

15. За цукерки і печиво мама заплатила 15 грн. Відомо, що 25% вартості цукерок менші, ніж третина вартості печива, на 1 грн. 50 к. Скільки гривень мама заплатила за цукерки і скільки за печиво?

Рівень 4

16. Знайдіть такі числа a і b , щоб графік рівняння $2ax - (b + 2)y = 2$ проходив через точки $(-1; 4)$ і $(2; 2)$.
17. Розв'яжіть графічно систему рівнянь
$$\begin{cases} |2x| - y = 0; \\ x + y = 3. \end{cases}$$
18. Розв'яжіть систему рівнянь
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y = (x+2)^2; \\ (y+1)^2 - x = (y-2)^2. \end{cases}$$
19. Для якого значення коефіцієнта a система рівнянь
$$\begin{cases} x + 3y = 4; \\ 2x + ay = 8 \end{cases}$$
 має безліч розв'язків?
20. Є сталь двох сортів із вмістом нікелю 5% і 40%. Скільки сталі кожного сорту потрібно взяти, щоб після переплавки одержати 70 т сталі, яка містила б 30% нікелю?

ЗАДАЧІ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

1047. Купили 2 кг огірків по a грн. за кілограм і 5 кг помідорів по b грн. за кілограм. Запишіть у вигляді виразу вартість покупки.

1048. Автомобіль протягом t год рухався зі швидкістю 80 км/год і протягом 2 год — зі швидкістю 70 км/год. Запишіть у вигляді виразу шлях, який проїхав автомобіль за весь час руху. Знайдіть значення цього виразу, якщо $t = 1, 2$.

1049. Через першу трубу до басейну щохвилини поступає a л води, а через другу — b л. Скільки літрів води поступить до басейну через обидві труби за 3 год?

1050. Знайдіть значення степеня:

а) 9^4 ; б) $(-3)^5$; в) $(-2,5)^3$; г) $\left(3\frac{1}{3}\right)^3$.

1051. Подайте у вигляді степеня з основою a :

а) $a^2 a^4$; б) $a^7 : a$; в) $(a^3)^5$; г) $(a^5 \cdot a)^4$.

1052. Обчисліть:

а) $0,4^5 \cdot 2,5^5$; б) $(2^2 \cdot 0,5^2)^7 \cdot 0,25^4 \cdot 4^4$; в) $\left(-\frac{3}{7}\right)^5 \cdot 1,7^2 \cdot \left(2\frac{1}{3}\right)^5$.

1053. Подайте одночлен у стандартному вигляді та вкажіть його степінь:

а) $8x^2xy$; б) $-3a^2b \cdot 2(a^5)^2$; в) $-m^3 \cdot 3m^2n \cdot 5n^4$;
г) $0,5ac \cdot (-4a^3c)^2 \cdot a^2c$; д) $\frac{2}{3}a^4b \cdot \left(-2\frac{2}{5}ab^2\right)$; е) $\frac{1}{6}x^3y^2 \cdot \left(-1\frac{2}{7}xy\right)$.

1054. Подайте одночлен $12a^4b^5$ у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду, одним з яких є: $2a^2b^2$; $-4a^3b$; $-0,5b$.

1055. Подайте одночлен $9a^6b^2$ у вигляді квадрата одночлена.

1056. Подайте одночлен $27x^6y^9$ у вигляді куба одночлена.

1057. Знайдіть значення одночлена:

а) $-4a^3b$, якщо $a = -\frac{1}{2}$; $b = \frac{1}{5}$; б) $(2x^3y)^2 \cdot y^4$, якщо $x = 0,25$; $y = 4$.

1058*. Спростіть вираз, де n — натуральне число:

а) $(x^3)^{3n} \cdot (x^5x^{n+1})^2$; б) $(-a^n)^{17} \cdot (-a^2)^9$.

1059. Запишіть многочлен у стандартному вигляді та знайдіть його степінь:

а) $3x^2 - 6x + x^2 - 3 + x$; б) $3a \cdot 2ab + a^5 - a^3 - 7a^2b$;
в) $0,6a^2b - 1,4b^2a + 2,8a^2b + 3,3ab^2$; г) $5x^3 + 1\frac{5}{14}x^2 - 6\frac{1}{7}x^3 - 1\frac{2}{7}x^2$.

1060. Спростіть вираз:

а) $8a^2 + 4a - 3 - (7 - 8a + 3a^2)$; б) $x - 3x^2y - xy + (x^2 - 3x^2y + xy)$;
 в) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x - \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{12}\right)$.

Виконайте множення:

1061. а) $4a(a^2 - 4a + 3)$; б) $(2x^2 - 4x + 8)(-0,5x^2)$;
 в) $(4ab^2 + 9a^2)(2b^2 - 3a)$; г) $(a - 7)(b + 1)(c - 2)$.
 1062. а) $(b + 2c)(b - 2c)$; б) $(5x - 2y)(5x + 2y)$;
 в) $(1,4a - 0,3b)(0,3b + 1,4a)$; г) $\left(\frac{2}{3}ab + 2c^2\right)\left(\frac{2}{3}ab - 2c^2\right)$.

1063. Піднесіть до квадрата:

а) $(2x + 3)^2$; б) $(3c - 1)^2$; в) $(0,4b - 5a)^2$; г) $\left(2\frac{1}{7} - \frac{1}{2}y\right)^2$.

Спростіть вираз:

1064. а) $(x - 3)(x^2 + x + 3) - x^3$; б) $3c - (c - 2)(2c^2 - c + 1) - 5c^2$;
 в) $(5 + x)(5 - x) + x^2$; г) $(2b - 9)(2b + 9) - 4b^2$;
 д) $(n - 1)(n^2 + n + 1) - n^3$; е) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9) - 27$.

1065. а) $(10 - 3m)(2 + 3m) + (5m - 4)(5 - 2m)$;

б) $(4a + 9)(a^2 - 2a + 2) - (4a - 7)(a + 1)^2$;

в) $(n^2 - 3n)(1 + 3n)(-1 + n) - 3n(n^3 + 1)$;

г) $(4y - 5y^2)^2 + (2y + 5y^2)^2 - 20y^2$.

Запишіть у вигляді многочлена стандартного вигляду:

1066. а) $(b + 2)(b - 2)(b^2 + 4)$; б) $15x^3(x^2 + 10)(10 - x^2)$;

в) $a^5(a^4 - (2a^3 + a^2(a^2 - 2a + 3))) + 4a^7$.

1067*. а) $(a^2 + 2a - 2)^2$; б) $(5x - 2)^3$; в) $(c - 3)^4$.

1068. Доведіть тотожність:

а) $y(b - x) + x(b + y) = b(x + y)$;

б) $(-m + n)(m - n) = -(n - m)^2$;

в) $(a + b + c + d)^2 - (a + b)^2 - (c + d)^2 = 2(a + b)(c + d)$;

г) $(n + 1)(n + 3)(n + 5)(n + 7) + 7 = (n^2 + 8n + 8)(n^2 + 8n + 14)$.

Розкладіть на множники:

1069. а) $2x + 2xy$; б) $a^2 - 2a$; в) $12xy^3 + 8xy^2 - 16x^2y$.

1070. а) $ax - ay + 3x - 3y$; б) $x^2y - 2x + xy - 2$;

в) $9ya - 6ya^2 + 2axy - 3xy$; г) $8x^2a - 15y^3 - 10x^2y + 12ay^2$.

1071. а) $9n^2 - 4m^2$; б) $120 - 30a^4$; в) $27x^3 + 0,008y^3$;

г) $x^3 - (m - n)^3$; д) $a^2 + 8a + 16$; е) $6x^2 - 24xy + 24y^2$.

1072. а) $y^4 - \frac{1}{49}y^2$; б) $a^2 - 4b^2 + 2b + a$; в) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4y^4$.

1073*. а) $x^2 - 2x - 3$; б) $a^2 + 3a - 4$; в) $x^2 - 8xy + 7y^2$.

1074. Доведіть, що значення виразу:

а) $9^7 - 3^{12}$ ділиться на 8; б) $49^8 + 3 \cdot 7^{15}$ ділиться на 10.

1075. Обчисліть:

а) $97 \cdot 103$; б) $1,8 \cdot 2,2$; в) $52^2 - 48^2$; г) $7,35^2 - 6,35^2$.

1076. Знайдіть значення виразу:

а) $a^3 - 0,5a^2$, якщо $a = 1,5$;

б) $x^2 - 2xy + y^2$, якщо $x = -0,3$; $y = 10,3$.

1077. Доведіть, що значення виразу $(x + 1)^2 - (x - 1)(x + 3)$ не залежать від значень x .

1078. Доведіть, що для будь-якого цілого значення n значення виразу:

а) $(2n + 3)^2 - (2n - 1)^2$ ділиться на 8;

б) $(8n - 4)^2 - 8(4n - 3)$ не ділиться на 32.

1079. Для якого значення x значення виразу $x^2 + 2x + 9$ є найменшим?

1080. Для якого значення x значення виразу $2 - x^2 + 4x$ є найбільшим?

1081*. Доведіть, що сума кубів двох послідовних цілих чисел, які не діляться на 3, кратна 9.

1082*. Чи може різниця четвертих степенів двох натуральних чисел бути простим числом?

1083*. Знайдіть найменше значення виразу $x^2 + y^2 - 4y - 2x$.

1084*. Доведіть, що коли деякі два цілі числа не діляться на 3, то їх сума або різниця діляться на 3.

1085*. Два велосипедисти проїхали шлях від пункту A до пункту B . Перший велосипедист першу половину шляху їхав зі швидкістю 20 км/год, а другу половину — зі швидкістю 16 км/год. Другий же велосипедист першу половину шляху їхав зі швидкістю 19 км/год, а другу половину — зі швидкістю 17 км/год. Хто з них затратив більше часу на шлях від A до B ?

Розв'яжіть рівняння:

1086. а) $3x - 18 = 57 - 2x$;

в) $250(x + 8) = 125x - 500$;

д) $\frac{2}{9}(3x - 2) + \frac{1}{3}(x - 1) = \frac{2}{9}$;

є) $\frac{x - 4}{5} = 1 - \frac{x - 1}{3}$;

б) $3(x - 2) - 4(x - 4) = 5$;

г) $0,3(1 - x) = 0,4(x - 1) - 0,7$;

е) $\frac{5}{6}(1 - 4x) = \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}(5x + 3)$;

ж) $\frac{2x + 3}{6} + \frac{3x + 4}{9} = \frac{5}{18}$.

1087. а) $x(x+5) - x^2 = 2$; б) $(2x+3)(x-1) = 2x^2$;
 в) $x(x+0,1) = (x-0,1)(x+0,2)$; г) $\frac{1}{3}x\left(x - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{3}(x^2 - 2)$;
 д) $(x-3)(x+3) = (x+1)^2$; е) $2x(x-1,5)^2 = 2x^3 - 6x^2 + 3$.
 1088. а) $y^3 - 3y^2 = 0$; б) $x^3 - \frac{1}{4}x = 0$;
 в) $x^2 - 6x + 9 = 0$; г) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$;
 д) $y^2 + 2y - 48 = 0$; е) $z^2 - 15z + 56 = 0$.
 1089*. а) $|3 - 2x| = 5$; б) $||x| - 2| = 6$.
 1090*. а) $(|x| + 5)(3|x| - 9) = 0$; б) $|x(x-2)| + x^2 = 0$; в) $x^2 + 2|x| + 1 = 0$.
 1091*. Доведіть, що рівняння $x^4 + 1 + (x-2)^4 = 2x^2$ не має коренів.
 1092*. Розв'яжіть рівняння $|x+4| = |7-x|$.

Розв'яжіть задачі 1093–1098, склавши рівняння.

1093. Периметр прямокутника дорівнює 68,4 см. Знайдіть сторони прямокутника, якщо одна з них на 3,6 см коротша від іншої.
1094. Сума двох чисел дорівнює 52,7, одне з них у 2,4 разу більше від іншого. Знайдіть більше із цих чисел.
1095. У першій цистерні втричі більше бензину, ніж у другій. Коли з першої цистерни забрали 400 л бензину, а з другої — 800 л, виявилося, що в першій цистерні бензину стало у 8 разів більше, ніж у другій. Скільки бензину було в кожній цистерні спочатку?
1096. З міста виїхав мотоцикліст і рухався зі швидкістю 40 км/год. Через півгодини услід за ним виїхав автомобіль, швидкість якого дорівнює 60 км/год. Через скільки годин після свого виїзду з міста автомобіль наздожене мотоцикліста?
1097. Нержавіюча сталь є сплавом заліза, хрому й нікелю. Лист з такої сталі містить 15% хрому, 0,5% нікелю, а заліза — на 2,78 кг більше, ніж хрому. Знайдіть масу листа.
- 1098*. Автобус рухався до міста N зі швидкістю 60 км/год. Дорогою його обігнав легковий автомобіль, що їхав зі швидкістю 80 км/год. Автомобіль прибув до міста N і через 15 хв вирушив у зворотний шлях. На відстані 10 км від міста N він знову зустрів автобус. На якій відстані від міста N були автобус і автомобіль при першій зустрічі?
1099. Функція задана формулою $y = -2x + 3$.
 а) Знайдіть значення функції, які відповідають таким значенням аргументу: -2 ; 0 ; 6 .

- б) Знайдіть значення аргументу, якому відповідає значення функції: 3; 1.
 в) Для якого значення x значення функції дорівнює значенню аргументу?
- 1100.** Побудуйте графік функції $y = 2x - 0,5$. За допомогою графіка знайдіть:
 а) значення функції, якщо $x = -0,5$; $x = 1,5$;
 б) значення x , для якого $y = 1,5$.
- 1101.** Побудуйте графік функції $y = 0,5x + 1$, де $-4 \leq x \leq 3$. Яка область визначення та область значень функції? Чому дорівнюють найбільше та найменше значення функції? Вкажіть нулі функції. Для яких значень x функція набуває додатних значень; від'ємних значень?
- 1102.** Побудуйте графік функції:
 а) $y = -x + 1$, де $-3 \leq x \leq 2$; б) $y = 2x^2 - 2$, де $-2 \leq x \leq 2$.
 в) $y = 1,5x$; г) $y = -1,5x$; д) $y = 3x + 1$; е) $y = -1,5x - 1$.
- 1103.** Графік прямої пропорційності проходить через точку $A(2; 7)$. Чи проходить цей графік через точку $B(-4; -14)$?
- 1104.** На рисунку 47 зображено графік функції. Знайдіть область визначення та область значень цієї функції. Задайте функцію формулою, якщо:
 а) $0 \leq x \leq 2$; б) $2 \leq x \leq 6$.

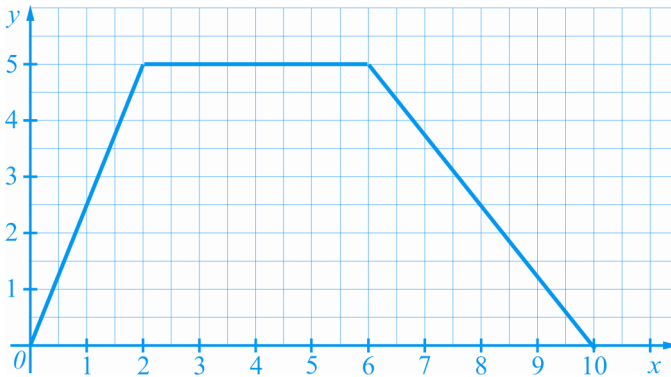


Рис. 47

- 1105.** Знайдіть координати точок перетину графіків функцій:
 а) $y = 1,5x$ і $y = -x + 5$; б) $y = -2x$ і $y = 2$.
- 1106.** Для якого значення b графіки функцій $y = 3x + b$ і $y = 2x + 4$ перетинаються в точці, що лежить на осі абсцис?
- 1107.** Чи є пара чисел $(2; -1)$ розв'язком рівняння $2x + 5y = -3$?
- 1108.** Побудуйте графік рівняння:
 а) $x + 3y = 3$; б) $2x - 3y = 6$; в) $2x = 5$; г) $-3y = 6$.

1109. Розв'яжіть графічно систему рівнянь
$$\begin{cases} x - y = 2; \\ x + 2y = 5. \end{cases}$$

Розв'яжіть систему рівнянь:

1110. а)
$$\begin{cases} x + 2y = 6; \\ 2x - 3y = -2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - 5y = 8; \\ 2x + 3y = -8; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 15x - 8y = 4; \\ 9x - 5y = 1. \end{cases}$$

1111. а)
$$\begin{cases} 3(2x - 5) + 2y = x + 2; \\ 5(x + 1) - 15 = y + 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 0,2(2x + 0,5) - 0,3(2y - 3) = 1,8; \\ -38(5x - 1) + 38(5y + 6) = 0. \end{cases}$$

1112. а)
$$\begin{cases} x + \frac{1}{9}y = 3\frac{1}{3}; \\ 3x - \frac{2}{3}y = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x+1}{3} + \frac{y-2}{6} = -2; \\ \frac{x+8}{8} - \frac{y+7}{6} = 0. \end{cases}$$

1113. Знайдіть точку перетину графіків рівнянь $2x + 3y = -2$ і $4x - 5y = 7$.

1114. Чи належить точка перетину графіків рівнянь $2x + 4y = -6$ і $10x - y = 12$ графіку рівняння $3x + y = 1$?

1115. Графік лінійної функції проходить через точки $A(-1; 1)$ і $B(3; -7)$. Задайте цю функцію формулою.

1116*. Для якого значення k система рівнянь
$$\begin{cases} x + 2y = 5; \\ 2x + 4y = k \end{cases}$$
 має безліч розв'язків?

Розв'яжіть задачі 1117–1121, склавши систему рівнянь.

1117. Сума двох чисел дорівнює 20,5, одне з них на 2,3 більше від іншого. Знайдіть ці числа.

1118. Два автоматичні станки за 8 год спільної роботи виготовляють 2000 деталей. Перший станок за 2 год і другий за 3 год разом виготовляють 630 деталей. Скільки деталей виготовляє за годину кожний станок?

1119. З пунктів A і B , відстань між якими дорівнює 17 км, вийшли назустріч один одному два туристи і зустрілися через 2 год. Знайдіть швидкості туристів, якщо швидкість одного з них на 0,5 км/год менша від швидкості іншого.

1120. Братові й сестрі разом 10 років. Скільки років кожному з них, якщо через рік брат буде вдвічі старший від сестри?

1121*. Молоко однієї корови містить 5% жиру, а іншої — 3,5%. Змішавши молоко обох корів, одержали 10 л молока, жирність якого дорівнює 4%. Скільки для цього використали літрів молока від кожної корови?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

До § 1. Лінійні рівняння з однією змінною

1122. Розв'яжіть рівняння:

а) $|x - 1| + |x + 1| = 0$;

б) $|x - 4| + |2x - 8| = 0$.

1123. Скільки коренів залежно від числа a (кажуть: параметра a) має рівняння:

а) $|x - a| = 0$;

б) $|x| = a$;

в) $|x - a| + |x - 1| = 0$?

1124. Розв'яжіть рівняння $ax = a$ з параметром a .

• *Розв'язання.* Розглянемо два випадки.

1) $a \neq 0$. Тоді: $ax = a$; $x = 1$ (поділили обидві частини рівняння на a).

2) $a = 0$. Тоді: $ax = a$; $0x = 0$; коренем рівняння є будь-яке число.

Відповідь. Якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число. •

Розв'яжіть рівняння з параметром a :

1125. а) $x - a = 3$;

б) $x + a = -4$;

в) $3x = a$;

г) $-2x = a + 2$;

д) $0,5x + 3a = 1,5$;

е) $a - 4x = 3a$.

1126. а) $ax = 5$;

б) $ax = 0$;

в) $ax = 10a$;

г) $(a + 2)x = 2$;

д) $4ax + 4a = 8a$;

е) $a(1 - x) = 5a$.

1127. Дано рівняння $a(x - 1) + 5a = 8(x + a) + 1$ з параметром a .

а) Для яких значень a рівняння не має коренів?

б) Чи існують значення a , для яких рівняння має більше, ніж один корінь?

1128. З міста A до міста B виїхав автобус і рухався зі швидкістю 60 км/год. Через півгодини він зустрів легковий автомобіль, який їхав з міста B . Цей автомобіль доїхав до міста A і через 40 хв виїхав назад до міста B . За 20 км від міста B легковий автомобіль наздогнав автобус. Знайдіть відстань між містами, якщо швидкість легкового автомобіля весь час становила 90 км/год.

1129. Сплав міді, цинку й олова, загальна маса якого дорівнює 1 кг, містить олова на 20% більше, ніж міді, а цинку — на 50% більше, ніж олова. Знайдіть масу цинку в сплаві.

1130. Оля любить каву з молоком. Коли їй дали повну чашку самої кави, вона відпила $\frac{1}{5}$ чашки і долила молоком. Потім знову відпила $\frac{1}{5}$ чашки і знову долила молоком. Після цього в чашці стало кави на 56 мл більше, ніж молока. Знайдіть місткість чашки.

1131. Велосипедист проїхав деякий шлях зі сталою швидкістю. Якби він їхав на 2 км/год швидше, то затратив би на цей шлях в 1,1 менше часу. З якою швидкістю їхав велосипедист?

До § 2. Цілі вирази

- 1132.** Чи можна в запису $* 1 * 2 * 3 * 4 * 5 * 6 * 7 * 8 * 9 * 10$ поставити замість зірочок знаки «+» або «-» так, щоб значення одержаного виразу дорівнювало: **а)** 5; **б)** 0; **в)** 60?
- 1133.** Доведіть, що для будь-якого натурального значення n значення виразу $n(n+1) + (n+2)(n+3)$ є складеним числом.
- 1134.** Вираз $a^2 + 2ab + 2a - b + 4$ для $a = 2$ і деякого значення b набуває значення 0. Якого значення набуває вираз $a^2 + ab + b^2$ для тих самих значень a і b ?
- 1135.** Для деяких натуральних значень m і n число $3m + 2n$ ділиться на 7. Доведіть, що для тих самих значень m і n на 7 ділиться й число:
а) $10m + 9n$; **б)** $4m + 5n$; **в)** $m + 3n$.
- 1136.** Для деяких натуральних значень m і n число $5m - n$ ділиться на 8. Для тих самих значень m і n на 8 ділиться і число $3m + 4n$. Доведіть, що тоді й самі числа m і n діляться на 8.
- 1137. а)** Доведіть, що коли два цілі числа при діленні на 7 дають рівні остачі, то різниця цих чисел ділиться на 7.
б) Доведіть, що серед будь-яких восьми цілих чисел завжди знайдуться два числа, різниця яких ділиться на 7.
- 1138.** Запишіть формулу цілих чисел, які діляться на 5, а при діленні на 2, 3 і 4 дають в остачі 1.
- 1139. (Задача-жарт.)** Жінка несла на базар 2 кошики яєць. Її ненароком штовхнув чоловік, кошики впали, а яйця розбилися. Чоловік, щоб розраховатися, запитав, скільки було всього яєць. Жінка відповіла:
— Я їх не рахувала, але коли складала в кошики по 2, по 3, по 4, по 5, по 6, то щоразу залишалось по одному яйцю, а коли складала по 7, то залишилось 2 яйця. Ще знаю, що в кожний кошик поміщається не більше 70 яєць.
Скільки яєць було в кошиках?
- 1140.** До деякого трицифрового числа праворуч дописали одну цифру і від одержаного числа відняли початкове. Виявилось, що різниця ділиться на 9. Яку цифру дописали?
- 1141.** Доведіть, що число \overline{aaabbb} ділиться на 37.
- 1142. а)** Доведіть, що сума чисел \overline{abc} , \overline{bca} і \overline{cab} кратна 111.
б) Доведіть, що не існує трицифрового числа \overline{abc} , для якого число $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ було б квадратом натурального числа.
- 1143.** Два учні по черзі пишуть n -цифрове число: число одиниць пише перший, число десятків — другий, число сотень — знову перший і т. д. Чи може другий учень досягти того, щоб одержане число ділилося на 9, якщо перший заважає йому це зробити? Розгляньте випадки: **а)** $n = 10$; **б)** $n = 15$.

До § 3. Одночлени

- 1144.** Доведіть, що для кожного натурального значення n число:
 а) $3^{4n} + 4$ ділиться на 5; б) $9^{2n} - 1$ ділиться на 10.
- 1145.** Доведіть, що для кожного натурального значення n число $4^{2n} + 4$ ділиться на 10.
- 1146.** Доведіть, що для кожного натурального значення n число $10^n - 4$ ділиться на 3, але не ділиться на 9.
- 1147.** Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких була б правильною рівність $m(m + 1) = 3^n + 2^n$.
- 1148.** Що більше:
 а) 125^{125} чи 25^{185} ; б) 250^8 чи 375^7 ?
- 1149.** Якою цифрою може закінчуватися запис квадрата цілого числа; четвертого степеня цілого числа; восьмого степеня цілого числа?
- 1150. а)** Доведіть, що не існує цілого числа, квадрат якого дорівнює $\underbrace{33\dots3}_{100 \text{ трійок}}$.
- б) Чи існують натуральні значення m і n , для яких рівність $m^4 = 10^n + 4$ є правильною?
- в) Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких була б правильною рівність $m^8 = 10^n + 2$.
- 1151.** Знайдіть найменше натуральне число, яке внаслідок множення на 2 дає квадрат натурального числа, а внаслідок множення на 3 — куб натурального числа.

До § 4. Многочлени

- 1152. а)** Число n при діленні на 6 дає в остачі 3, а число m — в остачі 4. Яку остачу при діленні на 6 дає число: $3n + 5m$; nm ?
- б) Числа m , n і k при діленні на 5 дають відповідно в остачах 2, 3 і 4. Доведіть, що число $nk - m(m - 1)$ ділиться на 5.
- 1153.** У чотирицифровому числі число десятків і число тисяч на 1 більші від числа одиниць, а число сотень на 1 більше від числа десятків. Доведіть, що це чотирицифрове число ділиться на 11.
- 1154.** Двоцифрове число в сумі з числом, записаним тими ж цифрами, але у зворотному порядку, дає квадрат натурального числа. Знайдіть усі двоцифрові числа, які мають таку властивість.
- 1155.** Розв'яжіть рівняння $(5|x| - 6)(3|x| + 5) = 5(3x^2 + 1)$.
- 1156.** Розв'яжіть рівняння з параметром:
 а) $2(x - 3) = 3(x - a)$; б) $4(|x| - 1) = a - 4$.
- 1157.** Доведіть, що для будь-якого значення параметра a коренем рівняння $x(x + a^2) - a^2 = x(x - 1) + 2$ є додатне число.

1158. Доведіть, що:

а) $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^{10} = 2^{11} - 1$;

б) $4(1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^8 + 5^9) = 5^{10} - 1$.

Вказівка. **а)** $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^{10} = (2 - 1)(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9 + 2^{10})$.

Виконавши множення, спростіть останній вираз.

1159. Доведіть, що значення виразу $27^7 + 9^{11} - 81^5$ ділиться на 11.

1160. Доведіть, що значення виразу $2^{n+3} + 5^{n+3} - 2^n + 5^n$ ділиться на 7 для будь-якого натурального значення n .

1161. Доведіть, що сума чотирьох послідовних натуральних степенів числа 3 ділиться на 120.

1162. Розкладіть на множники:

а) $2a - a^2 - 6b + 9b^2$;

б) $81x^2 - 49x^2y^2 + 144xy + 64y^2$;

в) $a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 3abc$.

До § 5. Формули скороченого множення

1163. Спростіть вираз $(a - (-b)^n)^2 + (a + (-b)^n)^2$, де n — натуральне число.

1164. Розв'яжіть рівняння:

а) $(|x| - x)(|x| + x) = 1 - |x|$;

б) $(2|x| - 1)(2|x| + 1) = (x - 1)(4x - 1)$;

в) $(1 - |x|)(1 + |x|)(1 + |x|^2) + x^4 = |x|$.

Розкладіть на множники:

1165. а) $(a^2 + 1)^2 + 6(a^2 + 1) + 5$;

б) $(c^2 - 3c)^2 - 2(c^2 - 3c) - 8$;

в) $(a^2 - 4a)^2 - 2a^2 + 8a - 15$;

г) $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$.

1166. а) $a^4 + 4a^2 - 5$;

б) $a^4 + a^2 + 1$.

1167. а) $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;

б) $4x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y + 1$.

1168. Доведіть, що значення виразу $25^6 - 2^{21}$ ділиться на 497.

1169. Доведіть, що різниця четвертих степенів двох цілих чисел, одне з яких при діленні на 5 дає в остачі 1, а друге — в остачі 2, кратна 5.

1170. Різниця квадратів натуральних чисел m і n є простим числом. Доведіть, що:

а) $m = n + 1$;

б) число $4m + n^2$ є квадратом цілого числа.

1171. Знайдіть усі натуральні числа m і n , для яких є правильною рівність:

а) $(m + n)^2 - n^2 = 3$;

б) $m^2 - (m - n)^2 = 9$.

1172. Знайдіть усі цілі значення m і n , для яких виконується рівність $(n + 2m)^2 - (n + m)^2 = 5$.

1173. Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких була б правильною рівність:

а) $m^3 - (m - 2n)^3 = 99$;

б) $(2m + 1)^3 + (m + 2)^3 = 2^n$.

1174. Доведіть, що коли число y є середнім арифметичним чисел x і z , то $x^4 + 2x^3z - 2xz^3 - z^4 - 4x^2y^2 + 4y^2z^2 = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

1175. а) $x^{10} - x^9 = x^4 - x^3$;

б) $1 - x + x^2 + (x^3 - x^2)^{20} = x$.

1176. а) $|x|^2 - 3|x| + 2 = 0$;

б) $|x|^2 + 2|x| = 3$.

1177. а) $x^3 - 7x - 6 = 0$;

б) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.

1178. а) $(2x^2 - 1)^2 + 2(2x^2 - 1) - 3 = 0$;

б) $(x^2 + 4x)^2 - 4x(x^2 + 4x) + 3x^2 = 0$.

1179. Розв'яжіть рівняння з параметром a :

а) $(a - 2)x = a^2 - 4$;

б) $ax - 2x = 2a - 4$.

1180. Знайдіть найменше значення a , для якого рівняння $x^2 - 12x + 30 = a$ має хоча б один корінь.

1181. а) Доведіть, що квадрат цілого числа або ділиться на 3, або при діленні на 3 дає в остачі 1.

Вказівка. Ціле число n може мати вигляд: 1) $n = 3k$; 2) $n = 3k + 1$; 3) $n = 3k + 2$, де k — ціле число. Розгляньте три можливі випадки.

б) Доведіть, що для кожного натурального значення n число $3n + 2$ не є квадратом цілого числа.

в) Доведіть, що сума квадратів трьох послідовних цілих чисел не є квадратом цілого числа.

г) Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких виконувалася б рівність $m^2 + 1 = 3n$.

1182.а) Доведіть, що не існує цілих чисел m і n , для яких виконувалася б рівність $8n + 2 = m^2$.

Вказівка. Припустимо, що такі цілі числа m і n існують. Тоді з рівності $8n + 2 = m^2$ випливає, що m^2 є парним числом. Тому й число m — парне. Нехай $m = 2k$, де k — ціле число. Обґрунтуйте, що рівність $8n + 2 = 4k^2$ для цілих n і k не може бути правильною.

б) Доведіть, що серед чисел виду $8n + 2$, де n — натуральне число, немає квадрата цілого числа.

в) Доведіть, що сума квадратів двох послідовних непарних чисел не є квадратом цілого числа.

1183. а) Нехай n — деяке натуральне число. Доведіть, що за числом n^2 наступні $2n$ натуральних чисел не є квадратами натуральних чисел.

б) Доведіть, що число $5^{20} + 1$ не є квадратом натурального числа.

в) Доведіть, що не існує натуральних чисел m і n , для яких виконувалася б рівність $5^{2m} + 4 = n^2$.

До § 6. Функції

1184. Два хлопці змагалися у плаванні на дистанції 100 м. На рисунку 48 зображено графіки їхніх запливів на перших 60 м дистанції. Назвіть переможця, вважаючи, що кожний із хлопців плив зі сталою швидкістю. Знайдіть відстань між хлопцями через 45 с після старту; у момент фінішу переможця.

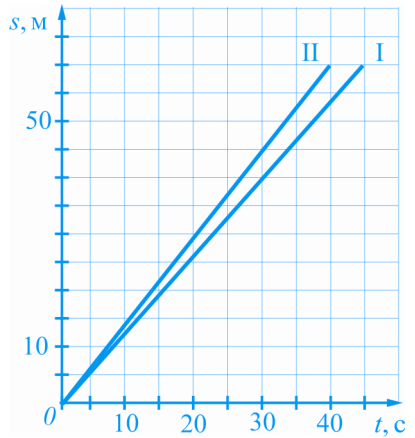


Рис. 48

1185. Графік лінійної функції проходить через точки $(-1; -2)$ і $(2; 1)$. Знайдіть усі значення a , для яких точка $(2a; 2 - a)$ належала б цьому графіку.

До § 7. Системи лінійних рівнянь із двома змінними

1186. Знайдіть усі значення параметра a , для яких одним з розв'язків рівняння $2(5a + 1)^2x - 5(2a - 1)^2y = 7$ є пара чисел $(2; 5)$.

1187. Розв'яжіть у цілих числах рівняння:

а) $3n - 7m = 5;$

б) $n^2 - m^2 = 9;$

в) $n^2 + 2mn - 8m^2 = 7;$

г) $n^2 + 2m^2 - 2mn - 4m + 4 = 0.$

1188. Побудуйте графік рівняння: $|x| - |y| = 0.$

Розв'яжіть систему рівнянь:

1189. а)
$$\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 6; \\ 2y - x = 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - y = 0; \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

1190. а)
$$\begin{cases} (x+1)^2 + (x-1)^2 = 2y; \\ x^2 = 2y - 3; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 - 2y - 7 = 0; \\ x^2 - y^2 - 8 = 0. \end{cases}$$

1191. а)
$$\begin{cases} 2x + y + z = 23; \\ x + 2y + z = 22; \\ x + y + 2z = 21; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 3; \\ 2x + 2y + 2z = 6. \end{cases}$$

Примітка. Рівняння систем містять 3 змінні: x , y і z . Розв'язати такі системи означає знайти всі значення змінних x , y і z , для яких кожне рівняння системи перетворюється у правильну числову рівність.

1192. Скільки розв'язків має система рівнянь
$$\begin{cases} 3x + (a-2)y = 4a; \\ -3x + 3ay = -2 \end{cases}$$
 залежно від значень параметра a ?

1193. Для яких значень a система рівнянь
$$\begin{cases} 2|x| - y = a; \\ |x| - y = 0 \end{cases}$$
 має два розв'язки?

1194. Дано 10 чисел. Відомо, що сума будь-яких дев'яти із цих чисел дорівнює 1. Чому дорівнює сума усіх даних чисел?

1195. Двома паралельними залізничними коліями рухаються назустріч один одному два поїзди. Довжина першого поїзда дорівнює 130 м, а другого — 104 м. Зустрівшись, поїзди протягом 4,68 с йшли один повз другий. Якби поїзди рухалися в одному напрямі й перший поїзд переганяв другий, то вони йшли б один повз другий протягом 46,8 с. Знайдіть швидкість кожного поїзда.

Логічні задачі

1196. До вершини гори ведуть сходи, що мають 1001 сходинку. На нижніх 500 сходинках лежать камені — по одному на сходинці. Сізіф може взяти довільний камінь і перенести його вгору, але не далі як на найближчу вільну сходинку. Після цього Аїд може скотити вниз на одну сходинку довільний камінь, якщо попередня сходинка є вільною. Сізіф та Аїд діють по черзі. Починає Сізіф, і його мета — покласти камінь на верхню сходинку. Чи може Аїд цьому завадити? Якою буде відповідь, якщо кількість усіх сходинок дорівнюватиме 1000?

1197. На дошці написані числа 1, 2, 3, ..., 21. Дозволяється стерти будь-які два числа і написати їх різницю (якщо стерли числа a і b , то можна написати число $a - b$ або число $b - a$). Повторивши цю операцію 20 разів, одержимо одне число. Чи може це число дорівнювати: а) 1; б) 0?

1198. Книга має 320 сторінок. Чи можна вибрати деяких 15 аркушів цієї книги так, щоб сума номерів вибраних 30 сторінок дорівнювала 1500?

1199. П'ять рибалок наловили 9 рибин. Доведіть, що принаймні двоє з них наловили рибин порівну.

1200. Двоє з чотирьох друзів завжди кажуть правду, а двоє — завжди брешуть. Одного разу відбулася така розмова.

Другий до першого: «Ти брехун».

Третій до другого: «Сам ти брехун».

Четвертий до третього: «Обидва вони брехуни, як і ти, до речі».

Хто з них каже правду?

1201. Чи можна з 82 куль, кожна з яких має певний колір, вибрати 10 куль так, щоб усі вони мали різні кольори або деякий один колір?

1202. В абетці мови острова *Абаба* є лише дві букви a і b . Ім'я будь-якого жителя острова можна одержати, замінюючи у слові *Абаба* записані підряд букви ab на bb , ba — на aab чи bb — на aaa (заміну можна робити кілька разів). Чи є на острові житель з ім'ям *Бааабба*?

ВІТЧИЗНЯНІ МАТЕМАТИКИ



Феофан Прокопович
(1681–1736)

Феофан Прокопович — один з найвідоміших мислителів кінця XVII – початку XVIII ст., професор та ректор Києво-Могилянської академії, державний та церковний діяч. Філософ і математик, поет і публіцист, він залишив значну кількість творів. Писав латинською, українською, російською, польською мовами, робив переклади книг і коментував їх.

Феофан Прокопович був найосвіченішою людиною свого часу. Так, у його бібліотеці було близько 30 тисяч книг, написаних різними мовами.

Народився Феофан Прокопович у Києві 7 червня 1681 року в родині крамаря. Він рано втратив батьків, і його опікуном став дядько по матері, ректор Києво-Могилянської академії Феофан Прокопович. Дядько віддав свого семирічного небожа до початкової школи при Києво-Братському монастирі, а через три роки — до Києво-Могилянської академії. У роки навчання був одним із кращих учнів, не раз перемагав у наукових диспутах.

Прагнучи поглибити свої знання, сімнадцятирічний Феофан Прокопович вирушив у традиційну для того часу освітню мандрівку. Два роки перебував у Львові, читав студентам лекції з поезики та риторики. Відтак вирушив до Рима, де став учнем колегіуму св. Афанасія.

У 1702 році Феофан Прокопович повертається в Україну. З 1704 року він викладає філософію у Києво-Могилянській академії. Його улюбленим предметом була математика. Тож не дивно, що у курс філософії він включив два математичні курси — арифметику й геометрію, створивши оригінальні підручники із цих предметів.

У 1707 році Феофана Прокоповича обирають заступником ректора, з 1711 до 1715 року він був ректором Києво-Могилянської академії. У 1715 році за викликом царя Феофан Прокопович мусив вирушити до Петербурга, де брав участь у створенні Петербурзького університету та Російської академії наук.

Найзначнішою математичною роботою Феофана Прокоповича є курс лекцій з математики, теоретичні відомості в якому на той час були найповнішими в царській Росії.



**Михайло Васильович
Остроградський**
(1801–1861)

Почесне місце в історії математики посідає наш співвітчизник **Михайло Остроградський**. Він був членом Туринської, Петербурзької, Римської, Американської та Французької Академій Наук. Слава його була настільки великою, що батьки, бажаючи заохотити своїх дітей до навчання, переконували їх словами: «Учись, і будеш, як Остроградський».

Михайло Остроградський народився 1801 року на Полтавщині в сім'ї поміщика. Уже в дитячому віці він проявляв дивовижну допитливість і спостережливість, проте

вчився в Полтавській гімназії, куди його віддали у дев'ять років, посередньо з усіх предметів. Михайло мріяв про військову кар'єру й дуже здравів, коли батько вирішив забрати його з гімназії і влаштувати в один із гвардійських полків. В останній момент за порадою одного з родичів, який помітив неабиякі здібності хлопця, було вирішено продовжити навчання. У шістнадцять років Остроградський став студентом Харківського університету.

У 1818 році Остроградський склав іспити за курс університету, а в 1820 році склав іспити на звання кандидата наук. Проте університетська влада, вважаючи Остроградського «неблагонадійним», відмовилася присуджувати йому вчений ступінь і навіть позбавила диплома про закінчення університету.

І все ж Остроградський став відомим ученим, академіком. Невдача лише розпалила в ньому бажання наполегливо працювати. Він їде до Парижа і там відвідує лекції Коші, Лапласа, Пуассона та інших визначних математиків. Спілкування з французькими вченими, вивчення їхніх праць приводить згодом Остроградського до власних відкриттів. Його роботи публікуються в журналі Паризької Академії наук. Чутки про неабиякі успіхи Остроградського дійшли до Батьківщини.

У 1828 році Остроградський повернувся у царську Росію. У Петербурзі він викладав математику в Головному педагогічному інституті, Морському кадетському корпусі та в Михайлівському артилерійському училищі.

Михайло Остроградський написав багато математичних праць, серед яких є праці з алгебри та теорії чисел, він є автором кількох підручників, а теореми, формули Остроградського вивчають студенти математичних спеціальностей усіх університетів світу.



**Дмитро Олександрович
Граве**
(1863–1939)

Дмитро Граве народився 1863 року в місті Кирилове поблизу Вологди (Росія), закінчив фізико-математичний факультет Петербурзького університету (1885).

Будучи студентом, Дмитро Граве захоплювався науковою роботою, був ініціатором видання журналу «Записки фізико-математичного гуртка Петербурзького університету», де були надруковані перші його праці.

Після захисту магістерської роботи у 1889 році Граве стає приват-доцентом Петербурзького університету.

У 1897 році Дмитро Граве захистив докторську дисертацію і переїхав до України. Спочатку він працював професором Харківського університету та Харківського технологічного інституту.

1902 року професор Граве очолив кафедру чистої математики Київського університету, де й тривала його майже вся науково-педагогічна діяльність.

У 1905–1915 роках Дмитро Граве розробив кілька навчальних курсів, які належать здебільшого до алгебри та теорії чисел, найвагомими з яких є «Елементарний курс теорії чисел» й «Елементи вищої алгебри». Він розвинув на математичному відділенні Київського університету семінарську форму занять зі студентами.

Наприкінці 1933 року був організований Інститут математики Академії наук УРСР, першим директором якого став Граве.

Неабиякою заслугою Дмитра Граве було створення першої в Україні всесвітньо визнаної алгебраїчної школи.



**Михайло Пилипович
Кравчук**
(1892–1942)

Праці **Михайла Кравчука**, яких він написав понад 180, належать до різних розділів математики, зокрема до алгебри й теорії чисел. Уведені ним спеціальні многочлени зараз відомі математикам як многочлени Кравчука. Він є автором важливих робіт з історії математики, багатьох підручників для вищої і середньої шкіл. Чимало сил, енергії, таланту віддав Михайло Кравчук освіті, зробив вагомий внесок у розвиток української математичної термінології.

Михайло Кравчук народився 30 вересня 1892 року в селі Човниці (тепер Ківерцівський район Волинської області) в сім'ї землеміра.

У 1910 році золотий медаліст Луцької гімназії стає студентом фізико-математичного факультету Київського університету ім. св. Володимира.

У 1915–1917 роках Кравчук виїздить до Москви на спеціальні студії, де складає магістерські іспити. 1918 року його обирають приват-доцентом Київського університету.

У 1924 році Михайло Кравчук захищає докторську дисертацію. Протягом 1927–1938 років працює у вищих навчальних закладах Києва. З часу створення у Києві Інституту математики (1933 р.) і до початку 1938 року очолює у ньому відділ математичної статистики.

Михайло Кравчук був організатором першої в Україні математичної олімпіади школярів (1935 р.).

У вересні 1938 року Кравчука заарештовано сталінським режимом, його звинувачено в українському буржуазному націоналізмі. Вирок — тюремне ув'язнення терміном на 20 років. Далі — Магадан, де у березні 1942 року Кравчук і помер.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ

Подільність натуральних чисел

1. Будь-яке натуральне число a , на яке ділиться дане натуральне число n , називають *дільником* числа n .

2. Будь-яке натуральне число n , яке ділиться на дане натуральне число a , називають *кратним* числу a .

Число 12	дільники: 1; 2; 3; 4; 6; 12.
	кратні: 12; 24; 36; 48; ...

3. Натуральне число називають *простим*, якщо воно має тільки два різних дільники: одиницю і це саме число.

4. Число, яке має більше ніж два дільники, називають *складеним*.

5. Кожне складене число можна записати у вигляді добутку кількох простих чисел, тобто *розкласти його на прості множники*.

Наприклад: $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$.

6. На **10** діляться ті й тільки ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0.

7. На **5** діляться ті й тільки ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрами 0 або 5.

8. На **2** діляться ті й тільки ті натуральні числа, запис яких закінчується парною цифрою.

9. На **3** діляться ті й тільки ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 3.

10. На **9** діляться ті й тільки ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 9.

Найбільший спільний дільник

11. Найбільше натуральне число, на яке ділиться кожне з даних чисел, називають *найбільшим спільним дільником* цих чисел.

Для знаходження найбільшого спільного дільника двох чисел можна розкласти ці числа на прості множники і знайти добуток спільних множників.

Наприклад: $144 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underline{3} \cdot 3$; $60 = \underline{2} \cdot \underline{2} \cdot \underline{3} \cdot 5$;

$\text{НСД}(144; 60) = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Найменше спільне кратне

12. Найменшим спільним кратним натуральних чисел називають найменше натуральне число, яке ділиться на кожне з даних чисел.

Щоб знайти найменше спільне кратне двох чисел, кожне з них можна розкласти на прості множники, до розкладу одного з чисел дописати з розкладу іншого числа ті множники, яких немає у розкладі першого, і перемножити записані числа.

$$\text{Наприклад: } 144 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3; \quad 60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5;$$

$$\text{НСК}(144; 60) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 720.$$

Десяткові дроби

13. Додавання і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно. Для цього дроби записують так, щоб відповідні розрядні одиниці й коми були одні під одними.

$$\text{Наприклад: } \begin{array}{r} + 0,714; \\ 11,3 \\ \hline 12,014 \end{array}; \quad \begin{array}{r} - 1,75 \\ 0,592 \\ \hline 1,158 \end{array}.$$

14. Щоб помножити один десятковий дріб на інший, потрібно виконати множення, не зважаючи на коми, а потім у добутку відокремити комою стільки десяткових знаків, скільки їх є в обох множниках разом.

Щоб поділити десятковий дріб на десятковий дріб, потрібно в діленому і дільнику перенести коми праворуч на стільки цифр, скільки десяткових знаків має дільник, а потім виконати ділення на натуральне число.

$$\text{Наприклад: } \begin{array}{r} \times 1,8 \\ 0,32 \\ \hline 36 \\ 54 \\ \hline 0,576 \end{array}; \quad \begin{array}{r} 5,472 : 1,52 = 547,2 : 152 = 3,6 \\ \begin{array}{r} 547,2 \quad | 152 \\ \underline{456} \quad | 3,6 \\ 912 \\ \underline{912} \\ 0 \end{array} \end{array}$$

Окремі випадки множення і ділення десяткових дробів:

$$0,731 \cdot 10 = 7,31; \quad 1,23 \cdot 100 = 123; \quad 5,3 \cdot 0,1 = 0,53; \quad 21,53 \cdot 0,01 = 0,2153;$$

$$14,2 : 10 = 1,42; \quad 14,2 : 100 = 0,142; \quad 153 : 100 = 1,53; \quad 0,73 : 0,1 = 7,3.$$

Звичайні дроби

15. Основна властивість дроби. Якщо чисельник і знаменник звичайного дроби помножити або поділити на одне й те ж натуральне число, то отримаємо дріб, який дорівнює даному.

Наприклад: $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 2}{7 \cdot 2} = \frac{6}{14}$; $\frac{15}{20} = \frac{15 : 5}{20 : 5} = \frac{3}{4}$.

16. Щоб звести дроби до найменшого спільного знаменника, потрібно:

- 1) знайти найменше спільне кратне знаменників;
- 2) знайти додаткові множники, поділивши найменше спільне кратне на кожний знаменник;
- 3) чисельник і знаменник кожного дроби помножити на відповідний додатковий множник.

Наприклад: зведемо до найменшого спільного знаменника дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ і $\frac{7}{16}$:

1) НСК(4; 12; 16) = 48;

2) додаткові множники: $48 : 4 = 12$; $48 : 12 = 4$; $48 : 16 = 3$;

3) $\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 12}{4 \cdot 12} = \frac{36}{48}$; $\frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 4}{12 \cdot 4} = \frac{20}{48}$; $\frac{7}{16} = \frac{7 \cdot 3}{16 \cdot 3} = \frac{21}{48}$.

17. Щоб додати дроби з однаковими знаменниками, потрібно до чисельника першого дроби додати чисельник другого й записати в чисельнику, а знаменник записати той самий.

Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, потрібно від чисельника першого дроби відняти чисельник другого й записати в чисельнику, а знаменник записати той самий.

Наприклад: $\frac{3}{11} + \frac{4}{11} = \frac{7}{11}$; $\frac{4}{7} - \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$; $1 - \frac{1}{8} = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, потрібно їх спочатку звести до спільного знаменника.

18. Щоб перемножити два звичайні дроби, потрібно перемножити їх чисельники і добуток записати в чисельнику, перемножити їх знаменники і добуток записати в знаменнику.

Щоб поділити один дріб на інший, досить ділене помножити на число, обернене дільнику.

Наприклад: $\frac{12}{25} \cdot \frac{10}{27} = \frac{\cancel{12}^4 \cdot \cancel{10}^2}{\cancel{25}^5 \cdot \cancel{27}^9} = \frac{8}{45}$; $\frac{3}{11} : \frac{45}{77} = \frac{3}{11} \cdot \frac{77}{45} = \frac{\cancel{3}^1 \cdot \cancel{77}^7}{\cancel{11}^1 \cdot \cancel{45}^{15}} = \frac{7}{15}$.

19. Щоб звичайний дріб записати десятковим, досить чисельник дробу поділити на його знаменник.

Наприклад: $\frac{3}{20} = 0,15$.

20. Щоб знайти дріб від числа, потрібно число помножити на цей дріб.

Наприклад: знайдемо $\frac{2}{3}$ від 45: $45 \cdot \frac{2}{3} = \frac{45 \cdot 2}{3} = 30$;

30% від 140 — це 0,3 від 140: $140 \cdot 0,3 = 42$.

Щоб знайти число за даним значенням його дробу, потрібно це значення поділити на дріб.

Наприклад: знайдемо число, $\frac{5}{6}$ якого дорівнює 40:

$$40 : \frac{5}{6} = 40 \cdot \frac{6}{5} = \frac{40 \cdot 6}{5} = 48;$$

знайдемо число, 17% якого дорівнює 51: $17\% = 0,17$; $51 : 0,17 = 300$.

21. Щоб знайти відсоткове відношення двох чисел, потрібно знайти відношення цих чисел і записати його у відсотках.

Наприклад: знайдемо відсоткове відношення чисел 12 і 28:

$$\frac{12}{28} = \frac{3}{7} = \frac{3}{7} \cdot 100\% = \frac{300}{7}\% = 42\frac{6}{7}\%.$$

Додатні та від'ємні числа

22. Модулем додатного числа і нуля є це ж число; модулем від'ємного числа є протилежне йому число:

$$|a| = a, \text{ якщо } a \geq 0; \quad |a| = -a, \text{ якщо } a < 0.$$

Наприклад: $|5,3| = 5,3$; $|0| = 0$; $|-1,8| = 1,8$.

23. Щоб додати два від'ємних числа, потрібно додати їх модулі й поставити перед отриманим числом знак «-».

Щоб додати два числа з різними знаками, потрібно знайти модулі чисел, від більшого модуля відняти менший модуль і поставити перед отриманим числом знак того доданка, модуль якого більший.

Наприклад:

$$-1,6 + (-2,3) = -3,9; \quad -0,7 + 0,7 = 0; \quad 3,2 + (-4,7) = -(4,7 - 3,2) = -1,5.$$

24. Щоб від одного числа відняти інше, досить до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику.

$$\text{Наприклад: } -15 - (-9) = -15 + 9 = -6.$$

25. Щоб знайти добуток двох від'ємних чисел, досить перемножити модулі цих чисел.

Щоб знайти добуток двох чисел з різними знаками, досить перемножити їх модулі і поставити перед одержаним числом знак «-».

$$\text{Наприклад: } (-1,1) \cdot (-0,9) = 1,1 \cdot 0,9 = 0,99; 1\frac{2}{9} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{11}{9} \cdot \frac{3}{4}\right) = -\frac{11}{12}.$$

26. Щоб знайти частку двох від'ємних чисел, досить поділити модуль діленого на модуль дільника.

Щоб знайти частку чисел з різними знаками, досить поділити модуль діленого на модуль дільника і поставити перед одержаним числом знак «-».

$$\text{Наприклад: } -105 : (-21) = 105 : 21 = 5; \frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{4}\right) = -\left(\frac{2}{3} \cdot 4\right) = -2\frac{2}{3}.$$

27. Щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+», потрібно опустити дужки і знак «+», що стоїть перед ними, і записати всі доданки, які були в дужках, зі своїми знаками:

$$a + (-b + c) = a - b + c.$$

Щоб розкрити дужки, перед якими стоїть знак «-», потрібно опустити дужки і знак «-», що стоїть перед ними, і записати всі доданки, які були в дужках, з протилежними знаками:

$$a - (b - c) = a - (+b - c) = a - b + c.$$

28. Щоб звести подібні доданки, потрібно додати їх коефіцієнти і результат помножити на спільну буквену частину.

$$\text{Наприклад: } 7a - 9a + 4a = (7 - 9 + 4)a = 2a.$$

ВІДПОВІДІ

§ 1

15. $a = -3$. 16. $a = 23$. 17. *Вказівка*. Обгрунтуйте, що для $x = 2$ значення лівої частини рівняння є непарним числом. 20. 3750 грн. 21. 148 т. 32. а) 16; б) 1,125; в) $\frac{2}{15}$; г) $-\frac{7}{8}$.
33. а) 0,2; б) $-1\frac{1}{2}$. 34. а) -1; б) $-1\frac{4}{9}$. 35. а) $\frac{1}{3}$; б) 6. 36. а) -3; -2; -1; б) 0; 1; 2; 3; $5\frac{1}{3}$.
39. а) 54 080 жителів; б) 50 000 жителів. 48. а) 2; б) -35; в) -10,2; г) 4. 49. а) 2; б) 0,7; в) -0,1; г) 6. 50. а) 5; б) 2,5; в) 2,5; г) 3,5; д) -4; е) коренів немає. 51. 0. 52. 4. 53. 3.
54. а) 1; б) 5; в) -2; г) коренем рівняння є будь-яке число. 55. а) $-\frac{4}{5}$; б) $1\frac{8}{9}$; в) $-1\frac{2}{3}$; г) 0. 56. а) 10; б) -1; в) -8; г) $-1\frac{1}{4}$. 57. г) -2; 9; д) 2,5; 5; е) $\frac{2}{7}$. 58. а) -4; 4; б) -2; 2; в) коренів немає. 59. а) -4; 4; б) -5; 11; в) коренів немає; г) 7; д) -3; 3; е) -16; 16.
60. а) 1; б) $-\frac{2}{7}$. 61. а) 8; 12; б) -6; -2; в) -1; 1; г) -0,5; 1,5. 62. а) 5; б) -3; 2; в) 4; г) коренів немає; д) коренем рівняння є будь-яке недодатне число; е) коренем рівняння є будь-яке невід'ємне число. 63. а) 0; б) коренів немає; в) коренів немає. 64. 19.
- Вказівка*. Число a має бути дільником числа $4389 = 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19$. Встановлюємо, що лише дільник $3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$ є трицифровим числом, яке закінчується цифрою 1.
69. 30 яблук. 70. 40 кг; 28 кг. 71. 18 і 15 комп'ютерів. 72. 105 т. 73. 36 і 12 років. 74. 16 і 20 деталей. 75. 300 сторінок. 76. 90 км. 77. а) 9 см; 6 см; 10 см; б) 10,5 см; 5,5 см; 9 см. 78. Олег — 2 грн.; Сергій — 6 грн.; Віталій — 4 грн. 79. 130 кг; 150 кг; 180 кг. 80. 52,5 кг; 45 кг; 37,5 кг. 81. 66 і 54 яблук. 82. 20 км/год; 16 км/год; 12 км. 83. 400 км. 84. 200 км. 85. 30 км. 86. 21 км/год. 87. 40 км. 88. 56 км/год; 60 км/год. 89. 56, 14 і 11 років. 90. 60 і 35 книжок. 91. 80 семикласників. 92. 90 деталей. 93. 350 грн. 94. 10 хв; 40 хв. 95. 28 учнів. 96. 8 ц, 2 ц. 97. 40 л; 30 л. 98. 500 г. 99. 38 т. 102. 34. 105. 30 способами. 109. в) 2; г) 5; д) -2,6; е) 4. 110. а) 5; б) -1. 111. а) коренів немає; б) -2; 2. 112. а) 0; 4; б) -2; 1. 113. а) 7; б) -0,6. 114. $a = 0$. 115. Не існує. 116. 108 см². 117. 8 см; 12 см; 10 см. 118. 70 га. 119. 15 км. 120. 1,2 год. 121. 3 кг; 7 кг. 122. 40 л.

Завдання для самоперевірки № 1

1. в). 2. б). 3. а); г). 4. б). 5. в). 7. а) — 1); б) — 3); в) — 1); г) — 2). 8. а) 1; б) $\frac{1}{8}$.
9. 5 км/год. 10. Ні. 11. а) $-\frac{5}{8}$; б) 14. 12. 51 м; 30 м. 13. 5 год. 15. а) $1\frac{1}{3}$; б) -2; 2.
16. 300 м. 17. 1,5 кг.

§ 2

138. 2400 кг. 139. 160 дегалей. 142. а) 22,45; б) 530. 143. а) $4\frac{1}{6}$; б) 4,6. 146. $x = 2,5$.
147. $x = -7$. 148. $x = 2$. 161. 120; 5040; 2 нулями; 24 нулями. 164. 23 числа. 165. $6n + 5$.
166. а) 17,6 кг; б) 25 кг. 179. а) $44a + 40$; б) $8,5b - 4a$; в) $-6y + 4$; г) $-2x - 23y - 6$.
180. а) $2x - 11z$; б) $-14a + 15b - 3$. 181. а) -6,9; б) -11; в) 28. 182. а) -4; б) 27.
192. а) $28c + 26$; б) $x - 4,5$; в) $-6x + 2y + 3z$; г) $4a - 11\frac{1}{3}b$; д) $-6x + 18$; е) $15n - 20$.
193. а) $6a + 12$; б) $1,5a - 5,4b$; в) $12n + 18$; г) $\frac{2}{9}x - \frac{4}{9}y + \frac{2}{9}$. 196. а) 1; б) 2. 197. а) -3;
б) 0,5. 209. а) -5; 5; б) -7; -3; в) -3. 210. -15; 5; 20. 211. 60 км/год. 212. $\frac{1}{2}$.
218. а) $35 - 54a$; б) $5x - 10$; в) $x - 4y - 9$; г) $7b + 5$; д) $-0,1x + 2y - 1,2$; е) $2,5a + 15$.
219. а) -47; б) 0,1. 220. 13. 221. $x = 1,8$.

Завдання для самоперевірки № 2

1. г). 2. б). 3. б). 4. в). 5. в). 6. $2a - b$. 7. $13a + 8,2$. 8. $-2,5x + 2,75$; 0,75. 10. $6a - 2$.
11. 8,24. 12. $4a - 3b$. 14. $-\frac{3}{14}$. 15. $8a - 17$.

§ 3

249. 11; 1; 1; 5; 31. 250. -5; 0; 22. 254. а) 0; 100; 0; б) 0; 99; -1; в) 0; 1; 1; г) 0; 1; 1.
258. в) 2; г) -35. 259. 7 матчів виграла, 2 зіграла внічию. 260. -5; -10; -9.
278. а) 10 000; б) 1 000 000; в) 1; г) 100 000; д) $4\frac{17}{27}$; е) 1; є) 1; ж) $5\frac{5}{7}$. 279. а) 1000;
б) 1 000 000; в) 1; д) 81; е) $-9\frac{1}{3}$. 282. а) a^{m+2} . 283. а) a^{35} ; б) a^{18} ; г) a^{15} . 284. б) a^{15} ;
г) a^{12} . 290. г) 33. 291. 20 виразів. 292. 117 км. 293. 250 м³. 306. а) $-1,25a^7b^5$; б) $0,27a^6b^5$;
в) $-x^5y^8$; г) $16a^6b^{12}$; д) $-0,5m^{10}n^8$; е) $1,1a^7b^7c^7$. 307. а) $-25m^4n^3$; б) $-0,1p^5q^3$; в) $-9a^{12}b^5$;
г) $-1,5x^9y^5z^6$. 312. а) 12; б) 4; в) 64; г) -24. 313. а) 400 000; б) 1; в) -32. 314. а) -10;
б) 256. 315. а) $16x^{48}$; б) $2x^{22n}$; в) $8a^{4n+2}b^{4n+2}$; г) $-x^{8n+5}$. 316. а) 1; б) 0,16. 317. У 8 разів.

318. а) 2; **б)** -1 . **320.** 1000 грн. **321.** 855 км. **331. а)** $-2a^5b$; **б)** a^3b^3 ; **в)** $-x^4y^2$; **г)** $-112a^7b^4$; **д)** $-10x^6z^5$; **е)** $81a^{12}b^{16}c^{20}d^4$; **є)** $-0,2a^5b^5$; **ж)** $-10x^3y^5$; **з)** $-256m^8n^{21}$. **333. а)** 27; **б)** -320 . **334. в)** 1; **г)** 256. **337. а)** 0; **б)** коренів немає; **в)** 0.

Завдання для самоперевірки № 3

1. в). **2. б).** **3. г).** **4. в).** **5. г).** **6. а)** -2 ; **б)** -1 ; **в)** -3 . **7. а)** 44; **б)** 80; **в)** 1000. **8. а)** $6a^5$; **б)** $-1,5a^5b^5$; **в)** $16a^4c^{12}$. **9. а)** 1; **б)** 20 000. **10. а)** 6^{36} ; **б)** 3^{46} ; **в)** 2^{24} . **11. а)** $36x^8y^8$; **б)** $63a^8b^{12}c^{12}$; **в)** $-0,0016m^{47}n^{60}$; **г)** $6,25a^{11}x^{11}$. **12. а)** Наприклад, $2a^2b^2 \cdot 4a^{10}b^{10} \cdot 8b^6$; **б)** $(-4a^5b^8) \cdot (-16a^7b^{10})$; **в)** $(4a^4b^6)^3$. **13. а)** 256; **б)** 32. **14. а)** 2^{4n+10} ; **б)** 2^{9n+22} . **15. а)** 1; **б)** 9. **16. 4.** **17. а)** 0; **б)** коренів немає.

§ 4

346. а) 12; **б)** 2,21; **в)** -18 . **347. а)** 28; **б)** 0. **350. а)** $-0,44$; **б)** -10 . **351. а)** 168; **б)** 2. **356. Вказівка.** Припустимо, що для $x = n$, де n — ціле число, значення многочлена дорівнює нулю. Тоді правильною є рівність $n^5 - 6n^2 + 1 = 0$. Обґрунтуйте, виходячи з цієї рівності, що 1 має ділитися на n , звідки $n = 1$ або $n = -1$. Однак, якщо $n = 1$ або $n = -1$, то дана рівність є неправильною. **359. а)** -2 ; **б)** $-0,6$; **в)** 0,5; **г)** 0,75. **360.** 18,4 км/год. **372. а)** 0,8; **б)** -2 . **373. а)** 0,5; **б)** $-0,8$. **374. а)** a^2b^3 ; **б)** $-x^4 - 2x - 11$; **в)** $2xy - 2x^2$; **г)** $-5a^2 - 5b - 3$. **375. а)** $-x^2 - 5x$; **б)** $8ab + 4b^2$; **в)** $-n^2 + 7n$. **376. а)** $P = -3x^2 - x + 3$; **б)** $P = x^2 + 2$; **в)** $P = 3x^2$. **377.** $-2x^2 + 2x + 6$. **378. а)** 2; **б)** $-1,75$. **379. а)** $-1,2$; **б)** 2. **382.** Порівну. **383.** $a = -1$, $b = 1$. **387.** 400 г. **391. б)** $-10a^2 - 8a$; **в)** $2a^5 - a^3$; **г)** $-12x^3 - 2x$. **392. а)** $-3a^3$; **б)** $4b^3 - 4b + 1$. **393. а)** $2a^2$; **б)** $-2y^2$; **в)** $-3m - 6$; **г)** 0. **394. а)** c^3 ; **б)** $-5x^3 - 15x^2$; **в)** $4a^2$; **г)** 0. **395. а)** -1 ; **б)** 2,5; **в)** $-0,75$; **г)** б. **396. а)** 1; **б)** 2,4. **397. а)** $-2a^2 - 8a + 8$; **б)** $15x^6 - 18x^4$; **в)** $-8m^4n^3 + 8m^4n^2$; **г)** $-2x^2 + x$; **д)** $11abc$; **е)** $-18x^5y^2$. **398. а)** $2a^3$; **б)** $-4xy^2 + 2x$; **в)** $-8m^3n^5$; **г)** $-\frac{2}{3}a^2b^2 - 4a^4$. **405. а)** 5; **б)** 0,7; **в)** 3; **г)** 2. **406. а)** -15 ; **б)** 2; **в)** 1; **г)** 1,5. **407. а)** -1 ; **б)** 4. **408. а)** 0; **б)** 3. **409.** 1,5; 8,5. **410.** 60 см². **411.** 200 м². **412. а)** 0; **б)** $-a^n$; **в)** $x^{3n+4} + x^{3n+2}$. **415.** Хлопців на 5 більше, ніж дівчат. **416.** $(3 - 2x + \frac{1}{3}x^2)$ л. *Вказівка.* Після першого відливання і доливання води в 1 л суміші міститься $\frac{3-x}{3}$ л спирту. **417.** 90 км. **418.** 180 км. **419.** 60 піратів. **427. а)** $6a^2 - 4$; **б)** -12 ; **в)** -15 ; **г)** $a^3 + a$; **д)** $a^2 - 3b^2$; **е)** $-4y^2$. **428. а)** $7x + 6$; **б)** $3a^2$; **в)** $5ab - 8b^2$; **г)** $2m^2 - 15n^2$. **429. а)** 5; **б)** 0,6. **430. а)** 4; **б)** 1. **435. а)** $12a^2 - 10$; **б)** $45x - 4$;

- в)** $5a$; **г)** $7b^3$; **д)** $14x^4y^2$. **436. а)** $18x^2 - 15$; **б)** $-35b + 10$; **в)** $x^3 + 9y^3$; **г)** $2ab$. **437. а)** 1,8; **б)** 2; **в)** -1; **г)** 2. **438. а)** $1\frac{1}{3}$; **б)** 4; **в)** коренем є будь-яке число. **446.** 3; 4; 5. **447.** 9 см; 5 см. **448.** 8 см; 4 см. **449.** 0. **450. а)** $a^n + b^n$; **б)** $2^{n+3} + 5$. **455.** 223. **456.** 50 к. **457.** 3 км/год. **458.** 25,2 км. **474. а)** 6,25; **б)** 103. **475. а)** 1,96; **б)** 28. **476. а)** 0; 5; **б)** 0; -3. **477. а)** 0; -2; **б)** 0; 2. **478. а)** $ab^3(a + b - ab)$; **б)** $12x^4y^3(3 - 4x^2y)$; **в)** $8a^2b^2(3b - 2ab - 5a)$; **г)** $-0,6m^4n^5(5n - 2m + 7mn)$; **д)** $\frac{2}{15}x^2y^3z^2(xy - 2z + 7xz^2)$; **е)** $\frac{4}{9}abc(c + 2b - 4a)$. **479. а)** $2x^4z^3(1 + 2z - 2z^2)$; **б)** $15a^2b^2(3a^2 - 4ab + 5b^2)$; **в)** $-1,8m^2n^4(2n - 3m + 5)$; **г)** $\frac{3}{7}x^3y^3z^4(2x^2 - y^2 + 4z)$. **480. а)** $(m + k)(a - b)$; **г)** $(a - b)(m - 3)$; **е)** $(x - 2)(x + 2)$; **е)** $(a - b)(2x - a + b)$; **ж)** $2x(a + b)(2 + a + b)$. **481. а)** $(x - k)(m - n)$; **в)** $(s - t)(a - b)$; **г)** $(a - b)(2 + x)$; **д)** $(m - 4)(m - 9)$; **е)** $(m - n)(x + 2m - 2n)$. **482. а)** 0,5; **б)** $\frac{17}{21}$. **483. а)** 5; **б)** 0. **484. а)** 0; -20; **б)** 0; 0,4; **в)** 0; $\frac{2}{5}$. **485. а)** 0; 0,2; **б)** 0; -0,2; **в)** 0; $1\frac{3}{4}$. **492.** 12 см; 10 см; 5 см. **493.** 350 км. **496. а)** 26,3; **б)** 1; **в)** $\frac{1}{3}$. **498. е)** $(1 - 2n)(a - b)$; **ж)** $(y - 1)(4a - 3)$. **499. г)** $(c + b)(6 - a)$; **д)** $(x + y)(1 - b)$; **е)** $(a - 1)(7m + 5x)$. **500. а)** $(a + 1)(a^2 + 1)$; **б)** $(x - 4)(x^2 + 2)$; **в)** $(b - a)(b - 2)$; **г)** $(x + y)(10 + x)$; **д)** $(3 - x)(a + x)$; **е)** $(a - 1)(xy + 5)$. **501. а)** $(x + 2)(x^2 + 1)$; **б)** $(a^2 + 5)(a^4 + 5)$; **в)** $(a + 2b)(a + 3)$; **г)** $(x + 3a)(x - 2)$. **502. а)** $(a^2 + b^2)(1 - ay)$; **б)** $(b - y)(bn - y)$; **в)** $(c + 2)(3a^2 - 5bc)$; **г)** $(2x^2 + 3y)(6 + 5x)$; **д)** $(3y - 4x)(0,3a + 0,4y)$; **е)** $(\frac{1}{17}x + \frac{4}{17}yz)(3xyz - 1)$. **503. а)** $(y^2 - a)(x^2 + 2y)$; **б)** $(a - 2c)(2ab - 1)$; **в)** $(2x^3 + 3y^2)(3y + 4z^2)$; **г)** $(n^2 + 3m^2)(0,2mn - 0,5)$. **504. а)** $(a - b + c)(x + 3)$; **б)** $(x^2 - y^2 + 4z)(a - 4b)$; **в)** $(a + b)(-5 + 3n - m)$; **г)** $(b + c)(n^2 + p^2 - p)$. **505. а)** $(a + b + 2)(ab + 1)$; **б)** $(a - b + 1)(c + d)$; **в)** $(a + b)(2a^2 + 2b - 1)$. **506. а)** 2,5; **б)** 37; **в)** 0. **507. а)** 38; **б)** $-9\frac{4}{9}$. **508.** $(a + b - 1)(a^2 + b^2)$. **510.** Якщо $x > 3$, то значення многочлена додатні; якщо $x < 3$, — від'ємні. **511.** 1; 5. **512. а)** $(a - 2)(a - 5)$; **б)** $(x + 1)(x + 4)$; **в)** $(x + y)(x + 2y)$; **г)** $(a - 3b)(a - 4b)$. **513. а)** 1; 2; **б)** -5; -3. **514. а)** -2; 0; **б)** 1; 2; 3; 4. **516.** 1 грн. 20 к. **517.** 60 і 35 книжок. **518.** 26,5 т; 28 т. **525. а)** $12b^2 - 14b$; **б)** $4x + 8$; **в)** $-ab^2 + 2a - 1$; **г)** 0; **д)** $4bc$; **е)** 0. **527. а)** -1; **б)** -1,5; **в)** 16; **г)** -31. **530.** 7 см; 5 см. **531. а)** 0,6; **б)** коренів немає; **в)** -1. **533. а)** $(a + b)(2 + x)$; **б)** $(x - y)(3 - a)$; **в)** $(x + 2)(x^2 + 1)$; **г)** $(1 - 2y)(0,1x + 0,2y)$; **д)** $5(b + 2)(a^2 - 2bc)$; **е)** $(4z - 5y)(x^2 - 5y^2)$.

534. а) $(x-7)(x-2)$; б) $(x+2)(x+6)$. 535. а) 0; 3; б) 0; -2; в) 0; -2,5; г) 0; $2\frac{2}{3}$. 536. а) 2; 3; б) -3; -1. 537. а) -18; б) 85; в) 42. 541. 0,5.

Завдання для самоперевірки № 4

1. в). 2. в). 3. б). 4. г). 5. в). 6. б). 7. а) $2a - 6$; б) $-x^2 - 3x - 1$. 8. а) $6x^4 - 2x^3 + 2x^2$; б) $6a^2 - 19ab + 10b^2$. 9. а) $4x(1-3x)$; б) $-10(2+a)$; в) $2a^2b(1+2a-a^2)$. 10. 75. 11. а) 0; 0,5; б) 0; -4. 12. $5x^4 - 4x^2 + 3x$. 13. а) $-3,2x^7y^5 + 6,8x^5y^3$; б) $2a^3 - 7a^2b - 6ab^2 + 8b^3$. 14. а) 3; б) 0; 1. 15. а) $(m-n)(m-2n+3)$; б) $(a-x)(am-x)$. 17. а) $a^3b - 2\frac{13}{15}a^2b^2 + 2ab^3$; б) $x^3 + 6x^2y + 11xy^2 + 6y^3$. 18. -9. 19. а) -6; б) $-\frac{3}{5}; \frac{3}{5}$. 20. а) $(a-b)\left(\frac{2}{9} + a - b\right)$; б) $(x+2)(x+a)$. 21. 20 см²; 14 см².

§ 5

551. а) 3; б) -5; в) $-4x^4$; г) $64c^8$; д) $9a^2b^2$; е) $8a^2$; є) $-6b^3 + 24b$. 552. а) 7; б) $25 - 2c$; в) a^6 ; г) $-4z^4$; д) 0. 553. а) $z^2 + 1$; б) $\frac{9}{49}a^2 + \frac{21}{25}b^2$; в) $-x^2 - \frac{2}{3}$; г) $1\frac{1}{9}a^4$. 554. а) $\frac{1}{4}a^2$; б) $6b^2 - 2\frac{7}{9}$. 555. а) $b^4 - 1$; б) $16x^4 - 1$; в) $16 - y^4$; г) $81n^4 - 256$; д) $y^4 - 16z^4$; е) $a^8 - 1$. 556. а) $81 - c^4$; б) $z^4 - 625$; в) $256x^4 - y^4$; г) $81k^8 - 16$. 559. а) 5; б) 0,5; в) 1; г) 0. 560. а) 0,5; б) 0,4. 561. а) 0; б) $a^{32} - b^{32}$. 562. Вказівка. Врахувавши, що $a - b = 1$, ліву частину рівності можна записати у вигляді $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)$. 564. -1. 566. 5 км/год. 567. 10%. 568. 1,35 кг. 576. а) $2a^2 + 2$; б) b^2 ; в) $-20x$; г) $2x - 2$. 577. а) 16; б) $2x^2 + 8$. 578. а) 1; б) -2. 579. а) -5; б) 1. 588. а) $-8a$; б) 1; в) $12n^2 + 2$; г) $a^2 + b^2 + 2ab$. 589. а) $2a^2 + 8b^2$; б) $x^4 + 25x$; в) $a^2 + b^2 - 1$. 590. а) -0,3; б) 2; в) 0,5; г) 0,25. 591. а) 1; б) -9; в) -1. 593. $-4a^{20}b^{20}$. 596. 2. 597. Вказівка. Розгляньте можливі випадки: 1) $m = 5k + 1$; 2) $m = 5k + 2$; 3) $m = 5k + 3$; 4) $m = 5k + 4$, де k — ціле число. 599. 48; 60. 600. 12,6; 7. 601. 51 і 30 деталей. 616. а) $(a+1)(a+3)$; б) $(3b-3)(3b+1)$; в) $(2-3b)(6+3b)$; г) $(2a-5-5b)(2a-5+5b)$; д) $(x+1)(7x+5)$; е) $(-2a-8b)(4a+2b)$. 617. а) $(2x-4)(2x+2)$; б) $(-2a-3)(6a+3)$; в) $(-x+y)(9x-3y)$. 618. -34,4; $2\frac{1}{7}$. 619. 44; $\frac{2}{7}$. 620. а) -2; -4; б) 1; -0,2; в) -5; -1; г) -6; 0. 621. а) 2; 3; б) 1; 3. 625. а) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)$; б) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)$. 626. а) -2; 2; б) -1; 1; в) -4; 0. 629. а) 12 років; б) 6 років. 630. 80 км/год. 637. а) 100; 0,01; 400; б) 400; 10 000. 638. 100; 100. 641. а) 1; б) 100; 81. 642. $\frac{1}{9}$. 643. а) 4; б) -6. 644. а) 3;

- б) -5. **645. а)** 25; **б)** $\frac{1}{81}$. **647.** $x = \frac{2}{3}$, $y = -2$. **648.** Коренем є будь-яке число.
649. а) 0,0081; **б)** 25. **650. 0;** 0,25. **664. в)** $(3a^2 - 5)(9a^4 + 15a^2 + 25)$;
 е) $(10 - ab^3c^4)(100 + 10ab^3c^4 + a^2b^6c^8)$. **665. в)** $(0,4x^3y^2z - 3)(0,16x^6y^4z^2 + 1,2x^3y^2z + 9)$.
668. а) a^3 ; **б)** x^6 ; **в)** 0; **г)** 16. **669. а)** x^3 ; **б)** $2b^3$. **670. а)** -2; **б)** 4,5. **671. а)** 1; **б)** 8.
675. 11,375. **676. а)** $2x^2 + 2y^2$; **б)** $10ab$; **в)** $-a^2$. **677. а)** 9; **б)** 12. **678.** 105 км. **679. а)** 7;
 -0,6; **б)** 0; 1; -3. *Вказівка.* $|a| = |b|$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$ або $a = -b$.
680. г) $4a(a - 1)(a + 1)$; **д)** $x^2(x - 1)(x + 1)$; **е)** $c(a - 3b)(a + 3b)$; **ж)** $c(3 + b)(9 - 3b + b^2)$.
681. г) $3y^2(y - 1)(y + 1)$; **д)** $2x(3y - 1)(3y + 1)$; **е)** $6a(1 - b)(1 + b + b^2)$; **ж)** $a^3(1 - a)(1 + a)$.
682. б) $-(b - c)^2$; **д)** $a(3a + 1)^2$; **е)** $m(1 - 5m)^2$. **683. в)** $-6(a - 2b)^2$; **г)** $x(x - 6)^2$. **684. а)** 800;
 б) 125. **685. а)** 300; **б)** 26 000. **686. а)** -3; 3; **б)** -0,5; 0,5. **687. а)** -5; 5; **б)** -0,2; 0,2.
688. а) $(a - n)(a + n)(a^2 + n^2)$; **б)** $(k - 2)(k + 2)(k^2 + 4)$. **689. а)** $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$;
 б) $(3 - b)(3 + b)(9 + b^2)$. **690. а)** $3(m + 8)(n - 3)$; **б)** $x^3(b - 1)(x + 1)$; **в)** $-4c(a + 8)(b + 3)$;
 г) $2y^2(y - a)(y - b)$; **д)** $0,5a(a + x)(3 - x)$; **е)** $xy(a - 1)(xy + 5)$. **691. а)** $2c(1 + x)(2a + b)$;
 б) $m(a - b)(m + 3)$; **в)** $-ab(a + b)(a + 1)$; **г)** $0,2x^2(x + 3y)(x - 2)$. **692. а)** $(x - y - z)(x - y + z)$;
 б) $\left(\frac{2}{3}x - a - b\right)\left(\frac{2}{3}x + a + b\right)$; **в)** $(c - 3 - k)(c - 3 + k)$; **г)** $(2x - y - 2)(2x + y + 2)$.
693. а) $(m + n - k)(m + n + k)$; **б)** $\left(\frac{3}{4}a - 2x - y\right)\left(\frac{3}{4}a + 2x + y\right)$; **в)** $(a - 4 - b)(a - 4 + b)$;
 г) $(p - q + 5)(p + q - 5)$. **695. 0.** **696. а)** $(a + b)(a - b + 1)$; **б)** $(x - a)(x + a + 1)$;
 в) $(2x - y)(2x + y - 1)$; **г)** $(x - y)(3,5x + 3,5y - 1)$. **697. а)** $(c - b)(c + b + 1)$;
 б) $(x + y)(1 + x - y)$; **в)** $(a - x)(a + x + 4,8b)$. **698. а)** 66; **б)** 19 200. **699. а)** 31; **б)** 20 400.
700. а) -1; 0; 1; **б)** -0,5; 0; 0,5; **в)** -2; 2; 4; **г)** -2; 0,5; 2; **д)** -1; 0; 1; **е)** 2. **701. а)** -2; 0; 2;
 б) -0,5; 0; 0,5; **в)** -3; 1; 3; **г)** -1; 0,25; 1. **702. а)** $(x - 2)(x + 4)$; **б)** $(a - 6)(a - 2)$;
 в) $(2c - 3)(2c + 1)$; **г)** $(x - 5y)(x - y)$; **д)** $(a + b)(a + 11b)$; **е)** $(3a - 4b)(3a + 2b)$.
703. а) $(a - b)(2a - 2b + 1)$; **б)** $3ab(a - b)$. **704. а)** 1; 7; **б)** -10; -2; **в)** 3; 5; **г)** -2; 1; 2; 3.
710. а) 36; **б)** -3. **712.** 0,4 кг. **713.** 2,2 кг. **714.** 50%. **725. а)** 0 (якщо $x = 2$);
 б) 3 (якщо $x = 2$). **726. а)** 0 (якщо $a = -3$); **б)** 1 (якщо $x = 3$). **732. а)** -7 (якщо $x = 1$);
 б) 7 (якщо $a = -2$); **734. а)** 3; 4; **б)** -3; 4. **735. а)** Коренів немає; **б)** 1. **737. а)** *Вказівка.*
 Рівність можна записати у вигляді $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + 1 = 0$. **738.** 2 + 2. **739.** Так.
741. 3 км/год. **742.** 124 га; 186 га; 258 га. **746. а)** -27; **б)** $6x^2 - 2$; **в)** $29a^2$;
 г) $-2ab - 2bc - 2ca$; **д)** $2a^8$. **749. а)** -5; **б)** -0,5; **в)** $\frac{19}{100}$; **г)** $\frac{4}{45}$. **752. в)** $x^2y^2(x - y)(x + y)$;
 д) $(c - 1)^2(c + 1)^2$; **е)** $(a - b - 1)(a - b + 1)$; **є)** $(m + 4)(9m - 4)$; **ж)** $(x + y)(x - y - 1)$;
 з) $(a - b)(a + 3b)$. **754. а)** $(a - 1)(a + 1)^2(a^2 - a + 1)$; **б)** $(z - 2)(z + 1)(z^2 + 2z + 4)$;

в) $2(x-1)^2(x^2+x+1)$. **755. а)** $(x^2+xy+y^2)^2(1-x+y)(1+x-y)$; **б)** $(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.
756. а) -3; 0; 3; **б)** -1; 0; 1; **в)** -1; 1; 5; **г)** -1,5; -1; 1. **757. а)** коренів немає; **б)** 0; **в)** 1.
762. а) 1; **б)** 16.

Завдання для самоперевірки № 5

1. г). **2. в).** **3. в).** **4. в).** **5. г).** **6. б).** **7.** $-2a+10$; **9. 8. а)** $9b^2+24b+16$; **б)** $4a^2-20a+25$.
9. а) -2; **б)** -3. **10. а)** $(3y-4)(3y+4)$; **б)** $3(x-y)(x+y)$; **в)** $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$.
11. а) $(3a+2)^2$; **б)** $(10a-b)^2$. **12. а)** $98y^2$; **б)** $-6b^2+5$. **14. а)** $(a^3-2b^2)(a^3+2b^2)$;
б) $(0,1a-3b)(0,01a^2+0,3ab+9b^2)$; **в)** $0,4a^2(a+1)^2$. **16. а)** 0; 1,5; **б)** -5; **7. 17. а)** $x^4-8x^2y^4$;
б) a^6-1 . **18. а)** $(m^2+mn+n^2)(m-n+3)$; **б)** $(a+b+c-x)(a+b+c+x)$. **19. а)** $-\frac{1}{4}$;
б) -9; -1; 1.

§ 6

787. а) $x=0$; $x=4$; **б)** $x=2$. **788. а)** $x=-2$; $x=0$; **б)** $x=-1$. **791.** -2. **792.** -4; 0; 4.
793. Так, наприклад, якщо $x=-a$. **794.** 1 год 10 хв. **795.** 192 числа. **812. в)** $t=0$; $t=20$;
г) $5 \leq t \leq 10$; 50 м. **813. б)** 0,5 год; **в)** 4 км/год; 5 км/год; **г)** 4 км/год. **819.** $x=0,6$.
820. а) -1,5; 0,5; **б)** -1. **821.** 5 кг. **855.** $x < 1,75$. **856.** $x < 4$. **864.** Так. **865.** $a=5$. **868. а)** 0;
б) $8-4x^2$. **871.** 25%. **872.** 27 л; 9 л. **873.** 2,5 км/год. **874. в)** $x=0,75$. **875. в)** 32°F ; 212°F .
885. $k=-0,5$. **888.** -1; 2 — корені рівняння. **889. а)** $k=0,5$; **б)** $k=5$.

Завдання для самоперевірки № 6

1. г). **2. в).** **3. б).** **4. б).** **5. б).** **6. а); г).** **7. а)** — 3); **б)** — 2); **в)** — 4); **г)** — 1). **8.** 2; -2,5.
9. а) -2; **б)** -3; 0. **11.** Так. **12.** Область визначення: $-4 \leq x \leq 4$. Область значень:
 $-3 \leq y \leq 3$. Функція набуває від'ємних значень, якщо $-3,5 < x < 2$. **13.** 0; 6. **14.** $x=-1$ —
 нуль функції. Функція набуває від'ємних значень, якщо $x > -1$. **15.** (2,8; 3,4). **16.** Так.
17. $y=-7$. **18.** $x=-3$; $x=1$. **19.** Так. **20.** $x < -1$.

§ 7

903. (2; 2). **904.** 4. **905.** 3. **906. а)** $(x; -3)$, де x — будь-яке число; **б)** $(3; y)$, де y — будь-
 яке число. **907. б)** $x=2k$, $y=5-3k$, де k — будь-яке ціле число; **в)** $x=9k+3$, $y=4k+2$,
 де k — будь-яке ціле число. **908.** (9; 2); (3; 7). **909.** $a=0,2$. **910.** 8008 одиниць.
911. 250%. **926.** 1. **927.** -2. **928.** -2. **929.** 2. **930.** Існує: $a=1$. **933. а)** $(x+y)(7+a)$;
б) $(x-3)(x-1)$; **г)** $c(2a+2b+c)$. **934.** -15. **935.** 28; 16. **936.** $x=4-5k$, $y=3k-1$, де k —

будь-яке ціле число. **939. а)** (4; 2); **б)** (0; 4); **в)** (2; 1); **г)** (-1; 1). **940. а)** (1; 1); **б)** (3; -4); **в)** (3; 4). **944. а)** Безліч; **б)** немає; **в)** один; **г)** безліч. **945. а)** Безліч; **б)** немає; **в)** один. **947. а)** $a = 0$; $b = 3$. **948. а)** (-1; 1); **б)** (-1,5; 3); (1,5; 3); **в)** (2; 2); (-1; 1). **949. а)** 2; **б)** 0,6; **в)** 5; **г)** 3. **951.** $\frac{1}{4}$. **953. а)** (1; 3); **б)** (7; -4,5). **954. а)** (1; 3); **б)** (4; 1); **в)** (3; 1); **г)** (1; -2); **д)** розв'язків немає; **е)** (3; 2). **955. а)** (4; 0); **б)** (3; 5); **в)** (1,5; -2); **г)** (3; -1); **д)** (7; 1); **е)** (1; -1). **956. а)** (2; 1,5); **б)** (1; -2); **в)** (20; 0,5); **г)** (3; 3). **957. а)** (1; 0,5); **б)** (1; -1); **в)** (2; 10). **958. а)** (2; -2); **б)** (4; 5). **959.** (3; -3). **960. а)** (3; -2); **б)** (-11; 65); **в)** (1; -6); **г)** розв'язків немає; **д)** (0,5; 1,5); **е)** (12; -8). **961. а)** (2; 4); **б)** (-2; -1); **в)** (-6; -4); **г)** (5; 3). **963.** $y = -x + 4$. **964.** $y = -0,5x + 0,5$. **965. а)** (4; 1); **б)** (4; 3); **в)** (5; 2); **г)** (6; 3); **д)** $\left(\frac{3}{4}; -\frac{1}{6}\right)$. **966.** $a = -1,5$. **967.** $b = 1,5$. **968. а)** $(x-3)(2-y)$; **б)** $y(y-5)^2$; **в)** $(-a-2b)(3a-2b)$. **970.** 1; 49. **971.** -10. **972.** Ні. **973. а)** (4; 3); **б)** (-2; -3); **в)** (0,5; 1). **974. а)** (-1; 2); **б)** (-2; 4); **в)** (5; 1). **975. а)** (3; -1); **б)** (0; -2); **в)** (-1; 3). **976. а)** (-1; -1); **б)** (2; -2); **в)** (4; -3); **г)** (0,5; -0,5); **д)** (1; -1); **е)** (1; -2). **977. а)** (1; -2); **б)** (5; 6); **в)** (5; 0,5); **г)** (6; 4). **978. а)** (20; 1); **б)** $\left(11\frac{2}{3}; 20\right)$; **в)** (48; 55); **г)** $\left(1\frac{1}{5}; 1\right)$. **979. а)** (2,5; 10); **б)** (-2; 4). **980. а)** (3,5; 4,5); **б)** $\left(\frac{11}{17}; -\frac{1}{17}\right)$; **в)** $\left(3; -\frac{1}{5}\right)$; **г)** $\left(-1; -\frac{1}{4}\right)$. **981. а)** (2,5; 1); **б)** (16; -23). **982. а)** Ні; **б)** так. **983. а)** Так; **б)** ні. **985. а)** (-2; 0); **б)** (3; -1); (3; 1); **в)** (0,3; -1,2); **г)** (-2; 2). **986.** Якщо $a \neq 2$, — один розв'язок; якщо $a = 2$, — безліч розв'язків. **987.** $a = \frac{1}{42}$; $b = \frac{1}{7}$; $c = \frac{1}{3}$; $d = \frac{1}{2}$. **989.** 27; 9. **991.** 14 і 7 років. **992.** 500 грн. **993.** 3 грн.; 2 грн. **994.** 2 грн.; 1 грн. **995.** 8 кг; 7 кг. **996.** 4 т; 5 т. **997.** 57,5; 46,5. **998.** 60; 12. **999.** 5 двомісних; 9 тримісних. **1000.** 11 двомісних; 14 чотиримісних. **1001.** 80 км/год; 60 км/год. **1002.** 12 і 8 деталей. **1003.** 20 і 40 книжок. **1004.** 17 і 8 горбців. **1005.** 43 км/год; 3 км/год. **1006.** 45 км/год; 3 км/год. **1007.** 3 палки, 4 галки. **1008.** 5 і 7 мішків. **1009.** 17 тис. грн.; 7 тис. грн. **1010.** 60 т; 42 т. **1011.** 53. **1012.** 5 км/год; 4 км/год. **1013.** 50 км/год; 70 км/год. **1014.** 80; 36. **1015.** 50 л; 60 л. **1016.** 2 грн.; 1,5 грн. **1017.** 180 грн; 270 грн. **1018.** 48. **1019.** 57 км/год; 51 км/год; 85,5 км. **1020.** 42 км; 36 км. **1021.** 8 км. **1023. а)** $(1+3b)(a-c)$; **б)** $(x+y)(x-y+2)$; **в)** $(a-2b)(a+2b+1)$; **г)** $(c-a)(c-2a)$. **1034. а)** (2; 1); **б)** (-1; -1). **1035. а)** (4; -1); **б)** (2; -2); **в)** (0,5; -1). **1036. а)** (1; -5); **б)** (-1; -3); **в)** (3; 2). **1037.** (2; 1). **1038. а)** (5; 10); **б)** (4; 1); **в)** (1; -3); **г)** (0,5; 2); **д)** (6; 15); **е)** (10; 14). **1039.** (-1; 1). **1040.** 40 к.; 1 грн. 20 к.

1041. 8 і 12 монет. **1042.** 40 кг; 44 кг. **1043.** 2,7; 1,8. **1044.** 80 км/год; 100 км/год.
1045. 72 км/год; 96 км/год. **1046.** 1 грн.

Завдання для самоперевірки № 7

1. б). **2.** в). **3.** в). **4.** г). **5.** г). **6.** (3; 3); (2,6; 2). **7.** (3; 1). **8.** (5; 3). **9.** (2; 0). **10.** 2 кг; 5 кг.
11. $a = -2$. **12.** (2; 1). **13.** (4; 20). **14.** (-1; -5). **15.** 6 грн.; 9 грн. **16.** $a = 0,2$; $b = -2,6$.
17. (1; 2); (-3; 6). **18.** $(-\frac{3}{7}; \frac{3}{7})$. **19.** $a = 6$. **20.** 20 т; 50 т.

Задачі за курс алгебри 7 класу

1064. а) $-2x^2 - 9$; б) $-2c^3 + 2$. **1065.** а) $-19m^2 + 57m$; б) 25; в) $-11n^3 + 5n^2$; г) $50y^4 - 20y^3$.
1070. а) $(x - y)(a + 3)$; б) $(x + 1)(xy - 2)$; в) $y(3 - 2a)(3a - x)$; г) $(2x^2 + 3y^2)(4a - 5y)$.
1072. б) $(a + 2b)(a - 2b + 1)$; в) $(x - 2y - 2y^2)(x - 2y + 2y^2)$. **1073.** а) $(x - 3)(x + 1)$;
б) $(a - 1)(a + 4)$; в) $(x - y)(x - 7y)$. **1079.** $x = -1$. **1080.** $x = 2$. **1082.** Ні. **1083.** -5.
1085. Перший. **1086.** а) 15; б) 5; в) -20; г) 2; д) 1; е) $\frac{2}{27}$; є) 4; ж) -1. **1087.** а) 0,4; б) 3;
в) коренів немає; г) $2\frac{2}{3}$; д) -5; е) $\frac{2}{3}$. **1088.** а) 0; 3; б) -0,5; 0; 0,5; в) 3; г) -2; 2;
д) -8; б; е) 7; 8. **1089.** а) -1; 4; б) -8; 8. **1090.** а) -3; 3; б) 0; в) коренів немає.
1092. 1,5. **1094.** 37,2. **1095.** 3600 л; 1200 л. **1096.** 1 год. **1097.** 4 кг. **1098.** 130 км.
1103. Так. **1106.** $b = 6$. **1110.** а) (2; 2); б) (-1; -2); в) (4; 7). **1111.** а) (3; 1); б) (0,2; -1,2);
1112. а) $(2\frac{1}{3}; 9)$; б) (-4; -4). **1113.** (0,5; -1). **1114.** Так. **1115.** $y = -2x - 1$. **1116.** $k = 10$.
1118. 120 і 130 деталей. **1119.** 4,5 км/год; 4 км/год. **1120.** 7 років; 3 роки. **1121.** $3\frac{1}{3}$ л; $6\frac{2}{3}$ л.

Задачі підвищеної складності

1122. а) Коренів немає; б) 4. **1126.** а) Якщо $a \neq 0$, то $x = 5 : a$; якщо $a = 0$, то коренів немає; б) якщо $a \neq 0$, то $x = 0$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число;
д) якщо $a \neq 0$, то $x = 1$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число;
е) якщо $a \neq 0$, то $x = -4$; якщо $a = 0$, то коренем рівняння є будь-яке число.
1127. а) $a = 8$; б) не існують. **1128.** 290 км. **1129.** 450 г. **1130.** 200 мл.
1131. 20 км/год. **1134.** 12. **1139.** 121 яйце. **1140.** 0 або 9. **1144.** а) *Вказівка.* Доведіть, що запис числа $3^{4n} + 4$ закінчується цифрою 5. **1151.** 72. **1152.** а) 5; 0. **1156.** а) $x = 3a - 6$;
б) якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0$, то $x = 0$; якщо $a > 0$,

то $x = -0,25a$ і $x = 0,25a$. **1162. а)** $(a - 3b)(2 - a - 3b)$; **б)** $(9x + 8y - 7xy)(9x + 8y + 7xy)$; **в)** $(a + b + c)(ab + bc + ac)$. **1163.** $2a^2 + 2b^{2n}$. **1164. а)** -1 ; 1 ; **б)** $0,4$; **в)** -1 ; 1 . **116-1165. а)** $(a^2 + 2)(a^2 + 6)$; **б)** $(c - 4)(c - 2)(c - 1)(c + 1)$; **в)** $(a - 5)(a - 3)(a - 1)(a + 1)$; **г)** $(x - 1)(x + 1)^2(x + 3)$. **1166. а)** $(a - 1)(a + 1)(a^2 + 5)$; **б)** $(a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$. **1167. б)** $(2x + y + 1)^2$. **1171. а)** $m = 1, n = 1$; **б)** $m = 5, n = 1$; $m = 3, n = 3$; $m = 5, n = 9$. **1175. а)** -1 ; 0 ; 1 ; **б)** 1 . **1176. а)** 1 ; -1 ; 2 ; -2 ; **б)** -1 ; 1 . **1179. а)** Якщо $a \neq 2$, то $x = a + 2$; якщо $a = 2$, то коренем рівняння є будь-яке число; **б)** якщо $a \neq 2$, то $x = 2$; якщо $a = 2$, то коренем рівняння є будь-яке число. **1180.** $a = -6$. **1186.** $a = 0,2$. **1189. а)** $(-2,5; 0,25)$; **б)** $(0; 0)$; $(1; 1)$. **1190. а)** $(1; 2)$; $(-1; 2)$; **б)** $(3; 1)$; $(-3; 1)$. **1192.** Якщо $a \neq 0,5$, — один розв'язок, якщо $a = 0,5$, — безліч розв'язків. **1193.** $a > 0$. **1194.** $1\frac{1}{9}$. **1196.** Так, якщо всіх сходинок є 1001 ; ні, якщо всіх сходинок є 1000 . **1197. а)** Так; **б)** ні. **1198.** Ні. **120-0.** Перший і третій. **1201.** Так. **1202.** Ні.

Предметний покажчик

Аргумент.....	119	Пряма пропорційність	136
Властивості		Рівняння	
— лінійної функції.....	135	— з однією змінною.....	6
— рівнянь з однією змінною	9	— із двома змінними.....	152
— рівнянь із двома змінними	153	— лінійне	13
— степеня	51	Розв'язок рівняння із двома змінними	152
Вирази		Розв'язування систем лінійних рівнянь	
— зі змінними	32	— графічним способом.....	162
— цілі	32	— способом додавання	172
Віднімання многочленів.....	68	— способом підстановки.....	167
Графік		Розкладання многочленів на множники.....	80
— лінійного рівнянь із двома змінними	156	— способом винесення спільного множника за дужки	81
— лінійної функції.....	134	— способом групування	85
— функції	124	Система лінійних рівнянь із двома змінними.....	161
Додавання многочленів	68	Способи задання функції.....	119
Залежна змінна.....	118	Степінь	
Корінь рівняння.....	6	— з натуральним показником ..	48
Кутовий коефіцієнт	134	— многочлена.....	66
Многочлен	65	— одночлена.....	58
— стандартного вигляду	65	Тотожність	39
Множення		Тотожне перетворення виразів	40
— многочленів	75	Тотожно рівні вирази	39
— одночленів	57	Формула	
— одночлена на многочлен	71	— квадрата суми	95
Незалежна змінна.....	118	— квадрата різниці.....	95
Область визначення функції.....	119	— різниці квадратів	99
— значень функції	119	— різниці кубів.....	104
Одночлен	57	— суми кубів	104
— стандартного вигляду	57	Функція	118
Піднесення до степеня		— лінійна	133
— добутку.....	53		
— одночлена.....	57		
— степеня	53		

ЗМІСТ

РОЗДІЛ І. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

§ 1. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

1. Поняття рівняння.....	6
2. Розв'язування рівнянь. Властивості рівнянь	9
3. Лінійні рівняння з однією змінною	13
4. Розв'язування задач за допомогою рівнянь	18
Запитання і вправи для повторення § 1.....	27

РОЗДІЛ II. ЦІЛІ ВИРАЗИ

§ 2. ЦІЛІ ВИРАЗИ

5. Вирази зі змінними. Цілі вирази	32
6. Тотожно рівні вирази. Тотожності	39
Запитання і вправи для повторення § 2.....	45

§ 3. ОДНОЧЛЕНИ

7. Степінь з натуральним показником	48
8. Властивості степеня з натуральним показником.....	51
9. Одночлен та його стандартний вигляд	57
Запитання і вправи для повторення § 3.....	62

§ 4. МНОГОЧЛЕНИ

10. Многочлен і його стандартний вигляд	65
11. Додавання і віднімання многочленів.....	68
12. Множення одночлена на многочлен.....	71
13. Множення многочлена на многочлен.....	75
14. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки	80
15. Розкладання многочленів на множники способом групування.....	85
Запитання і вправи для повторення § 4.....	88

§ 5. ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

16. Множення різниці двох виразів на їх суму	92
17. Квадрат суми і квадрат різниці двох виразів	95
18. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів	98

19. Розкладання многочленів на множники з використанням формул квадрата суми і квадрата різниці.....	101
20. Різниця і сума кубів двох виразів.....	104
21. Застосування кількох способів для розкладання многочленів на множники.....	107
22. Застосування перетворень виразів.....	110
Запитання і вправи для повторення § 5.....	114

РОЗДІЛ III. ФУНКЦІЇ

§ 6. ФУНКЦІЇ

23. Функція. Способи задання функції.....	118
24. Графік функції. Функція як математична модель реальних процесів.....	123
25. Лінійна функція.....	133
Запитання і вправи для повторення § 6.....	145

РОЗДІЛ IV. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

§ 7. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ДВОМА ЗМІННИМИ

26. Рівняння із двома змінними.....	152
27. Графік лінійного рівняння із двома змінними.....	156
28. Системи двох лінійних рівнянь із двома змінними.....	161
29. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом підстановки.....	167
30. Розв'язування систем лінійних рівнянь способом додавання.....	172
31. Розв'язування задач за допомогою систем рівнянь.....	176
Запитання і вправи для повторення § 7.....	184
ЗАДАЧІ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ.....	189
ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ.....	195
ВІТЧИЗНЯНІ МАТЕМАТИКИ.....	202
ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5–6 КЛАСІВ.....	206
ВІДПОВІДІ.....	211
ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК.....	221

Навчальне видання

*Кравчук Василь Ростиславович
Янченко Галина Михайлівна*

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу

Редактори *Ярослав Гап'юк, Ярослав Гринчишин, Сергій Мартинюк*
Літературне редагування *Людмили Олійник*
Художнє оформлення *Олени Соколюк, Світлани Демчак*
Макет *Андрія Кравчука*

Підписано до друку 15.06.2007. Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times.
Друк офсетний. 14 ум. др. арк., 9,72 обл.-вид. арк. Тираж 200 000. Перший завод — 80 000.
Замовлення №07-176

Редакція газети «Підручники і посібники». Свідоцтво ТР 189 від 10.01.96.
46010, м. Тернопіль, вул. Поліська, 6а. Тел. 8-(0352)-43-10-31, 43-15-15, 43-10-21.
Факс 8-(0352)-43-10-31. E-mail: pp@pp.utel.net.ua
www.pp.utel.net.ua

**ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ
НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99**

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

ТАБЛИЦЯ СТЕПЕНІВ ЧИСЕЛ 2 і 3

Показник n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683	59049

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \quad (a \neq 0, m > n)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

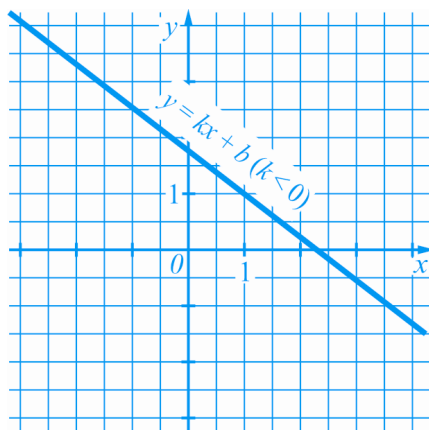
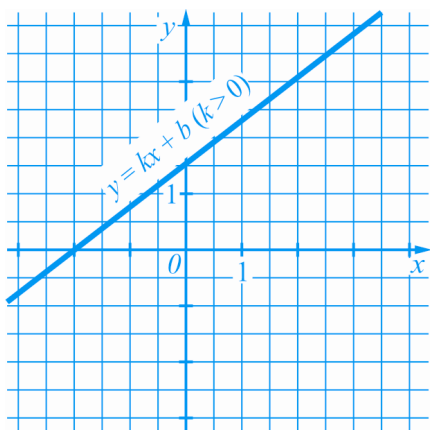
ЛАТИНСЬКИЙ АЛФАВІТ

Aa Bb Cc Dd Ee Ff Gg Hh Ii Jj Kk Ll Mm

Nn Oo Pp Qq Rr Ss Tt Uu Vv Ww Xx Yy Zz

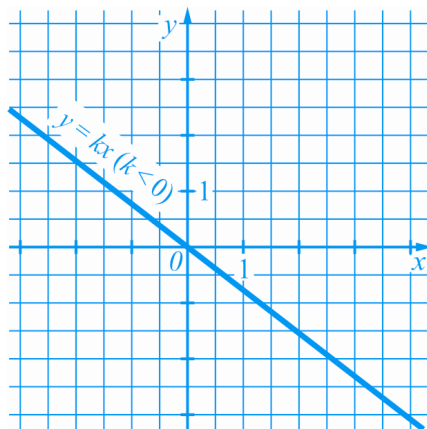
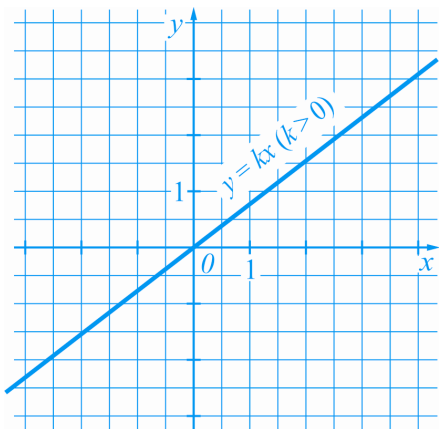
ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ

$y = kx + b$ — лінійна функція



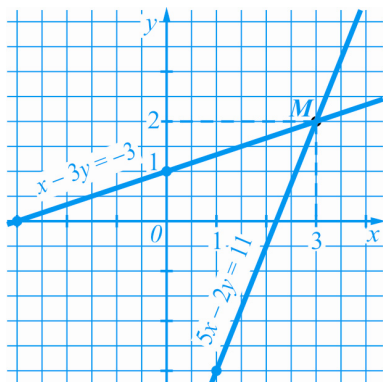
Графік — пряма

$y = kx, k \neq 0$ — пряма пропорційність



Графік — пряма

СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

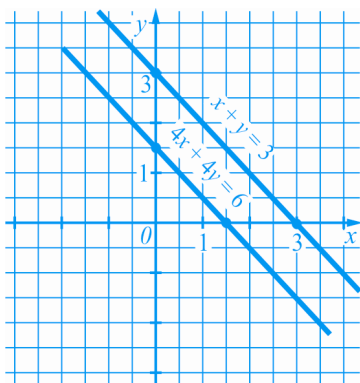


$$\begin{cases} 5x - 2y = 11; \\ x - 3y = -3. \end{cases}$$

(3; 2) — єдиний розв'язок.

Відношення відповідних
коефіцієнтів:

$$\frac{5}{1} \neq \frac{-2}{-3}.$$

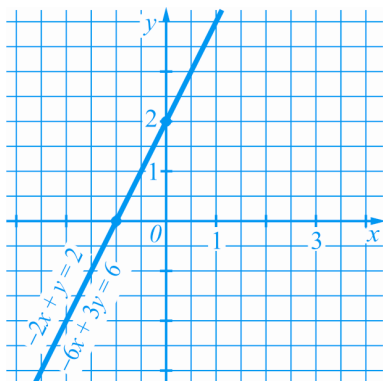


$$\begin{cases} x + y = 3; \\ 4x + 4y = 6. \end{cases}$$

Розв'язків немає.

Відношення відповідних
коефіцієнтів:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{6}.$$



$$\begin{cases} -2x + y = 2; \\ -6x + 3y = 6. \end{cases}$$

Розв'язків безліч.

Відношення відповідних
коефіцієнтів:

$$\frac{-2}{-6} = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}.$$