О. С. Істер

Алгебра

7

ФОРМУЛИ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

$$a^m a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$(ab)^n = a^n b^n$$

$$a^{m+n} = a^m a^n$$

$$a^{m-n} = a^m : a^n$$

$$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$$

$$a^n b^n = (ab)^n$$

ТАБЛИЦЯ КВАДРАТІВ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 10 ДО 99

Десятки	Одиниці									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	400	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	900	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1600	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2500	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3600	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	4900	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6400	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8100	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

О. С. Істер

Алгебра

ПІДРУЧНИК ДЛЯ 7 КЛАСУ
ЗАГАЛЬНООСВІТНІХ НАВЧАЛЬНИХ ЗАКЛАДІВ

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

КИЇВ
«ОСВІТА»
2007

ББК 22.14я721
І-89

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
(Рішення колегії Міністерства освіти і науки України,
Протокол № 5/1–19, від 12.04.07, Лист № 1/11–2176 від 28.04.07)

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Істер О. С.
І-89 Алгебра: Підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. — К.: Освіта, 2007.— 223 с.
ISBN 978-966-04-0688-9.

ББК 22.14я721

ISBN 978-966-04-0688-9

ВІД АВТОРА

Любі семикласники!

Ви починаєте вивчати одну з найважливіших математичних дисциплін — алгебру. Допоможе вам у цьому підручник, який ви тримаєте в руках. Він складається з чотирьох розділів, що містять 30 параграфів. Під час вивчення теоретичного матеріалу звертайте увагу на тексти, виділені жирним шрифтом. Це математичні терміни, означення, правила, математичні закони. Їх потрібно добре знати.

У підручнику ви побачите умовні позначення. Ось що вони означають:

— треба запам'ятати;

— запитання до вивченого теоретичного матеріалу;

— вправи для домашньої роботи;

— вправи на повторення.

Кожна вправа відповідає певному рівню навчальних досягнень і має позначення:

① — вправа початкового рівня;

② — вправа середнього рівня;

③ — вправа достатнього рівня;

④ — вправа високого рівня;

* — вправа підвищеної складності.

Переконатися в тому, що матеріал засвоєно, та підготуватися до тематичного оцінювання ви зможете, якщо розв'яжете «Завдання для перевірки знань».

Підвищити рівень знань вам допоможуть «Вправи для повторення розділу» та «Задачі підвищеної складності».

Бажаю успіхів в опануванні курсу!

Шановні вчителі!

Матеріал підручника поділено на уроки, що, на думку автора, полегшує роботу з ним. Водночас автор не виключає можливості, що ви дещо інакше розподілите навчальні години. Кількість вправ у більшості уроків подано «із запасом», тож обирайте їх для виконання на уроках та як домашні завдання залежно від поставленої мети, рівня підготовленості учнів, ступеня індивідуалізації навчання тощо.

Більшість параграфів складається з кількох уроків. Отже, темою кожного уроку є назва (або частина назви) параграфа.

Шановні батьки!

Якщо ваша дитина пропустить один чи кілька уроків у школі, ви матимете чіткий орієнтир — матеріал якого уроку (чи уроків) треба опрацювати вдома, які вправи виконати.

Крім того, ви можете запропонувати дитині додатково розв'язати вдома вправи, які не були розв'язані на уроці. Це сприятиме кращому засвоєнню навчального матеріалу.

Кожна тема закінчується тематичним оцінюванням. Перед його проведенням запропонуйте дитині виконати «Завдання для перевірки знань», подані в підручнику. Це допоможе пригадати основні типи вправ та підготуватися до тематичного оцінювання.

$$4x - 6 = x$$

$$2ax = 16$$

Розділ I ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

§ 1. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ

Урок 1

Упродовж багатьох століть алгебра розвивалась як наука про рівняння.

! ***Рівнянням*** **називається рівність, яка містить невідоме число, позначене буквою.**

Невідоме число у рівнянні називають ***змінною.*** Змінні найчастіше позначають буквами x (ікс), y (ігрек), z (зет), але можна позначати й іншими латинськими буквами. Приклади рівнянь: $4x - 6 = x$; $2(y + 7) = 4y - 8$; $3z - 18 = -(z + 2)$ тощо. Вираз, записаний у рівнянні ліворуч від знака рівності, називають ***лівою частиною рівняння***, а вираз, записаний праворуч,— ***правою частиною рівняння.*** В рівнянні $2(y + 7) = 4y - 8$ лівою частиною є вираз $2(y + 7)$, а правою — вираз $4y - 8$.

Якщо в рівнянні $4x - 6 = x$ замість змінної x підставити число 2, то отримаємо $4 \cdot 2 - 6 = 2$ — правильну числову рівність. Кажуть, що число 2 задовольняє рівняння $4x - 6 = x$.

! **Число, яке задовольняє рівняння, називається *коренем*, або *розв'язком*, *рівняння.***

Рівняння можуть мати різну кількість коренів. Наприклад: рівняння $4x - 6 = x$ має лише один корінь — число 2; рівняння $x(x - 6) = 0$ має два корені — числа 0 і 6; рівняння $x + 0 = x$ задовольняє будь-яке число x, тому це рівняння має безліч коренів; рівняння $x + 1 = x$ не має коренів, оскільки при кожному значенні змінної x значення лівої частини рівняння $(x + 1)$ на 1 більше від значення правої (x).

! ***Розв'язати рівняння — означає знайти всі його корені або довести, що їх немає.***

Розглянемо два рівняння: $x + 1 = 5$ і $3x = 12$. Кожне з них має один і той самий корінь: $x = 4$. Такі рівняння називають *рівносильними*.

Два рівняння називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі корені. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають розв'язків.

Приклад 1. Чи рівносильні рівняння: 1) $(x+3)(x-3) = 0$ і $x^2 = 9$; 2) $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$; 3) $x + 3 = 4$ і $5x = 10$?

Розв'язання. 1) Рівняння $(x+3)(x-3) = 0$ має два корені — числа 3 і −3; рівняння $x^2 = 9$ також має корені: 3 і −3. Тому рівняння $x^2 = 9$ і $(x+3)(x-3) = 0$ — рівносильні.

2) Рівняння $x + 2 = x$ і $2 - x = 5 - x$ не мають коренів, тому є рівносильними.

3) Рівняння $x + 3 = 4$ має корінь — число 1, а рівняння $5x = 10$ має корінь — число 2. Тому рівняння $x + 3 = 4$ і $5x = 10$ не є рівносильними.

Під час розв'язування *рівнянь* використовують такі *властивості*:

1) ***якщо у будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;***

2) ***якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;***

3) ***якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.***

Приклад 2. 1) Рівняння $2(x-1) = 5x$ і $2x - 2 = 5x$ — рівносильні (розкрили дужки у лівій частині початкового рівняння). Рівняння $3x + 2 = 5x - x - 7$ і $3x + 2 = 4x - 7$ — рівносильні (звели подібні доданки у правій частині рівняння).

2) Рівняння $5x = 2x + 9$ і $5x - 2x = 9$ — рівносильні (перенесли доданок $2x$ з правої частини рівняння в ліву, змінивши при цьому знак на протилежний).

3) Рівняння $0{,}5x = 1{,}5x - 3{,}5$ і $x = 3x - 7$ — рівносильні (помножили обидві частини рівняння на 2). Рівняння $21x - 27 = 15x$ і $7x - 9 = 5x$ — рівносильні (поділили обидві частини рівняння на 3).

Історичні відомості

Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі (783 — бл. 850)

У IX ст. видатний арабський математик *Мухаммед бен Муса аль-Хорезмі* у своєму трактаті «Кітаб аль-джебр аль-мукабала» зібрав і систематизував методи розв'язування рівнянь. Термін *аль-джебр* (у перекладі з арабської означає «відновлення»), узятий з назви цієї книжки, надалі почав уживатися як *алгебра*.

У працях стародавніх математиків не вживалися символи і знаки. Так, стародавні єгипетські вчені шукане невідоме число називали «хау» (в перекладі — «купа»). Громіздкі алгебраїчні записи (викладені переважно словесно) утруднювали перетворення.

Про деякі математичні знаки, що використовують для запису виразів, відомо, коли і ким вони введені:

$+$ додавання $-$ віднімання	— у 1489 р. німецький математик *Ян Відман (1460 — бл. 1498)*;
$\times$ множення	— у 1631 р. англійський математик *Вільям Оутред* (1575—1660);
$:$ ділення $\cdot$ множення	— відповідно у 1684 і 1693 рр. німецький математик, фізик і філософ *Готфрід Вільгельм Лейбніц* (1646—1716).

Величезний внесок у розвиток алгебраїчної символіки зробив у XVI ст. видатний французький математик *Франсуа Вієт*, якого називають «батьком алгебри». Саме він став позначати буквами не тільки невідомі (що робили і до нього), а й будь-які числа, зокрема, коефіцієнти при невідомих. Проте ця символіка відрізнялася від сучасної. Замість x, x^2 і x^3 Вієт писав відповідно букви N (Numerus — число), Q (Quadratus — квадрат) і C (Cubus — куб). Наприклад, рівняння $x^3 + 7x^2 - 8x = 20$ він записував так: $1C + 7Q - 8N$ aequ. 20 (aequali — дорівнює).

Франсуа Вієт (1540—1603)

До XIX ст. алгебра розвивалася як наука, що вивчає різні методи розв'язування рівнянь. Згодом вона значно збагатилася новими змістовими лініями (спрощення виразів, функції, розв'язування нерівностей тощо). Тепер рівняння — лише одна із складових частин алгебри.

Що називається рівнянням? • Що називається коренем (або розв'язком) рівняння? • Що означає розв'язати рівняння? • Які два рівняння називають рівносильними? • Які властивості використовують під час розв'язування рівнянь?

1①. (Усно.) Який із записів є рівнянням:

1) $7x - 21 > 0$;   2) $4x + 5$;

3) $7x - 2 = 10$;   4) $(12 - 10) \cdot 3 = 6$?

2①. (Усно.) Чи є число 3 коренем рівняння:

1) $2x = 6$;   2) $x - 7 = 4$;   3) $2x + 3 = 8$;   4) $27 : x = 9$?

3②. Чи є коренем рівняння $x^2 = 2x + 3$ число:

1) 0;   2) −1;   3) 1;   4) 3?

4②. Доведіть, що кожне з чисел 1,3 та −1;3 є коренем рівняння $x^2 = 1{,}69$.

5②. Чи рівносильні рівняння:

1) $x + 2 = 5$ і $x : 3 = 1$;   2) $x - 3 = 7$ і $2x = 18$?

6③. Доведіть, що:

1) коренем рівняння $2(x - 3) = 2x - 6$ є будь-яке число;

2) рівняння $y - 7 = y$ не має коренів.

7③. Запишіть рівняння, яке має:

1) єдиний корінь — число −2;

2) два корені — числа 5 і −5.

8③. З'ясуйте, не розв'язуючи, чи є рівносильними рівняння:

1) $4(x - 2) = 19$ і $4x - 8 = 19$;

2) $2x - 3 = 3x + 5$ і $2x - 3x = 5 + 3$;

3) $8(x - 3) = 40$ і $x - 3 = 5$;   4) $\frac{2x}{3} = 11$ і $2x = 33$.

9④. Чи має розв'язки рівняння:

1) $x + 2 = 2 - x$;   2) $x + 3 = 3 + x$;   3) $x + 1 = -1 + x$;

4) $0 \cdot x = 0$;   5) $0 \cdot (x - 1) = 3$;   6) $5(x - 1) = 5x - 5$;

7) $0 : x = 0$;   8) $2(x - 3) = 2x - 7$?

10①. Чи є число 2 коренем рівняння:

1) $x + 7 = 9$;   2) $5x = 12$;   3) $x - 8 = -6$;   4) $x : 4 = 2$?

11②. Чи є коренем рівняння $x^2 = 4 - 3x$ число:

1) 0;   2) 1;   3) −2;   4) −4?

12②. Чи рівносильні рівняння:

1) $x - 2 = 3$ і $2x = 10$;   2) $x + 3 = 7$ і $x : 2 = 3$?

13③. Доведіть, що:

1) коренем рівняння $3(2 - x) = 6 - 3x$ є будь-яке число;

2) рівняння $y = y + 8$ не має коренів.

14③. Встановіть, не розв'язуючи, чи рівносильні рівняння:

1) $8(x - 1) = 5$ і $8x - 8 = 5$;

2) $3x + 7 = 4x - 8$ і $3x - 4x = -8 - 7$;

3) $9(x + 2) = 18$ і $x + 2 = 2$; 4) $-\frac{3x}{4} = 7$ і $-3x = 28$.

15. Обчисліть:

1) $\frac{2}{3} + \frac{7}{12}$; 2) $\frac{8}{21} - \frac{3}{14}$; 3) $2\frac{3}{5} + 3\frac{7}{10}$;

4) $\frac{5}{11} - \frac{2}{13}$; 5) $\frac{9}{20} + \frac{1}{7}$; 6) $5\frac{4}{15} - 1\frac{2}{7}$.

16. Знайдіть:

1) 25 % від числа 200; 2) 13 % від числа 82;

3) 20,5 % від числа 64; 4) 21 % від числа $3\frac{2}{7}$.

§ 2. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ І РІВНЯНЬ, ЩО ЗВОДЯТЬСЯ ДО НИХ

Урок 2

Рівняння виду $ax = b$, де a і b — деякі числа, x — змінна, називається *лінійним рівнянням з однією змінною*.

Числа a і b у рівнянні $ax = b$ називають ***коефіцієнтами***.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають ***рівнянням першого степеня з однією змінною***.

Якщо $a \neq 0$, то поділивши обидві частини рівняння $ax = b$ на a, дістанемо єдиний корінь цього рівняння: $x = \frac{b}{a}$.

Якщо $a = 0$ і $b = 0$, то лінійне рівняння має вигляд $0x = 0$. Коренем цього рівняння є будь-яке число, оскільки при будь-якому значенні x значення лівої частини рівняння дорівнює 0 і дорівнює значенню правої частини. Рівняння $0x = 0$ має безліч коренів.

Якщо $a = 0$, а $b \neq 0$, то лінійне рівняння матиме вигляд $0x = b$. Оскільки значення лівої частини рівняння при будь-якому значенні x дорівнює 0, а значення правої частини — число b, відмінне від 0, то рівняння $0x = b$ ($b \neq 0$) не має коренів.

Систематизуємо дані про розв'язки рівняння у вигляді таблиці:

$ax = b$		
$a \neq 0$	$a = 0;\ b = 0$	$a = 0;\ b \neq 0$
$x = \frac{b}{a}$	x — будь-яке число	рівняння не має коренів

Приклад 1. Розв'язати рівняння:

1) $0{,}2x = 7$; 2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$; 3) $0x = 7$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $0{,}2x = 7$; $x = 7 : 0{,}2$; $x = 35$.	2) $-\frac{2}{3}x = 2\frac{2}{3}$; $x = 2\frac{2}{3} : \left(-\frac{2}{3}\right)$; $x = -4$.	3) $0x = 7$; рівняння не має коренів.

Розв'язування багатьох рівнянь послідовними перетвореннями, в результаті яких дістають рівносильні рівняння, зводиться до розв'язування лінійних рівнянь.

Приклад 2. Розв'язати рівняння:

1) $3(x+3) - 2x = 6 - 4x$; 2) $\frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}$.

Р о з в' я з а н н я.

1. Позбудемося знаменників (якщо вони є):

1) $3(x+3) - 2x = 6 - 4x$;	2) $\frac{x+1}{2} + \frac{5-x}{3} = \frac{x+13}{6}$. Помножимо обидві частини рівняння на 6 (6 — найменше спільне кратне знаменників дробів). Маємо: $\frac{6(x+1)}{2} + \frac{6(5-x)}{3} = \frac{6(x+13)}{6}$; $3(x+1) + 2(5-x) = x + 13$.

2. Розкриємо дужки (якщо вони є):

$3x + 9 - 2x = 6 - 4x$;	$3x + 3 + 10 - 2x = x + 13$.

3. Перенесемо доданки, що містять змінну, у ліву частину, а інші — в праву, змінивши знаки доданків, які перенесемо, на протилежні:

$3x - 2x + 4x = 6 - 9$;	$3x - 2x - x = 13 - 3 - 10$.

4. Зведемо подібні доданки:

$5x = -3$;	$0x = 0$.

5. Розв'яжемо отримане лінійне рівняння:

$x = -3 : 5$; $x = -0{,}6$;	x — будь-яке число.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $5(x + p) = 3x - 7p$ відносно x.

Р о з в' я з а н н я. Розкриємо дужки у лівій частині рівняння: $5x + 5p = 3x - 7p$. Перенесемо доданок $3x$ у ліву частину, а $5p$ — у праву. Маємо: $5x - 3x = -7p - 5p$; $2x = -12p$. Тоді $x = (-12p) : 2$; $x = (-12 : 2)\,p$, $x = -6p$.

Яке рівняння називається лінійним рівнянням з однією змінною? • Наведіть приклади лінійних рівнянь. • В якому випадку рівняння $ax = b$ має єдиний корінь? • В якому випадку коренем рівняння $ax = b$ є будь-яке число? • В якому випадку рівняння $ax = b$ не має коренів?

17①. (Усно.) Яке з рівнянь лінійне:

1) $17x = 0$; 2) $-5x = -\frac{1}{3}$; 3) $x^2 = 7x$;

4) $0x = 17$; 5) $x + 7 = x^2$; 6) $0x = 0$?

18①. Перенесіть доданок із змінною з правої частини рівняння в ліву:

1) $4x = 5 + 2x$; 2) $-7x = 4x - 2$; 3) $x = 5 - 4x$.

19①. Зведіть до лінійного рівняння:

1) $5x - 7 = 4$; 2) $-2x = 5 - 14x$; 3) $2x - 7 = 4 + x$.

20②. Розв'яжіть лінійне рівняння:

1) $-3x = -21$; 2) $-2x = \frac{2}{9}$; 3) $-\frac{1}{5}x = -5$;

4) $50x = 5$; 5) $-x = 1\frac{2}{7}$; 6) $-0{,}01x = 0{,}17$;

7) $\frac{2}{9}x = -\frac{4}{27}$; 8) $-1{,}2x = -4{,}2$; 9) $\frac{7}{8}x = 0$.

21②. Визначте праву частину рівняння:

1) $8x = \ldots$; $x = -9$; 2) $-9x = \ldots$; $x = 0$; 3) $\frac{3}{4}x = \ldots$; $x = 12$.

22②. Розв'яжіть рівняння:

1) $7x + 14 = 0$; 2) $0{,}3x - 21 = 0{,}5x - 23$;

3) $4x + 3 = 6x - 13$; 4) $5x + (3x - 7) = 9$;

5) $47 = 10 - (9x + 2)$; 6) $(3x + 2) - (8x + 6) = 14$.

23①. Перенесіть доданок, що не містить змінної, з лівої частини рівняння у праву:

1) $5x + 7 = 8$; 2) $4x - 12 = 13$; 3) $-5 - 7x = 9$.

24①. Зведіть до лінійного рівняння:

1) $2x = 5 - 3x$; 2) $8x - 7 = -9$; 3) $7x + 3 = x - 8$.

25②. Розв'яжіть лінійне рівняння:

1) $2x = -8$; 2) $\frac{1}{5}x = 9$; 3) $-3x = \frac{1}{4}$;

4) $-10x = -5$; 5) $\frac{2}{15}x = 0$; 6) $0{,}1x = -0{,}18$.

26③. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x - 10 = 0$; 2) $1{,}4x - 12 = 0{,}9x + 4$;

3) $3x + 14 = 5x + 16$; 4) $12 - (5x + 10) = -3$;

5) $6 - (8x + 11) = -1$; 6) $(3x - 4) - (6 - 4x) = 4$.

Урок 3

27①. (Усно.) Скільки коренів має рівняння:

1) $2x = -7$; 2) $0x = 5$; 3) $0x = 0$?

28②. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $5x = 10$:

1) $x + 3 = 5$; 2) $5 - x = 7$; 3) $x + 2 = x + 1$;

4) $x - 7 = -5$; 5) $x = 8 - 3x$; 6) $4x - 7 = 4x$?

29②. При якому значенні x:

1) значення виразу $3x + 7$ дорівнює -2;

2) значення виразу $4(x + 1)$ дорівнює значенню виразу $5x - 9$?

30②. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x+1}{3} = 5$; 2) $\frac{2x-7}{5} = 1$; 3) $\frac{x}{3} + \frac{x}{5} = 8$; 4) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 1$.

31③. Розв'яжіть рівняння відносно x:

1) $2x + a = x + a$; 2) $b + x = c - x$;

3) $6x + 2m = x - 8m$; 4) $9a + x = 3b - 2x$.

Р о з в' я з а н н я. 4) $9a + x = 3b - 2x$; $x + 2x = 3b - 9a$; $3x = 3(b - 3a)$. Розділимо ліву і праву частини рівняння на 3. Маємо: $x = b - 3a$.

32③. Чи рівносильні рівняння:

1) $2x - 4 = 2$ і $5(x - 3) + 1 = 3x - 8$;

2) $5x + 3 = 8$ і $7(x - 2) + 20 = 4x + 3$;

3) $5x = 0$ і $0 \cdot x = 5$;

4) $7x + 1 = 7x + 2$ і $5(x + 1) = 5x + 5$;

5) $0 : x = 7$ і $0 \cdot x = 7$;

6) $3(x - 2) = 3x - 6$ і $2(x + 7) = 2(x + 1) + 12$?

33③. Знайдіть корінь рівняння:

1) $(4x - 2) + (5x - 4) = 9 - (5 - 11x)$;

2) $(7 - 8x) - (9 - 12x) + (5x + 4) = -16$;

3) $3(4x - 5) - 10(2x - 1) = 33$;

4) $9(3(x + 1) - 2x) = 7(x + 1)$.

34. Чи рівносильні рівняння:

1) $4x - x = 17$ і $3x = 17$; 2) $5x - 9 = 3x$ і $6x = 21$;
3) $2x = -12$ і $x + 6 = 0$; 4) $12x = 0$ і $15x = 15$?

35. При якому значенні y:

1) значення виразу $5y - 13$ дорівнює -3;
2) значення виразу $3(y - 2)$ дорівнює значенню виразу $13y - 8$?

36. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{x-2}{4} = 1$; 2) $\frac{3x+2}{5} = 4$; 3) $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 10$; 4) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$.

37. Розв'яжіть рівняння відносно x:

1) $7x + m = 2x + m$; 2) $a + x = 2m - x$;
3) $3x + b = 9b - x$; 4) $5p + 2x = 10a - 3x$.

38. Розв'яжіть рівняння:

1) $(9x - 4) + (15x - 5) = 18 - (25 - 22x)$;
2) $(10x + 6) - (9 - 9x) + (8 - 11x) = -19$;
3) $7(x - 1) - 3(2x + 1) = -x - 15$;
4) $5(4(x - 1) - 3x) = 9x$.

Урок 4

39. (Усно.) Розв'яжіть рівняння:

1) $-2x = 12$; 2) $0{,}5x = -2{,}5$; 3) $-2{,}5x = 7{,}5$;
4) $\frac{1}{5}x = \frac{3}{10}$; 5) $\frac{4}{7}x = 1$; 6) $5x = -12$.

40. Складіть лінійне рівняння, яке б:

1) мало корінь $x = -2$;
2) мало корінь $x = -0{,}2$;
3) мало коренем будь-яке число x;
4) не мало жодного кореня.

41. При якому значенні y:

1) значення виразу $5y + 7$ у 3 рази більше від значення виразу $y + 5$;
2) значення виразу $2y - 4$ на 7,4 більше від значення виразу $3 - 7y$?

42. Складіть рівняння, рівносильне рівнянню $7(2x - 8) = 5(7x - 8) - 15x$.

43. При якому значенні a рівняння:

1) $2ax = 16$ має корінь, що дорівнює 4;
2) $3x = a$ має корінь, що дорівнює $\frac{4}{7}$;
3) $5(a + 1)x = 40$ має корінь, що дорівнює -1?

44. Розв'яжіть рівняння:

1) $4x + 7 = 3(x - 2) + x$; 2) $2x + 5 = 2(x - 4) + 13$.

45③. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{3x-1}{2}+\frac{6x+3}{11}=10$; 2) $\frac{8x-3}{7}-\frac{3x+1}{10}=2$;

3) $\frac{x}{10}+\frac{2x}{5}=\frac{7x}{15}-\frac{1}{6}$; 4) $\frac{2x+1}{2}-\frac{3x+2}{3}=\frac{5x+4}{6}$.

46④. При якому значенні b мають спільний корінь рівняння:

1) $4x-3=5$ і $3x+b=17$; 2) $x+b=9$ і $2x-b=x$?

47④. Розв'яжіть рівняння:

1) $2(|x|-3)=|x|$; 2) $|2x+1|=7$.

48④. Знайдіть всі цілі значення m, при яких корінь рівняння $mx=4$ є цілим числом.

49②. Складіть лінійне рівняння, яке б:

1) мало корінь $y=-8$; 2) мало коренем будь-яке число y.

50③. При якому значенні x:

1) значення виразу $7x+8$ у 2 рази більше від значення виразу $x+7$;

2) значення виразу $5x-8$ на 17,2 менше від значення виразу $x+2$?

51③. Розв'яжіть рівняння:

1) $3(x-2)+4x=7(x-1)+1$; 2) $2(x+1)+4x=6(x+3)$.

52③. Знайдіть корінь рівняння:

1) $\frac{2x+1}{3}+\frac{x+7}{2}=5$; 2) $\frac{5x-6}{12}-\frac{x-5}{8}=1$;

3) $\frac{x}{3}+\frac{2x}{9}=\frac{5x}{6}-\frac{1}{18}$; 4) $\frac{3x+1}{5}-\frac{x+2}{2}=\frac{x-8}{10}$.

53④. Знайдіть всі цілі значення b, при яких корінь рівняння $bx=-6$ є натуральним числом.

54②. Обчисліть значення виразу:

1) $4{,}2+3{,}17-2{,}19-5{,}27$; 2) $5{,}98-(2{,}15+3{,}789)$.

55②. Знайдіть число, якщо:

1) 15 % його дорівнюють 300;

2) 11 % його дорівнюють 28,16.

56②. Зведіть подібні доданки:

1) $7x-2y+3x+17y$; 2) $-5{,}2+17a+4{,}9-12a$;

3) $-5x+7-2y+5x-12y$; 4) $5\frac{1}{2}p-2\frac{5}{6}a+7\frac{1}{2}p+4\frac{1}{3}a$.

57③. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $a-(a-(2a-8))$; 2) $5m-((n-m)+3n)$;

3) $15a-(2a-(3a-(a+1)))$; 4) $b-(b-((b-a)-2a))$.

§ 3. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ. РІВНЯННЯ ЯК МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ЗАДАЧІ

Урок 5

Застосування рівнянь дає змогу спростити розв'язування багатьох задач.

Розв'язують задачу за допомогою рівняння здебільшого за такою схемою:

1) вибирають деяку невідому величину і позначають її буквою (наприклад, x);

2) інші невідомі величини (якщо вони є) виражають через введену букву;

3) за умовою задачі встановлюють відношення між невідомими та відомими значеннями величин і складають рівняння;

4) розв'язують складене рівняння;

5) знаходять значення невідомого, а якщо треба за умовою задачі, то й значення інших невідомих величин;

6) відповідають на запитання задачі.

Задача 1. Двоє робітників виготовили разом 127 деталей, причому перший виготовив на 13 деталей більше, ніж другий. Скільки деталей виготовив кожний робітник?

Р о з в' я з а н н я. Нехай другий робітник виготовив x деталей. Тоді перший $(x+13)$ деталей. Обидва робітники разом виготовили $(x+x+13)$ деталей, що за умовою дорівнює 127. Маємо рівняння:

$$x+x+13=127.$$

Розв'яжемо його: $2x=127-13$; $2x=114$; $x=114:2$; $x=57$.

Отже, другий робітник виготовив 57 деталей, а перший $57+13=70$ (деталей).

В і д п о в і д ь. 70 деталей; 57 деталей.

Задача 2. Максимально можлива сума банківського кредиту (позначена буквою S) обчислюється банком за формулою:

$$S=\frac{C}{3}\cdot n,$$

де C — середньомісячна зарплата позичальника, $n=9$ (кредит на рік), або $n=21$ (кредит на два роки), або $n=33$ (кредит на три роки). Якою найменшою має бути середньомісячна зарплата, якщо позичальник хоче отримати кредит у 30 000 грн. на: 1) рік; 2) два роки; 3) три роки?

Р о з в' я з а н н я. Маємо $S=30\,000$ грн. Позначимо шукану найменшу середньомісячну зарплату буквою x. Тоді:

1) $30\,000=\frac{x}{3}\cdot 9$; $3x=30\,000$; $x=30\,000:3$; $x=10\,000$.

Отже, якщо позичальник хоче отримати кредит на рік, то його середньомісячна зарплата має бути хоча б 10 000 грн.

2) $30\,000 = \frac{x}{3} \cdot 21$; $7x = 30\,000$; $x = 30\,000 : 7$; $x \approx 4286$.

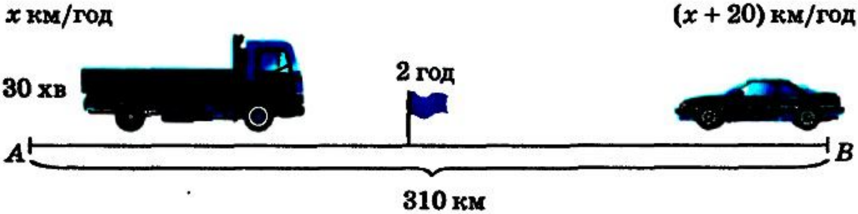
Якщо позичальник хоче отримати кредит на два роки, то його середньомісячна зарплата повинна бути хоча б 4286 грн.

3) $30\,000 = \frac{x}{3} \cdot 33$; $11x = 30\,000$; $x = 30\,000 : 11$; $x \approx 2727{,}3$.

Якщо позичальник хоче отримати кредит на три роки, то його середньомісячна зарплата повинна бути хоча б 2728 грн. (округлено у більшу сторону).

Відповідь. 1) 10 000 грн.; 2) 4286 грн.; 3) 2728 грн.

Задача 3. З міста A в місто B виїхав вантажний автомобіль. Через 30 хв з міста B у місто A виїхав легковий автомобіль, швидкість якого на 20 км/год більша за швидкість вантажного. Автомобілі зустрілися через 2 год після виїзду легкового автомобіля. Знайти швидкість кожного автомобіля, якщо відстань між містами дорівнює 310 км.



Розв'язання. Позначимо швидкість вантажного автомобіля x км/год. Дані задачі доцільно подати таблицею:

Автомобіль	v, км/год	t, год	s, км	
вантажний	x	2,5	$2{,}5x$	310 км
легковий	$x+20$	2	$2(x+20)$	

Оскільки автомобілі зустрілися, то разом вони проїхали 310 км. Маємо рівняння:

$$2{,}5x + 2(x + 20) = 310.$$

Розв'яжемо його: $2{,}5x + 2x + 40 = 310$; $4{,}5x = 270$; $x = 60$.

Отже, швидкість вантажного автомобіля 60 км/год, а легкового $60 + 20 = 80$ км/год.

Відповідь. 60 км/год; 80 км/год.

Щоб розв'язати задачу, яка має практичний зміст, можна спочатку створити її *математичну модель*, тобто записати залежність між відомими і невідомими величинами за допомогою математичних понять, відношень, формул, рівнянь тощо. Тому рівняння, складене за умовою задачі, можна вважати математичною моделлю цієї задачі.

Якої схеми дотримуються, розв'язуючи задачу за допомогою рівняння? • Як розуміти поняття «математична модель задачі»?

58①. (Усно.) Одне з чисел на 20 більше від другого. Менше з цих чисел позначено x. Виразіть через x більше число.

59①. (Усно.) Одне з додатних чисел у 5 раз більше від другого. Менше з цих чисел позначено x. Виразіть через x більше число.

60②. У двох цистернах 58 т бензину, причому в першій на 4 т менше, ніж у другій. Скільки тонн бензину в кожній цистерні?

61②. Одне з додатних чисел утричі більше від другого. Знайдіть ці числа, якщо їх різниця дорівнює 28.

62②. Сума двох чисел 360, а їх відношення дорівнює 5:7. Знайдіть ці числа.

63②. Периметр трикутника дорівнює 20 дм. Дві його сторони рівні між собою і кожна з них на 1 дм більша від третьої. Знайдіть сторони трикутника.

64①. Учень виготовив x деталей, а майстер — на 18 деталей більше. Виразіть через x кількість деталей, виготовлених майстром.

65①. На одній клумбі x кущів троянд, а на другій — удвічі більше. Виразіть через x кількість кущів троянд на другій клумбі.

66②. У автопарку вантажних автомобілів у 6 раз більше, ніж легкових. Скільки легкових автомобілів у автопарку, якщо всіх автомобілів — 91?

67②. Бабусі і мамі разом 99 років. Скільки років кожній з них, якщо бабуся старша за маму на 25 років?

68②. Різниця двох чисел 42, а їх відношення дорівнює 7:4. Знайдіть ці числа.

Урок 6

69①. (Усно.) Відстань, що дорівнює x км, велосипедист проїжджає за 5 год. Виразіть через x швидкість руху велосипедиста.

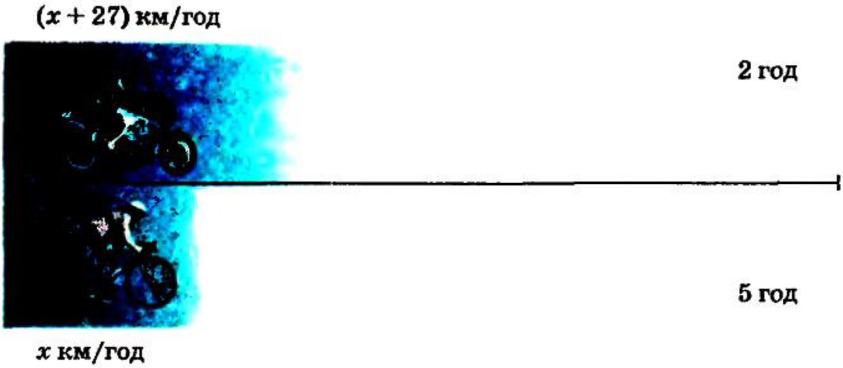
70①. (Усно.) Перше число позначили x, а друге становить четверту частину від першого. Виразіть друге число через x.

71②. Якщо від задуманого числа відняти 7, а потім результат поділити на 9, то отримаємо 12. Яке число задумали?

72②. За два дні продали 384 кг бананів, причому другого дня продали $\frac{3}{5}$ того, що продали першого дня. Скільки кілограмів бананів продали кожного дня?

73②. За пральну машину та її встановлення заплатили 1470 грн. Вартість установлення становить 5 % від вартості машини. Скільки коштує пральна машина?

74②. За 2 год мотоцикліст проїжджає таку саму відстань, що й велосипедист за 5 год. Швидкість мотоцикліста на 27 км/год більша від швидкості велосипедиста. Знайдіть швидкість кожного з них.



75②. З міста до села турист йшов зі швидкістю 4 км/год, а повертався назад зі швидкістю 3 км/год. Усього в дорозі він був 7 год. Знайдіть відстань від міста до села.

76①. Перше число дорівнює x, а друге становить 70 % першого. Виразіть через x друге число.

77②. Туристи за другий день подолали $\frac{7}{8}$ відстані, пройденої за перший день. Скільки кілометрів долали туристи кожного дня, якщо за перший день було пройдено на 3 км більше, ніж за другий?

78②. Ящик з апельсинами на 3 кг важчий, ніж ящик з лимонами. Яка маса кожного з них, якщо маса 4 ящиків з апельсинами така сама, як маса 5 ящиків з лимонами?

79②. Другого дня робітник виготовив деталей на 5 % більше, ніж першого дня. Скільки деталей виготовляв робітник щодня, якщо другого дня він виготовив на 3 деталі більше, ніж першого?

80②. Знайдіть число, половина якого разом з його третьою частиною дорівнює 40.

Урок 7

81①. (Усно.) Сума довжин двох відрізків дорівнює 10 см. Один з відрізків дорівнює x см. Виразіть через x довжину другого відрізка.

82②. Периметр прямокутника дорівнює 36 см, причому одна з його сторін на 4 см більша за іншу. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

83②. Сергій мав грошей удвічі більше, ніж Петро. Коли Петрові дали ще 4 грн., то грошей у хлопців стало порівну. Скільки грошей мав кожний з хлопців спочатку?

84③. У трьох цехах заводу працює 430 робітників. У другому цеху на 12 робітників більше, ніж у першому, а у третьому — на 31 робітника більше, ніж у другому. Скільки робітників працює в кожному цеху?

85③. Чи можна розкласти 68 банок консервів у три ящики так, щоб у другому було удвічі більше банок, ніж у першому, а у третьому — на 3 банки менше, ніж у першому?

86③. На одній садовій ділянці в 3 рази більше кущів малини, ніж на другій. Коли з першої ділянки пересадили на другу 12 кущів, то на обох ділянках кущів малини стало порівну. Скільки кущів малини було на кожній ділянці спочатку?

87③. Купили 24 зошити в лінійку і клітинку. За все заплатили 6 грн. 60 к. Зошит у клітинку коштує 24 к., а в лінійку — 30 к. Скільки купили зошитів кожного виду?

88②. У Марійки грошей утричі більше, ніж у Катрусі. Після того, як Марійка витратила 8 грн., грошей у дівчаток стало порівну. Скільки грошей мала кожна дівчинка спочатку?

89③. Одна сторона трикутника на 9 дм менша за другу і в 2 рази менша за третю. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 105 дм.

90③. Чи можна 90 книжок розставити на трьох полицях так, щоб на третій було на 3 книжки більше, ніж на другій, і на 5 книжок менше, ніж на першій?

91③. Купили 12 ручок по 50 к. і 65 к., заплативши за все 6 грн. 75 к. Скільки купили ручок кожного виду?

Урок 8

92①. (Усно.) Власна швидкість човна дорівнює 18 км/год, а швидкість течії — x км/год. Виразіть через x швидкість човна за течією і проти течії.

93③. Батькові 38 років, а сину 10. Через скільки років батько буде втричі старший за сина?

94③. У двох пачках була однакова кількість зошитів. Після того, як з першої пачки переклали у другу 24 зошити, в ній стало в 4 рази менше зошитів, ніж у другій. Скільки зошитів було в кожній пачці спочатку?

95③. С т а р о д а в н я г р е ц ь к а з а д а ч а. Піфагора спитали: «Скільки учнів навчається у твоїй школі?», на що той відповів: «Половина всіх учнів вивчає математику, чверть — музику, сьома частина мовчить і, крім того, є ще три жінки». Скільки учнів було у Піфагора?

96④. $\frac{1}{4}$ першого числа дорівнює $\frac{2}{3}$ другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 66.

97④. Човен за течією плив 2,5 год, а проти течії 3,6 год. Відстань, яку проплив човен за течією, на 7,6 км менша, ніж відстань, яку проплив човен проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

98④. З пункту *A* до пункту *B* виїхав велосипедист із швидкістю 12 км/год. Через 3 год з пункту *B* до пункту *A* виїхав мотоцикліст із швидкістю 45 км/год. Скільки годин до зустрічі з мотоциклістом їхав велосипедист, якщо відстань від *A* до *B* становить 235,5 км? На якій відстані від пункту *A* відбулася зустріч?

99④. Один кавун на 5 кг легший за другий і в 3 рази легший за третій. Перший і третій кавуни разом у 2 рази важчі за другий. Знайдіть масу кожного кавуна.

100③. Маса бідона з молоком становить 25 кг і ще половину його маси. Яка маса бідона з молоком?

101③. У двох мішках була однакова кількість цукру. Після того, як з першого мішка до другого пересипали 8 кг цукру, в ньому стало у 2 рази менше цукру, ніж у другому. Скільки кілограмів цукру було у кожному мішку спочатку?

102③. 60 % першого числа дорівнюють 45 % другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 210.

103④. Катер за течією річки плив 1,6 год, а проти течії 2,5 год. Відстань, яку проплив катер проти течії виявилася на 6,2 км більшою, ніж відстань, яку проплив катер за течією. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість катера дорівнює 16 км/год.

104④. Перший учень розв'язав на 3 задачі менше, ніж другий і у 2 рази менше, ніж третій. Перший і третій учні разом розв'язали у 2,1 раза більше задач, ніж другий. Скільки задач розв'язав кожний учень?

105②. Обчисліть:

1) $-3\frac{1}{4}\cdot 3\frac{9}{13}$; 2) $-3\frac{1}{7}\cdot\left(-1\frac{3}{11}\right)$; 3) $5\frac{1}{3}\cdot\left(-1\frac{1}{2}\right)$;

4) $-2\frac{4}{5}:1\frac{1}{15}$; 5) $-2\frac{1}{31}:\left(-31\frac{1}{2}\right)$; 6) $\frac{7}{9}:(-14)$.

106②. Скільки відсотків становить:

1) число 7 від числа 28; 2) число 2,7 від числа $3\frac{3}{5}$?

107③. Поясніть, чому не мають розв'язків рівняння:

1) $x+8=x$; 2) $y-2=y+3$; 3) $0\cdot x=15$;
4) $7-m=2-m$; 5) $0:x=13$; 6) $3(x+1)=3x$.

108④. Знайдіть всі значення a, при яких рівняння $ax=8$ має:
1) додатний корінь; 2) від'ємний корінь.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 1—3

Урок 9

1①. Чи є число 4 коренем рівняння:

1) $x+7=10$; 2) $3x=12$?

2①. Які з рівнянь є лінійними:

1) $5x=-2$; 2) $x^2=7$; 3) $7:x=7$; 4) $0x=0$?

3①. Скільки коренів має рівняння:

1) $-3x=5$; 2) $0x=7$?

4②. Розв'яжіть рівняння:

1) $-4x=12$; 2) $0{,}2x-1{,}2=0$.

5②. Чи рівносильні рівняння:

$3x-2=x+8$ і $2(x-3)=x-1$?

6②. В одному кошику удвічі більше грибів, ніж у другому. Скільки грибів у кожному кошику, якщо у двох кошиках разом 78 грибів?

7③. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x+1}{5}+\frac{3x-2}{4}=2$; 2) $5x-(x+5)=4(x-2)$.

8③. Човен за течією плив 3,5 год, а проти течії 4,2 год. Відстань, яку проплив човен за течією, виявилася на 9,8 км більшою, ніж відстань, яку проплив човен проти течії. Знайдіть власну швидкість човна, якщо швидкість течії дорівнює 2 км/год.

Додаткові завдання

9④. Знайдіть всі цілі значення a, при яких корінь рівняння $ax=-6$ є цілим числом.

10④. Розв'яжіть рівняння $|4x-3|=5$.

11④. З міста до села вийшов пішохід зі швидкістю 4 км/год. Через 2 год з села до міста вирушив велосипедист зі швидкістю 16 км/год. Скільки годин до зустрічі з пішоходом їхав велосипедист, якщо відстань від села до міста дорівнює 38 км?

Вправи для повторення розділу I

До § 1

109①. Чи є число −5 коренем рівняння:

1) $x+3=2$; 2) $2-x=7$; 3) $x:5=1$; 4) $4x=-20$?

110②. Доведіть, що кожне з чисел 2, −3 і 0 є коренем рівняння $x(x-2)(x+3)=0$.

111③. Чи рівносильні рівняння:

1) $|x|=2$ і $x(x+2)=0$; 2) $|x|=4$ і $x^2=16$?

112④. Чи правильне твердження: якщо кожний корінь одного рівняння є коренем другого, то ці рівняння рівносильні?

До § 2

113①. Скільки коренів має рівняння:

1) $7x=-12$; 2) $0x=0$; 3) $-3x=-17$; 4) $0x=-8$?

114②. Розв'яжіть рівняння:

1) $-\frac{2}{3}x=6$; 2) $\frac{4}{7}x=-\frac{16}{21}$; 3) $\frac{x-1}{7}=3$;

4) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=15$; 5) $4{,}7x-2=4{,}5x+3$; 6) $2x-3-(3x-2)=-8$.

115③. Знайдіть корінь рівняння:

1) $10(2x-7)-5(4x-2)=-50$; 2) $3(5x-4)-(15x-2)=9$;

3) $\frac{3x+1}{7}+\frac{2x+1}{5}=2$; 4) $\frac{2x+1}{3}-\frac{7-x}{6}=\frac{5x-3}{2}$.

116④. При якому значенні a рівняння:

1) $ax=8$ не має коренів;

2) $(a+3)x=a+3$ має коренем будь-яке число?

117*. Розв'яжіть рівняння $(a-1)x=8$ відносно змінної x.

До § 3

118①. За 3 год робітник виготовив x деталей. Виразіть через x число деталей, які виготовляв робітник за одну годину.

119②. Периметр прямокутника дорівнює 36 см, причому його довжина вдвічі більша за ширину. Знайдіть сторони прямокутника та його площу.

120③. За 7 олівців і 3 ручки заплатили 5 грн. 65 к. Скільки коштує один олівець, якщо він дешевший за ручку на 55 к.?

121③. *У кошику яблук у 4 рази менше, ніж у ящику.* Після того, як з ящика до кошика переклали 1,5 кг яблук, у кошику яблук стало у 3 рази менше, ніж у ящику. Скільки кілограмів яблук було в кошику і скільки у ящику спочатку?

122③. За 4,5 год човен проходить за течією річки таку саму відстань, як за 6 год проти течії. Знайдіть швидкість течії, якщо власна швидкість човна дорівнює 14 км/год.

123③. На зупинці потяг було затримано на 0,5 год. Збільшивши швидкість на 15 км/год, він через 2 год прибув на кінцеву станцію за розкладом. Якою була швидкість потяга до зупинки?

124④. У двох ящиках було по 60 бананів. Після того, як з одного ящика взяли у 3 рази більше бананів, ніж з другого, у ньому залишилося у 2 рази менше бананів, ніж у другому. Скільки бананів залишилося у кожному ящику?

125④. На бригаду робітників виділили премію. Якщо кожний з робітників отримає по 110 грн., то 20 грн. ще залишиться, а для того, щоб кожний робітник отримав по 120 грн., не вистачає 60 грн. Скільки робітників у бригаді і який розмір премії?

126*. В один магазин завезли 95 кг печива, а в другий — 60 кг. Перший магазин продавав щодня 7 кг печива, а другий — 6 кг. Через скільки днів у першому магазині печива залишиться удвічі більше, ніж у другому?

127*. Змішали 15-відсотковий розчин солі з 5-відсотковим і отримали 180 г 7,5-відсоткового розчину. Скільки грамів кожного розчину було взято?

$-2y^2z^5$ $(a+b)^2$ a^n

Розділ II ЦІЛІ ВИРАЗИ

§ 4. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ. ЦІЛІ РАЦІОНАЛЬНІ ВИРАЗИ. ЧИСЛОВЕ ЗНАЧЕННЯ ВИРАЗУ

Урок 10

Числові вирази **утворюються з чисел за допомогою знаків дій і дужок. Приклади числових виразів:**

$$12\cdot 3-9;\ (7+13)\cdot 3^2-45:5;\ 1{,}2^3+5\frac{1}{7}-\left(5{,}7:3+1\frac{7}{9}\right) \text{ тощо.}$$

Число, яке дістають у результаті виконання дій у числовому виразі, називають *значенням виразу*. Оскільки $12\cdot 3-9=36-9=27$, то число 27 є значенням числового виразу $12\cdot 3-9$.

Якщо числовий вираз містить дію, яку не можна виконати, то про вираз кажуть, що він *не має смислу (змісту)*. Вирази, що містять тільки арифметичні дії та дужки, не мають смислу тоді і тільки тоді, коли вони містять ділення на число 0. Наприклад, вираз $5:(8:2-4)$ не має смислу, бо $8:2-4=0$ і наступна дія $5:0$ не виконується.

Вираз $5+a$ містить змінну a, вираз $2b-x$ змінні b і x, вираз $\frac{c-5p}{d}$ змінні c, p і d. Вирази $5+a$, $2b-x$, $\frac{c-5p}{d}$ — *вирази зі змінними*.

! Вирази зі змінними утворюються з чисел та змінних за допомогою знаків дій і дужок.

Якщо у вираз зі змінними підставити замість змінних певні числа, то дістанемо числовий вираз. Значення цього числового виразу називають *числовим значенням виразу* для вибраних значень змінних.

Приклад 1. Знайти значення виразу:

1) $(5+b):4$, якщо $b=-2$; $b=0$; 2) $\frac{a-c}{12}$, якщо $a=17$; $c=-5$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Якщо $b = -2$, то $(5 + b):4 = (5 + (-2)):4 = 3:4 = 0{,}75$; якщо $b = 0$, то $(5 + b):4 = (5 + 0):4 = 5:4 = 1{,}25$.

2) Якщо $a = 17$, $c = -5$, то $\frac{a-c}{12} = \frac{17-(-5)}{12} = \frac{22}{12} = 1\frac{5}{6}$.

Вираз, який складається з чисел і букв, сполучених знаками дій, та дужок, називають ***раціональним виразом.*** Приклади раціональних виразів:

$$2a - m;\ \frac{p+2q}{9};\ -\frac{2}{3}(x - 9 + y);\ \frac{5+x}{m};\ \frac{17}{x^2-3};\ a + b - \frac{1}{c}.$$

Раціональний вираз, який не містить ділення на вираз із змінною, називається ***цілим раціональним виразом.*** Якщо в раціональному виразі є ділення на вираз зі змінною, його називають ***дробовим раціональним виразом.*** Три перших з наведених вище виразів — цілі, а три останніх — дробові.

Вирази зі змінними використовують для запису формул.

Приклад 2. 1) $s = vt$ — формула шляху; 2) $P = 2(a + b)$ — формула для обчислення периметра прямокутника; 3) $n = 2k$ (де k — ціле число) — формула парного числа; 4) $n = 2k + 1$ (де k — ціле число) — формула непарного числа; 5) $n = 7k$ (де k — ціле число) — формула числа, кратного 7.

З чого утворюються числові вирази? • Що називають значенням числового виразу? • З чого утворюються вирази зі змінними? • Що називають числовим значенням виразу для вибраних значень змінних? • Наведіть приклад числового виразу і виразу зі змінними. • Який вираз називають цілим раціональним виразом?

128①. (Усно.) Які з наведених нижче виразів є числовими, а які — виразами зі змінними:

1) $5 + m^2 - a$; 2) $(12 - 3):4$; 3) $\frac{5+x}{a+b}$; 4) $(0 - 8)\cdot 5 - 13$?

129①. (Усно.) Які з виразів зі змінними є цілими, а які — дробовими:

1) $\frac{a^3+c}{5}$; 2) $\frac{5}{a^3+c}$; 3) $m + \frac{x}{7}$; 4) $m + \frac{7}{x}$?

130①. Прочитайте словами вирази зі змінними:

1) $x + 7$; 2) $m - a$; 3) $5ab$; 4) $5:(c + 9)$.

131①. Складіть і запишіть по два вирази:

1) зі змінною a; 2) зі змінними x і y.

132②. Знайдіть значення виразу:

1) $5x - 3$, якщо $x = 1{,}8$; $x = 2\frac{1}{5}$;

2) $a^2 + 3a$, якщо $a = -1$; $a = 0{,}8$.

133②. Знайдіть значення виразу:

1) $5m + 2n$, якщо $m = -1{,}3$; $n = 2\frac{1}{2}$;

2) $a(2b - c)$, якщо $a = 1{,}5$; $b = 3{,}2$; $c = -1{,}4$.

134②. Запишіть у вигляді виразу:

1) суму чисел b і c;

2) добуток чисел $5m$ і $3n$;

3) квадрат суми чисел a і $9p$;

4) різницю квадратів чисел $3d$ і $7r$.

135②. Майстер за одну годину виготовляє x деталей, а його учень — y деталей. Скільки деталей вони виготовили разом, якщо майстер працював 8 год, а учень — 4 год?

136①. Випишіть окремо: числові вирази; вирази зі змінними; цілі раціональні вирази; дробові раціональні вирази:

1) $5 + c$; 2) $(2 - 15)\cdot 4$; 3) $\frac{a+m}{p}$; 4) $q^2 - 19$;

5) $7 + \frac{a}{5}$; 6) $\frac{1}{4}ab$; 7) $\frac{9-5}{11}$; 8) $\frac{a^2-b^2}{c^2}$.

137①. Складіть і запишіть по три вирази:

1) зі змінною x; 2) зі змінними a і b.

138②. Знайдіть значення виразу:

1) $b^2 - 4b$, якщо $b = -2$; $b = 0{,}5$;

2) $x^2 - y^2$, якщо $x = 5$; $y = -3$; якщо $x = 0{,}1$; $y = 0{,}2$.

139②. Обчисліть значення виразів $5x - 1$ і $5x + 1$, якщо $x = -3$; -2; -1; 0; 1; 2; 3.

140②. Запишіть у вигляді виразу:

1) різницю чисел p і 7; 2) частку чисел $a + c$ і d;

3) суму числа a і добутку чисел m і n.

Урок 11

141①. (Усно.) Які з наведених числових виразів не мають смислу:

1) $(5 - 6):7$; 2) $(10 - 2\cdot 5):7$;

3) $4:(12 - 2\cdot 6)$; 4) $\frac{17}{15+5\cdot(-3)}$?

142②. Заповніть такі таблиці в зошиті:

m	2	3	–1	0	–2
n	1	2	0	–5	–3
$2m-3n$					

x	–1	0	1	2
x^2+2				
x^2+2x				

143②. (Усно.) Нехай a дм — довжина прямокутника, b дм — його ширина. Що означають вирази:

1) ab; 2) $2(a+b)$; 3) $2a$; 4) $\frac{a}{b}$?

144③. Запишіть у вигляді виразу час, який учень щоденно проводить у школі, якщо у нього a уроків по 45 хв, b перерв по 15 хв і c перерв по 10 хв. Обчисліть значення виразу, якщо $a=6$; $b=2$; $c=3$.

145③. При якому значенні a значення виразу $5a-8$ дорівнює -13?

146③. Складіть формулу:

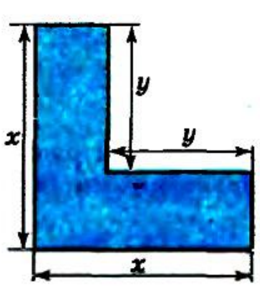
1) числа, кратного 9;

2) цілого числа, яке при діленні на 5 дає остачу 1.

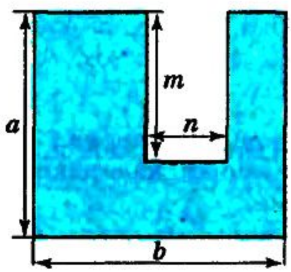
147④. При деяких значеннях a і b значення виразу $a-b$ дорівнює 2,25. Якого значення при таких самих a і b набуває вираз:

1) $4(a-b)$; 2) $b-a$; 3) $\frac{1}{b-a}$; 4) $\frac{3(a-b)}{4(b-a)}$?

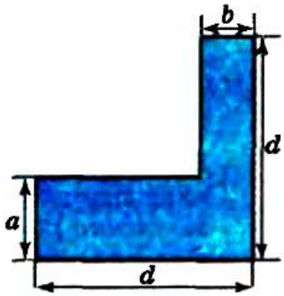
148④. Складіть вирази для обчислення площ фігур (мал. 1—3):



Мал. 1



Мал. 2



Мал. 3

149②. Порівняйте суму $a+b$ та добуток ab, якщо:

1) $a=0$; $b=-2$; 2) $a=-3$; $b=2$.

150②. Ручка коштує x к., олівець — y к. ($x>y$). Що означають вирази:

1) $x+y$; 2) $3x+y$; 3) $4x-2y$; 4) $\frac{x}{y}$?

151③. Запишіть у вигляді виразу суму грошей, в якій x монет номіналом a к., y монет номіналом 25 к. і z монет номіналом 50 к. Обчисліть цю суму, якщо $x = 8$; $y = 5$; $z = 2$.

152③. При якому значенні x значення виразів $3x - 4$ і $-2x + 7$ рівні?

153④. При деяких значеннях c і d значення виразу $c - d$ дорівнює $\frac{4}{7}$. Якого значення при таких самих c і d набуває вираз:

1) $7(c - d)$; 2) $d - c$; 3) $\frac{1}{d-c}$; 4) $\frac{5(d-c)}{4(c-d)}$?

154②. Обчисліть:

1) 13^2; 2) 7^3; 3) $(-2{,}1)^2$; 4) $(-1{,}1)^3$;

5) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$; 6) $\left(-1\frac{1}{5}\right)^2$; 7) $\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 8) $0{,}2^3$.

155③. Якою цифрою закінчується значення виразу:

1) 132^2; 2) 271^3; 3) 2007^2; 4) $1315^2 - 115^3$?

156③. Власна швидкість катера 26 км/год, а швидкість течії річки 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо в одному напрямі катер проходить її на 30 хв швидше, ніж у зворотному.

§ 5. ТОТОЖНІ ВИРАЗИ. ТОТОЖНІСТЬ. ТОТОЖНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ВИРАЗУ. ДОВЕДЕННЯ ТОТОЖНОСТЕЙ

Урок 12

Два вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називаються *тотожними*, або *тотожно рівними*.

Наприклад, тотожними є вирази $2x + 3x$ і $5x$, бо при кожному значенні змінної x ці вирази мають рівні значення (це випливає з розподільного закону множення).

Розглянемо тепер вирази $3x + 2y$ і $5xy$. Якщо $x = 1$ і $y = 1$, то відповідні значення цих виразів дорівнюють одне одному:

$$3x + 2y = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 5 \text{ і } 5xy = 5 \cdot 1 \cdot 1 = 5.$$

Проте можна назвати такі значення x і y, для яких значення цих виразів не рівні. Наприклад, якщо $x = 2$; $y = 0$, то

$$3x + 2y = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 = 6, \text{ а } 5xy = 5 \cdot 2 \cdot 0 = 0.$$

Отже, є такі значення змінних, при яких відповідні значення виразів $3x + 2y$ і $5xy$ не дорівнюють одне одному. Тому вирази $3x + 2y$ і $5xy$ не є тотожно рівними.

Рівність, правильна при будь-яких значеннях змінних, називається *тотожністю*.

Приклади тотожностей: $2x + 3x = 5x$, $8(x - 1) = 8x - 8$.

Тотожністю є кожна рівність, що виражає відомі закони дій над числами:

$$a + b = b + a; \quad (a + b) + c = a + (b + c);$$
$$ab = ba; \quad (ab)c = a(bc); \quad a(b + c) = ab + ac.$$

Тотожностями є і такі рівності:

$$a + 0 = a; \quad a + (-a) = 0; \quad a - b = a + (-b);$$
$$a \cdot 0 = 0; \quad a \cdot 1 = a; \quad a \cdot (-b) = -ab; \quad -a \cdot (-b) = ab.$$

Тотожностями також прийнято вважати правильні числові рівності, наприклад:

$$1 + 2 + 3 = 7 - 1; \; 5^2 + 12^2 = 13^2; \; 12 \cdot (7 - 6) = 3 \cdot 4.$$

Якщо у виразі $5x + 2x - 9$ звести подібні доданки $5x$ і $2x$, то отримаємо: $5x + 2x - 9 = (5 + 2)x - 9 = 7x - 9$. Вираз $5x + 2x - 9$ замінили тотожним виразом $7x - 9$.

Заміна даного виразу іншим, тотожним йому, називається *тотожним перетворенням виразу*.

Тотожні перетворення виразів зі змінними виконують на основі властивостей дій над числами. До тотожних перетворень можна віднести розкриття дужок, зведення подібних доданків.

Тотожні перетворення доводиться виконувати під час *спрощення виразів*, тобто заміни деякого виразу на тотожно рівний йому вираз, який має коротший запис.

Приклад 1. Спростити вираз: 1) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7)$; 2) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a)$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $2(3x - 4) + 3(-4x + 7) = \underline{6x} - 8 - \underline{12x} + 21 = -6x + 13$; 2) $2 + 5a - (a - 2b) + (3b - a) = 2 + \underline{5a} - \underline{a} + \underline{\underline{2b}} + \underline{\underline{3b}} - \underline{a} = 3a + 5b + 2$.

Щоб довести, що рівність є тотожністю, або, інакше кажучи, щоб *довести тотожність*, використовують тотожні перетворення виразів. Довести тотожність можна так:

1) ліву частину тотожності тотожними перетвореннями звести до правої частини;

2) праву частину тотожності тотожними перетвореннями звести до лівої частини;

3) обидві частини тотожності тотожними перетвореннями звести до одного й того самого виразу.

Приклад 2. Довести тотожність: 1) $2x-(x+5)-11=x-16$;
2) $20b-4a=5(2a-3b)-7(2a-5b)$;
3) $2(3x-8)+4(5x-7)=13(2x-5)+21$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Перетворимо ліву частину рівності:

$$2x-(x+5)-11=\underline{2x}-\underline{x}-5-11=x-16.$$

Тотожними перетвореннями ліву частину рівності звели до правої частини і тим самим довели, що дана рівність є тотожністю.

2) Перетворимо праву частину рівності:

$$5(2a-3b)-7(2a-5b)=\underline{10a}-\underline{\underline{15b}}-\underline{14a}+\underline{\underline{35b}}=20b-4a.$$

Тотожними перетвореннями праву частину рівності звели до лівої частини і тим самим довели, що дана рівність є тотожністю.

3) У цьому випадку зручно спростити ліву і праву частини рівності та порівняти результати:

$$2(3x-8)+4(5x-7)=\underline{6x}-16+\underline{20x}-28=26x-44;$$
$$13(2x-5)+21=26x-65+21=26x-44.$$

Тотожними перетвореннями ліву і праву частини рівності звели до одного й того самого виразу $26x-44$. Тому вихідна рівність є тотожністю.

Які вирази називають тотожними? • Наведіть приклад тотожних виразів. • Яку рівність називають тотожністю? • Наведіть приклад тотожності. • Що називають тотожним перетворенням виразу? • Як довести тотожність?

157①. (Усно.) Чи є тотожно рівними вирази:

1) $2a+a$ і $3a$; 2) $7x+b$ і $b+7x$; 3) $x+x+x$ і x^3;

4) $2(x-2)$ і $2x-4$; 5) $m-n$ і $n-m$; 6) $2a\cdot p$ і $2p\cdot a$?

158①. (Усно.) Чи є тотожністю рівність:

1) $2a+10b=12ab$; 2) $7p-1=-1+7p$;

3) $3(x-y)=3x-5y$?

159①. Розкрийте дужки:

1) $2(a-1)$; 2) $7(3b+2)$; 3) $-(b-3)$; 4) $-(-5+4y)$.

160①. Зведіть подібні доданки:

1) $2x-x$; 2) $-3m+5m$; 3) $-2y-3y$; 4) $p-7p$.

161②. Спростіть вираз, використовуючи переставну і сполучну властивості множення:

1) $-2{,}5x \cdot 4$; 2) $4p \cdot (-1{,}5)$; 3) $0{,}2x \cdot (-0{,}3p)$; 4) $-\frac{1}{7}x \cdot (-7y)$.

162②. Зведіть подібні доданки:

1) $5b - 8a + 4b - a$; 2) $17 - 2p + 3p + 19$;

3) $1{,}8a + 1{,}9b + 2{,}8a - 2{,}9b$; 4) $5 - 7c + 1{,}9p + 6{,}9c - 1{,}7p$.

163②. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $4(5x - 7) + 3x + 13$; 2) $2(7 - 9a) - (4 - 18a)$;

3) $3(2p - 7) - 2(p - 3)$; 4) $-(3m - 5) + 2(3m - 7)$.

164②. Доведіть тотожність:

1) $-(2x - y) = y - 2x$; 2) $2(x - 1) - 2x = -2$;

3) $2(x - 3) + 3(x + 2) = 5x$; 4) $c - 2 = 5(c + 2) - 4(c + 3)$.

165①. Чи є тотожно рівними вирази:

1) $7x - 2x$ і $4x$; 2) $5a - 4$ і $4 - 5a$; 3) $4m + n$ і $n + 4m$;

4) $a + a$ і a^2; 5) $3(a - 4)$ і $3a - 12$; 6) $5m \cdot n$ і $5m + n$?

166①. Розкрийте дужки:

1) $-(a - 4)$; 2) $3(x + 1)$; 3) $5(1 - 4m)$; 4) $-(-2p + 7)$.

167②. Спростіть вираз:

1) $-2p \cdot 3{,}5$; 2) $7a \cdot (-1{,}2)$; 3) $0{,}2x \cdot (-3y)$; 4) $-1\frac{1}{3}m \cdot (-3n)$.

168②. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $3(8a - 4) + 6a$; 2) $7p - 2(3p - 1)$;

3) $2(3x - 8) - 5(2x + 7)$; 4) $3(5m - 7) - (15m - 2)$.

169②. Доведіть тотожність:

1) $-(m - 3n) = 3n - m$; 2) $7(2 - p) + 7p = 14$;

3) $5a = 3(a - 4) + 2(a + 6)$; 4) $4(m - 3) + 3(m + 3) = 7m - 3$.

Урок 13

170①. Назвіть кілька виразів, тотожних виразу $2a + 3a$.

171②. (Усно.) Спростіть вираз:

1) $2x - 9 + 5x$; 2) $7a - 3b + 2a + 3b$;

3) $-2x \cdot 3$; 4) $-4a \cdot (-2b)$.

172②. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}6x + 0{,}4(x - 20)$, якщо $x = 2{,}4$;

2) $1{,}3(2a - 1) - 16{,}4$, якщо $a = 10$;

3) $1{,}2(m - 5) - 1{,}8(10 - m)$, якщо $m = -3{,}7$;

4) $2x - 3(x + y) + 4y$, якщо $x = -1$, $y = 1$.

173②. Довжина однієї із сторін трикутника a см, а довжина кожної з двох інших сторін на 2 см більша. Запишіть у вигляді виразу периметр трикутника та спростіть цей вираз.

174③. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $x-(x-(2x-3))$; 2) $5m-((n-m)+3n)$;

3) $4p-(3p-(2p-(p+1)))$; 4) $5x-(2x-((y-x)-2y))$;

5) $\frac{2}{3}\left(6a-\frac{3}{8}b\right)-\frac{2}{11}\left(4\frac{1}{8}a-33b\right)$;

6) $-\frac{2}{9}(2{,}7m-1{,}5n)+\frac{5}{6}(2n-0{,}48m)$.

175③. Доведіть тотожність:

1) $10x-(-(5x+20))=5(3x+4)$;

2) $-(-3p)-(-(8-5p))=2(4-p)$;

3) $3(a-b-c)+5(a-b)+3c=8(a-b)$.

176③. Доведіть, що значення виразу

$$1{,}8(m-2)+1{,}4(2-m)+0{,}2(1{,}7-2m)$$

не залежить від значення змінної.

177④. Доведіть, що сума трьох послідовних парних чисел ділиться на 6.

178④. Доведіть, що коли n — натуральне число, то значення виразу $-2(2{,}5n-7)+2\frac{1}{3}(3n-6)$ є парним числом.

179②. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $0{,}7x+0{,}3(x-4)$, якщо $x=-0{,}7$;

2) $1{,}7(y-11)-16{,}3$, якщо $y=20$;

3) $0{,}6(2a-14)-0{,}4(5a-1)$, якщо $a=-1$;

4) $5(m-n)-4m+7n$, якщо $m=1{,}8$; $n=-0{,}9$.

180②. Ширина прямокутника дорівнює x см, а довжина на 3 см більша. Запишіть у вигляді виразу периметр прямокутника і спростіть цей вираз.

181③. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $a-(a-(3a-1))$; 2) $12m-((a-m)+12a)$;

3) $5y-(6y-(7y-(8y-1)))$;

4) $\frac{4}{7}(2{,}1a-2{,}8b)-\frac{4}{5}\left(1\frac{1}{2}a-1\frac{1}{4}b\right)$.

182③. Доведіть тотожність:

1) $12a-(-(8a-16))=-4(4-5a)$;

2) $4(x+y-t)+5(x-t)-4y=9(x-t)$.

183③. Доведіть, що значення виразу

$$a - (a - (5a + 2)) - 5(a - 8)$$

не залежить від значення змінної.

184②. Сплав містить 15 % міді. Маса сплаву 1600 г. Скільки у сплаві міді?

185③. Скільки відсотків число 20 становить від свого:

1) квадрата; 2) куба?

186③. Турист 2 год йшов пішки і 3 год їхав на велосипеді. Всього турист подолав 56 км. Знайдіть, з якою швидкістю турист їхав на велосипеді, якщо вона на 12 км/год більша за швидкість, з якою він йшов пішки.

§ 6. СТЕПІНЬ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Урок 14

Добуток кількох однакових множників можна записати у вигляді виразу, який називають ***степенем***. Наприклад,

$$\underbrace{4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4}_{6\ \text{множників}} = 4^6.$$

Множник, який повторюється, називають ***основою степеня***, а число, яке показує кількість таких множників,— ***показником степеня***. У виразі 4^6 число 4 — основа степеня, а число 6 — показник степеня. $4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4\cdot4 = 4096$. Число 4096 — шостий степінь числа 4.

Степенем числа а з натуральним показником n, більшим за **1, називають добуток *n* множників, кожний з яких дорівнює *a*.** ***Степенем числа а з показником*** **1 називають саме це число.**

Степінь з основою a і показником n записують так: a^n, читають: «a в степені n», або «n-й степінь числа a».

За означенням степеня: $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot \ldots \cdot a}_{n\ \text{множників}}$, $n > 1$ і $a^1 = a$.

Другий степінь числа a називають ще ***квадратом числа а***, а третій степінь числа a називають ***кубом числа а***.

Приклад 1. Подати у вигляді степеня: 1) aa; 2) $bbbb$; 3) $17\cdot17\cdot17$; 4) $10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $aa = a^2$; 2) $bbbb = b^4$; 3) $17\cdot17\cdot17 = 17^3$; 4) $10\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10 = 10^5$.

Знаходження значення степеня називають ***піднесенням до степеня***.

Приклад 2. Виконати піднесення до степеня: 1) 2^4; 2) 0^3; 3) $(-6)^2$; 4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$; 2) $0^3 = 0\cdot0\cdot0 = 0$; 3) $(-6)^2 = -6\cdot(-6) = 36$; 4) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$.

З'ясуємо знак степеня з натуральним показником:

1) $a = 0$, тоді $0^1 = 0$; $0^2 = 0\cdot0 = 0$, ... Будь-який натуральний степінь числа 0 дорівнює 0: $0^n = 0$, $n \geq 1$.

2) $a > 0$, тоді $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot\ \ldots\ \cdot a}_{n\ \text{множників}} > 0$, як добуток додатних чисел.

3) $a < 0$, тоді $a^1 = a < 0$; $a^2 = aa > 0$; $a^3 = aaa < 0$; $a^4 = aaaa > 0$; ... Степінь від'ємного числа з парним показником є додатним числом (як добуток парної кількості від'ємних множників); степінь від'ємного числа з непарним показником є від'ємним числом (як добуток непарної кількості від'ємних множників).

Не слід плутати слова «степінь» і «ступінь». Нагадаємо, що додавання і віднімання вважають діями *першого ступеня*, множення і ділення — *другого ступеня*. Піднесення до степеня — це дія *третього ступеня*.

Обчислюють значення виразу так:

1) спочатку виконують дії вищого ступеня, потім — нижчого;

2) дії одного й того самого ступеня виконують у тому порядку, в якому вони записані;

3) якщо вираз містить дужки, спочатку знаходять значення виразу в дужках.

Приклад 3. Обчислити значення виразу: 1) $3 - 7\cdot2^3$; 2) $(2 + (-3)^4)^2$; 3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8$; 4) $4^3 : 2^7$.

Р о з в ' я з а н н я. 1) $3 - 7\cdot2^3 = 3 - 7\cdot8 = 3 - 56 = -53$;

2) $(2 + (-3)^4)^2 = (2 + 81)^2 = 83^2 = 6889$;

3) $((-1)^5 + (-1)^6)^8 = (-1 + 1)^8 = 0^8 = 0$; 4) $4^3 : 2^7 = 64 : 128 = 0,5$.

П р и м і т к а: під час обчислень можна також записувати кожну дію окремо.

Історичні відомості

Поняття степеня з натуральним показником сформувалося ще у стародавні часи. Квадрат числа використовували для обчислення площ, а куб числа — для обчислення об'ємів. Степені деяких чисел використовували під час розв'язування окремих задач у Стародавньому Єгипті та Вавилоні.

Французький математик *Ф. Вієт* використовував букви *N, Q* і *C* не лише для записів відповідно x, x^2 і x^3, а й для запису степенів вище третього. Наприклад, четвертий степінь він записував так: *QQ*.

Сучасний запис степенів був запропонований видатним французьким математиком, фізиком, філософом *Рене Декартом*. У своїй праці «Геометрія» (1634) він став записувати степені з натуральним показником так, як ми це робимо тепер: a^3, a^4, a^5 і т. д. Проте другий степінь числа a, тобто a^2, він записував як добуток aa.

Рене Декарт
(1596 — 1650)

Сформулюйте означення степеня з натуральним показником. • Наведіть приклади степенів, у кожному випадку назвіть основу і показник степеня. • Як називається другий степінь числа *a*; третій степінь числа *a*? • Яким числом (додатним чи від'ємним) є: 1) степінь додатного числа; 2) степінь від'ємного числа з парним показником; 3) степінь від'ємного числа з непарним показником? • Дією якого ступеня є піднесення до степеня?

187①. Прочитайте вирази, назвіть основу і показник степеня:

1) $0{,}4^7$; 2) $(-8)^2$; 3) $(ab)^3$; 4) $(x-y)^5$; 5) $\left(\frac{1}{2}a^2m\right)^4$; 6) $(a^2-b^2)^6$.

188①. Запишіть добуток у вигляді степеня:

1) $0{,}2\cdot0{,}2$; 2) $-6\cdot(-6)\cdot(-6)$; 3) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$; 4) $-\frac{5}{9}\cdot\left(-\frac{5}{9}\right)$;

5) $mmmm$; 6) $(ab)\cdot(ab)$; 7) $\underbrace{p\cdot p\cdot\ \ldots\ \cdot p}_{20\ \text{множників}}$; 8) $(x-y)(x-y)(x-y)$.

189①. Запишіть степінь у вигляді добутку рівних множників:

1) 3^5; 2) a^3; 3) $(a-b)^2$; 4) $\left(\frac{x}{x+y}\right)^4$.

190①. Обчисліть:

1) 3^2; 2) 2^3; 3) 0^2; 4) 1^7; 5) $(-1)^4$; 6) $(-1)^3$.

191②. Виконайте піднесення до степеня:

1) 3^5; 2) $(0{,}7)^2$; 3) $\left(\frac{1}{4}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^5$;

5) $(-7)^4$; 6) $(-0{,}3)^3$; 7) $\left(-1\frac{2}{3}\right)^2$; 8) $(-0{,}1)^4$.

192②. Розкладіть натуральні числа на прості множники, використавши у запису розкладу степінь:

1) 16; 2) 27; 3) 50; 4) 1000; 5) 99; 6) 656.

193②. Обчисліть:

1) -5^2; 2) $-\left(-\frac{2}{3}\right)^3$; 3) $-(-0,2)^4$; 4) $-(-1)^{19}$.

194②. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-5,7)^2$; 2) $(-12,49)^9$; 3) -53^7; 4) $-(-2)^5$.

195①. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $0,7 \cdot 0,7 \cdot 0,7$; 2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$; 3) $aaaaa$;

4) $(a+b)(a+b)$; 5) $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{7}$; 6) $\underbrace{mmm \ldots m}_{15 \text{ множників}}$.

196①. Подайте степінь у вигляді добутку рівних множників:

1) 5^7; 2) b^4; 3) $(x+y)^3$; 4) $\left(\frac{m}{m-5}\right)^2$.

197②. Виконайте піднесення до степеня:

1) 5^4; 2) $(1,5)^2$; 3) $\left(\frac{2}{7}\right)^3$; 4) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4$;

5) $(-3)^3$; 6) $(-1,7)^2$; 7) $\left(-1\frac{1}{8}\right)^3$; 8) $(-0,2)^4$.

198②. Обчисліть:

1) -7^3; 2) $-\left(-\frac{1}{2}\right)^2$; 3) $-\left(-1\frac{1}{3}\right)^3$; 4) $-(-1)^{16}$.

199②. Порівняйте з нулем значення виразу (відповідь запишіть у вигляді нерівності):

1) $(-4,7)^3$; 2) $(-2,31)^4$; 3) $-(-2)^8$; 4) $-(-3)^7$.

Урок 15

200①. (Усно.) Обчисліть:

1) 1^3; 2) 0^5; 3) 5^2; 4) $(-7)^2$; 5) $(-2)^3$; 6) $(-1)^8$.

201②. Заповніть таку таблицю у зошиті:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n										
3^n										

202②. Знайдіть значення виразу:

1) $0{,}2 \cdot 25^2$; 2) $\frac{50}{0{,}1^3}$; 3) $-4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4$; 4) $0{,}2 \cdot (-5)^3$;

5) $\left(5 \cdot \frac{2}{15}\right)^3$; 6) $\left(6 : \frac{2}{3}\right)^2$; 7) $5^2 + (-5)^4$; 8) $(3{,}4 - 3{,}6)^2$.

203③. Не виконуючи обчислень, порівняйте:

1) -2^4 і $(-2)^4$; 2) $(-7)^3$ і $(-6)^2$;

3) $(-12)^8$ і 12^8; 4) -5^3 і $(-5)^3$.

204③. Подайте:

1) у вигляді квадрата числа: 0; 4; 0,16; $\frac{9}{25}$; 169; $1\frac{24}{25}$;

2) у вигляді куба числа: 64; −27; 0; 1; $-\frac{1}{8}$; $1\frac{91}{125}$.

205③. Подайте:

1) у вигляді степеня з основою п'ять числа: 125; 5; 625;

2) у вигляді степеня з основою десять числа: 100; 1000; 10.

206③. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{1}{27}x^3$, якщо $x = 0; -1; 1; -3; 3$;

2) $a + a^2 + a^3$, якщо $a = 1; -1; -2$;

3) $(15x)^4$, якщо $x = \frac{1}{3}; -\frac{1}{5}$;

4) $a^2 - b^2$, якщо $a = -6; -8$.

207③. Знайдіть:

1) суму квадратів чисел 0,6 і −0,7;

2) квадрат суми чисел 5,7 і −6,3;

3) різницю кубів чисел 2,3 і 2,2;

4) куб суми чисел 8,2 і 1,8.

208④. Поставте замість * знак >, <, ≥, ≤, щоб при будь-якому значенні букв була правильною нерівність:

1) $a^2 * 0$; 2) $-b^2 * 0$; 3) $m^2 + 3 * 0$;

4) $-p^2 - 1 * 0$; 5) $(a - 3)^2 * 0$; 6) $a^2 + b^2 * 0$;

7) $x^2 + y^2 + 5 * 0$; 8) $(m - n)^2 + 1 * 0$; 9) $-(p + 9)^2 * 0$.

209④. Якого найменшого значення може набувати вираз:

1) $a^2 + 1$; 2) $3 + (m - 3)^2$; 3) $(a + 8)^4 - 5$?

Якого найбільшого значення може набувати вираз:

4) $-x^2 + 2$; 5) $-(m - 2)^4 + 1$; 6) $5 - (a + 9)^2$?

210②. Обчисліть значення виразу:

1) $0{,}5\cdot 40^2$; 2) $\dfrac{30}{0{,}3^3}$; 3) $-5\cdot\left(\dfrac{1}{5}\right)^3$;

4) $\left(-\dfrac{7}{8}\right)^2\cdot 16$; 5) $\left(12:\dfrac{6}{7}\right)^2$; 6) $\left(-3\cdot\dfrac{2}{9}\right)^4$;

7) $6^2-(-6)^3$; 8) $(1{,}7-1{,}9)^4$.

211②. Чи правильні рівності:

1) $3^2+4^2=5^2$; 2) $4^2+5^2=6^2$; 3) $2^3+3^3=5^3$;

4) $2^6+6^2=10^2$; 5) $1^3+2^3+3^3=6^2$; 6) $(-5)^2+(-12)^2=(-13)^2$?

212③. Подайте:

1) у вигляді куба або квадрата числа: 8; 81; −125; −64; 0,16; 0,001; $3\dfrac{3}{8}$; $1\dfrac{11}{25}$;

2) у вигляді степеня з основою 2 числа: 2; 4; 8; 256;

3) у вигляді степеня з основою −3 числа: 81; −27; −3.

213③. Обчисліть значення виразу:

1) $0{,}01a^4$, якщо $a=2$; −5; 10;

2) $5c^2-4$, якщо $c=0{,}2$; −0,1; 0;

3) $(m+n)^3$, якщо $m=-4$, $n=-1$;

4) $4x^2-x^3$, якщо $x=1$; −2; −3.

214③. Порівняйте значення виразів:

1) $-x^2$ і $(-x)^2$, якщо $x=5$; −3; 0;

2) $-x^3$ і $(-x)^3$, якщо $x=-2$; 0; 3.

215②. Виразіть у відсотках число:

1) 0,8; 2) 1,13; 3) 8,3; 4) 0,007.

216③. Обчисліть:

1) $\left(9\dfrac{8}{15}-7\dfrac{7}{15}\right)\cdot 4{,}5-2\dfrac{1}{6}:0{,}52$;

2) $\dfrac{8}{13}\cdot(-0{,}1625)-\left(\dfrac{9}{22}+1\dfrac{4}{11}\right)\cdot 1{,}32$.

217④. При деяких значеннях x і y значення виразу $x+3y$ ділиться без остачі на 5. Чи ділиться без остачі на 5 значення виразу $7x+21y$ при цих самих значеннях x і y?

§ 7. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Урок 16

Вираз a^3a^2 є добутком двох степенів з однаковими основами. Цей добуток можна записати у вигляді степеня з тією самою основою:

$$a^3a^2 = (aaa)\cdot(aa) = aaaaa = a^5.$$

Отже, $a^3a^2 = a^5$, але $a^5 = a^{2+3}$. Тому *добуток a^3a^2 дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює сумі показників множених степенів*. Таку властивість має добуток будь-яких степенів з однаковими основами.

! ***Для будь-якого числа a й довільних натуральних чисел m і n виконується рівність $a^ma^n = a^{m+n}$.***

Доведення. $$a^ma^n = \underbrace{aa\ldots a}_{\substack{m \\ \text{множників}}} \cdot \underbrace{aa\ldots a}_{\substack{n \\ \text{множників}}} = \underbrace{aaa\ldots a}_{\substack{(m+n) \\ \text{множників}}} = a^{m+n}.$$

Рівність $a^ma^n = a^{m+n}$ називають ***основною властивістю степеня***. Вона поширюється на добуток трьох і більше степенів. Наприклад:

$$a^ma^na^k = a^{m+n+k}.$$

З основної властивості степеня випливає ***правило множення степенів***:

! ***при множенні степенів з однаковими основами основу залишають тією самою, а показники степенів додають.***

Приклад 1. $3^7\cdot3^5 = 3^{7+5} = 3^{12}$; $7^3\cdot7 = 7^3\cdot7^1 = 7^{3+1} = 7^4$; $a^7a^2a^3 = a^{7+2+3} = a^{12}$.

Оскільки $a^3a^2 = a^5$, то за означенням частки $a^5 : a^3 = a^2$, але $a^2 = a^{5-3}$. Частка $a^5 : a^3$ дорівнює степеню з тією самою основою і показником, який дорівнює різниці показників діленого і дільника.

Цю властивість має частка степенів з однаковими основами, відмінними від нуля, в якій показник степеня діленого більший від показника степеня дільника.

! ***Для будь-якого числа $a \neq 0$ і довільних натуральних чисел m і n, таких, що $m > n$, виконується рівність:***

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Д о в е д е н н я. Оскільки $a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m$, тобто $a^{m-n}a^n = a^m$, то за означенням частки маємо $a^m : a^n = a^{m-n}$.

З доведеної властивості випливає *правило ділення степенів*:

при діленні степенів з однаковими основами основу залишають тією самою, а від показника степеня діленого віднімають показник степеня дільника.

Приклад 2. $3^{18} : 3^5 = 3^{18-5} = 3^{13}$; $m^9 : m = m^9 : m^1 = m^{9-1} = m^8$.

Вираз $(a^7)^3$ — степінь, основа якого сама є степенем. Цей вираз можна подати у вигляді степеня з основою a:

$$(a^7)^3 = a^7 \cdot a^7 \cdot a^7 = a^{7+7+7} = a^{7\cdot 3} = a^{21}.$$

Для будь-якого числа a і довільних натуральних чисел m і n виконується рівність:

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Д о в е д е н н я. $(a^m)^n = \underbrace{a^m a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ множників}} = a^{\overbrace{m+m+\ldots+m}^{n \text{ доданків}}} = a^{mn}$.

З доведеної властивості випливає *правило піднесення степеня до степеня*:

при піднесенні степеня до степеня основу залишають тією самою, а показники степенів перемножують.

Приклад 3. $(4^5)^4 = 4^{5\cdot 4} = 4^{20}$; $(a^8)^{11} = a^{8\cdot 11} = a^{88}$; $((p^3)^2)^5 = (p^{3\cdot 2})^5 = (p^6)^5 = p^{6\cdot 5} = p^{30}$.

Вираз $(ab)^3$ є степенем добутку множників a і b. Цей вираз можна подати у вигляді добутку степенів a і b:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = (aaa) \cdot (bbb) = a^3b^3.$$

Отже, $(ab)^3 = a^3b^3$.

Аналогічну властивість має будь-який натуральний степінь добутку двох множників.

Для будь-яких a і b й довільного натурального числа n виконується рівність $(ab)^n = a^nb^n$.

Доведення. $(ab)^n = \underbrace{(ab)\cdot(ab)\cdot\ldots\cdot(ab)}_{n \text{ множників}} = \underbrace{(aa \cdot \ldots \cdot a)}_{n \text{ множників}} \cdot \underbrace{(bb \cdot \ldots \cdot b)}_{n \text{ множників}} = a^nb^n$.

Доведена властивість степеня поширюється на степінь добутку трьох і більше множників:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n\ ;\ (abcd)^n = a^n b^n c^n d^n \text{ тощо.}$$

Маємо *правило піднесення до степеня добутку*:

при піднесенні до степеня добутку досить піднести до цього степеня кожний множник і результати перемножити.

Приклад 4. $(7ab)^2 = 7^2a^2b^2 = 49a^2b^2$; $(-2xy)^3 = (-2)^3x^3y^3 = -8x^3y^3$.

Ліву і праву частини розглянутих тотожностей можна міняти місцями:

$$\begin{array}{lcl} a^m a^n = a^{m+n}, & & a^{m+n} = a^m a^n, \\ a^m : a^n = a^{m-n}, & \text{і} & a^{m-n} = a^m : a^n, \\ (a^m)^n = a^{mn}, & & a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m, \\ (ab)^n = a^n b^n, & & a^n b^n = (ab)^n. \end{array}$$

Приклад 5. Спростити $(a^2)^3 \cdot (a^4a)^6$.

Р о з в' я з а н н я. $(a^2)^3 \cdot (a^4a)^6 = a^6 \cdot (a^5)^6 = a^6a^{30} = a^{36}$.

Приклад 6. Обчислити: 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11}$; 2) $3^5 \cdot 9^2 : 27^2$; 3) $2^7 \cdot 0{,}5^8$.

Р о з в' я з а н н я. 1) $0{,}7^{13} : 0{,}7^{11} = 0{,}7^2 = 0{,}49$;

2) $3^5 \cdot 9^2 : 27^2 = 3^5 \cdot (3^2)^2 : (3^3)^2 = 3^5 \cdot 3^4 : 3^6 = 3^{5+4-6} = 3^3 = 27$;

3) $2^7 \cdot 0{,}5^8 = 2^7 \cdot 0{,}5^7 \cdot 0{,}5 = (2 \cdot 0{,}5)^7 \cdot 0{,}5 = 1^7 \cdot 0{,}5 = 0{,}5$.

Сформулюйте основну властивість степеня. • Сформулюйте правила множення степенів, ділення степенів, піднесення степеня до степеня та піднесення до степеня добутку.

218①. (Усно.) Які з рівностей правильні:

1) $a^6 \cdot a^2 = a^{12}$; 2) $a^7a^3 = a^{10}$; 3) $b^{10} : b^5 = b^2$;

4) $b^8 : b^2 = b^6$; 5) $(a^7)^3 = a^{21}$; 6) $(a^4)^5 = a^9$?

219①. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) a^4a^9; 2) c^3c^{10}; 3) y^5y; 4) $2^7 \cdot 2^5$.

220①. Подайте частку у вигляді степеня:

1) $a^7 : a^4$; 2) $x^{10} : x^5$; 3) $c^7 : c$; 4) $p^9 : p^8$.

221②. Подайте x^{12} у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами, якщо один з множників дорівнює:

1) x^3; 2) x^6; 3) x^9; 4) x^{11}.

222②. Подайте у вигляді степеня добуток:

1) $(-7)^3 \cdot (-7)^4 \cdot (-7)$; 2) aa^5a^{11}; 3) $bbbb^9$;

4) $(x-y)^3(x-y)^{12}$; 5) $14^7 \cdot 14^5 \cdot 14^9$; 6) $\left(3\frac{1}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^4$.

223②. Обчисліть значення виразу, використовуючи властивості степенів та таблицю степенів чисел 2 і 3 (див. вправу 201).

1) $2^3 \cdot 2^4$; 2) $3^6 : 3$; 3) $3 \cdot 3^3 \cdot 3^4$; 4) $2^9 : 2^3$.

224③. Знайдіть значення букви x, при якому правильна рівність:

1) $3^5 \cdot 3^2 = 3^{5+x}$; 2) $2^7 \cdot 2^8 = 2^{1+x}$; 3) $4^x \cdot 4^5 = 4^8$; 4) $9^8 : 9^x = 9^5$.

225①. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) m^3m^2; 2) p^9p^4; 3) $3 \cdot 3^7$; 4) a^5a^2.

226①. Подайте частку у вигляді степеня:

1) $p^9 : p^5$; 2) $x^{12} : x^3$; 3) $10^8 : 10$; 4) $t^{12} : t^{11}$.

227②. Подайте степінь у вигляді добутку двох степенів з однаковими основами будь-яким способом:

1) m^7; 2) c^{12}; 3) 5^{17}; 4) p^8.

228②. Запишіть у вигляді степеня вираз:

1) $12^3 \cdot 12^7 \cdot 12$; 2) ppp^7p; 3) $(a+b)^3(a+b)^5$; 4) $\left(1\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^7$.

229③. Вставте замість * степінь з основою a так, щоб утворена рівність була тотожністю:

1) $a^2 \cdot * = a^7$; 2) $a^8 \cdot * = a^9$; 3) $a^4 \cdot * \cdot a^7 = a^{19}$.

Урок 17

230①. (Усно.) Подайте у вигляді степеня добуток:

1) m^7m^4; 2) a^9a; 3) $10^7 10^5$; 4) $9 \cdot 9^5$.

231①. (Усно.) Подайте у вигляді степеня частку:

1) $a^9 : a^2$; 2) $7^{15} : 7^{12}$; 3) $b^9 : b$; 4) $19^8 : 19^7$.

232①. Подайте у вигляді степеня:

1) $(x^2)^4$; 2) $(a^7)^2$; 3) $(8^9)^3$; 4) $(10^3)^5$.

233②. Виконайте піднесення до степеня:

1) $(xy)^9$; 2) $(abc)^7$; 3) $(0{,}1a)^3$; 4) $(2xy)^4$;

5) $(-2a)^5$; 6) $(-0{,}3a)^2$; 7) $(-4ab)^3$; 8) $\left(-\frac{2}{3}axz\right)^4$.

234②. Знайдіть значення виразу:

1) $6^7 : 6^5$; 2) $0{,}3^8 : 0{,}3^3$; 3) $\frac{4{,}92^{10}}{4{,}92^9}$;

4) $\frac{10^8}{10^5}$; 5) $\left(1\frac{1}{2}\right)^{12} : \left(1\frac{1}{2}\right)^8$; 6) $\left(-\frac{3}{4}\right)^{10} : \left(-\frac{3}{4}\right)^7$.

235②. Спростіть вираз за правилами множення і ділення степенів:

1) $a^7a^9 : a^3$; 2) $b^9 : b^5 : b^3$; 3) $m^{12} : m^7 \cdot m$; 4) $p^{10} : p^9 \cdot p^3$.

236②. Подайте у вигляді степеня з основою mn:

1) m^9n^9; 2) m^7n^7; 3) m^2n^2; 4) $m^{2007}n^{2007}$.

237③. Вставте замість * степінь з основою b ($b \neq 0$) так, щоб утворена рівність була тотожністю:

1) $b^7 : * = b^3$; 2) $* : b^5 = b^9$;

3) $b^9 : * \cdot b^3 = b^7$; 4) $* : b^9 \cdot b^4 = b^{10}$.

238③. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) a^4b^4; 2) $49a^2x^2$; 3) $0{,}001a^3b^3$; 4) $-8p^3$;

5) $-32a^5b^5$; 6) $-a^7b^7c^7$; 7) $\frac{1}{27}x^3y^3$; 8) $-\frac{64}{125}p^3q^3$.

239①. Подайте у вигляді степеня:

1) $(m^3)^4$; 2) $(p^9)^2$; 3) $(7^3)^{10}$; 4) $(19^2)^7$.

240②. Запишіть степінь у вигляді добутку степенів або числа і степенів:

1) $(ab)^5$; 2) $(2p)^4$; 3) $(-5ax)^3$;

4) $\left(-\frac{3}{4}ac\right)^4$; 5) $(-0{,}1m)^3$; 6) $(-0{,}07mx)^2$.

241②. Обчисліть:

1) $9^{10} : 9^8$; 2) $\frac{0{,}4^{17}}{0{,}4^{14}}$; 3) $\left(-1\frac{1}{9}\right)^{15} : \left(-1\frac{1}{9}\right)^{13}$; 4) $\frac{\left(1\frac{1}{3}\right)^{12}}{\left(1\frac{1}{3}\right)^8}$.

242②. Подайте у вигляді степеня з основою ab:

1) a^5b^5; 2) a^3b^3; 3) $a^{18}b^{18}$.

243③. Знайдіть значення букв, при яких правильна рівність:

1) $1{,}8^9 : 1{,}8 = 1{,}8^{9-x}$; 2) $19^x : 19^7 = 19^9$; 3) $4^{12} : 4^x = 4^7$.

Урок 18

244①. (Усно.) Подайте у вигляді степеня:

1) $(c^7)^3$; 2) $(2^{10})^7$; 3) $(p^3)^5$; 4) $(7^8)^{11}$.

245②. Знайдіть значення виразу:

1) $\frac{8^{12} \cdot 8^3}{8^{13}}$; 2) $\frac{4^8}{4 \cdot 4^6}$; 3) $\frac{(-3)^5 \cdot (-3)^7}{(-3)^{10}}$; 4) $\frac{(0{,}2)^7 \cdot (0{,}2)^5}{(0{,}2)^3 \cdot (0{,}2)^6}$.

246②. Запишіть вираз у вигляді степеня:

1) $(a^3)^4 \cdot a^8$; 2) $((a^7)^2)^3$; 3) $(b^3)^2 : b^4$; 4) $(a^4)^5 \cdot (a^7)^2$.

247③. Обчисліть, використовуючи властивості степенів:

1) $256 : 2^5$; 2) $243 : 3^4 \cdot 9$; 3) $\dfrac{125^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 25}$; 4) $\dfrac{100 \cdot 10^7}{10^5 \cdot 1000}$.

248③. Подайте у вигляді степеня (n — натуральне число):

1) x^5x^n; 2) $x^8 : x^n$, $n < 8$; 3) $x^n : (x^8 \cdot x^9)$, $n > 17$;

4) $x^{2n} : x^n \cdot x^{3n+1}$; 5) $((x^n)^3)^5$; 6) $(-x^4)^{2n}$.

249③. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивість степеня добутку:

1) $5^3 \cdot 2^3$; 2) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^2 \cdot 20^2$; 3) $0{,}2^{13} \cdot 5^{13}$;

4) $(1{,}5)^7 \cdot \left(1\dfrac{1}{3}\right)^7$; 5) $0{,}5^7 \cdot 2^8$; 6) $\left(1\dfrac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^8$.

250③. Подайте вираз у вигляді степеня:

1) з основою 2: 8^7; $(16^3)^5$; 2) з основою 5: 25^3; 625^7.

251③. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивості степенів:

1) $\dfrac{9^5}{3^7}$; 2) $\dfrac{8^7}{4^8}$; 3) $\dfrac{27^3 \cdot 9^4}{81^3}$; 4) $\dfrac{25^4 \cdot 125^{10}}{5^{36}}$.

252④. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{5^7 \cdot 7^8}{35^7}$; 2) $\dfrac{2^{17} \cdot 3^6}{24^5}$; 3) $\dfrac{36^7}{2^{12} \cdot 3^{10}}$; 4) $\dfrac{27^3}{18^4}$.

253④. Порівняйте:

1) 6^{10} і 36^5; 2) 10^{20} і 20^{10}; 3) 5^{14} і 26^7; 4) 2^{3000} і 3^{2000}.

254②. Обчисліть:

1) $5^4 \cdot 5^{12} : 5^{13}$; 2) $\dfrac{37^{12}}{37^5 \cdot 37^6}$; 3) $\dfrac{6^{17} \cdot 6^7}{6^{22}}$; 4) $\dfrac{(0{,}7)^3 \cdot (0{,}7)^{16}}{(0{,}7)^{12} \cdot (0{,}7)^5}$.

255③. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $(b^3)^4 \cdot b^7$; 2) $((x^4)^5)^6$; 3) $(c^3)^8 : c^{10}$; 4) $(m^3)^5 \cdot (m^2)^7$.

256③. Знайдіть значення виразу, використовуючи властивість степеня добутку:

1) $0{,}25^7 \cdot 4^7$; 2) $\left(\dfrac{1}{7}\right)^5 \cdot 14^5$; 3) $\left(1\dfrac{1}{8}\right)^9 \cdot \left(\dfrac{8}{9}\right)^{10}$; 4) $1{,}5^7 \cdot \left(\dfrac{2}{3}\right)^9$.

257③. Подайте у вигляді степеня:

1) з основою 3: 9^7; $(81^3)^5$; 2) з основою 10: 100^4; 1000^9.

258④. Обчисліть значення виразу:

1) $\frac{7^9 \cdot 49^8}{343^8}$; 2) $\frac{6^{12}}{2^{10} \cdot 3^{11}}$; 3) $\frac{2^8 \cdot 5^7}{100^3}$; 4) $\frac{36^5}{24^6}$.

259②. Спростіть вираз:

1) $5{,}2 \cdot 6a$; 2) $-4{,}5b \cdot 8$; 3) $-5x \cdot (-12)$;

4) $\frac{2}{3}m \cdot \frac{3}{4}k$; 5) $1\frac{1}{3}x \cdot \left(-1\frac{2}{7}y\right)$; 6) $-1{,}8a \cdot (-b) \cdot 5c$.

260③. Ціна деякого виробу дорівнювала 80 грн. Спочатку її знизили на 15 %, а потім підвищили на 10 %. Знайдіть:

1) ціну виробу після зниження;
2) ціну виробу після підвищення;
3) на скільки гривень змінилася ціна виробу;
4) на скільки відсотків змінилася ціна виробу.

261③. Нехай $a + b = 5$ і $c = -2$. Знайдіть:

1) $a + b - c$; 2) $a - 2c + b$; 3) $\frac{a+b+c}{c}$; 4) $c(a + b - 4c)$.

262③. Спростіть вираз $1{,}7\left(1\frac{1}{5}a - 4b\right) - 1{,}5(1{,}2b - a)$ і знайдіть його значення, якщо $a = 5$; $b = -10$.

§ 8. ОДНОЧЛЕН. СТАНДАРТНИЙ ВИГЛЯД ОДНОЧЛЕНА

Урок 19

Розглянемо вирази: 7; $-\frac{8}{11}$; a; $-b$; $7b^2m$; $4a^2 \cdot (-5)ac$. Це числа, змінні, їх степені і добутки. Такі вирази називають *одночленами*.

Цілі вирази — числа, змінні, їх степені і добутки називають *одночленами*.

Вирази $a + b^2$; $c^3 - 5m + 7p$; $a^2 - m$ не є одночленами, оскільки містять дії додавання і віднімання.

Спростимо одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$, використавши переставну і сполучну властивості множення:

$$4a^2 \cdot (-5)ac = 4 \cdot (-5)a^2ac = -20a^3c.$$

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і степені різних змінних, то такий одночлен називається *одночленом стандартного вигляду*.

Одночлен $4a^2 \cdot (-5)ac$ звели до стандартного вигляду — одночлена $-20a^3c$. До одночленів стандартного вигляду належать і такі одночлени, як 5; -9; b; $-b^3$. До стандартного вигляду можна звести будь-який одночлен.

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають ***коефіцієнтом*** цього одночлена. Наприклад, коефіцієнт одночлена $-20a^3c$ дорівнює -20; одночлена $\frac{7}{11}b^9$ дорівнює $\frac{7}{11}$. Вважають, що коефіцієнт одночлена c^2d дорівнює 1, а коефіцієнт одночлена $-p^7$ дорівнює -1 (оскільки $c^2d = 1 \cdot c^2d$ і $-p^7 = -1 \cdot p^7$). Коефіцієнти 1 і -1 писати не прийнято.

В одночлена $7m^2ab^7$ сума показників степенів усіх змінних дорівнює $2 + 1 + 7 = 10$. Цю суму називають ***степенем одночлена***.

Степенем одночлена **називають суму показників степенів усіх змінних, що входять у нього. Якщо одночлен не містить змінних (тобто є числом), то вважають, що його степінь дорівнює нулю.**

Наприклад, одночлен m^7n — одночлен восьмого степеня; $-8a^4$ — одночлен четвертого степеня; $5m$ — одночлен першого степеня; -7 — одночлен нульового степеня.

Який вираз називається одночленом? • Який вигляд одночлена називають стандартним виглядом? • Наведіть приклад одночлена стандартного вигляду та назвіть його коефіцієнт. • Що називають степенем одночлена?

263①. (Усно.) Які з виразів є одночленами:

1) $3{,}7x^2y$; 2) $-0{,}13mpk$; 3) $x^2 - 5$; 4) $d \cdot (-0{,}7)$;

5) x^2xt; 6) $\left(-\frac{2}{7}p + 9\right)m$; 7) $a - b$; 8) t^{11};

9) $4(x + y)^7$; 10) $-q$; 11) $-0{,}7$; 12) 0?

264①. (Усно.) Назвіть одночлени стандартного вигляду та їх коефіцієнти:

1) $4xy$; 2) $-5aba$; 3) $7m^2nm^3n$; 4) $-a^7b^9$;

5) $0{,}3p \cdot 3m$; 6) $-2abc$; 7) a^9b^7; 8) 14.

265②. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, вкажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $7a^2a^3a$; 2) $8 \cdot a \cdot 0{,}1m \cdot 2p$; 3) $5t \cdot (-4at)$;

4) $-1\frac{2}{3}m^4 \cdot 12m^2p$; 5) $-5a^2 \cdot 0{,}2am^7 \cdot (-10m)$; 6) $t^3 \cdot (-p)^7 \cdot t$.

266②. **Знайдіть значення одночлена:**

1) $3{,}5a^2$, якщо $a = 4; 0{,}1$; 2) $-4m^3$, якщо $m = 0; -1$;

3) $10xy$, якщо $x = 1{,}4$, $y = -5$;

4) $-0{,}01a^2c$, якщо $a = 5$, $c = -2$.

267②. **Заповніть таку таблицю в зошиті:**

a	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$
$4a^2$											
$-2a^2$											

268③. **Знайдіть:**

1) значення x, при якому значення одночлена $-0{,}8x$ дорівнює 0; 1; −1; 12;

2) деяку пару значень a і b, при яких значення одночлена $15ab$ дорівнює 10; −60; 0.

269③. **(Усно.) Чи правильне твердження:**

1) одночлен $7m^2$ при будь-якому значенні m набуває додатних значень;

2) одночлен $\frac{1}{16}p^4$ при будь-якому значенні p набуває невід'ємних значень;

3) одночлен $-12a^2$ при будь-якому значенні a набуває від'ємних значень;

4) одночлен $8b^3$ при будь-якому значенні b набуває додатних значень?

У разі позитивної відповіді, обґрунтуйте її; якщо відповідь негативна — наведіть приклад, що спростовує твердження.

270③. Чому дорівнює об'єм прямокутного паралелепіпеда, висота якого x см, ширина у 3 рази більша за висоту, а довжина у 2 рази більша за ширину?

271①. Які з виразів є одночленами? Серед одночленів назвіть ті, які подано у стандартному вигляді:

1) $5m \cdot 2p$; 2) $-8a^2b$; 3) $x^2 + x + 1$; 4) $m \cdot mk \cdot 5$;

5) $\left(\frac{2}{7}p - 1\right) \cdot 8$; 6) $-a^2$; 7) $17 + a$; 8) -129;

9) c^{18}; 10) $2(a-b)^2$; 11) 1; 12) $-abcd$.

272②. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, вкажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $-7m^2b \cdot 8mb^2$; 2) $5m \cdot 2a \cdot (-3b)$;

3) $-7a \cdot (-5a^2)$; 4) $-2{,}2a^2 \cdot \frac{25}{44}a^3p$;

5) $-a \cdot (-0{,}2a^2p) \cdot (-0{,}3p^4)$; 6) $c^5 \cdot (-a) \cdot (-c^4a) \cdot a^7$.

273②. Обчисліть значення одночлена:

1) $1{,}6a^2$, якщо $a = -5$; 0; -1;

2) $5b^2c$, якщо $b = 0{,}2$ і $c = 0{,}1$; $b = -0{,}4$ і $c = 2$.

274③. Знайдіть:

1) значення a, при якому значення одночлена $-0{,}6a$ дорівнює 0; -3; 12; -300.

2) деяку пару значень x і y, при яких значення одночлена $12xy$ дорівнює 15; -120; 0.

275③. Ширина прямокутника дорівнює b дм, а довжина в 3 рази більша за ширину. Знайдіть площу прямокутника.

276②. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $3(12x - 5) + 4x$; 2) $7(a - 1) - 7a + 13$;

3) $4{,}2(x - y) + 3{,}5(x + y)$; 4) $12 - 5(1 - x) - 5x$.

277③. Серед виразів $3(y - x)$, $-3(x - y)$, $-3x - 3y$, $-3x + 3y$ знайдіть тотожно рівні виразу $3y - 3x$.

§ 9. МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ. ПІДНЕСЕННЯ ОДНОЧЛЕНІВ ДО СТЕПЕНЯ

Урок 20

При множенні одночленів користуються властивостями дії множення і правилом множення степенів з однаковими основами.

Приклад 1. Помножити одночлени $-3x^3y^7$ і $5x^2y$.

Розв'язання. $-3x^3y^7 \cdot 5x^2y = (-3 \cdot 5)(x^3x^2)(y^7y) = -15x^5y^8$.

Добутком будь-яких одночленів є одночлен, який звичайно подають у стандартному вигляді. Аналогічно до прикладу 1 можна множити три і більше одночленів.

При піднесенні одночлена до степеня користуються властивостями степенів.

Приклад 2. Піднести одночлен: 1) $-2x^2y$ до куба; 2) $-p^7m^2$ до четвертого степеня.

Розв'язання. 1) $(-2x^2y)^3 = (-2)^3 \cdot (x^2)^3 y^3 = -8x^6y^3$;

2) $(-p^7m^2)^4 = (-1)^4 (p^7)^4 (m^2)^4 = p^{28}m^8$.

Натуральним степенем будь-якого одночлена є одночлен, який звичайно подають у стандартному вигляді.

Приклад 3. Спростити вираз $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y$.

Р о з в' я з а н н я. $\left(-\frac{2}{3}xy^5\right)^3 \cdot 18x^5y = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot x^3(y^5)^3 \cdot 18x^5y =$

$= \left(-\frac{8}{27} \cdot 18\right) \cdot (x^3x^5) \cdot (y^{15}y) = -5\frac{1}{3}x^8y^{16}$.

Приклад 4. Подати одночлен $16m^8p^{10}$ у вигляді квадрата одночлена стандартного вигляду.

Р о з в' я з а н н я. $16m^8p^{10} = (4m^4p^5)^2$.

Які правила та властивості використовують при множенні одночленів; піднесенні одночлена до степеня?

278①. (Усно.) Помножте одночлени:

1) $2a$ і $4m$; 2) $-b$ і $3c$; 3) $7a^2$ і $-5b$; 4) $-2x^2$ і $-y^2$.

279②. Виконайте множення одночленів:

1) $1{,}5x \cdot 12y$; 2) $-p^2 \cdot 9p^7$; 3) $8a \cdot \left(-\frac{3}{4}a^7\right)$;

4) $-\frac{2}{3}a \cdot (-12ab^3)$; 5) $0{,}7mn^2 \cdot (-m^7n^3)$; 6) $-0{,}2m^7p^9 \cdot (-4m^4p)$;

7) $-0{,}6ab^2c^3 \cdot 0{,}5a^3bc^7$; 8) $\frac{3}{4}mn^2 \cdot \left(-\frac{4}{5}m\right) \cdot \frac{5}{3}n^7$;

9) $\frac{1}{2}ab^2 \cdot \frac{1}{3}a^2b^3 \cdot \frac{1}{4}a^3b^4$.

280②. Помножте одночлени:

1) $-13x^2y$ і $12xy^3$; 2) $0{,}8mn^8$ і $50m^2n$;

3) $-\frac{1}{5}ab^2$; $15a^2p$ і $-\frac{1}{3}pb^4$; 4) $20xy^2$; $-0{,}1x^2y$ і $0{,}2x^2y^2$.

281②. Подайте два різних записи одночлена $-12m^2n^5$ у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду.

282②. Піднесіть до квадрата одночлен:

1) $3a$; 2) $2b^2$; 3) $-4a^3b^7$;

4) $-0{,}1p^9a^4$; 5) $-\frac{1}{5}m^5$; 6) $\frac{6}{7}p^6m^8$.

283②. Виконайте піднесення до степеня:

1) $(-xy^3)^3$; 2) $(-7a^2bc^3)^2$; 3) $(p^3m^4q^5)^4$;

4) $(-2a^2b)^4$; 5) $\left(\frac{1}{6}p^2c^5\right)^3$; 6) $(-c^5m^{10}a^3)^5$.

284③. Який одночлен стандартного вигляду потрібно записати замість *, щоб дістати правильну рівність:

1) $* \cdot 4m^2n = 12m^7n^{12}$; 2) $5a^2b \cdot * = a^3b^7$;

3) $* \cdot (-2m^2p) = 24m^8p^2$; 4) $* \cdot (-5a^2b) = a^3b$;

5) $5m^2a^3 \cdot * = -5m^2a^3$; 6) $4m^2n \cdot * = -\frac{1}{16}m^2n^8$?

285②. Виконайте множення одночленів:

1) $20a \cdot (-0{,}5b)$; 2) $-a^2 \cdot (-3a^7b)$;

3) $5b \cdot \left(-\frac{1}{5}b^3\right) \cdot 2c$; 4) $\frac{3}{5}xy^3 \cdot \frac{10}{21}x^2y^5$;

5) $\frac{3}{5}ab^2 \cdot \left(-\frac{5}{6}a^3\right) \cdot 2b^7$; 6) $-\frac{1}{2}m^2p \cdot \frac{2}{3}m^3p \cdot \frac{1}{5}mp^3$.

286②. Подайте два різних записи одночлена $18m^2n^7$ у вигляді добутку:

1) двох одночленів стандартного вигляду;

2) трьох одночленів стандартного вигляду.

287②. Піднесіть до куба одночлен:

1) $2p$; 2) $7m^5$; 3) $-3a^3b^2$;

4) $-0{,}1a^7b^2$; 5) $\frac{1}{4}p^6$; 6) $-\frac{2}{5}mn^4$.

288②. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $(-5x)^2$; 2) $\left(\frac{1}{2}p^4\right)^3$; 3) $(-0{,}2a^2b^3)^4$;

4) $(-ab^7c^5)^6$; 5) $(-10a^7b)^5$; 6) $(a^8c^{10})^7$.

289③. Який одночлен стандартного вигляду потрібно поставити замість *, щоб дістати правильну рівність:

1) $* \cdot 3m^2n^3 = 15m^3n^8$; 2) $-7p^2x^3 \cdot * = 21p^2x^9$;

3) $* \cdot (-3a^3b^9) = a^6b^{10}$; 4) $12p^3m \cdot * = -\frac{1}{2}p^3m$?

Урок 21

290②. (Усно.) Піднесіть до степеня одночлен:

1) $(-mn^2)^2$; 2) $(2a^2b)^3$; 3) $(-m^3b^2)^4$; 4) $(-a^3b^5)^7$.

291③. Подайте у вигляді:

1) квадрата одночлена вираз: $\frac{1}{9}x^6$; $0{,}25m^6p^{10}$; $121a^{18}b^2c^4$.

2) куба одночлена вираз: $0{,}001a^9$; $-125p^3b^{12}$; $\frac{8}{27}c^6m^{15}a^{21}$.

292③. Спростіть вираз:

1) $15m^2 \cdot (4m^3)^2$; 2) $-0{,}5m^5 \cdot (2m^3)^4$;

3) $(-3a^3b^4)^4 \cdot \left(-\frac{1}{81}ab^3\right)$; 4) $\left(-\frac{2}{3}ac^4\right)^3 \cdot 18a^5c$.

293③. Подайте вираз у вигляді добутку числа 5 і квадрата деякого виразу:

1) $5a^4b^2$; 2) $20c^4d^2m^8$; 3) $\frac{5}{16}p^{12}$.

294③. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $(8ab^3)^2 \cdot (0{,}5a^3b)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}m^2n^8\right)^3 \cdot (-4m^7)^2$;

3) $-(-m^2n^3)^4 \cdot (7m^3n)^2$; 4) $(-0{,}2x^3c^7)^5 \cdot (10xc^3)^5$.

295③. Подайте у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $-4ab^2$, одночлен:

1) $8a^2b^2$; 2) $-\frac{1}{5}ab^4$; 3) $-7{,}8a^3b^5$; 4) $1\frac{1}{8}a^3b^2$.

296④. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду (n — натуральне число):

1) $(-0{,}2a^{n+5}b^{n+2}) \cdot (0{,}5a^{n-2}b^{n+3})$, $n > 2$;

2) $(2a^{2n}b^5)^3 \cdot (-3a^3b^{3n})^2$;

3) $(a^2b^3)^n \cdot (a^{2n}b)^3 \cdot (a^2b^{3n})^5$;

4) $(x^{2n-1}y^{3n+1})^2 \cdot (x^{3n-1}y^{2n+1})^3$.

297④. $3ab^2 = 7$. Знайдіть значення виразів:

1) ab^2; 2) $5ab^2$; 3) $-9a^2b^4$; 4) $27a^3b^6$.

298③. Який одночлен стандартного вигляду треба поставити замість ..., щоб дістати правильну рівність:

1) $(\ldots)^2 = 4m^6$; 2) $(\ldots)^2 = 0{,}36p^8q^{10}$;

3) $(\ldots)^3 = -8c^9$; 4) $(\ldots)^3 = 1000c^6m^{12}$;

5) $(\ldots)^4 = 16a^4b^8$; 6) $(\ldots)^5 = c^{15}p^{45}$?

299③. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $6a^3 \cdot (2a^5)^2$; 2) $-0{,}8a^4 \cdot (5a^7)^3$;

3) $(-2b^2a^7)^4 \cdot \left(-\frac{1}{8}a^3b\right)$; 4) $\left(-\frac{4}{5}mn^4\right)^3 \cdot 25m^4n$.

300③. Спростіть вираз:

1) $(10m^2n)^2 \cdot (3mn^2)^3$; 2) $\left(-\frac{1}{2}ab^3\right)^3 \cdot (4a^5)^2$;

3) $-(3a^6m^2)^3 \cdot (-a^2b)^4$; 4) $(-5xy^6)^4 \cdot (0{,}2x^6y)^4$.

301③. Подайте у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює $3mn^2$, одночлен:

1) $12m^2n^2$; 2) $-\frac{1}{4}mn^5$; 3) $-6{,}9m^7n^8$; 4) $1\frac{1}{5}m^8n^2$.

302④. $5xy^2 = 9$. Знайдіть значення виразів:

1) xy^2; 2) $7xy^2$; 3) $-25x^2y^4$; 4) $125x^3y^6$.

303②. На будівництві працювало 3 бригади по x чоловік у кожній та 2 бригади по y чоловік у кожній. Скільки чоловік працювало на будівництві? Подайте відповідь виразом та обчисліть його значення, якщо $x = 20$; $y = 22$.

304③. Замініть * таким виразом, щоб рівність стала тотожністю:

1) $(a \cdot a^4)^2 : * = a^3$; 2) $(b^3)^2 \cdot * = b^{10}$;

3) $(m^2)^3 \cdot * = -m^{14}$; 4) $n^6 \cdot (n \cdot n^2)^2 = * \cdot (-n^4)$.

305④. Обчисліть значення виразу $\frac{2^{n+1} \cdot 7^{n+2}}{14^n}$, де n — натуральне число.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 4—9

Урок 22

1①. Чи тотожно рівні вирази:

1) $3x + 2x$ і $5x$; 2) $a + a + a$ і a^3;

3) $m + 2a$ і $2a + m$; 4) $3(x - 2)$ і $3x - 5$?

2①. Подайте у вигляді степеня добуток:

1) $4 \cdot 4 \cdot 4$; 2) $-3 \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$.

3①. Виконайте дії:

1) x^5x^4; 2) $x^7 : x^2$.

4②. Обчисліть значення виразу:

1) $0{,}4 \cdot (-5)^4$; 2) $2^5 - 4^3 + (-1)^5$.

5②. Подайте у вигляді степеня вираз:

1) $(m^3)^4 \cdot m^7$; 2) $(a^2)^7 : (a^3)^2$.

6②. Запишіть у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:

1) $-0{,}3m^2np^3 \cdot 4mn^2p^7$; 2) $\left(-\frac{1}{2}p^7a\right)^3$.

7③. Доведіть тотожність: $2(a + b - c) + 3(a - c) - 2b = 5(a - c)$.

8③. Спростіть вираз:

1) $0{,}2a^2b \cdot (-10ab^3)^2$; 2) $\left(-\frac{1}{4}m^2n^3\right)^4 \cdot (4m^5n)^3$.

9④. Порівняйте:

1) 5^{12} і 25^6; 2) 2^{30} і 3^{20}.

Додаткові завдання

10④. Доведіть, що сума трьох послідовних непарних чисел ділиться на 3.

11④. Якого найменшого значення може набувати вираз:

1) $m^4 - 12$; 2) $(a + 2)^8 + 7$?

12④. $4m^2n = 9$. Знайдіть значення виразу:

1) $12m^2n$; 2) $4m^4n^2$.

§ 10. МНОГОЧЛЕН. ПОДІБНІ ЧЛЕНИ МНОГОЧЛЕНА ТА ЇХ ЗВЕДЕННЯ

Урок 23

Вираз $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ є сумою одночленів $7x^2y^3$, $-5xy^7$, $9x^5$ і -8. Такі вирази називають ***многочленами***.

! ***Многочленом*** **називається сума одночленів.**

Одночлени, з яких складено многочлен, називають ***членами многочлена***. Наприклад, многочлен $7x^2y^3 - 5xy^7 + 9x^5 - 8$ складається з чотирьох членів: $7x^2y^3$; $-5xy^7$; $9x^5$ і 8.

Многочлен, який містить два члени, називається ***двочленом***, а многочлен, який містить три члени — ***тричленом***. Наприклад, $a + b^7$, $2xy - 3y^7$ — двочлени; $x + xy + y^3$, $mn + m - n$ — тричлени. Одночлен вважається окремим видом многочлена.

У многочлені $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9$ члени $7x^2y$ і $-5x^2y$ є подібними доданками, оскільки вони мають одну й ту саму буквену частину x^2y. Також подібними доданками є й члени 8 і -9, які не мають буквеної частини. Подібні доданки многочлена називають ***подібними членами многочлена***, а зведення подібних доданків у многочлені — ***зведенням подібних членів многочлена***.

Приклад 1. Звести подібні члени у многочлені $7x^2y + 8 + {}$ $+ 9xy - 5x^2y - 9$.

Р о з в ' я з а н н я. $7x^2y + 8 + 9xy - 5x^2y - 9 = (7x^2y - 5x^2y) + {}$ $+ (8 - 9) + 9xy = 2x^2y - 1 + 9xy$.

Кожний член многочлена $2x^2y - 1 + 9xy$ є одночленом стандартного вигляду. Цей многочлен уже не має подібних доданків. Такі многочлени називають ***многочленами стандартного вигляду***.

Многочлен, що є сумою одночленів стандартного вигляду, серед яких немає подібних доданків, називається *многочленом стандартного вигляду*.

Приклад 2. Чи записано у стандартному вигляді многочлени: 1) $xy^2 - x^2y^3x + 7$; 2) $m^2 + 3mn - 3n^2$; 3) $9ab + 7 - 5ab$?

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки x^2y^3x не є одночленом стандартного вигляду, то многочлен $x^2y - x^2y^3x + 7$ не є многочленом стандартного вигляду. 2) Многочлен $m^2 + 3mn - 3n^2$ є многочленом стандартного вигляду. 3) многочлен $9ab + 7 - 5ab$ містить подібні доданки, тому не є многочленом стандартного вигляду.

Приклад 3. Подати многочлен $3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^3y + 7xy^3 - 8$ у стандартному вигляді.

Р о з в' я з а н н я. $3x^2yx + 5 - 4xy^2y - 5x^2y + 7xy^3 - 8 = \underline{3x^3y} + \underline{\underline{5}} - \underline{\underline{4xy^3}} - \underline{5x^3y} + \underline{\underline{7xy^3}} - \underline{\underline{8}} = -2x^3y + 3xy^3 - 3.$

Члени многочлена $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$, що має стандартний вигляд, є одночленами відповідно п'ятого, шостого та нульового степеня. Найбільший з цих степенів називають ***степенем многочлена***. Отже, $7m^4p - 9m^2p^4 + 3$ є многочленом шостого степеня.

Степенем многочлена стандартного вигляду **називають найбільший із степенів одночленів, що входять у нього.**

Степенем довільного многочлена називають степінь тотожно рівного йому многочлена стандартного вигляду.

Приклад 4. Многочлени $5x - 7$, $2a - 3b + 7$ — першого степеня; многочлен $m^2 - 2mn + n$ — другого; -5 — многочлен нульового степеня.

Приклад 5. Знайти степінь многочлена $2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7$.

Р о з в' я з а н н я. Спочатку запишемо многочлен у стандартному вигляді: $\underline{2x^2y} + 3xy - \underline{6x^2y} + \underline{4x^2y} - 7 = 3xy - 7$ (однаково підкреслили подібні доданки). Многочлен $3xy - 7$ є многочленом другого степеня, а тому й многочлен $2x^2y + 3xy - 6x^2y + 4x^2y - 7$ є многочленом другого степеня.

Члени многочлена можна записувати у різній послідовності. Для многочленів стандартного вигляду, які містять одну змінну, члени, як правило, упорядковують за спаданням або зростанням показників степенів цієї змінної. Наприклад:

$$7a^4 + 5a^3 - 8a^2 - 5 \text{ або } -5 - 8a^2 + 5a^3 + 7a^4.$$

Будь-який многочлен є цілим виразом. Але не кожний цілий вираз є многочленом. Наприклад, цілі вирази $3(x-1)$; $(a+b)^2$; $(m-n)^3$ не многочлени, бо вони не є сумою одночленів.

? Дайте означення многочлена. • Що називають членами многочлена? • Який многочлен називається двочленом, а який — тричленом? • Які члени многочлена називаються подібними? • Який многочлен називається многочленом стандартного вигляду? • Що називають степенем многочлена?

306①. (Усно.) Які з виразів є многочленами:

1) $m^2(m-5)$; 2) $3p^2 - p^2 + x^7$; 3) $\frac{7}{x-3}$; 4) b;

5) $(a+3)(a-2)$; 6) 7,8; 7) $n^2 - \frac{1}{3}n$; 8) $(t-2p)^2$?

307①. Назвіть члени многочлена:

1) $3p^2n - 5pn^2 + 3 + 7pn$; 2) $-x^3 + 5x^2 - 9x + 7$.

308①. Складіть многочлен з одночленів:

1) $5m^2$; $-2m$ і 3; 2) $7ab$, $-2a^2$ і b^2;

3) $4p$ і $2q^3$; 4) $-c^2$; $-3mc$; m^3 і 7.

309②. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $7x - 15xy - 8xy$; 2) $8ab - 5ab + 4b^2$;

3) $9a^4 - 5a + 7a^2 - 5a^4 + 5a$; 4) $18a^4b - 9a^4b - 7ba^4$;

5) $4b^3 + b^2 - 15 - 7b^2 + b^3 - b + 18$;

6) $9xy^2 - x^3 - 5xy^2 + 3x^2y - 4xy^2 + 2x^3$.

310②. Зведіть многочлен до стандартного вигляду та визначте його степінь:

1) $x^2y + xyy$; 2) $2a \cdot a^2 \cdot 3b + a \cdot 5c$;

3) $7x \cdot 5y^2 - 4y \cdot 7x^2$; 4) $3a \cdot 4a \cdot (-5a) - a^3 \cdot (-8b)$.

311②. Розмістіть члени многочлена за спаданням показників степенів змінної:

1) $7x - 5x^3 + x^4 - 9x^2 + 1$; 2) $8y^3 - 5 + 7y^6 - 9y^4 + y^2$.

312②. Знайдіть значення:

1) двочлена $3x^2-1$, якщо $x=-1;2$;

2) тричлена $5m+9n^2-1$, якщо $m=-2$; $n=\frac{1}{3}$.

313③. Чи існує таке значення x, для якого значення многочлена x^2+5 дорівнює нулю; від'ємне?

314①. Який з виразів є многочленом:

1) p^3-p^2-p; 2) $\frac{a}{a-b}$; 3) c^2; 4) $a(a-b)$;

5) $-3\frac{1}{5}$; 6) $(x+1)(x-1)$; 7) a^3-1; 8) $(c+p)^3$?

315①. Складіть многочлен з одночленів:

1) $5m$ і $-5n$; 2) m^3, $-2m^2$ і mn; 3) $-x^3$, $-2y^2$, xy і 4.

316②. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $a^3-2a^3+3a^3$;

2) $-x^4+2x^3-3x^4+5x^2-3x^2$;

3) $7+3m^6-2m^3-5m^6+2m^6-m^5-7$;

4) $9xy^3+6x^2y^2-x^3y+x^2y^2-9xy^3$.

317②. Подайте у стандартному вигляді многочлен та визначте його степінь:

1) $3x\cdot x^2+2x\cdot 5y^2$; 2) $5a\cdot b^2a+3b\cdot 2ab^2$;

3) $-5mn^3m+4mmm$; 4) $5p\cdot 3p\cdot(-p)-p^4qp$.

318②. Розмістіть члени многочлена за зростанням показників степенів змінної:

1) $3m^2-3m+m^3-8$; 2) $7a^2-9a^5+4a^3+5-a^4$.

Урок 24

319①. (Усно.) Чи подано многочлен у стандартному вигляді:

1) $5m^2+m^3+1$; 2) $7x^2+2x+3x^2$;

3) $2+a+a^2b+3$; 4) c^2c+c^5-8;

5) $3x^2x+2xx^2+x$; 6) p^2-19?

Для многочленів стандартного вигляду визначте його степінь.

320②. (Усно.) Які з многочленів є многочленами четвертого степеня:

1) a^3+3a^2+1; 2) a^2a^2-8;

3) $a^4-4a^3-a^4$; 4) aa^3+2?

321②. Обчисліть значення многочлена:

1) $64x^3 - x^2 + 1$, якщо $x = \frac{1}{4}$;

2) $4mn - 3m + 2n - 4mn$, якщо $m = 4$, $n = -3$.

322③. Зведіть многочлен до стандартного вигляду та вкажіть його степінь:

1) $3a^2ab - 5a^2b^2b^2 - 6ab \cdot 2a + 5ab \cdot 0{,}4ab - 1{,}5a \cdot 2b \cdot a^2$;

2) $3xy^2 \cdot 4x^3y + 5x^3y \cdot 2y \cdot (-x) - 10x^3y^3 \cdot \frac{1}{2}x - 7xy \cdot (-3xy^3)$.

323③. Зведіть многочлен $5xy^3 + x^2y^2 - 2x^3y - 3xy^3 - x^2y^2$ до стандартного вигляду і обчисліть його значення, якщо $x = \frac{1}{2}$, $y = -1$.

324③. Доведіть, що многочлен $a^2 + b^2 + 1$ при будь-яких значеннях a і b набуває додатних значень.

325③. Замість * запишіть такий одночлен, щоб утворився многочлен четвертого степеня:

1) $x^3 + 3x^2 + * - 2$; 2) $m^6 - 4m^4 + mn + *$;

3) $a^3b - 3a^4b^3 + 3a^2 + *$; 4) $pq^3 - p^2q^2 + p^2q^3 + * - p^3q$.

326④. Дано многочлен $5x^3 + 2x^2 - x + 7$. Складіть новий многочлен і запишіть його у стандартному вигляді, підставивши замість змінної x:

1) m; 2) $-x$; 3) $2a$; 4) $3b^2$.

327④. Випишіть ті многочлени, значення яких: додатні при всіх значеннях змінних, що входять до нього; від'ємні при всіх значеннях змінних, що входять до нього:

1) $a^4 + 3a^2 + 5$; 2) $c^5 + c^3 + c$; 3) $-p^2 - 7$;

4) $-m^2 - m^2n^2 - n^2 - 9$; 5) $-a - b - 7$; 6) $x^8 + y^6 + c^4 + 1$.

328②. Які з многочленів є многочленами п'ятого степеня:

1) $m^3 + m^4 - m^2$; 2) $12 + mm^4$;

3) $mm + mm^2 + m^2m^2$; 4) $m^5 - 3 - m^5$?

329②. Обчисліть значення многочлена:

1) $9p^2 - p^3$, якщо $p = \frac{1}{3}$;

2) $2xy - 4x + 3y + 4x$, якщо $x = -1$, $y = 2$.

330③. Зведіть многочлен до стандартного вигляду та вкажіть його степінь:

1) $3a^2b^3 - ab^3 - a^3a - a^2b^2 \cdot b + 0{,}5ab \cdot 2b^2 + 4ab \cdot 0{,}5ab^2$;

2) $7x \cdot 2y^3 - 5x \cdot 3xy \cdot (-x) + \frac{1}{2}y \cdot (-14xy) - 3yx \cdot 4y^2$.

331③. Запишіть замість * такий одночлен, щоб після зведення до стандартного вигляду дістати многочлен, який не містить x:

1) $3x - 12 + 5x + 15 - 9x + *$;

2) $5xy^2 - y^3 + 7y^2 + 7y^2x - 5 + *$.

332④. Дано многочлен $3a^3 - 5a^2 + a - 8$. Складіть новий многочлен і запишіть його у стандартному вигляді, підставивши замість змінної a:

1) x; 2) $-a$; 3) $2b$; 4) $3c^2$.

333②. Розкрийте дужки і спростіть вираз:

1) $x + 5 + (2x - 7)$; 2) $2y - 7 - (3y - 8)$;

3) $7 - (2x + 9) + (3x - 11)$.

334③. Складіть числові вирази і знайдіть значення кожного з них:

1) сума квадратів чисел 3,1 і −2,7;

2) квадрат різниці чисел −3,8 і −3,7;

3) куб суми чисел 1,52 і −1,5.

335③. Замініть * степенем з основою x так, щоб дістати тотожність:

1) $x^3 \cdot (*)^2 = x^{13}$; 2) $(*)^3 \cdot x^7 = x^{19}$.

§ 11. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ

Урок 25

Додамо многочлени $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$. Для цього запишемо їх суму, потім розкриємо дужки і зведемо в утвореному многочлені подібні члени:

$$(7x^2 - 4x + 9) + (-3x^2 + 5x - 7) = 7x^2 - 4x + 9 - 3x^2 + 5x - 7 =$$
$$= 4x^2 + x + 2.$$

Ми записали суму многочленів $7x^2 - 4x + 9$ і $-3x^2 + 5x - 7$ у вигляді многочлена $4x^2 + x + 2$. Так само можна додавати три і більше многочленів. Взагалі, суму будь-яких многочленів можна подати у вигляді многочлена.

Віднімемо від многочлена $5x^2 - 8x + 7$ многочлен $2x^2 - 6x - 5$. Для цього запишемо їх різницю, потім розкриємо дужки і зведемо в утвореному многочлені подібні члени:

$$(5x^2 - 8x + 7) - (2x^2 - 6x - 5) = 5x^2 - 8x + 7 - 2x^2 + 6x + 5 =$$
$$= 3x^2 - 2x + 12.$$

Різницю многочленів $5x^2 - 8x + 7$ і $2x^2 - 6x - 5$ ми подали у вигляді многочлена $3x^2 - 2x + 12$. Взагалі, різницю будь-яких многочленів можна подати у вигляді многочлена.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $(7x - 5) - (2x^2 + 3x - 7) + (9 - 2x) = 4 - 2x^2$.

Р о з в' я з а н н я:

$$(7x - 5) - (2x^2 + 3x - 7) + (9 - 2x) = 4 - 2x^2;$$
$$7x - 5 - 2x^2 - 3x + 7 + 9 - 2x = 4 - 2x^2.$$

Перенесемо доданок $-2x^2$, що містить змінну, з правої частини рівняння у ліву, змінивши його знак на протилежний, а доданки -5, 7 та 9, які не містять змінну, з лівої частини рівняння у праву, змінивши їх знаки на протилежні. Маємо:

$$\underline{7x} - \underline{\underline{2x^2}} - \underline{3x} - \underline{2x} + \underline{\underline{2x^2}} = 4 + 5 - 7 - 9;$$
$$2x = -7;$$
$$x = -3{,}5.$$

Іноді виникає необхідність розв'язати обернену задачу — подати многочлен у вигляді суми або різниці многочленів. При цьому зручно користуватися правилами:

1) якщо перед дужками поставити знак «+», то члени, які беруть у дужки, пишуть з тими самими знаками;
2) якщо перед дужками поставити знак «−», то члени, які беруть у дужки, пишуть з протилежними знаками.

Приклад 2. Подати многочлен $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5$ у вигляді:

1) суми двох многочленів, один з яких містить змінну a, а інший не містить її;

2) різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну b, а другий не містить її.

Р о з в' я з а н н я:

1) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (a^2 - a) + (-b^3 + b^7 + 5)$;

2) $a^2 - b^3 - a + b^7 + 5 = (-b^3 + b^7) - (-a^2 + a - 5)$.

Як знайти суму многочленів? • Як знайти різницю многочленів? • Якими правилами користуються, якщо треба подати многочлен у вигляді суми чи різниці многочленів?

336①. **(Усно.) Який многочлен дістанемо, якщо розкриємо дужки у виразі:**

1) $a + (b - 3)$; 2) $x + (3 - a + b)$;

3) $m - (n - 1)$; 4) $p - (-a^2 + 3)$?

337②. **Знайдіть суму многочленів:**

1) $2x^2 + 3x^3 - 1$ і $5x^3 + 3x^2 + 7$; 2) $a^3 + 3a^2 + 1$; $2a^2 - 5$ і $6 - 5a^2$.

338②. **Знайдіть різницю многочленів:**

1) $4p^3 + 7p^2 - p$ і $2p^2 + p$; 2) $m^2 + 2m - 1$ і $m^3 + 2m - 1$.

339②. **Знайдіть суму та різницю многочленів та зведіть до многочлена стандартного вигляду:**

1) $3x^2 - 2x + 1$ і $3x^2 - 4$; 2) $2x + 1$ і $-3x^2 - 2x - 1$;

3) $a + 5b$ і $3a - 5b$; 4) $m^2 - 2mn - n^2$ і $m^2 + n^2$.

340②. **Спростіть вираз:**

1) $(1 + 2p) + (p^2 - p)$; 2) $(5a^2 + a^3) - (-a + 5a^2)$;

3) $(x^2 - 5x) + (5x - 13)$; 4) $(3b^3 - 5b^2) - (5 + 3b^3 - 2b^2)$.

341②. **Розв'яжіть рівняння:**

1) $5x + 2x^2 - (2x^2 - 10) = 25$; 2) $5 - x^3 - (2x + 7 - x^3) = -8$.

342③. **Велосипедист був у дорозі 4 год. За першу годину він проїхав x км, а за кожну наступну на 3 км більше, ніж за попередню. Яку відстань проїхав велосипедист:**

1) за другу годину; 2) за третю годину;

3) за перші три години; 4) за весь час руху?

343②. **Знайдіть суму многочленів:**

1) $3m^3 + 5m^2 - 7$ і $2m^3 + 6$; 2) $b^2 + 3b - 1$, $2b - 3b^2$ і $2b^2 + 7$.

344②. **Знайдіть різницю многочленів:**

1) $2a^3 - 3a^2 + 7$ і $a^3 - 5a^2 - 8$; 2) $c^4 + c^3 - 2$ і $c^3 + 2c^2 - 2$.

345②. **Запишіть суму та різницю першого і другого многочленів та зведіть до многочлена стандартного вигляду:**

1) $5y^2 + 2y - 10$ і $3y^2 - y + 7$; 2) $5m^3 - m + 3$ і $4m^2 + m - 4$;

3) $3a^4 + 3a^3 - 9$ і $3a^4 - 3a^3 + 9$;

4) $5p^2 - 2pq - 7q^2$ і $3p^2 + 2pq + 5q^2$.

346②. **Розв'яжіть рівняння:**

1) $5x^2 + 7x - (2x + 5x^2 - 8) = 8$; 2) $2 - 3x^3 - (5x - 3x^3) = -13$.

347③. **Робітник працював 4 год. За першу годину він виготовив a деталей, а за кожну наступну на 2 деталі**

менше, ніж за попередню. Скільки деталей виготовив робітник:

1) за другу годину; 2) за третю годину;

3) за перші три години; 4) за останні три години?

Урок 26

348②. Перетворіть у многочлен стандартного вигляду:

1) $(5ab^2 - 12ab - 7a^2b) - (15ab + 8a^2b)$;

2) $\left(\frac{3}{5}a^3b^2 - \frac{3}{4}ab^2\right) - \left(-\frac{5}{8}b^2a - \frac{7}{10}b^2a^3\right)$;

3) $(x + y - z) - (-2x + 3y - z) - (-5y + 4z + x)$;

4) $(2m - 3n) - (4m - 3mn + 3n^2) - (5mn - 5n^2 - 3n)$.

349②. Подайте многочлен у вигляді суми двох многочленів, один з яких містить змінну x, а другий не містить її:

1) $xa + b - m - xb$; 2) $xa^2 - 17a + 5x + 10b$.

350③. Подайте многочлен у вигляді різниці двох многочленів, перший з яких містить змінну y, а другий не містить її:

1) $-ya + yx + x - y - a + 1$; 2) $-p^2 + y^2 + 2p - 7y - 1$.

351③. При якому значенні x:

1) значення різниці одночлена $5x$ і многочлена $3x - 5x^2 + 12$ дорівнює значенню многочлена $7x + 5x^2 - 18$;

2) значення різниці многочленів $5x^3 + 3x^2 - x$ і $2x^3 - 2x^2 + x$ дорівнює значенню многочлена $5x^2 + 3x^3 + 14$?

352③. Який многочлен стандартного вигляду потрібно поставити замість *, щоб дістати тотожність:

1) $-(*) = 4p - q$; 2) $-(*) = 4m^2 - p^2 + 5$;

3) $(*) + 2m^2n - 5mn^2 = 7m^2 - 3mn^2$; 4) $7a^2b + 9a^3 + (*) = 8a^2b$;

5) $3 + 2a^2 - 5a + (*) = 9a^2 - 12$;

6) $(*) - (4x^2 - 2xy) = 5 + 5x^2 - 2xy$.

353③. Доведіть тотожність:

1) $(x - y) + (y - p) - (x - p) = 0$;

2) $(a^2 + b^2 - c^2) - (b^2 - a^2 - c^2) - (a^2 - b^2) = a^2 + b^2$.

354④. Нехай $a = 7m^2 + 5mn - n^2$, $b = -6m^2 + 2mn + 3n^2$, $c = m^2 - 2n^2$. Підставте ці многочлени замість a, b, c у даний вираз і спростіть його:

1) $a + b + c$; 2) $a - b - c$.

355②. Спростіть вираз:

1) $(15x^2 - 3xy) - (12x^2 - 5xy + y^2)$;

2) $(5a^2b - 12ab + 14ab^2) - (-5ab + 14ab^2 - 7a^2b)$;

3) $(m + n - 2p) - (-2m + p - 3n) - (4n + 3m - 4p)$;

4) $(2a - 3b) - (a^2 - 4a + b^2) + (5b - a^2 - 2b^2)$.

356②. Запишіть многочлен $5x^2 - 9x^3 + 7x - x^4 - 1$ у вигляді суми двочлена і тричлена. Подати відповідь двома різними способами.

357③. При якому значенні змінної y:

1) значення суми многочленів $2y^3 - 3y + y^2$ і $5y - 2y^3 - y^2 + 7$ дорівнює 19;

2) значення різниці двочлена $5y^2 - 7y$ і тричлена $2y^2 - 8y + 9$ дорівнює значенню двочлена $3y^2 - 3y$?

358③. Знайдіть многочлен стандартного вигляду, підставивши який замість M, дістанемо тотожність:

1) $-M = 5a - b^2 + 7$;　　2) $M + (3a^2 - 2ab) = 5a^2 + 3ab - b^2$;

3) $M - (3mn - 4n^2) = m^2 - 4mn + n^2$;

4) $(7a^2 - b^2 - 9ba) - M = 0$.

359③. Доведіть тотожність:

$(a^3 + a^2 - a) + (2a^2 - 5a + 3a^3) - (4a^3 - 6a + 2a^2) = a^2$.

Урок 27

360②. Знайдіть суму та різницю виразів:

1) $x + y$ і $x - y$;　　2) $x - y$ і $-x + y$;

3) $-x - y$ і $y - x$;　　4) $x - y$ і $y - x$.

361③. Доведіть, що значення виразу $(15 - 7n) - (7 - 11n)$ кратне 4 при будь-якому натуральному значенні n.

362③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(7x^3 + 2x^2 - 4x - 5) - (6x^3 - x^2 + 2x) = 3x^2 - (6x - x^3)$;

2) $(x^2 + 4x - 8) - (7x - 2x^2 + 5) = 3x^2 - (3x + 3)$.

363③. Доведіть, що значення виразу

$$\left(\frac{1}{8}a^2b + \frac{3}{5}ab\right) - \left(\frac{7}{10}ab - \frac{3}{4}ba^2\right) - \left(\frac{7}{8}a^2b - \frac{1}{10}ab - 2\right)$$

не залежить від значення змінних, що входять у нього.

364③. Знайдіть значення виразу:

1) $(b^2 + 3b - 8) - (7b^2 - 5b + 7) + (5b^2 - 8b + 10)$, якщо $b = -2$;

2) $17x^2 - (3x^2 - 2xy + 3y^2) - (14x^2 + 3xy - 4y^2)$, якщо $x = -0{,}1$; $y = 10$.

365③. Подайте многочлен $3m^2n - 5mn + 4n^2 - 9n - 7$ у вигляді різниці двох многочленів так, щоб кожний член обох многочленів мав додатний коефіцієнт.

366④. Доведіть, що різниця многочленів $0{,}5x^4 + x^3 - 0{,}2x^2 - 5$ і $0{,}3x^4 + x^3 - 0{,}7x^2 - 9$ при будь-якому значенні x набуває додатного значення. Якого найменшого значення набуває ця різниця і при якому значенні x?

367④. Доведіть, що сума:

1) трьох послідовних натуральних чисел кратна 3;

2) чотирьох послідовних натуральних чисел при діленні на 4 дає в остачі 2.

368④. Запис $\overline{xy}$ означає натуральне число, в якому x десятків і y одиниць. Доведіть, що

1) сума чисел $\overline{xy}$ і $\overline{yx}$ кратна 11;

2) різниця чисел $\overline{xy}$ і $\overline{yx}$, де $x > y$, кратна 9.

369②. Знайдіть суму та різницю виразів:

1) $2a + b$ і $2a - b$; 2) $2a - b$ і $-2a + b$;

3) $-2a - b$ і $2a + b$; 4) $2a - b$ і $b - 2a$.

370③. Доведіть, що значення виразу $(m^2 - 4m + 1) - (m^2 - 9m - 14)$ кратне 5 при будь-якому натуральному значенні m.

371③. Доведіть, що значення виразу

$$(7x^5 - 4x^4 + x^3 - 8) - (3x^5 - 4x^4 + 4x^3) - (4x^5 - 3x^3 + 7)$$

не залежить від змінної x.

372③. Знайдіть значення виразу:

1) $(m^2 - 2m - 8) - (0{,}1m^2 - 5m + 9) + (4m - 0{,}9m^2 + 5)$, якщо $m = \frac{1}{7}$;

2) $7a^2 - (3ab - 2a^2) + (4ab - 9a^2)$, якщо $a = -\frac{1}{8}$, $b = -32$.

373④. Запис $\overline{xyz}$ означає число, в якому x сотень, y десятків і z одиниць. Подати у вигляді многочлена:

1) $\overline{xyz}$; 2) $\overline{zyx}$; 3) $\overline{xyz} + \overline{zy}$; 4) $\overline{yxz} - \overline{yx}$.

374②. Обчисліть значення виразу:

$$(0{,}018 + 0{,}982) : (4 \cdot 0{,}5 - 0{,}2).$$

375②. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $-8x \cdot 1{,}5y$, якщо $x = \frac{4}{7}$, $y = -1\frac{3}{4}$;

2) $-2a \cdot (-3{,}5b) \cdot 5c$, якщо $a = -1$, $b = -\frac{2}{5}$, $c = \frac{3}{7}$.

376③. Розв'яжіть рівняння:

1) $13^8 \cdot x = 13^{10}$; 2) $x : 3^2 = 3^3$; 3) $(5^2)^x = 5^{18}$.

377④. Подайте число 2^{60} у вигляді степеня з основою:

1) 4; 2) 8; 3) 16; 4) 32.

§ 12. МНОЖЕННЯ ОДНОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Урок 28

Помножимо одночлен $5x$ на многочлен $x^2 - 3x + 7$, використовуючи розподільний закон множення:

$$5x(x^2 - 3x + 7) = 5x \cdot x^2 - 5x \cdot 3x + 5x \cdot 7 = 5x^3 - 15x^2 + 35x.$$

Отже, добутком одночлена $5x$ і многочлена $x^2 - 3x + 7$ є многочлен $5x^3 - 15x^2 + 35x$, який дістали, помноживши одночлен на кожний член многочлена і додавши знайдені результати. Маємо *правило множення одночлена на многочлен*:

щоб помножити одночлен на многочлен, треба помножити цей одночлен на кожний член многочлена і знайдені добутки додати.

Добуток довільного одночлена на довільний многочлен завжди можна подати у вигляді многочлена.

Приклад 1. Виконати множення: $-3ab(5a^2 - 2ab + b^2)$.

Розв'язання.
$-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -3ab \cdot 5a^2 - 3ab \cdot (-2ab) - 3ab \cdot b^2 =$
$= -15a^3b + 6a^2b^2 - 3ab^3$.

Записати це множення можна коротше, не записуючи проміжні результати:

$$-3ab(5a^2 - 2ab + b^2) = -15a^3b + 6a^2b - 3ab^3.$$

Приклад 2. Спростіть вираз $5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m)$.

Розв'язання.

$$5m(m^2 - 2) - 2(m^3 - 5m) = \underline{5m^3} - \underline{\underline{10m}} - \underline{\underline{2m^3}} + \underline{\underline{10m}} = 3m^3.$$

Приклад 3. Розв'язати рівняння

$$\frac{2x-1}{3} - \frac{3x+2}{4} = \frac{x-14}{12}.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на найменше спільне кратне знаменників дробів, тобто на число 12. Маємо:

$$12\left(\frac{2x-1}{3}-\frac{3x+2}{4}\right)=12\cdot\frac{x-14}{12};$$
$$\frac{12\cdot(2x-1)}{3}-\frac{12\cdot(3x+2)}{4}=\frac{12(x-14)}{12};$$
$$4(2x-1)-3(3x+2)=x-14;$$
$$8x-4-9x-6=x-14;$$
$$8x-9x-x=-14+4+6;$$
$$-2x=-4;$$
$$x=2.$$

Сформулюйте правило множення одночлена на многочлен.

378①. (Усно.) Виконайте множення:

1) $m(a-b)$; 2) $-p(4+a)$; 3) $a(b+c-4)$; 4) $-a(b-c+2)$.

379②. Виконайте множення одночлена на многочлен:

1) $7a^2(3-a)$; 2) $-5x^2(x^3+4x)$;

3) $-3c^3(c-2c^2)$; 4) $2a^4(a^5-a^3-1)$;

5) $(3x^2-5x-3)\cdot 2x$; 6) $(c^3+c-4)\cdot(-3c)$.

380②. Перетворіть добуток у многочлен:

1) $4xy(x^2-2xy-y^2)$; 2) $-a^2b(ab^2-b^2+a^2)$;

3) $(2mn-3m^2-5n^2)\cdot(-4m^2)$; 4) $(-2x^2y+3xy-x^2)\cdot xy^2$;

5) $(2{,}8a^2b-3{,}7a^3b-0{,}8b)\cdot 10ab^2$; 6) $-1{,}8a^2b^6(5a^2b-1{,}5a-2b^3)$.

381②. Подайте у вигляді многочлена:

1) $5(x-3)-2(x-3)$; 2) $5(7a-1)-7(5a+3)$;

3) $2b(b-3)-5b(b+7)$; 4) $7y^2(3y-2)+4y^2(y+5)$.

382②. Запишіть замість * такий одночлен, щоб виконувалася рівність:

1) $(a+b)\cdot * = am+bm$; 2) $*\,(x-y)=-nx+ny$;

3) $*\,(a-b+c)=ax^2-bx^2+cx^2$;

4) $*\,(c-n+p)=-abc+abn-abp$;

5) $*\,(x^2-xy)=x^2y^2-xy^3$;

6) $(p-1)\,* = p^2q^2-pq^2$.

383②. Розв'яжіть рівняння:

1) $6+2(5x+4)=24$; 2) $3(5x-1)=4(4x-8)$;

3) $7-4(y-1)=(3y-2)\cdot(-2)$;

4) $3(y-2)-5(y+7)=-7(y-1)$.

384③. Доведіть, що вираз

$$a(3a+1)-a^2(a+2)+(a^3-a^2)-(a+1)$$

при будь-якому значенні a набуває одного й того самого значення.

385①. Виконайте множення:

1) $a(b-2)$; 2) $m(a+c)$; 3) $p(a-b-3)$; 4) $-b(a-c+3)$.

386②. Подайте у вигляді многочлена:

1) $4a(a^2-2a+3)$;
2) $-3b^2(4b^3-2b^2+3b-8)$;
3) $(3x^2-4x+12)\cdot(-0{,}1x^3)$;
4) $(p^2-9p^3+7p-1)\cdot 3p^4$;
5) $7ab(2a^2b-3ab^2-3a^3)$;
6) $-6m^2n(m^2n-3mn^2-4n^3)$;
7) $(9a^2b-8ab^3-a^2b^2)\cdot(-3a^2b^3)$;
8) $(p^2q^3-2pq^4+3p^3)\cdot 5p^3q^2$.

387②. Спростіть вираз:

1) $5(3-2a)+7(3a-1)$;
2) $3(2x-8)-3(2x-5)$;
3) $3m(m-2)-5m(7-m)$;
4) $2a^2(3a-5)+4a^2(a+3)$.

388②. Розв'яжіть рівняння:

1) $5(2x-1)=3(4x+5)$;
2) $9-5(y+2)=(7y-5)\cdot(-3)$.

389③. Доведіть, що значення виразу

$$x(5x^2-x+2)-(5x-2+4x^3)-x(x^2-x-3)$$

не залежить від значення x.

Урок 29

390②. Виконайте множення:

1) $\frac{1}{7}a^2b(1{,}4a^2-2{,}1b^3)$; 2) $-\frac{2}{3}x^2y^3\left(1{,}2y^5-\frac{9}{10}xy\right)$;

3) $\left(1\frac{1}{5}mn^2-1\frac{1}{15}m^2\right)\cdot\left(-\frac{5}{6}m^2n\right)$; 4) $\left(1\frac{1}{4}m-\frac{5}{6}n\right)\cdot 2\frac{2}{5}m^2n^7$.

391②. Перетворіть у многочлен вираз:

1) $5m(m-n)+3n(n-m)$;
2) $2a(2b-3a)-3a(5b-7a)$;
3) $a(3a^2-2b)-b(5a^2-2a)$;
4) $0{,}2mn(m^2-n^2+3)-0{,}5m(nm^2-n^3)$.

392③. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $4a-2(5a-1)+(8a-2)$, якщо $a=-3{,}5$;
2) $10(2-3x)+12x-9(x+1)$, якщо $x=-\frac{1}{27}$;
3) $a(3a-4b)-b(3b-4a)$, якщо $a=-1$, $b=1$;
4) $3xy(5x^2-y^2)-5xy(3x^2-y^2)$, якщо $x=\frac{1}{8}$, $y=-2$.

393③. Перетворіть у многочлен стандартного вигляду:

1) $3a(5a^2 - 3ab + ab^3 - b^2) \cdot b$;

2) $-xy \cdot (x^2y - 2x^2y^2 + 3xy^3 + x^3) \cdot x^2$.

394③. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{5x-9}{4} + \frac{5x-7}{4} = 1$; 2) $\frac{3x-1}{14} - \frac{x}{7} = -2$;

3) $\frac{x-6}{3} + \frac{2x+3}{3} = 2x$; 4) $\frac{2-x}{5} - \frac{x}{15} = \frac{1}{3}$.

395③. При якому значенні змінної:

1) значення виразу $2(3y + 1)$ у 4 рази більше від значення виразу $3y - 2$;

2) добуток виразів $3x$ і $2x + 1$ дорівнює сумі виразів $x(4x - 1)$ і $2(x^2 - 3)$?

396③. За одну годину майстер виготовляє на 4 деталі більше, ніж кожний із двох його учнів. Майстер працював 8 год, а кожний з учнів — по 5 год. За цей час майстер виготовив на 8 деталей більше, ніж обидва учні разом. Скільки деталей за годину виготовляв майстер?

397②. Виконайте множення:

1) $\frac{1}{4}m^2n(2{,}4mn - 2{,}8m^2)$; 2) $-\frac{2}{5}ab^3(1{,}5ab - \frac{5}{6}b^2)$;

3) $\left(1\frac{1}{2}x^2y - \frac{9}{10}xy^4\right) \cdot \frac{2}{3}xy^3$; 4) $\left(1{,}5a - \frac{4}{7}b\right) \cdot \left(-\frac{1}{14}a^2b^5\right)$.

398②. Перетворіть у многочлен вираз:

1) $3a(a - b) + 5b(a + b)$; 2) $3y(x - y) + y(2y - 3x)$;

3) $p(p^2 - 2a) - a(a^2 - 2p)$; 4) $3xy(x^2 - y^2 + 7) - 5xy(y^2 + x^2)$.

399③. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $7a(2a - 0{,}1) - 0{,}1a(10a - 7)$, якщо $a = \frac{1}{13}$;

2) $4x(2x - 5y) - 2y(4y - 10x)$, якщо $x = -15$, $y = 15$.

400③. Доведіть, що вираз тотожно дорівнює нулю:

1) $a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$;

2) $a(b + c - bc) - b(c + a - ac) + c(b - a)$.

401③. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{7x-3}{6} - \frac{5x+1}{2} = 0$; 2) $\frac{x-3}{5} - \frac{x}{4} = 1$;

3) $\frac{4x+1}{6} + \frac{10x+1}{6} = x$; 4) $\frac{x+2}{15} = \frac{1}{3} - \frac{x}{5}$.

Урок 30

402②. Знайдіть корінь рівняння:

1) $x(x-3)-9=12+x^2$;

2) $3x-2x^2=2x(5-x)+14$.

403③. Перетворіть на многочлен стандартного вигляду:

1) $7a^5b\,(2b^4+ab^5-3a^2b^6+a^3b^7)$;

2) $(3x^3+5x^2-2a-3a^2)\,xay$;

3) $-4pm^3(m^4-2p^3m+7p^6m^7+11p^7m^3)$;

4) $\left(-\frac{1}{2}a^2b^9+\frac{1}{6}ab^7-\frac{1}{3}a^3b^6\right)(-12a^3b^7)$.

404③. Доведіть, що вираз

$$2a^2(a-5)-a\,(-6a+2a^2+3a^3)-4$$

при будь-якому значенні a набуває від'ємних значень.

405③. За 8 олівців, 4 ручки і блокнот заплатили 5 грн. 30 к. Олівець на 35 к. дешевший за ручку і на 65 к. дешевший за блокнот. Скільки коштують окремо олівець, ручка і блокнот?

406③. Човен ішов 3,5 год за течією річки і 2,5 год проти течії. Шлях, пройдений ним за течією річки, на 30 км більший за шлях, пройдений проти течії. Знайдіть швидкість човна, якщо швидкість течії 2 км/год.

407③. Які одночлени треба записати замість *, щоб дістати тотожність:

1) $5ax^2\cdot(*+*)=5ax^3+35ax^2$;

2) $(9a^2+*)\cdot 3a=*+18a^3$;

3) $(*-4mc^2)\cdot * =3m^3c^2-12m^2c^4$;

4) $(*-*)\cdot x^2y^3=5x^2y^3-7x^2y^4$.

408④. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{2x-3}{5}-\frac{1-x}{4}+\frac{5x+1}{20}=\frac{9x+3}{10}$; 2) $x^2-5x+3-\frac{6x^2-30x+8}{6}=\frac{5}{3}$.

409②. Знайдіть корінь рівняння:

1) $7-x(x-2)=5-x^2$; 2) $3x(x-5)=3x^2-5x+20$.

410③. Доведіть, що вираз

$$5(m^2-3m+1)-3m\,(m-5)$$

набуває додатних значень при будь-якому значенні m.

411③. Зошит у клітинку коштує 54 к., а в лінійку — 65 к. Мама купила зошитів у клітинку на 6 більше, ніж у ліннійку, заплативши за всю покупку 17 грн. 52 к. Скільки зошитів у клітинку і скільки зошитів у лінійку купила мама?

412③. Які одночлени треба поставити замість *, щоб отримати тотожність:

1) $3a^2(* - *) = 9a^5 - 12a^2$; 2) $(* + *)\cdot 5ab^2 = 5ab^2 + 10a^2b^3$;

3) $(* - 2m^2a)\cdot 7m = 14m^2 - *$; 4) $(7x^2a - 9xa^2)\cdot * = 14x^3a^5 - *$?

413④. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{3x-5}{4} - \frac{2-x}{3} + \frac{2x+5}{12} = \frac{5x-6}{4}$; 2) $x^2 - 7x + 4 - \frac{4x^2-28x+9}{4} = \frac{7}{10}$.

414②. В яких координатних чвертях розміщено точки $A(-5; -7)$, $B(4; -8)$, $C(1; 17)$, $D(-9; 8)$?

415③. Спростіть вираз:

1) $(-3a^2b^3)^2\cdot\left(\frac{1}{3}ab^2\right)^3$; 2) $(0{,}1mn^7)^2\cdot(-10m^2n^3)^3$.

416④. Використовуючи властивості степенів, знайдіть значення виразу:

1) $\frac{24^{17}\cdot 6^{16}}{48^{16}\cdot 3^{17}}$; 2) $\frac{35^9\cdot 2^7}{5^7\cdot 14^8}$.

§ 13. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ

Урок 31

Ми вже вміємо розкладати на множники натуральні числа. Наприклад:

$21 = 3\cdot 7$; $12 = 2\cdot 2\cdot 3$; $105 = 3\cdot 5\cdot 7$ тощо.

Подібно до цього розкладають на множники і многочлени.

Розкласти многочлен на множники **означає подати його як добуток кількох многочленів, тотожний даному многочлену.**

Розглянемо один із способів розкладання многочлена на множники — ***винесення спільного множника за дужки.***

Приклад 1. Оскільки $a(b+c) = ab + ac$, то переписавши цю рівність у зворотному порядку, маємо:

$$\underline{a}b + \underline{a}c = \underline{a}(b+c).$$

Многочлен $ab + ac$ розклали на два множники a і $b + c$. Для цього:

1) у членах ab і ac цього множника виділяють спільний множник; його можна підкреслити;

2) на основі розподільної властивості множення записують добуток спільного множника (який підкреслено) і відповідної суми b і c (доданки якої не підкреслено).

Описаний спосіб називають способом винесення спільного множника за дужки.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен $15a^3b - 10a^2b^2$.

Р о з в'я з а н н я. У многочленів із цілими коефіцієнтами множник, який виносять за дужки, вибирають так, щоб члени многочлена, який залишається в дужках, не мали спільного буквеного множника, а модулі їх коефіцієнтів не мали спільних дільників.

Спочатку знайдемо спільний числовий множник для модулів коефіцієнтів — чисел 15 і 10. Їх найбільший спільний дільник дорівнює 5. Тому за коефіцієнт спільного множника можна взяти число 5 або -5.

Оскільки перший член многочлена містить множник $a^3 = a^2 \cdot a$, а другий $-a^2$, то за дужки можна винести a^2 (тобто за дужки виносять *змінну з меншим показником степеня*!). Також члени многочлена містять множники b і b^2; за дужки можна винести b. Отже, за дужки доцільно винести одночлен $5a^2b$ або $-5a^2b$. Винесемо, наприклад, за дужки $5a^2b$. Дістанемо:

$$15a^3b - 10a^2b^2 = \underline{5a^2b} \cdot 3a - \underline{5a^2b} \cdot 2b = \underline{5a^2b}(3a - 2b).$$

Щоб переконатися, що многочлен на множники розкладено правильно, слід перемножити отримані множники. В результаті має утворитися даний многочлен.

Приклад 3. Розкласти на множники $2m(b - c) + 3p(b - c)$.

Р о з в' я з а н н я. Вираз є сумою двох доданків, що мають спільний множник $b - c$, який є многочленом. Винесемо цей спільний множник за дужки:

$$2m\underline{(b - c)} + 3p\underline{(b - c)} = \underline{(b - c)}(2m + 3p).$$

Приклад 4. Розкласти на множники $x(y - t) + c(t - y)$.

Р о з в' я з а н н я. Доданки мають множники $y - t$ і $t - y$, які відрізняються один від одного лише знаком. Якщо у виразі $t - y$ винести за дужки -1, то другий доданок матиме вигляд: $-c(y - t)$. Справді:

$$c(t - y) = c \cdot (-1) \cdot (-t + y) = -c(y - t).$$

Після цього обидва доданки матимуть спільний множник $y - t$. Запишемо розв'язання так:

$$x(y-t)+c(t-y)=x\underline{(y-t)}-c\underline{(y-t)}=\underline{(y-t)}(x-c).$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $5x^2-7x=0$.

Р о з в ' я з а н н я. Розкладемо ліву частину рівняння на множники. Для цього винесемо за дужки множник x:

$$x(5x-7)=0.$$

Добуток $x(5x-7)$ дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли хоча б один із множників дорівнює нулю:

$$x=0 \text{ або } 5x-7=0,$$

звідки $x=0$ або $x=1{,}4$.

В і д п о в і д ь: 0; 1,4.

Яке перетворення називається розкладанням многочлена на множники? • На прикладі многочлена $ab + ac$ поясніть, як виконується розкладання на множники винесенням спільного множника за дужки.

417①. (Усно.) Знайдіть спільний множник:

1) $3a+3b$; 2) $5m-5$; 3) $ab-at$; 4) $pm+pk$.

418①. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $4a+4x$; 2) $7p-7b$; 3) $ax+ay$; 4) $xb-xc$.

419②. Подайте у вигляді добутку:

1) $3a+12b$; 2) $-6a-9x$; 3) $17a+17$;
4) $-ab-a$; 5) $14a-21x$; 6) $8b-8$.

420②. Розкладіть на множники:

1) $5ab+5xb$; 2) $2xy-8y$; 3) $-5ab+5a$;
4) $7a+21ay$; 5) $9x^2-27x$; 6) $3a-9a^2$;
7) m^2-ma; 8) $12ax-4a^2$; 9) $-18xy+24y^2$;
10) a^2b-ab^2; 11) $pm-p^2m$; 12) $-x^2y^2-xy$.

421②. Запишіть вираз $6x^2y+15x$ у вигляді добутку та обчисліть його значення, якщо $x=-0{,}5$, $y=5$.

422②. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2-2x=0$; 2) $x^2+4x=0$.

423①. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $2m-2n$; 2) $5a+5b$; 3) $ab+cb$; 4) $xy-xt$.

424②. Розкладіть на множники:

1) $4m - 16a$; 2) $-12m + 18a$; 3) $14m - 14$;
4) $-xb - b$; 5) $8p + 8$; 6) $20b - 30c$.

425②. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $7ax - 7bx$; 2) $3ab + 9a$; 3) $6xm - 8xn$;
4) $15xy + 5x$; 5) $9m^2 - 18m$; 6) $15m - 30m^2$;
7) $9xy + 6x^2$; 8) $a^2b - ab$; 9) $-p^2q - pq^2$.

426②. Запишіть вираз $12a^2b - 8a$ у вигляді добутку та обчисліть його значення, якщо $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$.

427②. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 3x = 0$; 2) $x^2 - 7x = 0$.

Урок 32

428①. (Усно.) Розкладіть на множники:

1) $xm + xn$; 2) $17a - 17b$; 3) $am - an$; 4) $2p + 2q$.

429②. Розкладіть на множники:

1) $x^3 - x^2$; 2) $a^4 + a^2$; 3) $m^3 - m^5$;
4) $a^3 + a^7$; 5) $3b^2 - 9b^3$; 6) $7a^3 + 6a$;
7) $4y^2 + 12y^4$; 8) $5m^5 + 15m^2$; 9) $-16a^4 - 20a$.

430②. Подайте у вигляді добутку:

1) $a^4 + a^3 - a^2$; 2) $m^9 - m^2 + m^7$;
3) $b^6 + b^5 - b^9$; 4) $-y^7 - y^{12} - y^3$.

431②. Обчисліть зручним способом:

1) $132 \cdot 27 + 132 \cdot 73$; 2) $119 \cdot 37 - 19 \cdot 37$.

432③. Розкладіть на множники многочлен:

1) $4a^3 + 2a^2 - 8a$; 2) $9b^3 - 3b^2 - 27b^5$;
3) $16m^2 - 24m^6 - 32m^3$; 4) $-5b^3 - 20b^2 - 25b^5$.

433③. Розкладіть на множники многочлен:

1) $2p(x - y) + q(x - y)$; 2) $a(x + y) - (x + y)$;
3) $(a - 7) - b(a - 7)$; 4) $5(a + 1) + (a + 1)^2$;
5) $(x + 2)^2 - x(x + 2)$; 6) $-5m(m - 2) + 4(m - 2)^2$.

434③. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $a(x - y) + b(y - x)$; 2) $p(b - 5) - n(5 - b)$;
3) $7x(2b - 3) + 5y(3 - 2b)$; 4) $(x - y)^2 - a(y - x)$;
5) $5(x - 3)^2 - (3 - x)$; 6) $(a + 1)(2b - 3) - (a + 3)(3 - 2b)$.

435③. Знайдіть корені рівняння:

1) $4x^2 - x = 0$; 2) $7x^2 + 28x = 0$;

3) $\frac{1}{9}x^2 + x = 0$; 4) $\frac{2}{11}x^2 - \frac{3}{11}x = 0$.

436②. Розкладіть на множники:

1) $m^4 - m^2$; 2) $a^4 + a^5$; 3) $6a - 12a^3$;

4) $18p^3 - 12p^2$; 5) $14b^3 + 7b^4$; 6) $-25m^3 - 20m$.

437②. Подайте у вигляді добутку:

1) $p^7 + p^3 - p^4$; 2) $a^{10} - a^5 + a^8$;

3) $b^7 - b^5 - b^2$; 4) $-m^8 - m^2 - m^4$.

438③. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $5c^8 - 5c^7 + 10c^4$; 2) $9m^4 + 27m^3 - 81m$;

3) $8p^7 - 4p^5 + 10p^3$; 4) $21b - 28b^4 - 14b^3$.

439③. Розкладіть на множники:

1) $3x(b-2) + y(b-2)$; 2) $(m^2 - 3) - x(m^2 - 3)$;

3) $a(b-9) + c(9-b)$; 4) $7(a+2) + (a+2)^2$;

5) $(c-m)^2 - 5(m-c)$; 6) $-(x+2y) - 5(x+2y)^2$.

440③. Розв'яжіть рівняння:

1) $12x^2 + x = 0$; 2) $0{,}2x^2 - 2x = 0$;

3) $\frac{1}{14}x^2 - x = 0$; 4) $1\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x = 0$.

Урок 33

441②. (Усно). Чи правильно виконано розкладання на множники:

1) $7a + 7 = 7a$; 2) $5m - 5 = 5(m-5)$;

3) $2a - 2 = 2(a-1)$; 4) $7xy - 14x = 7x(y-2)$;

5) $5mn + 5n = 5m(n+3)$; 6) $7ab + 8cb = 15b(a+c)$?

442③. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $7m^4 - 21m^2n^2 + 14m^3$; 2) $12a^2b - 18ab^2 + 30ab^3$;

3) $8x^2y^2 - 4x^3y^5 + 12x^4y^3$; 4) $-5p^4q^2 - 10p^2q^4 + 15p^3q^3$.

443③. Обчисліть раціональним способом:

1) $843 \cdot 743 - 743^2$; 2) $1103^2 - 1003 \cdot 100 - 1003 \cdot 3$.

444③. Знайдіть значення виразу:

1) $4{,}23a - a^2$, якщо $a = 5{,}23$;

2) $x^2y + x^3$, якщо $x = 2{,}51$, $y = -2{,}51$;

3) $am^5 - m^6$, якщо $m = -1$, $a = -5$;

4) $-xy - x^2$, якщо $x = 2{,}7$, $y = 7{,}3$.

445③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(3x + 2) - 5(3x + 2) = 0$; 2) $2x(x - 2) - 5(2 - x) = 0$.

446③. Доведіть, що значення виразу:

1) $17^3 + 17^2$ кратне 18; 2) $45^7 - 45^6$ кратне 44.

447④. Доведіть, що число:

1) $10^4 + 5^3$ кратне 9; 2) $4^{15} - 4^{14} + 4^{13}$ кратне 13;

3) $27^3 - 3^7 + 9^3$ кратне 25; 4) $21^3 + 14^3 - 7^3$ кратне 34.

448④. Знайдіть корені рівняння:

1) $x(x - 3) = 7x - 21$; 2) $2x(x - 5) = 20 - 4x$.

449④. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $(5m - 10)^2$; 2) $(18a + 27b)^2$.

450③. Розкладіть на множники многочлен:

1) $12a - 6a^2x^2 - 9a^3$; 2) $12b^2y - 18b^3 - 30b^4y$;

3) $16bx^2 - 8b^2x^3 + 24b^3x$; 4) $60m^4n^3 - 45m^2n^4 + 30m^3n^5$.

451③. Знайдіть значення виразу:

1) $9{,}11a + a^2$, якщо $a = -10{,}11$;

2) $5ax^2 + 5a^2x$, якщо $a = \frac{2}{5}$, $x = \frac{3}{5}$.

452③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(4x + 5) - 7(4x + 5) = 0$; 2) $7(x - 3) - 2x(3 - x) = 0$.

453③. Доведіть, що значення виразу:

1) $39^9 - 39^8$ кратне 38; 2) $49^5 - 7^8$ кратне 48.

454④. Знайдіть корені рівняння:

1) $x(x - 2) = 4x - 8$; 2) $3x(x - 4) = 28 = 7x$.

455②. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| = 2$; 2) $|x| = 0$; 3) $|x| = -3$; 4) $|x| = 1{,}27$.

456②. Спростіть вираз і обчисліть його значення:

1) $-3x^2 + 7x^2 - 4x^2 + 3x^2$, якщо $x = 0{,}1$;

2) $8m + 5n - 7m + 15n$, якщо $m = 7$, $n = -1$.

457③. Поставте замість * коефіцієнти одночленів, щоб дана рівність була тотожністю:

1) $2m^2 - 4mn + n^2 + (*m^2 - *mn - *n^2) = 3m^2 - 9mn - 5n^2$;

2) $7x^2 - 10y^2 - xy - (*x^2 - *xy + *y^2) = -x^2 + 3y^2 + xy$.

458④. Довжина прямокутника у 3 рази більша за ширину. Якщо довжину прямокутника зменшити на 5 см, то його площа зменшиться на 40 см². Знайдіть початкову довжину і ширину прямокутника.

§ 14. МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА МНОГОЧЛЕН

Урок 34

Помножимо многочлен $a + b$ на многочлен $x + y$. Позначимо многочлен $x + y$ однією буквою m. Маємо:

$$(a + b)(x + y) = (a + b)m = am + bm.$$

У виразі $am + bm$ підставимо замість m многочлен $x + y$ і знову скористаємося правилом множення одночлена на многочлен:

$$am + bm = a(x + y) + b(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Отже,

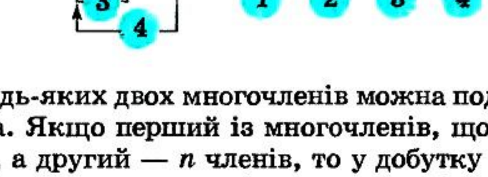
$$(a + b)(x + y) = ax + ay + bx + by.$$

Добутком многочленів $a + b$ і $x + y$ є многочлен $ax + ay + bx + by$, який є сумою всіх одночленів, які дістають множенням кожного члена многочлена $a + b$ на кожний член многочлена $x + y$.

Приходимо до *правила множення многочлена на многочлен*:

щоб помножити многочлен на многочлен, треба кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого многочлена і отримані добутки додати.

Процес множення многочлена на многочлен можна подати схематично:



Добуток будь-яких двох многочленів можна подати у вигляді многочлена. Якщо перший із многочленів, що множиться, має m членів, а другий — n членів, то у добутку (до зведення подібних доданків) повинно бути mn членів. Цим можна користуватися для контролю.

Приклад 1. Виконати множення $(2x-y)(4x-3xy+2y)$.

Р о з в' я з а н н я.

$(2x-y)(4x-3xy+2y)=8x^2-6x^2y+\underline{4xy}-\underline{4xy}+3xy^2-2y^2=$

$=8x^2-6x^2y+3xy^2-2y^2$.

Приклад 2. Спростити вираз $(2x-7)(x-3)-2x(x+4)$.

Р о з в' я з а н н я.

$(2x-7)(x-3)-2x(x+4)=\underline{2x^2}-\underline{\underline{6x}}-\underline{\underline{7x}}+21-\underline{2x^2}-\underline{\underline{8x}}=$

$=-21x+21$.

Якщо потрібно помножити більш ніж два многочлени, то спочатку множать перші два з них, потім отриманий результат множать на третій многочлен і т. д.

Приклад 3. Виконати множення: $(x-2)(x+3)(x+1)$.

Р о з в' я з а н н я.

$(x-2)(x+3)(x+1)=(x^2+\underline{3x}-\underline{2x}-6)(x+1)=(x^2+x-6)(x+1)=$

$=x^3+\underline{x^2}+\underline{x^2}+\underline{\underline{x}}-\underline{\underline{6x}}-6=x^3+2x^2-5x-6$.

Сформулюйте правило множення многочлена на многочлен. • Як множать більше ніж два многочлени?

459①. Виконайте множення:

1) $(a-b)(x+y)$; 2) $(c+d)(m+n)$;

3) $(c-a)(m-y)$; 4) $(a+5)(b-2)$.

460②. Спростіть вираз:

1) $(a+3)(a+2)$; 2) $(y-2)(y+4)$; 3) $(2-p)(p+1)$;

4) $(b-5)(2b+1)$; 5) $(3a-4)(2a+1)$; 6) $(5y-3)(1-2y)$.

461②. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(2+4x)(2y-1)$; 2) $(x^2+a)(x-a^2)$; 3) $(4p-2m)(3p+5m)$;

4) $(a^2-b)(b^2-a^3)$; 5) $(2x^2-1)(3x+1)$; 6) $(7x^2-4x)(3x-2)$;

7) $(b-2)(3b^3-4b^2)$; 8) $(m^2-2m)(3m-7m^2)$;

9) $(n^3-2n^2)(n+7)$.

462②. Спростіть вираз:

1) $(2x+7)(2x-4)+28$; 2) $5m^2+(3-5m)(m+2)$;

3) $(a+7)(a-2)-a(a+5)$; 4) $(2b+1)(3b-1)-(6b^2-1)$.

463②. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-1)(x+2)-x^2=-8$; 2) $(3x+1)(5-2x)+6x^2=5$.

464③. **Доведіть тотожність:**

1) $(m-3)(m+7)-10=(m+8)(m-4)+1$;
2) $(2x-1)(3x+5)+9x=(3x-1)(2x+5)+3x$.

465①. **Виконайте множення:**

1) $(c-8)(d+1)$; 2) $(m+n)(a+b)$;
3) $(a+2)(x-3)$; 4) $(m-p)(a-d)$.

466②. **Спростіть вираз:**

1) $(y+2)(y-3)$; 2) $(a-3)(a-2)$; 3) $(4-p)(p+3)$;
4) $(5a-2)(a+3)$; 5) $(4b-3)(2b-1)$; 6) $(7m-2)(1+2m)$.

467②. **Подайте вираз у вигляді многочлена:**

1) $(3m^2-p)(m^2+p)$; 2) $(5a^2+b)(b^2-4a^2)$;
3) $(12a^2-3)(5a-7a^2)$; 4) $(2a^3-3a^2)(a+5)$.

468②. **Спростіть вираз:**

1) $(2p-1)(3p+5)-6p^2$; 2) $12+(3m-2)(5m+6)$;
3) $(m+3)(m-5)-m(m-2)$; 4) $(3a-2)(4a+1)-(12a^2-2)$.

469②. **Розв'яжіть рівняння:**

1) $(x+3)(2x-1)-2x^2=7$; 2) $10x^2+(5x-1)(4-2x)=-4$.

Урок 35

470①. **(Усно.) Виконайте множення:**

1) $(x+y)(m+p)$; 2) $(c-2)(b+1)$;
3) $(3-t)(a-b)$; 4) $(1-p)(2-a)$.

471②. **Подайте у вигляді многочлена вираз:**

1) $(m-n)(a+b-1)$; 2) $(3-a)(p+5-m)$;
3) $(a+x-3)(n+2)$; 4) $(c-d-7)(x+y)$.

472③. **Перетворіть на многочлен вираз:**

1) $(a^2+ab-b^2)(a-b)$; 2) $(x^2-xy-y^2)(x+y)$;
3) $(m-n)(-m^2-3mn+n^2)$; 4) $(p-2)(p^2+3p-4)$;
5) $(9-4m-m^2)(m-2)$; 6) $(y^2-3y-7)(4y-2)$.

473③. **Спростіть вираз:**

1) $9m^2-(3m-2)(3m+7)$; 2) $18y-(3y+1)(6y+4)$;
3) $(a+4)a-(a+2)(a-2)$; 4) $(b+7)(b+1)-(b+8)(b-1)$.

474③. **Знайдіть корені рівняння:**

1) $4x-(x+2)(x-3)=(5-x)(x+3)$;
2) $2x(x+1)-(x+2)(x-3)=x^2+7$.

475③. Доведіть, що для кожного значення змінної a:

1) значення виразу $(a-8)(a+3)-(a-7)(a+2)$ дорівнює -10;

2) значення виразу $(a^2-2)(a^2+5)-(a^2-4)(a^2+4)-3a^2$ дорівнює 6.

476③. Дано два добутки $27\cdot18$ і $12\cdot42$. На яке одне й те саме число треба зменшити кожний із чотирьох множників, щоб дістати нові добутки, які дорівнюють один одному?

477②. Перетворіть на многочлен вираз:

1) $(a+b)(m-2+p)$; 2) $(5-x)(m-n-p)$;

3) $(x+y-2)(a-m)$; 4) $(p+q+3)(-a-x)$.

478③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(a+b)(-a^2+ab-b^2)$; 2) $(x-y)(-x^2-xy+y^2)$;

3) $(7a^2+a-1)(a+1)$; 4) $(2m^2-3m-2)(m+5)$.

479③. Спростіть вираз:

1) $8x-(x+5)(x+3)$; 2) $a(a+8)-(a+2)(a-5)$;

3) $12x^2+5-(4x+7)(3x-1)$; 4) $(x+1)(x-5)-(x+3)(x-7)$.

480③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(2x-5)-x^2=2-(x-1)(2-x)$;

2) $2x^2-(x+1)(x+19)=(x+3)(x-2)+8$.

481③. Дано два добутки $22\cdot15$ і $27\cdot12$. На яке одне й те саме число треба збільшити кожний із чотирьох множників, щоб дістати нові добутки, які дорівнюють один одному?

Урок 36

482②. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду і знайдіть його значення:

1) $(2a-3)(3a+5)-6a^2$, якщо $a=13{,}5$;

2) $(5x-1)(1-2x)-7x$, якщо $x=-2$.

483③. Перетворіть у многочлен стандартного вигляду:

1) $(3m+2n)(9m^2-6nn+4n^2)$; 2) $(4x^2+10xy+25y^2)(2x-5y)$;

3) $(-x^2+3xa-a)(x+2a)$; 4) $(3m-x)(5mx-m^2+x^2)$.

484③. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $a^2(a-2)(a+5)$; 2) $-5m^2(m-1)(2-m)$;

3) $-4x^3(2x-3)(x-x^2)$; 4) $0{,}2b^2(5m+10)(m^2-2)$.

485③. Запишіть у вигляді многочлена вираз:

1) $(x-y)^2$; 2) $(p+2a)^2$; 3) $(4x-3y)^2$; 4) $(7a+2b)^2$.

486③. Замість * запишіть такі одночлени, щоб виконувалася рівність:

1) $(x-1)(*+3)=x^2+*-*$; 2) $(y+2)(y-*)=*+y-*$.

487④. Виконайте множення:

1) $(a^2-2a+1)(a^2+3a-7)$; 2) $(7-2b+3b^2)(2b^2-2b-1)$.

488④. Периметр прямокутника дорівнює 60 см. Якщо його довжину збільшити на 1 см, а ширину зменшити на 3 см, то його площа зменшиться на 45 см^2. Знайдіть початкову довжину і ширину прямокутника.

489②. Спростіть вираз і обчисліть його значення:

1) $(7x+3)(2x-1)-14x^2$, якщо $x=-8$;

2) $(2a+4)(1-3a)+10a$, якщо $a=-1$.

490③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(3x-y)(9x^2+3xy+y^2)$; 2) $(9a^2-2ab-b^2)(3a+2b)$.

491③. Розкрийте дужки:

1) $m^2(m-4)(m+2)$; 2) $-a^2(2a-3)(3a+7)$;

3) $-5b^3(2b+b^2)(b-1)$; 4) $0{,}5x^2(2x-6)(x^2+x)$.

492③. Запишіть у вигляді многочлена вираз:

1) $(2a-3b)^2$; 2) $(4x+5y)^2$.

493④. Виконайте множення:

1) $(x^2-x-1)(x^2+3x+5)$; 2) $(7-a-2a^2)(a^2+3a-1)$.

Урок 37

494②. Спростіть вираз:

1) $x(x-5)+(x+4)(x+2)$;

2) $(m+3)(m-4)-m(m-1)+5$;

3) $(a+3)a-(a+1)+(4-a)(4+a)$;

4) $(y+2)(y-3)-2y(1-y)$.

495③. Доведіть, що значення виразу не залежить від значення змінної:

1) $(m-7)(m+1)-(m+2)(m-8)$;

2) $a^2(a^2-1)-(a^2-2)(a^2+3)-2a^2$.

496③. Спростіть вираз і обчисліть його значення:

1) $(2x^2-x)(3x^2+x)-(x^2+x)(6x^2-2x)$, якщо $x=-2$;

2) $(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)-8b^3$, якщо $a=3$, $b=-2007$.

497③. Доведіть, що при всіх натуральних значеннях n значення виразу:

1) $(n+2)(n+3)-n(n-1)$ кратне 6;

2) $(n-5)(n+8)+(n+1)(2n-5)+46$ при діленні на 3 дає остачу 1.

498③. Знайдіть три послідовних натуральних числа, якщо відомо, що квадрат меншого з них на 44 менший від добутку двох інших.

499④. Знайдіть чотири послідовних цілих числа, якщо добуток двох більших з них на 78 більший за добуток двох менших.

500④. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(a+2)(a-1)(a+3)$; 2) $(a-4)(a-7)(a+1)$.

501④. Виконайте множення:

1) $(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$; 2) $(b-1)(b^4+b^3+b^2+b+1)$.

502②. Спростіть вираз:

1) $(5x-1)(4x+7)-4x(5x-8)$;

2) $(a+3)(a-2)-a(a+9)+6$;

3) $2x(3x-1)+(x-9)(5x-6)$;

4) $(2x+3)(5x-4)-2x(x-3)-13(x-1)$.

503③. Доведіть, що значення виразу $(a+7)(a-3)-4(a-8)$ при будь-якому значенні a набуває додатного значення.

504③. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(x-9)(x+9)-(x-3)(x+27)$, якщо $x=1\frac{1}{8}$;

2) $8a^3-(2a-3b)(4a^2+6ab+9b^2)$, якщо $a=-\frac{7}{8}$, $b=\frac{1}{3}$.

505④. Знайдіть чотири послідовних натуральних числа, якщо добуток двох менших з них на 102 менший за добуток двох більших.

506④. Подайте у вигляді многочлена вираз:

1) $(m-2)(m+3)(m-5)$; 2) $(p^2+1)(p^8-p^6+p^4-p^2+1)$.

507②. Знайдіть значення виразу:

1) $4a-12b+8a$, якщо $a=-13$, $b=13$;

2) $(3x-2x)\cdot(5m+4m)$, якщо $x=1\frac{1}{9}$, $m=-1\frac{1}{2}$.

508③. Швидкість автомобіля 70 км/год, а мотоцикліста — 50 км/год. На шлях від села до міста мотоцикліст витрачає на 2 год більше, ніж автомобіль. Знайдіть відстань від села до міста.

509③. Знайдіть додатне число, яке при піднесенні до квадрата:

1) збільшується в 4 рази; 2) зменшується у 5 раз.

510④. Подайте вираз у вигляді різниці двох многочленів, один з яких містить x, а другий — не містить:

1) $(5x^2 - 8b + a) - (b^2 - 5x + 1) - (2b - x^2 + 7x)$;

2) $(8mx^2 + 7mn^2 - p) - (x^2 + mx^2 + 2p) - 17x$.

§ 15. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ СПОСОБОМ ГРУПУВАННЯ

Урок 38

У § 13 ми ознайомилися з розкладанням многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки. Іноді вдається розкласти многочлен на множники, використовуючи інший спосіб — ***спосіб групування***.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен

$$ab - 5a + 2b - 10.$$

Розв'язання. Згрупуємо члени многочлена так, *щоб доданки у кожній групі мали спільний множник*:

$$ab - 5a + 2b - 10 = (ab - 5a) + (2b - 10).$$

У першій групі винесемо за дужки спільний множник a, а у другій — спільний множник 2:

$$(ab - 5a) + (2b - 10) = a(b - 5) + 2(b - 5).$$

Кожний із доданків має спільний множник $b - 5$, який винесемо за дужки:

$$a\underline{(b - 5)} + 2\underline{(b - 5)} = (b - 5)(a + 2).$$

Отже, $ab - 5a + 2b - 10 = (b - 5)(a + 2)$.

Многочлен $ab - 5a + 2b - 10$ можна розкласти на множники, групуючи його члени інакше:

$$ab - 5a + 2b - 10 = (ab + 2b) + (-5a - 10) =$$
$$= b\underline{(a + 2)} - 5\underline{(a + 2)} = (a + 2)(b - 5).$$

Отже, при застосуванні способу групування:

! ***1) утворюємо групи членів, що мають спільний множник;***
2) виносимо за дужки спільний множник у кожній групі;
3) після цього має утворитися спільний для всіх груп множник, який виносимо за дужки.

Щоб переконатися, що розкладання на множники виконано правильно, слід перемножити отримані множники. В результаті має утворитися даний многочлен.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен

$$2a + 2b - m + am + bm - 2.$$

Р о з в' я з а н н я. I *спосіб.* Згрупуємо члени многочлена у три групи по два доданки так, щоб доданки у кожній групі мали спільний множник. Маємо:

$$2a + 2b - m + am + bm - 2 = (2a + am) + (2b + bm) + (-m - 2) =$$
$$= a\,\underline{(2 + m)} + b\,\underline{(2 + m)} - 1\,\underline{(2 + m)} = (2 + m)(a + b - 1).$$

II *спосіб.*

$$2a + 2b - m + am + bm - 2 = (2a + 2b - 2) + (-m + am + bm) =$$
$$= 2\,\underline{(a + b - 1)} + m\,\underline{(a + b - 1)} = (a + b - 1)(2 + m).$$

Приклад 3. Розкласти на множники тричлен $x^2 - 6x + 8$.

Р о з в' я з а н н я. Подамо доданок $-6x$ у вигляді $-2x - 4x$ і виконаємо групування:

$$x^2 - 6x + 8 = x^2 - 2x - 4x + 8 = (x^2 - 2x) + (-4x + 8) =$$
$$= x\,\underline{(x - 2)} - 4\,\underline{(x - 2)} = (x - 2)(x - 4).$$

Доданок $-6x$ можна було подати і в іншому вигляді (наприклад, $-6x = -7x + x$, $-6x = -5x - x$ тощо), але це не допомогло б розв'язати приклад. «Секрет» розв'язування полягає в тому, що добуток коефіцієнтів доданків $-4x$ і $-2x$ дорівнює числу, що не містить x — числу 8: $(-4 \cdot (-2) = 8)$. Тільки в такий спосіб можна розкласти на множники тричлен $x^2 - 6x + 8$.

Який план розв'язування застосовують під час способу групування?

511①. У многочлені $ca - 2c + 5a - 10$ назвіть групу одночленів, які мають спільний множник a і групу одночленів, які мають спільний множник 2.

512①. Закінчіть розкладання многочлена на множники:

$$xy + yt - 2x - 2t = (xy - 2x) + (yt - 2t) =$$
$$= x(y - 2) + t(y - 2) = \ldots$$

513②. Подайте у вигляді добутку многочленів вираз:

1) $a(b + c) + 3b + 3c$; 2) $p(x - y) + 7x - 7y$;

3) $m(t - 5) + t - 5$; 4) $b(m - c) + c - m$.

514②. Розкладіть на многочлени:

1) $ax + ay + 6x + 6y$;
2) $5m - 5n + pm - pn$;
3) $9p + mn + 9n + mp$;
4) $ab + ac - b - c$;
5) $1 - by - y + b$;
6) $ma + 2a - 2m - 4$.

515②. Запишіть вираз $ab - ac + 2b - 2c$ у вигляді добутку та обчисліть його значення, якщо $a = -1$, $b = 5{,}7$, $c = 6{,}7$.

516③. Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $a^3 + a^2 + a + 1$;
2) $b^5 - b^3 - b^2 + 1$;
3) $c^4 + 3c^3 - c - 3$;
4) $a^6 - 5a^4 - 3a^2 + 15$;
5) $m^2 - mn - 8m + 8n$;
6) $ab - 9b + b^2 - 9a$;
7) $7t - ta + 7a - t^2$;
8) $xy - ty - y^2 + xt$.

517③. Обчисліть значення виразу найзручнішим способом:

1) $157 \cdot 37 + 29 \cdot 157 + 143 \cdot 42 + 24 \cdot 143$;
2) $9\frac{2}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16 \cdot 4{,}5 + 10\frac{1}{3} \cdot 5\frac{1}{2} - 16$.

518①. Закінчіть розкладання многочлена на множники:

$$ab - cd - ad + cb = (ab - ad) + (cb - cd) =$$
$$= a(b - d) + c(b - d) = \ldots$$

519②. Розкладіть на множники:

1) $c(x - y) + 3x - 3y$;
2) $a(c + m) + 9c + 9m$;
3) $x(c + 5) + c + 5$;
4) $y(p - 3) + 3 - p$.

520②. Подайте у вигляді добутку многочленів:

1) $ab + 5a + bm + 5m$;
2) $mp - b + bp - m$;
3) $am - b + m - ab$;
4) $cm - 3dm + cp - 3dp$.

521②. Запишіть вираз $5x - 5y + xt - yt$ у вигляді добутку та знайдіть його значення, якщо $x = 7{,}2$, $y = 6{,}2$, $t = -4{,}5$.

522③. Подайте у вигляді добутку:

1) $b^2 + xb - x^2y - xby$;
2) $m^2 + 7m - bm - 7b$;
3) $4a - ax + 4x - x^2$;
4) $ma - mb - m^2 + ab$.

Урок 39

523③. Розкладіть на множники:

1) $x^2 + bx - b^2y - bxy$;
2) $a^2b + c^2 - abc - ac$;
3) $7a^3m + 14a^2 - 6bm - 3am^2b$;
4) $21x + 8tm^3 - 24m^2 - 7xtm$.

524③. Обчисліть значення виразу, попередньо розклавши на множники:

1) $5m^2 - 5mn - 7m + 7n$, якщо $m = 1{,}4$, $n = -5{,}17$;

2) $3a^3 - 2b^3 - 6a^2b^2 + ab$, якщо $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{2}{3}$.

525③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 5x + 40 = 8x$; 2) $5y^3 + 2y^2 + 5y + 2 = 0$.

526③. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) $45x^3y^4 - 9x^5y^3 - 15x^2y^2 + 3x^4y$;

2) $2{,}1mn^2 - 2{,}8mp^2 - 2{,}7n^3 + 3{,}6np^2$.

527④. Розкладіть на множники:

1) $at^2 - ap + t^3 - tp - bt^2 + bp$;

2) $ax^2 + ay^2 - mx^2 - my^2 + m - a$;

3) $mb - m + 7 - 7b - 7m^2 + m^3$;

4) $6ax + 3ay - az - 6bx - 3by + bz$.

528④. Розкладіть на множники тричлен, попередньо подавши один з його членів у вигляді суми подібних доданків:

1) $x^2 + 5x + 4$; 2) $x - 5x + 4$;

3) $x^2 + x - 6$; 4) $a^2 + 4ab + 3b^2$.

529③. Обчисліть значення виразу, попередньо розклавши на множники:

1) $27x^3 + x^2 + 27x + 1$, якщо $x = -\frac{1}{27}$;

2) $5p + px^2 - p^2x - 5x$, якщо $p = 2{,}5$, $x = 2{,}4$.

530③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 7x - 7 = x$; 2) $7y^3 + y^2 + 7y + 1 = 0$.

531③. Розкладіть на множники:

1) $8m^2c - 6m^2x - 16cx^3 + 12x^4$;

2) $1{,}2xy^3 + 1{,}6x^3y^2 - 2x^7y - 1{,}5x^5y^2$.

532④. Розкладіть на множники:

1) $a^2b + a + ab^2 + b + 9ab + 9$;

2) $8ax + 4bx - 4x + 10am + 5bm - 5m$.

533④. Розкладіть на множники тричлен, попередньо подавши один з його членів у вигляді суми подібних доданків:

1) $x^2 - 6x + 5$; 2) $x^2 - x - 6$;

3) $x^2 + 2x - 15$; 4) $a^2 + 5ab + 6b^2$.

534②. Спростіть вираз та знайдіть його значення:

1) $0{,}8(a-5)-0{,}6(2-a)$, якщо $a=-5$;

2) $\frac{4}{7}(7x-14y)-\frac{2}{9}(18x-27y)$, якщо $x=2007$, $y=-\frac{1}{2}$.

535③. Знайдіть корінь рівняння:

1) $6x(x-1)-2x(3x-5)=-8$;

2) $5(2-x^2)-4x(x-1)=3x(1-3x)$.

536④. Перетворіть у многочлен стандартного вигляду:

1) $(b-1)(b^5-b^3+b-3)$; 2) $(p+1)(p^3-p^2-p-1)$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 10—15

Урок 40

1①. Виконайте множення:

1) $m(a-b+3)$; 2) $-p(x+y-4)$.

2①. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $7a-7b$; 2) $xm+ym$.

3①. Виконайте множення многочленів:

1) $(a+2)(x-3)$; 2) $(b-5)(c-m)$.

4②. Перетворіть у многочлен стандартного вигляду:

1) $(2x^2-x)+(3x-5)-(x^2-5)$; 2) $-2xy(x^2-3xy+y^2)$.

5②. Розкладіть на множники:

1) $9a^2-12ab$; 2) $7x-7y+ax-ay$.

6②. Спростіть $(x+5)(x-2)-x(x+3)$.

7③. Розв'яжіть рівняння $(2x+3)(3x-7)=x(6x-3)-17$.

8③. Подайте у вигляді добутку:

1) $9m^3-3m^4-27m^8$; 2) $m^2+2n-2m-mn$.

9④. Знайдіть чотири послідовних цілих числа, якщо добуток двох менших з них на 90 менше за добуток двох більших.

Додаткові завдання

10④. Доведіть, що сума п'яти послідовних натуральних чисел кратна 5.

11④. Розв'яжіть рівняння $x^2-5x=4x-20$.

12④. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(x^2-2x+5)(x^2+3x-1)$; 2) $(a+3)(a-5)(a-1)$.

§ 16. КВАДРАТ СУМИ І КВАДРАТ РІЗНИЦІ

Урок 41

Піднесемо до квадрата суму $a + b$:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = $$
$$= a^2 + 2ab + b^2.$$

Отже,

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Утворену тотожність називають ***формулою квадрата суми.*** Ця тотожність дає змогу підносити до квадрата суму двох довільних виразів не за правилом множення многочленів, а *скорочено*: зразу записувати квадрат $(a+b)^2$ у вигляді $a^2 + 2ab + b^2$. Отримана формула квадрата суми є ***формулою скороченого множення.*** Читають формулу квадрата суми так:

квадрат суми двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, плюс подвоєний добуток першого і другого виразів, плюс квадрат другого виразу.

Приклад 1. Подайте у вигляді многочлена $(3x+5y)^2$.

Р о з в' я з а н н я.

$(3x+5y)^2 = (3x)^2 + 2\cdot 3x \cdot 5y + (5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2.$

Проміжні перетворення бажано виконувати усно, відразу записуючи відповідь:

$$(3x+5y)^2 = 9x^2 + 30xy + 25y^2.$$

Піднесемо тепер до квадрата різницю $a - b$. Маємо: $(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Отже,

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Маємо ***формулу квадрата різниці,*** яка теж належить до формул скороченого множення. Читають формулу квадрата різниці так:

квадрат різниці двох виразів дорівнює квадрату першого виразу, мінус подвоєний добуток першого і другого виразів, плюс квадрат другого виразу.

Зауважимо, що формулу квадрата різниці можна дістати, якщо подати різницю $a - b$ у вигляді суми $a + (-b)$:

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a\cdot(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Приклад 2. Піднести до квадрата вираз $4a - 7b$.

Р о з в' я з а н н я. $(4a-7b)^2 = 16a^2 - 56ab + 49b^2$.

Оскільки квадрати протилежних чисел дорівнюють один одному: $x^2 = (-x)^2$, то при піднесенні до квадрата виразів $-a-b$ і $-a+b$ можна користуватися формулами:

$$(-a-b)^2 = (-(a+b))^2 = (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(-a+b)^2 = (-(a-b))^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Приклад 3. Перетворити у многочлен:

1) $(-x-6m)^2$; 2) $(-2p^2+9q)^2$.

Р о з в' я з а н н я.

1) $(-x-6m)^2 = (-(x+6m))^2 = (x+6m)^2 = x^2 + 12xm + 36m^2$;

2) $(-2p^2+9q)^2 = (-(2p^2-9q))^2 = (2p^2-9q)^2 = 4p^4 - 36p^2q + 81q^2$.

Приклад 4. Спростити вираз: $(-5m^3-2n^2)^2 + (2m^3-5n^2)^2$.

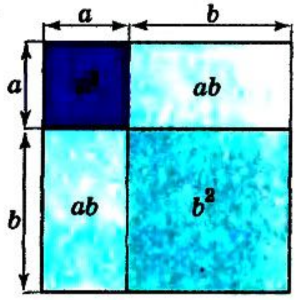
Р о з в' я з а н н я. $(-5m^3-2n^2)^2 + (2m^3-5n^2)^2 = (5m^3+2n^2)^2 +$
$+4m^6 - 20m^3n^2 + 25n^4 = \underline{25m^6} + \underline{\underline{20m^3n^2}} + \underline{\underline{\underline{4n^4}}} + \underline{4m^6} - \underline{\underline{20m^3n^2}} +$
$+\underline{\underline{\underline{25n^4}}} = 29m^6 + 29n^4$.

Історичні відомості

Деякі правила скороченого множення були відомі стародавнім китайським і грецьким математикам ще близько 4 тис. років тому. Тоді вони формулювали ці правила не за допомогою букв, а словами, і доводили геометрично (тільки для додатних чисел).

Наприклад, тотожність $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ у другій книзі «Начал» *Евкліда* (III ст. до н. д.) формулювалася так: «Якщо пряма лінія (мається на увазі відрізок) як-небудь розсічена, то квадрат на всій прямій дорівнює квадратам на відрізках разом із двічі узятим прямокутником, що міститься між відрізками». Тут «квадрат на всій прямій» слід розуміти як $(a+b)^2$, «квадрати на відрізках» як a^2 і b^2, «прямокутник, що міститься між відрізками», як ab.

Геометричний зміст тотожності наведено на малюнку 4.



Мал. 4

Запишіть і прочитайте формулу квадрата суми. • Запишіть і прочитайте формулу квадрата різниці. • Як подати у вигляді многочленів вирази $(-a-b)^2$ і $(-a+b)^2$?

537①. (Усно.) Які з виразів є квадратом суми двох виразів, а які — квадратом різниці:

1) a^2+b^2; 2) $(m-n)^2$; 3) a^2-b^2; 4) $(c+5)$;
5) $(a+2)^2$; 6) $(a-5)^3$; 7) $(2-p)^2$; 8) $(t+m)^2$?

538①. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(a+c)^2$; 2) $(m-x)^2$; 3) $(b+t)^2$; 4) $(p-y)^2$.

539②. Піднесіть до квадрата:

1) $(x-5)^2$; 2) $(a+3)^2$; 3) $(10-m)^2$;
4) $(7+y)^2$; 5) $(c-0{,}2)^2$; 6) $(0{,}8+x)^2$.

540②. Перетворіть у многочлен:

1) $(2x+5)^2$; 2) $(7b-4)^2$; 3) $(10x+3y)^2$;
4) $(9a-4b)^2$; 5) $\left(\frac{1}{3}x+3y\right)^2$; 6) $(5m-0{,}2t)^2$.

541②. Спростіть:

1) $(3a+1)^2-1$; 2) $12ab+(2a-3b)^2$;
3) $(4a+8)^2-16(a^2+4)$; 4) $(5x-2y)^2-(25x^2+4y^2)$.

542③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+3)^2-x^2=12$; 2) $(y-2)^2-y^2=-2y$.

543③. Користуючись формулою квадрата суми або квадрата різниці, обчисліть:

1) $(100+2)^2$; 2) 41^2; 3) 99^2; 4) $3{,}8^2$.

544①. Піднесіть до квадрата:

1) $(m-n)^2$; 2) $(x+b)^2$; 3) $(p-c)^2$; 4) $(a+d)^2$.

545②. Перетворіть у многочлен:

1) $(a-3)^2$; 2) $(x+9)^2$; 3) $(c+0{,}3)^2$;
4) $(2a-5)^2$; 5) $(4y+3)^2$; 6) $(9a-8b)^2$;
7) $(4b+7a)^2$; 8) $\left(\frac{1}{2}m-2n\right)^2$; 9) $(0{,}5p+2q)^2$.

546②. Спростіть:

1) $20a+(a-10)^2$; 2) $(3m+5)^2-9m^2$;
3) $(x+4)^2-8(x+2)$; 4) $(2a-7b)^2-(4a^2+49b^2)$.

547②. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)^2 - x^2 = 24$; 2) $(y+5)^2 - y^2 = 5y$.

548③. Обчисліть, використовуючи формули квадрата суми або квадрата різниці:

1) $(40-1)^2$; 2) 89^2; 3) 501^2; 4) $4{,}02^2$.

Урок 42

549①. (Усно.) Які з рівностей правильні:

1) $(a-2)^2 = a^2 - 2^2$;

2) $(b+3)^2 = b^2 + 2 \cdot b \cdot 3 + 3^2$;

3) $(m+5)^2 = m^2 + m \cdot 5 + 5^2$; 4) $(7-p)^2 = 7^2 - 2 \cdot 7 \cdot p + p^2$?

550②. (Усно.) Подайте вираз у вигляді многочлена:

1) $(a+4)^2$; 2) $(x-3)^2$; 3) $(b+2)^2$; 4) $(m-5n)^2$.

551②. Заповніть таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Квадрат суми виразів I і II	Квадрат різниці виразів I і II
$2x$	b	$4x^2 + 4xb + b^2$	$4x^2 - 4xb + b^2$
$2x$	$7b$		
$3x$	$\frac{1}{3}b$		
$0{,}5x$	$4b$		
$\frac{1}{2}x$	$8b$		

552③. З виразів $(x-y)^2$, $(x+y)^2$, $(-y+x)^2$, $(-x-y)^2$ виберіть тотожно рівні виразу:

1) $(y+x)^2$; 2) $(y-x)^2$.

553③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(-p+5)^2$; 2) $(-a-7)^2$; 3) $(-p-2m)^2$; 4) $(-3b+c)^2$.

554③. Перетворіть у многочлен:

1) $(-9b+4m)^2$; 2) $(-7a-10b)^2$; 3) $(-0{,}5m-0{,}4p)^2$;

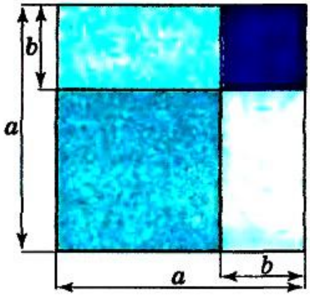
4) $\left(-1\frac{1}{2}x+6y\right)^2$; 5) $(0{,}04p-50q)^2$; 6) $(-0{,}25c-0{,}2d)^2$.

555③. Спростіть:

1) $(3a-4b)^2 - (3a+4b)^2$; 2) $(2a-3b)^2 + (a-6b)^2$;

3) $a(2a-1)^2 - 4a(a+5)^2$; 4) $12m^2 - 3(2m-n)^2 - 12mn$.

556④. Користуючись малюнком 5, поясніть геометричний зміст формули $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ для $a > 0$, $b > 0$, $a > b$.



Мал. 5

557①. Які з рівностей правильні:

1) $(m-3)^2 = m^2 - 2\cdot m\cdot 3 + 3^2$;

2) $(p+7)^2 = p^2 + 7^2$;

3) $(2-a)^2 = 2^2 - 2\cdot a + a^2$;

4) $(b+3)^2 = b^2 + 2\cdot b\cdot 3 + 3^2$?

558②. Заповніть таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Квадрат суми виразів I і II	Квадрат різниці виразів I і II
$3m$	a	$9m^2+6ma+a^2$	$9m^2-6ma+a^2$
$5m$	$2a$		
$\frac{1}{4}m$	$4a$		
$0{,}6m$	$5a$		
$\frac{1}{3}m$	$9a$		

559③. Перетворіть у многочлен:

1) $(-a+3)^2$; 2) $(-b-5)^2$; 3) $(-4m+p)^2$; 4) $(-a-3b)^2$.

560③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(-3a+5x)^2$; 2) $(-8x-5y)^2$; 3) $(-4b-0{,}5y)^2$;

4) $(8x+\frac{1}{16}y)^2$; 5) $(-0{,}02a-10b)^2$; 6) $(-0{,}15m+0{,}1n)^2$.

561③. Спростіть:

1) $(7a+9b)^2-(7a-9b)^2$; 2) $(10a-3b)^2+(6a+5b)^2$;

3) $a(9a-1)^2-81a(a-2)^2$; 4) $18x^2-2(3x-y)^2-12xy$.

Урок 43

562②. Спростіть:

1) $(a-2)^2+a(a+4)$; 2) $(b-3)^2+(b+1)(b+2)$.

563③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(a^2-9)^2$; 2) $(7-y^3)^2$; 3) $(2a+c^4)^2$;

4) $(-5a+b^3)^2$; 5) $(4a^2-5m^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{3}p^4+9q^3\right)^2$.

564③. Піднесіть до квадрата:

1) $(a^2+2a)^2$; 2) $\left(\frac{1}{4}m^3-12m\right)^2$; 3) $\left(1\frac{1}{3}p^7+3p^2\right)^2$;

4) $(7ab-2b^3)^2$; 5) $\left(10p^6+\frac{1}{2}p^4a^3\right)^2$; 6) $(0{,}2m^2n+15m^3n^4)^2$.

565③. Який одночлен треба записати замість *, щоб утворилася тотожність:

1) $(*+2a)^2=b^2+4ab+4a^2$; 2) $(2b-*)^2=4b^2+9-12b$;

3) $(3a^4+*)^2=*+30a^4+25$; 4) $(5x^2-*)^2=25x^4-*+9m^2$?

566③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(x-2)(x+1)^2$; 2) $(x+1)(x-5)^2$.

567③. Доведіть тотожність:

1) $(a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$; 2) $(m+n)^2-2mn=m^2+n^2$.

568③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x-4)^2-(3x+2)^2=-24$; 2) $(2x-3)^2+(1-x)(9+4x)=18$.

569④. Спростіть вираз:

$$((((a+b)^2-2ab)^2-2a^2b^2)^2-2a^4b^4)^2-2a^8b^8.$$

570④. Доведіть формулу:

1) куба суми: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

2) куба різниці: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

Р о з в' я з а н н я:

1) $(a+b)^3=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+a^2b+$
$+2a^2b+2ab^2+b^2a+b^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

571④. Піднесіть до куба: 1) $(a+2)^3$; 2) $(2b-1)^3$.

572②. Спростіть вираз:

1) $(m-5)^2-m(m-10)$; 2) $(x+4)^2+(x+1)(x-9)$.

573③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(b^7-5)^2$; 2) $(a^3+2b^4)^2$; 3) $\left(8x^6-\frac{1}{4}x^2\right)^2$;

4) $\left(6m^3+1\frac{1}{6}m^5\right)^2$; 5) $(7a^2+8ap^3)^2$; 6) $\left(\frac{1}{2}b^2m^3-\frac{1}{3}b^3m^2\right)^2$.

574③. Замініть * одночленами так, щоб дістати тотожність:

1) $(*-7)^2=x^2-14x+49$; 2) $(4p^3+*)^2=*+9+24p^3$.

575③. Доведіть тотожність:

1) $(a-b)^2-(a+b)^2=-4ab$; 2) $(x-y)^2+2xy=x^2+y^2$.

576③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x(x-2)-(x+5)^2=-1$;

2) $(2y-7)^2+(5-4y)(y-7)=3(y-6)$.

577④. Піднесіть до куба: 1) $(x-2)^3$; 2) $(2m+1)^3$.

578③. Знайдіть значення виразу: $\left(5{,}4:\frac{9}{35}-11\frac{2}{9}\right)\cdot 2{,}25-4\frac{2}{7}$.

579④. Який двочлен треба додати до многочлена $3x^2+2y^2-7xy+2$, щоб дістати многочлен:

1) який не містить змінної x;

2) який не містить змінної y?

580③. Знайдіть три послідовних парних натуральних числа, якщо добуток двох більших з них на 104 більший від добутку двох менших.

581④. Доведіть, що значення виразу:

1) $8^{10}-8^9+8^8$ кратне 152; 2) $15^4-10^4-5^4$ кратне 80.

§ 17. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ ЗА ДОПОМОГОЮ ФОРМУЛ КВАДРАТА СУМИ І КВАДРАТА РІЗНИЦІ

Урок 44

Формули квадрата суми і квадрата різниці дають змогу не тільки спрощувати піднесення до квадрата суми та різниці, а й розкладати на множники вирази виду $a^2+2ab+b^2$ і $a^2-2ab+b^2$.

Запишемо формули квадрата суми і квадрата різниці двох виразів, помінявши місцями в цих формулах ліву і праву частини. Маємо:

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2;$$
$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2.$$

Приклад 1. Розкласти на множники тричлен $4x^2+12x+9$.

Р о з в' я з а н н я. Доданок $4x^2$ є квадратом виразу $2x$, а число 9 — квадратом числа 3. Оскільки доданок $12x$ дорівнює подвоєному добутку $2x$ і 3, то тричлен $4x^2+12x+9$ можна подати у вигляді квадрата суми $2x$ і 3:

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2 .$$

Приклад 2. Знайти значення виразу $x^2 + 25y^4 - 10xy^2$, якщо $x = 44$, $y = -3$.

Р о з в' я з а н н я. $x^2 + 25y^4 - 10xy^2 = x^2 - 10xy^2 + 25y^4 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 5y^2 + (5y^2)^2 = (x - 5y^2)^2$.

Якщо $x = 44$, $y = -3$, то $(x - 5y^2)^2 = (44 - 5 \cdot (-3)^2)^2 = (44 - 45)^2 = (-1)^2 = 1$.

Приклад 3. Подати тричлен $-16a^2 + 8ab - b^2$ у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена.

Р о з в' я з а н н я. Винесемо за дужки -1, а далі виконаємо відомі за попередніми прикладами перетворення:

$$-16a^2 + 8ab - b^2 = -(16a^2 - 8ab + b^2) = -((4a)^2 - 2 \cdot 4a \cdot b + b^2) = -(4a - b)^2 .$$

? Наведіть приклад тричлена, який можна подати у вигляді квадрата суми, квадрата різниці.

582①. (Усно.) Розкладіть на множники:

1) $m^2 + 2mn + n^2$; 2) $p^2 - 2pq + q^2$; 3) $a^2 + 2 \cdot a \cdot 3 + 3^2$.

583①. Подайте у вигляді квадрата двочлена:

1) $c^2 - 2cd + d^2$; 2) $x^2 + 2xy + y^2$; 3) $m^2 - 2 \cdot m \cdot 5 + 5^2$.

584②. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 6a + 9$; 2) $64 + 16b + b^2$; 3) $0{,}01m^2 + 0{,}2m + 1$;

4) $\frac{1}{25} - \frac{2}{5}p + p^2$; 5) $4m^2 - 12m + 9$; 6) $9c^2 + 24cd + 16d^2$.

585②. Обчисліть значення виразу:

1) $a^2 - 1a + 1$, якщо $a = 91$; -19;

2) $4m^2 + 28m + 49$, якщо $m = -3{,}5$; 0;

3) $16x^2 - 40xy + 25y^2$, якщо $x = 5$, $y = 4$.

586③. Перетворіть тричлен у квадрат двочлена:

1) $\frac{1}{4}m^2 + 4n^2 + 2mn$; 2) $-10mn + 0{,}25m^2 + 100n^2$;

3) $9p^2 + pq + \frac{1}{36}q^2$; 4) $m^6 + 4n^2 - 4m^3n$;

5) $25m^{12} + p^{6} - 10m^6p^3$; 6) $\frac{9}{64}c^6 - 3dc^5 + 16d^2c^4$.

587③. Запишіть замість * одночлен, щоб утворений тричлен можна було перетворити у квадрат двочлена:

1) $* - 2mn + n^2$; 2) $25a^2 + 20a + *$;

3) $64m^2 + * + 49b^2$; 4) $* - 12bm^3 + 9b^2$;

5) $p^2 - 0{,}8p^7 + *$; 6) $* + a^2b^3 + \frac{1}{4}a^4$.

588③. Розкладіть на множники вираз:

1) $(x-2)^2 + 2(x-2) + 1$; 2) $(a^2 + 6a + 9) + 2(a+3) + 1$.

589①. Розкладіть на множники:

1) $t^2 + 2tp + p^2$; 2) $a^2 - 2ax + x^2$; 3) $b^2 + 2 \cdot b \cdot 7 + 7^2$.

590②. Подайте у вигляді квадрата двочлена:

1) $a^2 + 4a + 4$; 2) $9m^2 - 6m + 1$; 3) $b^2 - 0{,}12b + 0{,}36$;

4) $\frac{1}{49}m^2 - \frac{2}{7}m + 1$; 5) $81a^2 + 18ab + b^2$; 6) $25m^2 - 60mn + 36n^2$.

591②. Знайдіть значення виразу:

1) $a^2 + 10a + 25$, якщо $a = -15;\ 95$;

2) $0{,}01x^2 + 0{,}8x + 16$, якщо $x = 10;\ -40$;

3) $4m^2 + 28mn + 49n^2$, якщо $m = -3$, $n = -\frac{1}{7}$.

592③. Розкладіть на множники:

1) $\frac{1}{9}a^4 + 9b^2 + 2a^2b$; 2) $-6{,}4a^2y^4 + 0{,}16a^4 + 64y^8$;

3) $16m^{20} + n^{12} - 8m^{10}n^6$; 4) $6a^4b^2 + a^6 + 9a^2b^4$.

593③. Запишіть замість * одночлен, щоб утворений тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена:

1) $* - 28x + 49$; 2) $64a^2 - 16a + *$;

3) $25a^2 + * + \frac{1}{25}b^6$; 4) $0{,}01a^8 + 100b^6 + *$.

Урок 45

594②. Обчисліть зручним способом:

1) $36^2 + 2 \cdot 36 \cdot 14 + 14^2$;

2) $117^2 - 2 \cdot 117 \cdot 17 + 17^2$.

595③. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена:

1) $-1 + 4x - 4x^2$; 2) $-40a + 25a^2 + 16$;

3) $24xy - 9x^2 - 16y^2$; 4) $-140x^3y + 100x^6 + 49y^2$;

5) $4pq - 25p^2 - 0{,}16q^2$; 6) $-0{,}64m^6 - 1{,}6m^3n^2 - n^4$.

596③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 10x + 25 = 0$; 2) $64y^2 + 16y + 1 = 0$;

3) $9x^2 + 1 = -6x$; 4) $16y^2 = 56y - 49$.

597③. Доведіть, що для будь-якого значення x виконується нерівність:

1) $x^2 + 2 > 0$; 2) $x^2 - 6x + 9 \ge 0$.

598④. Порівняйте з нулем значення виразу:

1) $x^2 - 4x + 4$; 2) $-x^2 + 2x - 1$.

599④. Доведіть, що вираз $x^2 + 4x + 5$ набуває лише додатних значень при всіх значеннях змінної x. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x?

600④. Замініть * одночленами так, щоб отриманий тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена (виконайте завдання трьома різними способами):

1) $* - 48xy + *$; 2) $* + 20ab + *$.

601④. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо:

1) $x^2 - 3x + 9$; 2) $49a^2 - 140ab + 100b^2$;

3) $4a^2 - 9b^2 - 12ab$; 4) $16y^2 + 8y - 1$;

5) $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{40}xy + \frac{1}{25}y^2$; 6) $-xy + \frac{1}{16}y^2 + 4x^2$.

602②. Обчисліть зручним способом:

1) $87^2 + 2 \cdot 87 \cdot 13 + 13^2$; 2) $137^2 - 2 \cdot 137 \cdot 47 + 47^2$.

603③. Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена або у вигляді виразу, протилежного квадрату двочлена:

1) $-9 - 30x - 25x^2$; 2) $-36b + 81b^2 + 4$;

3) $42xy - 49x^2 - 9x^2$; 4) $-0{,}36a^4 - 25b^6 + 6a^2b^3$.

604③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 + 16x + 64 = 0$; 2) $36x^2 - 12x + 1 = 0$;

3) $4x^2 + 9 = -12x$; 4) $x^2 = 0{,}4x - 0{,}04$.

605④. Поставте замість ... один із знаків $\ge$ або $\le$ так, щоб утворена нерівність була правильною при будь-якому значенні x:

1) $x^2 + 4x + 4 \ldots 0$; 2) $-x^2 + 30x - 225 \ldots 0$;

3) $-x^2 - 8x - 16 \ldots 0$; 4) $36 - 12x + x^2 \ldots 0$.

606④. Доведіть, що вираз $x^2+6x+11$ набуває лише додатних значень при всіх значеннях змінної x. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x?

607④. Спростіть вираз:

1) $(a-2)(a+5)-(a+2)(a-5)$;

2) $(5p-2q)(3p+5q)-(2{,}5p-3q)(4p+8q)$.

608②. При яких значеннях x:

1) квадрат двочлена $x+2$ на 225 більший за квадрат двочлена $x-3$;

2) квадрат двочлена $2x-6$ у 4 рази більший за квадрат двочлена $x+3$?

609④. Сергій мав грошей утричі більше, ніж Петро. Після того, як Сергій дав Петру 2 грн., гроші Петра становили $\frac{5}{7}$ грошей Сергія. Скільки грошей мав кожен хлопець спочатку?

§ 18. МНОЖЕННЯ РІЗНИЦІ ДВОХ ВИРАЗІВ НА ЇХ СУМУ

Урок 46

Розглянемо ще одну формулу скороченого множення. Помножимо різницю $a-b$ на суму $a+b$:

$$(a-b)(a+b)=a^2+ab-ba-b^2=a^2-b^2.$$

Отже,

$$(a-b)(a+b)=a^2-b^2.$$

Цю тотожність читають так:

добуток різниці двох виразів і їх суми дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Приклад 1. Виконати множення: 1) $(2m-3p)(2m+3p)$; 2) $(4a^2+b^3)(b^3-4a^2)$.

Розв'язання. 1) $(2m-3p)(2m+3p)=(2m)^2-(3p)^2=4m^2-9p^2$, або скорочено: $(2m-3p)(2m+3p)=4m^2-9p^2$.

2) $(4a^2+b^3)(b^3-4a^2)=(b^3+4a^2)(b^3-4a^2)=(b^3)^2-(4a^2)^2=b^6-16a^4$.

Приклад 2. Подати у вигляді многочлена добуток $(-5m-7a)(5m-7a)$.

Розв'язання. І *спосіб.* Винесемо у виразі $-5m-7a$ за дужки -1. Маємо:

$(-5m-7a)(5m-7a) = -1\cdot(5m+7a)(5m-7a) =$
$= -((5m)^2-(7a)^2) = -(25m^2-49a^2) = -25m^2+49a^2 = 49a^2-25m^2$.

II *спосіб.* $(-5m-7a)(5m-7a) = (-7a-5m)(-7a+5m) = (-7a)^2 - (5m)^2 = 49a^2-25m^2$.

Приклад 3. Обчислити зручним способом $4{,}3\cdot 3{,}7$.

Розв'язання.

$4{,}3\cdot 3{,}7 = (4+0{,}3)(4-0{,}3) = 4^2-0{,}3^2 = 16-0{,}09 = 15{,}91$.

Чому дорівнює добуток різниці двох виразів і їх суми? Запишіть відповідну формулу.

610①. (Усно.) Які з рівностей є тотожностями:

1) $(a-m)(a+m) = a^2-m^2$; 2) $(c+p)(c-p) = c^2+p^2$;

3) $(b-x)(b+x) = (b-x)^2$; 4) $(d+n)(d-n) = d^2-n^2$?

611①. Закінчіть розв'язування:

1) $(a-5)(a+5) = a^2-5^2 = \ldots$; 2) $(m+7)(m-7) = m^2-7^2 = \ldots$.

612①. Виконайте множення многочленів:

1) $(x-y)(x+y)$; 2) $(p+q)(p-q)$.

613②. Виконайте множення:

1) $(p-9)(p+9)$; 2) $(5+x)(5-x)$;

3) $(3-c)(3+c)$; 4) $(y+7)(y-7)$.

614②. Подайте у вигляді многочлена добуток:

1) $(2x-3)(2x+3)$; 2) $(3p+8)(3p-8)$; 3) $(4+5a)(5a-4)$;

4) $(3m-4p)(4p+3m)$; 5) $(7a+10b)(10b-7a)$;

6) $\left(\frac{1}{4}p-\frac{1}{7}q\right)\left(\frac{1}{7}q+\frac{1}{4}p\right)$.

615②. Заповніть у зошиті таблицю за зразком:

Вираз I	Вираз II	Добуток різниці виразів I і II на їх суму	Різниця квадратів виразів I і II
$3a$	b	$(3a-b)(3a+b)$	$9a^2-b^2$
$5m$	$2n$		
$\frac{1}{2}x$	$3y$		
$0{,}1p$	$0{,}7q$		
$\frac{1}{7}c$	$\frac{1}{3}d$		

616②. Спростіть вираз:

1) $(5m-3)(5m+3)-25m^2$; 2) $(3a+4)(3a-4)+16$.

617③. Обчисліть зручним способом:

1) $(45-1)(45+1)$; 2) $81\cdot79$; 3) $1002\cdot998$; 4) $1{,}03\cdot0{,}97$.

618③. Подайте у вигляді многочлена добуток:

1) $(p^2+3q)(3q-p^2)$; 2) $(2a-m^3)(m^3+2a)$;

3) $(5a-b^2)(b^2+5a)$; 4) $(0{,}7m+n^2)(0{,}7m-n^2)$;

5) $(4t^2-p^4)(4t^2+p^4)$; 6) $(3a^3-4b^4)(4b^4+3a^3)$.

619①. Виконайте множення многочленів:

1) $(m+n)(m-n)$; 2) $(c-d)(c+d)$.

620②. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(m-2)(m+2)$; 2) $(7+a)(7-a)$;

3) $(4-x)(4+x)$; 4) $(b+11)(b-11)$.

621②. Виконайте множення:

1) $(p-2m)(p+2m)$; 2) $(2p+7)(2p-7)$;

3) $(2c+5)(5-2c)$; 4) $(8a-3x)(3x+8a)$;

5) $(0{,}1p+0{,}3q)(0{,}3q-0{,}1p)$; 6) $\left(\frac{2}{7}a-\frac{3}{5}b\right)\left(\frac{2}{7}a+\frac{3}{5}b\right)$.

622②. Спростіть вираз:

1) $(8x-5)(8x+5)+25$; 2) $(5-3m)(5+3m)+9m^2$;

3) $(2b-3)(3+2b)-4b^2$; 4) $(4a+7)(7-4a)-49$.

623③. Знайдіть значення виразу зручним способом:

1) $(80+2)(80-2)$; 2) $39\cdot41$; 3) $108\cdot92$; 4) $12{,}3\cdot11{,}7$.

Урок 47

624②. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x=(2x-3)(2x+3)-4x^2$;

2) $(8-3x)(8+3x)+9x^2=4x$.

625③. Виконайте множення:

1) $(1{,}7a-1{,}4p^3)(1{,}4p^3+1{,}7a)$; 2) $\left(3a^2-\frac{1}{4}b^3\right)\left(\frac{1}{4}b^3+3a^2\right)$;

3) $\left(5m^2n+\frac{1}{7}p^3\right)\left(\frac{1}{7}p^3-5m^2n\right)$; 4) $\left(\frac{2}{3}a^7+1{,}2y^8\right)\left(1{,}2y^8-\frac{2}{3}a^7\right)$.

626③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(-a^2+7)(7+a^2)$; 2) $(-p^2-q^7)(p^2+q^7)$;

3) $(-8m-5p)(-8m+5p)$; 4) $(-2a^3-3b)(-3b+2a^3)$.

627③. Спростіть вираз:

1) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$; 2) $(2a+x)(4a^2+x^2)(2a-$,

3) $(c^3+d^2)(c^3-d^2)(c^6+d^4)$;

4) $(-x-y)(x-y)(x^2+y^2)(x^4+y^4)$.

628③. Запишіть замість * такі одночлени, щоб утворилася тотожність:

1) $(2a+*)(2a-*)=4a^2-49b^2$;

2) $(*-9p)(*+9p)=0{,}25m^4-81p^2$;

3) $100a^8-9b^6=(10a^4-*)(*+10a^4)$;

4) $(4x-3y)(*+*)=16x^2-9y^2$.

629③. Знайдіть корені рівняння:

1) $8x(1+2x)-(4x+1)(4x-1)=17$;

2) $x-12x(1-3x)=14-(5-6x)(6x+5)$;

3) $(4x+1)(4x-1)+(2x-3)^2=5x(4x-11)$.

630③. Спростіть:

1) $(a+3)^2-(a+3)(a-3)$; 2) $(8x-3y)(8x+3y)-(3x-8y)^2$;

3) $(b-3)^2(b+3)^2$; 4) $(a+5)^2(5-a)^2$.

631④. Доведіть, що квадрат будь-якого цілого числа на одиницю більший за добуток попереднього і наступного чисел.

632④. Виконайте множення, скориставшися формулами скороченого множення:

1) $((x+y)+1)((x+y)-1)$; 2) $(a+b+c)(a-(b+c))$;

3) $(m+n+2p)(m+n-2p)$; 4) $(x-y-2)(x+y+2)$.

633②. Знайдіть корені рівняння:

1) $8x=(5x-4)(5x+4)-25x^2$;

2) $(9-4x)(9+4x)+16x^2=3x$.

634③. Виконайте множення многочленів:

1) $(5a+b^2)(b^2-5a)$; 2) $(4a^3-d^2)(d^2+4a^3)$;

3) $(0{,}7p-m^7)(m^7+0{,}7p)$; 4) $\left(\frac{1}{5}m^2+3b^7\right)\left(3b^7-\frac{1}{5}m^2\right)$;

5) $(0{,}2a^2b-0{,}3ab^2)(0{,}2a^2b+0{,}3ab^2)$;

6) $\left(1{,}2p^7-\frac{2}{3}a^8\right)\left(\frac{2}{3}a^8+1{,}2p^7\right)$.

635③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(-a^7+b^5)(a^7+b^5)$; 2) $(-0{,}1m^3-p^4)(0{,}1m^3-p^4)$;

3) $(3x-2p)(3x+2p)(9x^2+4p^2)$;

4) $(-a^2-5b^3)(a^2-5b^3)(a^4+25b^6)$.

636③. Розв'яжіть рівняння:

1) $5x(4x-1)-(6x-1)(6x+1)=(4x+3)(3-4x)$;

2) $(3x-4)(3x+4)-(5x-2)(5x+2)=2x(1-8x)$;

3) $(5x-4)^2-(3x-2)(3x+2)=2x(8x-5)$.

637③. Спростіть вираз:

1) $(m-2)^2-(m-3)(m+3)$; 2) $(9x-2y)(9x+2y)-(5x-2y)^2$;

3) $(a+6)^2(a-6)^2$; 4) $(m+2)^2(2-m)^2$.

638③. Обчисліть значення виразу:

$$2{,}7\cdot\left(8\frac{7}{12}-2\frac{17}{36}\right)-4\frac{1}{3}:0{,}65.$$

639④. Доведіть, що значення виразу $(9n-7)-(4n-3)$ при діленні на 5 дає в остачі 1 при будь-якому натуральному значенні n.

640④. Щоб виконати замовлення за певний термін, робітник мав виготовляти 15 деталей щогодини. Але він щогодини виготовляв на 3 деталі більше. Тому вже за 2 год до терміну, робітникові залишилося виготовити 12 деталей. Яким було замовлення і за скільки годин його повинен був виконати робітник?

Урок 48 Резервний час.

§ 19. РОЗКЛАДАННЯ НА МНОЖНИКИ РІЗНИЦІ КВАДРАТІВ ДВОХ ВИРАЗІВ

Урок 49 У тотожності $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ поміняємо місцями ліву і праву частини. Маємо:

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

Цю тотожність називають ***формулою різниці квадратів*** двох виразів. Читають її так:

різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і їх суми.

Формулу різниці квадратів двох виразів застосовують для розкладання на множники двочлена $a^2 - b^2$. Цю формулу можна використовувати для розкладання на множники різниці квадратів будь-яких двох виразів.

Приклад 1. Розкласти на множники вираз: 1) $16 - x^2$; 2) $49m^4 - 64p^8$.

Р о з в' я з а н н я. 1) Оскільки $16 = 4^2$, то

$$16 - x^2 = 4^2 - x^2 = (4 - x)(4 + x).$$

2) Даний многочлен можна подати у вигляді різниці квадратів двох виразів. Дістанемо:

$$49m^4 - 64p^8 = (7m^2)^2 - (8p^4)^2 = (7m^2 - 8p^4)(7m^2 + 8p^4).$$

Приклад 2. Обчислити $105^2 - 95^2$.

Р о з в' я з а н н я. $105^2 - 95^2 = (105 - 95)(105 + 95) = 10 \cdot 200 = 2000$.

Приклад 3. Розв'язати рівняння $x^2 - 25 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. $x^2 - 25 = 0$; $x^2 - 5^2 = 0$; $(x - 5)(x + 5) = 0$. $x - 5 = 0$ або $x + 5 = 0$; $x = 5$ або $x = -5$.

? Запишіть і прочитайте формулу різниці квадратів двох виразів.

641[1]. (Усно.) Які з рівностей є тотожностями:

1) $a^2 - b^2 = (a - b)(a - b)$; 2) $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$;

3) $p^2 - q^2 = (p + q)(p + q)$; 4) $3^2 - x^2 = (3 - x)(3 + x)$?

642[1]. Доберіть замість ... множник так, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $x^2 - 1 = (x - 1)(...)$; 2) $4 - p^2 = (...)(2 + p)$.

643[2]. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці і суми:

1) $a^2 - 25$; 2) $16 - p^2$; 3) $100 - d^2$;

4) $0{,}09 - m^2$; 5) $\frac{4}{9} - b^2$; 6) $\frac{25}{36} - c^2$.

644[2]. Розкладіть на множники:

1) $36a^2 - b^2$; 2) $-a^2 + b^2$; 3) $49x^2 - 64$;

4) $9m^2 - 16n^2$; 5) $-100m^2 + 121v^2$; 6) $25 - a^2b^2$;

7) $16m^2a^2 - 1$; 8) $p^2 - c^2d^2$; 9) $81p^2m^2 - n^2$.

645②. Обчисліть:

1) $67^2 - 57^2$; 2) $43^2 - 53^2$; 3) $112^2 - 88^2$;

4) $21{,}5^2 - 21{,}4^2$; 5) $0{,}725^2 - 0{,}275^2$; 6) $\left(5\frac{2}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{3}\right)^2$.

646②. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 16 = 0$; 2) $\frac{1}{9} - x^2 = 0$;

3) $y^2 - 0{,}25 = 0$; 4) $4x^2 - 9 = 0$.

647③. Розкладіть на множники:

1) $c^4 - m^6$; 2) $p^8 - a^{10}$; 3) $a^6 - 9m^4$;

4) $100a^6 - 25x^8$; 5) $0{,}49 - m^4p^{12}$; 6) $36x^2c^{14} - 0{,}16d^4$;

7) $\frac{25}{49}a^8 - \frac{36}{49}b^6c^2$; 8) $-0{,}01m^2 + 0{,}81x^6y^8$;

9) $-1\frac{11}{25}p^{16}q^{18} + 1\frac{7}{9}t^{20}a^{24}$.

648①. Доберіть другий множник так, щоб рівність перетворилася на тотожність:

1) $m^2 - 1 = (...)(m + 1)$; 2) $9 - b^2 = (3 - b)(...)$.

649②. Подайте многочлен у вигляді добутку різниці й суми:

1) $a^2 - 64$; 2) $0{,}25 - b^2$; 3) $-81 + 36x^2$;

4) $169p^2 - q^2$; 5) $400a^2 - 25m^2$; 6) $49a^2b^2 - 16$;

7) $900 - a^2b^2$; 8) $c^2d^2 - 4m^2$; 9) $100a^2b^2 - 0{,}16m^2$.

650②. Обчисліть:

1) $43^2 - 33^2$; 2) $27^2 - 37^2$; 3) $0{,}97^2 - 0{,}03^2$.

651②. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^2 - 36 = 0$; 2) $y^2 - \frac{1}{16} = 0$;

3) $0{,}49 - x^2 = 0$; 4) $64y^2 - 49 = 0$.

652③. Розкладіть на множники:

1) $a^8 - 16m^6$; 2) $36c^6 - 49a^{10}$; 3) $0{,}25 - m^{12}a^2$;

4) $-121p^8c^4 + 4a^2$; 5) $-\frac{25}{36}a^2b^4 + \frac{36}{49}c^6$; 6) $2\frac{1}{4}a^2b^8 - 1\frac{9}{16}p^6c^{18}$.

Урок 50

653②. (Усно.) Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 4$; 2) $9 - b^2$;

3) $4x^2 - 25m^2$; 4) $x^2y^2 - 1$.

654③. Обчисліть значення виразу:

1) $\dfrac{100}{15^2-10^2}$; 2) $\dfrac{29^2-21^2}{80}$; 3) $\dfrac{47^2-23^2}{48^2-22^2}$.

655③. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(x+2)^2-1$; 2) $4-(y+3)^2$; 3) $(4m-5)^2-16$;

4) $625-(a-3)^2$; 5) $(2x-5)^2-49$; 6) $1-(2x+1)^2$.

656③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-1)^2-25=0$; 2) $(2x+5)^2-49=0$;

3) $(5x+3)^2=64$; 4) $(0{,}1x-0{,}5)^2=0{,}36$.

657③. Розкладіть на множники:

1) $16x^2-(1+3x)^2$; 2) $(3y-5)^2-16y^2$;

3) $49m^2-(a+3m)^2$; 4) $(5a-2b)^2-25a^2$.

658④. Подайте вираз у вигляді добутку:

1) $(-3m^2+4p)^2-9m^4$; 2) $a^6-(b-5a^3)^2$;

3) $(7x+2y)^2-(2x-7y)^2$; 4) $(a+b+c)^2-(a+b-c)^2$;

5) $a^2(a+1)^2-c^8$; 6) $(5a-b-1)^2-(5a+b-1)^2$.

659④. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x-4)^2-(5x-8)^2=0$; 2) $x^4-81=0$;

3) $16x^4-1=0$; 4) $81x^2+4=0$.

660④. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних цілих чисел дорівнює сумі цих чисел.

661②. Знайдіть значення виразу x^2-y^2, якщо

1) $x=55$, $y=45$; 2) $x=2{,}01$, $y=1{,}99$.

662③. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $(p+2)^2-9$; 2) $16-(m-3)^2$; 3) $(3x-2)^2-36$;

4) $x^2-(2x-1)^2$; 5) $(5a-3b)^2-9b^2$; 6) $(3x+4y)^2-100y^2$.

663③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x+2)^2-36=0$; 2) $(5x-4)^2-81=0$;

3) $(2x+7)^2=49$; 4) $(0{,}2x-0{,}5)^2=0{,}09$.

664③. Доведіть, що при будь-якому натуральному n значення виразу $(n+7)^2-n^2$ кратне 7.

665④. Розкладіть на множники:

1) $(5a^2-3b)^2-16a^4$; 2) $m^8-(3c-2m^4)^2$;

3) $(2a+3b)^2-(4a-5b)^2$; 4) $(x-y+t)^2-(x-y-t)^2$.

666③**.** Спростіть:

1) $(t+1)(t-7)-(t-1)(t+7)$;

2) $(a^3-2b)(a^2+2b)-(a^2-2b)(a^3+2b)$.

667③**.** Знайдіть корені рівняння:

1) $(2x+3)^2-(2x-5)^2=16$;

2) $2x(8x-5)-(4x+1)^2=37$.

668④**.** Обчисліть, використовуючи формулу куба двочлена:

1) $(100-1)^3$; 2) 41^3; 3) 29^3; 4) $0{,}99^3$.

§ 20. СУМА І РІЗНИЦЯ КУБІВ

Урок 51

Для розкладання на множники суми кубів двох виразів використовують тотожність:

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

яку називають ***формулою суми кубів***.

Доведемо цю тотожність, перемноживши вирази $a+b$ і a^2-ab+b^2. Маємо:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3-a^2b+ab^2+ba^2-ab^2+b^3=a^3+b^3.$$

У формулі суми кубів у правій частині множник a^2-ab+b^2 нагадує тричлен $a^2-2ab+b^2$, який дорівнює квадрату різниці a і b. У виразі a^2-ab+b^2 замість подвоєного добутку $2ab$ стоїть добуток ab. Тричлен a^2-ab+b^2 називають ***неповним квадратом різниці виразів*** a і b. Отже, формулу суми кубів читають так:

сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен x^3+64.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $64=4^3$, то даний многочлен можна подати у вигляді суми кубів двох виразів:

$x^3+64=x^3+4^3$.

Застосовуючи формулу суми кубів, маємо:

$x^3+4^3=(x+4)(x^2-4x+4^2)=(x+4)(x^2-4x+16)$.

Для розкладання на множники різниці кубів двох виразів використовують тотожність:

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

яку називають ***формулою різниці кубів.***

Доведемо цю тотожність:

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2+b^3=a^3-b^3.$

Тричлен a^2+ab+b^2 називають *неповним квадратом суми виразів* a і b. Формулу різниці кубів читають так:

різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен $27a^3-m^6$.

Р о з в' я з а н н я. Оскільки $27a^3=(3a)^3$ і $m^6=(m^2)^3$, то даний многочлен можна подати у вигляді різниці кубів двох виразів:

$$27a^3-m^6=(3a)^3-(m^2)^3.$$

Далі застосуємо формулу різниці кубів:

$(3a)^3-(m^2)^3=(3a-m^2)((3a)^2+3am^2+(m^2)^2)=$

$=(3a-m^2)(9a^2+3am^2+m^4).$

Помінявши місцями ліві і праві частини отриманих тотожностей, матимемо:

$$(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3,$$
$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3.$$

Ці тотожності дають змогу скорочено виконувати множення суми двох виразів на неповний квадрат їх різниці і різниці двох виразів на неповний квадрат їх суми:

добуток суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці дорівнює сумі кубів цих виразів;
добуток різниці двох виразів і неповного квадрата їх суми дорівнює різниці кубів цих виразів.

Приклад 3. Подати у вигляді многочлена $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$.

Р о з в' я з а н н я. $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=(x+2y)(x^2-$
$-x\cdot 2y+(2y)^2)=x^3+(2y)^3=x^3+8y^3.$

Приклад 4. Розв'язати рівняння
$(5x-1)(25x^2+5x+1)=125x^3-8x.$

Р о з в' я з а н н я.

$$(5x-1)((5x)^2+5x\cdot 1+1^2)=125x^3-8x;$$

$$(5x)^3 - 1^3 = 125x^3 - 8x;$$
$$125x^3 - 1 = 125x^3 - 8x;$$
$$125x^3 - 125x^3 + 8x = 1;$$
$$8x = 1; \quad x = 0,125.$$

В і д п о в і д ь. 0,125.

Запишіть і прочитайте формулу суми кубів. • Запишіть і прочитайте формулу різниці кубів. • Чому дорівнює добуток суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці? • Чому дорівнює добуток різниці двох виразів і неповного квадрата їх суми?

669①. (Усно.) Який вираз є неповним квадратом різниці виразів x і y, а який вираз є неповним квадратом суми виразів x і y:

1) $x^2 + xy + y^2$; 2) $x^2 - 2xy + y^2$;

3) $x^2 + 2xy + y^2$; 4) $x^2 - xy + y^2$?

670①. (Усно.) Які з рівностей є тотожностями:

1) $m^3 + n^3 = (m^2 + n^2)(m + n)$;

2) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;

3) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$;

4) $c^3 - d^3 = (c - d)(c^2 + 2cd + d^2)$?

671②. Розкладіть на множники:

1) $m^3 - p^3$; 2) $a^3 + d^3$; 3) $8 - a^3$;

4) $q^3 + 27$; 5) $n^3 - 64$; 6) $1000 + t^3$.

672②. Подайте вираз у вигляді суми або різниці кубів і розкладіть його на множники:

1) $8a^3 + 1$; 2) $27 - \frac{1}{27}c^3$; 3) $1 + 64x^3$;

4) $125b^3 - 64y^3$; 5) $1 + 1000m^3$; 6) $\frac{1}{125}a^3 - \frac{1}{216}b^3$.

673②. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$; 2) $(a + 3)(a^2 - 3a + 9)$;

3) $(1 + d)(1 - d + d^2)$; 4) $(m - 2)(m^2 - 2m + 4)$.

674②. Обчисліть значення виразу:

1) $(4p - 1)(16p^2 + 4p + 1)$, якщо $p = 0,25$;

2) $(2a + b)(4a^2 - 2ab + b^2)$, якщо $a = \frac{1}{2}$; $b = -1$.

675③. Запишіть у вигляді добутку вираз:

1) $a^3 - b^6$; 2) $t^{12} + c^9$; 3) $p^{18} + m^{24}$;

4) $-c^3 + m^{15}$; 5) $-\frac{1}{8} - a^{24}$; 6) $-c^{96} - d^{60}$;

7) $x^3y^3 + 1$; 8) $27 - a^3b^9$; 9) $x^6y^{12} + m^{27}$;

10) $64m^6p^{21} - 125x^3$; 11) $\frac{1}{27}c^{24}m^{18} + 27t^9$;

12) $343a^{18}b^{33} - 0{,}001c^{36}$.

676①. Які з рівностей є тотожностями:

1) $a^3 - b^3 = (a^2 - b^2)(a - b)$; 2) $c^3 + d^3 = (c + d)(c^2 - cd + d^2)$;

3) $p^3 - q^3 = (p - q)(p^2 + pq + q^2)$;

4) $x^3 + m^3 = (x + m)(x^2 - 2xm + m^2)$?

677②. Розкладіть на множники:

1) $\frac{1}{27} + b^3$; 2) $\frac{1}{8}x^3 - 8$; 3) $1 + 125p^3$;

4) $64m^3 - \frac{1}{1000}n^3$; 5) $\frac{27}{8}a^3 + \frac{8}{27}b^3$; 6) $216p^3 - \frac{1}{216}q^3$.

678②. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(m + n)(m^2 - mn + n^2)$; 2) $(m - 1)(m^2 + m + 1)$;

3) $(b + 4)(b^2 - 4b + 16)$; 4) $(5 - q)(25 + 5q + q^2)$.

679②. Обчисліть значення виразу:

1) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$, якщо $x = -\frac{1}{3}$;

2) $(x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2)$, якщо $x = -2$; $y = 0{,}5$.

680③. Запишіть вираз у вигляді добутку:

1) $x^9 - y^6$; 2) $-p^{12} - 27$; 3) $-a^9b^6 + 1$;

4) $216p^{15} + 0{,}008t^{18}$; 5) $64m^{21}c^3 - p^{30}$; 6) $512t^{24}p^{27} - 729a^{33}$.

Урок 52

681③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(b^3 - d^2)(b^6 + b^3d^2 + d^4)$;

2) $(c^3 + 2p)(c^6 - 2pc^3 + 4p^2)$;

3) $(3x - y)(9x^2 + 3xy + y^2)$;

4) $(4c + 3d)(16c^2 - 12cd + 9d^2)$;

5) $(a^4 + 4)(a^8 - 4a^4 + 16)$;

6) $(5m^2 - 6p^3)(25m^4 + 30m^2p^3 + 36p^6)$.

682①. Спростіть вираз:

1) $(a+2)(a^2-2a+4)-a(a^2-5)$;

2) $(b-3)(b^2+3b+9)-b(b-3)(b+3)$;

3) $(x+4)(x^2-4x+16)-(x-1)(x^2+x+1)$;

4) $(2b^2-1)(4b^4+2b^2+1)-(2b^3+1)^2$.

683③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-4)(x^2+4x+16)=x^3-8x$;

2) $(x^3+1)(x^6-x^3+1)=x^9-5x$;

3) $(3x+2)(9x^2-6x+4)=3x(3x+4)(3x-4)+32$;

4) $8\left(\frac{1}{2}x-2\right)\left(\frac{1}{4}x^2+x+4\right)-x(x-3)^2=6x^2-46$.

684③. Знайдіть значення виразу:

1) $(2a+1)(4a^2-2a+1)-7a^3$, якщо $a=-2$;

2) $(x-5y)(x^2+5xy+25y^2)+25y^3-x^3$, якщо $x=-2007$, $y=0{,}1$.

685④. Розкладіть на множники:

1) $(a+3)^3-a^3$; 2) $(x-4)^3+8$;

3) $27p^3-(p+1)^3$; 4) $64x^3+(x-1)^3$.

686④. Доведіть, що дві останні цифри числа 415^3+85^3 — нулі.

687④. Обчисліть зручним способом:

$$\frac{57^3-43^3}{14}+57\cdot 43.$$

688③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(a^5-m^2)(a^{10}+a^5m^2+m^4)$;

2) $(5a+b)(25a^2-5ab+b^2)$;

3) $(2x-7y^2)(4x^2-14xy^2+49y^4)$;

4) $(3p^2+4c^3)(9p^4-12p^2c^3+16c^6)$.

689③. Спростіть вираз:

1) $(a-4)(a^2+4a+16)-a(a-2)(a+2)$;

2) $(x^2+3)(x^4-3x^2+9)-(x^2-2)(x^4+2x^2+4)$;

3) $b(b-1)^2-(b-5)(b^2+5b+25)$;

4) $(a-1)(a^2+a+1)(a+1)(a^2-a+1)$.

690③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(x-2)(x^2+2x+4)=24x+x^3$;

2) $(2x+1)(4x^2-2x+1)=2x(2x-3)(2x+3)+37$.

691④. Розкладіть на множники:

1) $(a+1)^3+a^3$; 2) $(b-2)^3-8$;

3) $125b^3-(b-1)^3$; 4) $64a^3+(a+2)^3$.

692④. Чи кратне число 115^3-15^3 числу 100?

693③. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x(1-3x)+5x(3-x)=17x-8x^2$;

2) $3x(2+x)-4(1-x^2)=7x^2+6x$.

694④. Доведіть, що різниця трицифрового числа і числа, записаного цими самими цифрами, але у зворотному порядку, ділиться на 11.

695④. В одній пачці було 90 зошитів, а в другій — 30. Коли з першої пачки взяли удвічі більше зошитів, ніж з другої, то в першій пачці залишилося зошитів у 5 раз більше, ніж у другій. Скільки зошитів залишилося у кожній пачці?

§ 21. ЗАСТОСУВАННЯ КІЛЬКОХ СПОСОБІВ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Урок 53

Іноді, щоб розкласти многочлен на множники, доводиться застосовувати послідовно кілька способів. Якщо це можливо, то розкладання многочлена на множники доречно починати з винесення спільного множника за дужки.

Приклад 1. Розкласти на множники многочлен $5m^4-20m^2n^2$.

Р о з в'я з а н н я. Спочатку винесемо за дужки спільний множник $5m^2$:

$$5m^4-20m^2n^2=5m^2(m^2-4n^2).$$

Потім до виразу в дужках застосуємо формулу різниці квадратів:

$$5m^2(m^2-4n^2)=5m^2(m-2n)(m+2n).$$

Отже,

$$5m^4-20m^2n^2=5m^2(m-2n)(m+2n).$$

Приклад 2. Розкласти на множники многочлен $2x^4+12x^3+18x^2$.

Р о з в' я з а н н я. Винесемо за дужки спільний множник $2x^2$:

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x^2 + 6x + 9).$$

Тричлен $x^2 + 6x + 9$ подамо у вигляді квадрата двочлена:

$$x^2 + 6x + 9 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 = (x + 3)^2.$$

Отже,

$$2x^4 + 12x^3 + 18x^2 = 2x^2(x + 3)^2.$$

Приклад 3. Розкласти на множники многочлен $a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b$.

Р о з в' я з а н н я. Спочатку винесемо за дужки спільний множник a^2b. Маємо:

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(ab - 3a + 5b - 15).$$

Спробуємо тепер розкласти на множники многочлен $ab - 3a + 5b - 15$. Для цього згрупуємо перший член з другим і третій з четвертим:

$$ab - 3a + 5b - 15 = (ab - 3a) + (5b - 15) = a\underline{(b - 3)} + 5\underline{(b - 3)} =$$
$$= (b - 3)(a + 5).$$

Остаточно маємо:

$$a^3b^2 - 3a^3b + 5a^2b^2 - 15a^2b = a^2b(b - 3)(a + 5).$$

Приклад 4. Розкласти на множники многочлен $2xy + p^2 - x^2 - y^2$.

Р о з в' я з а н н я. Згрупуємо перший, третій та четвертий члени многочлена:

$$2xy + p^2 - x^2 - y^2 = p^2 + (-x^2 + 2xy - y^2).$$

Винесемо за дужки -1:

$$p^2 + (-x^2 + 2xy - y^2) = p^2 - (x^2 - 2xy + y^2).$$

Вираз $x^2 - 2xy + y^2$ подамо у вигляді квадрата різниці:

$$p^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = p^2 - (x - y)^2.$$

Отриманий вираз можна розкласти на множники, використовуючи формулу різниці квадратів:

$$p^2 - (x - y)^2 = (p - (x - y))(p + (x - y)) = (p - x + y)(p + x - y).$$

Отже,

$$2xy + p^2 - x^2 - y^2 = (p - x + y)(p + x - y).$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $x^2 + 8x - 20 = 0$.

Р о з в' я з а н н я. Якщо до виразу $x^2 + 8x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4$ додати 4^2, тобто 16, то дістанемо вираз $x^2 + 8x + 16$, який є квадратом двочлена $x + 4$. Щоб отримати рівняння, рівносильне даному, у лівій частині рівняння додамо 16 і віднімемо 16. Маємо:

$$x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = 0;$$
$$(x^2 + 8x + 16) - 36 = 0;$$
$$(x + 4)^2 - 6^2 = 0.$$

Далі розкладемо на множники ліву частину рівняння, використовуючи формулу різниці квадратів:

$$(x + 4 - 6)(x + 4 + 6) = 0;$$
$$(x - 2)(x + 10) = 0;$$
$$x - 2 = 0 \text{ або } x + 10 = 0;$$
$$x = 2 \text{ або } x = -10.$$

Перетворення $x^2 + 8x - 20 = x^2 + 8x + 16 - 16 - 20 = (x + 4)^2 - 36$ називають *виділенням квадрата двочлена*.

Не кожний многочлен можна розкласти на множники. Наприклад, на множники не можна розкласти многочлени $x^2 + 4$, $x^2 + y^2 + 1$, $x^2 + x + 7$ тощо. Не можна розкласти на множники многочлени, які є неповними квадратами суми або різниці: $m^2 + m + 1$; $p^2 - 3p + 9$; $4x^2 + 2x + 1$ тощо.

Які способи розкладання многочленів на множники вам відомі? • З чого доречно починати розкладання многочлена на множники? • Чи кожний многочлен можна розкласти на множники? • Наведіть приклади многочленів, які не можна розкласти на множники.

696①. (Усно.) Які з формул є тотожностями:

1) $(a + b)^2 = a^2 + ab + b^2$; 2) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
3) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$; 4) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
5) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + 2ab + b^2)$; 6) $a^2 - b^2 = (a - b)^2$?

697①. Закінчіть розкладання на множники:

1) $xa^2 - 9x = x(a^2 - 9) = x(a^2 - 3^2) = \dots$
2) $bm^2 - 2mb + b = b(m^2 - 2m + 1) = \dots$

698②. Розкладіть на множники:

1) $5a^2 - 5b^2$; 2) $ap^2 - aq^2$; 3) $2xm^2 - 2xn^2$;
4) $7b^2 - 7$; 5) $16x^2 - 4$; 6) $75 - 27c^2$;
7) $5mk^2 - 20m$; 8) $63ad^2 - 7a$; 9) $125px^2 - 25py^2$.

699②. Подайте у вигляді добутку:

1) $m^3 - m$; 2) $p^2 - p^4$; 3) $7a - 7a^3$;

4) $9a^2 - 9a^4$; 5) $81c^3 - c^5$; 6) $3a^5 - 300a^7$.

700②. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 27 = 0$; 2) $20x^2 - 5 = 0$.

701②. Розкладіть на множники:

1) $3a^2 + 6ab + 3b^2$; 2) $-2m^2 + 4mn - 2n^2$;

3) $-a^2 - 4a - 4$; 4) $6a^2 + 24ab + 24b^2$;

5) $2am^2 + 4am + 2a$; 6) $8a^4 - 8a^3 + 2a^2$.

702③. Подайте у вигляді добутку:

1) $3a^3 - 3b^3$; 2) $7x^3 + 7y^3$; 3) $-pm^3 - pn^3$;

4) $16a^3 - 2$; 5) $125m + m^4$; 6) $a^7 - a^4$.

703①. Які з формул є тотожностями:

1) $(m - n)^2 = m^2 - mn + n^2$;

2) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - 2xy + y^2)$;

3) $p^2 - q^2 = (p - q)(p + q)$;

4) $(c + d)^2 = c^2 + 2cd + d^2$;

5) $m^3 - n^3 = (m - n)(m^2 + mn + n^2)$;

6) $a^2 - b^2 = (a + b)(a + b)$?

704②. Розкладіть на множники:

1) $ax^2 - ay^2$; 2) $ma^2 - 4mb^2$; 3) $7m^2 - 28$;

4) $p^5 - p^3$; 5) $b - 4b^3$; 6) $a^5 - a^3c^2$;

7) $15d - 15d^3$; 8) $625b^3 - b^5$; 9) $500a^5 - 45a^3$.

705②. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^2 - 8 = 0$; 2) $75x^2 - 3 = 0$.

706②. Подайте у вигляді добутку многочлен:

1) $-4a^2 + 8ab - 4b^2$; 2) $-25by^2 - 10by - b$;

3) $a^5 + 6a^4m + 9a^3m^2$; 4) $6by^2 + 36by^3 + 54by^4$.

707③. Розкладіть на множники:

1) $bx^3 - by^3$; 2) $-2a^3 - 2b^3$; 3) $8a - a^4$.

Урок 54

708②. (Усно.) Розкладіть на множники:

1) $ax^2 - ay^2$; 2) $mp^2 - m$; 3) $b^3 - b$.

709②. Обчисліть значення виразу:

1) $3m^2 - 3n^2$, якщо $m = 41$, $n = 59$;

2) $2x^2 + 4xy + 2y^2$, якщо $x = 29$; $y = -28$.

710③. Розкладіть на множники:

1) $a^4 - 81$; 2) $16 - c^4$; 3) $x^8 - 1$; 4) $a^4 - b^8$.

711③. Розв'яжіть рівняння:

1) $x^3 - x = 0$; 2) $7y^3 - 112y = 0$;

3) $64x^3 + x = 0$; 4) $y^3 + 2y^2 + y = 0$.

712③. Розкладіть на множники:

1) $7ab + 21a - 7b - 21$; 2) $6mn + 60 - 30m - 12n$;

3) $-abc - 3ac - 4ab - 12a$; 4) $a^3 - ab - a^2b + a^2$.

713③. Розкладіть на множники:

1) $a^2 + 2ab + b^2 - 16$; 2) $a^2 - x^2 - 2xy - y^2$;

3) $p^2 - x^2 + 10p + 25$; 4) $m^2 - b^2 - 8b - 16$.

714④. Запишіть у вигляді добутку:

1) $9(a + b)^2 - 4(a^2 - 2ab + b^2)$;

2) $25(3y - 2m)^2 - 36(9y^2 + 12my + 4m^2)$.

715②. Обчисліть значення виразу:

1) $5x^2 - 5y^2$, якщо $x = 49$, $y = 51$;

2) $3a^2 - 6ab + 3b^2$, якщо $a = 102$, $b = 101$.

716③. Доведіть тотожність:

$$a^8 - b^8 = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4).$$

717③. Розв'яжіть рівняння:

1) $y - y^3 = 0$; 2) $5x^3 - 180x = 0$;

3) $16y^3 + y = 0$; 4) $x^3 - 2x^2 + x = 0$.

718③. Подайте у вигляді добутку вираз:

1) $90 + 3ab - 45a - 6b$; 2) $-3mn - 9m - 18n - 54$;

3) $a^4x + a^4 + a^3x + a^3$; 4) $p^3a^2 + pa^2 - 3ap^3 - 3ap$.

719③. Розкладіть на множники:

1) $x^2 + 2xy + y^2 - 25$; 2) $m^2 - a^2 + 2ab - b^2$;

3) $m^2 - a^2 - 4m + 16$; 4) $p^2 - x^2 + 20x - 100$.

Урок 55

720③. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - 81 + a - 9$; 2) $m^2 - a^2 - (a + m)$;

3) $x^2 - y^2 - x + y$; 4) $x + x^2 - y - y^2$;

5) $a - 3b + a^2 - 9b^2$; 6) $16m^2 - 25n^2 - 4m - 5n$.

721③. Розкладіть на множники:

1) $p^2(m - 3) - 2p(m - 3) + (m - 3)$;

2) $1 - a^2 - 4b(1 - a^2) + 4b^2(1 - a^2)$.

722③. Подайте у вигляді добутку:

1) $ab^2 - b^3 - a + b$; 2) $ax^2 - a^3 + 7x^2 - 7a^2$;

3) $p^3 + p^2q - 4p - 4q$; 4) $a^3 - 5m^2 + 5a^2 - am^2$.

723①. Розкладіть на множники:

1) $m^3 + n^3 + m + n$; 2) $a - b - (a^3 - b^3)$;

3) $a^3 + 8 - a^2 - 2a$; 4) $8p^3 - 1 - 12p^2 + 6p$.

724④. Розв'яжіть рівняння:

1) $y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0$; 2) $x^3 = 2x^2 + 4x - 8$.

725④. Розкладіть на множники:

1) $a^3 + 8b^3 + a^2 - 2ab + 4b^2$; 2) $m^3 - 8n^3 + m^2 - 4mn + 4n^2$.

726④. Розкладіть на множники тричлен, виділивши попередньо квадрат двочлена:

1) $x^2 - 2x - 3$; 2) $x^2 + 8x - 9$;

3) $x^2 - 3x - 4$; 4) $x^2 + x - 2$.

Р о з в' я з а н н я.

4) $x^2 + x - 2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} =$

$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\right) = (x - 1)(x + 2)$.

727*. Доведіть, що значення виразу $n^3 - n$ при всіх натуральних n кратне 6.

728③. Розкладіть на множники:

1) $a^2 - b^2 - (a - b)$; 2) $p^2 - b - p - b^2$;

3) $16x^2 - 25y^2 + 4x - 5y$; 4) $100m^2 - 10m + 9n - 81n^2$.

729③. Доведіть тотожність:

$$c^2(c - 2) - 10c(c - 2) + 25(c - 2) = (c - 2)(c - 5)^2.$$

730③. Подайте у вигляді добутку:

1) $m^3 + m^2n - m - n$;   2) $ba^2 - 3a^2 - 4b + 12$;

3) $a^3 - b^3 + a - b$;   4) $x^3 + 1 - 5x - 5$.

731④. При якому значенні x:

1) значення виразу $x^3 - x^2 - x + 1$ дорівнює нулю;

2) значення виразу $x^3 - 9x$ дорівнює значенню виразу $x^2 - 9$?

732④. Розкладіть на множники многочлен:

1) $a^3 - b^3 + a^2 - 2ab + b^2$; 2) $c^2 + 2cd + d^2 - x^2 - 2xy - y^2$.

733③. Спростіть:

1) $x(x + 1)(x + 2) - 3(x - 2)(x + 2) + 2(x - 6)$;

2) $(2x + 3y)(3y - 1) - (2x - y)(5x - y) + (2x - 3y)(5x + 2y)$.

734③. Не виконуючи обчислень, доведіть, що число 5 не є коренем рівняння $2x^3 + 5x + 7 = 0$.

735③. Розв'яжіть рівняння:

$$x((x-2)^2 + 4x) = 64\left(\frac{1}{4}x - 1\right)\left(\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{4}x + 1\right).$$

736④. В одному магазині 141 телевізор, а в другому — 95. Перший магазин щотижня продавав 12 телевізорів, а другий — 10 телевізорів. Через скільки тижнів у першому магазині телевізорів залишиться у 3 рази більше, ніж у другому?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО §16—21

Урок 56

1①. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(p + a)^2$;   2) $(c - m)(c + m)$.

2①. Розкладіть на множники:

1) $t^2 - 2tb + b^2$;   2) $d^2 - n^2$.

3①. Які з рівностей є тотожностями:

1) $(p - a)^2 = p^2 - pa + a^2$;   2) $p^3 + q^3 = (p + q)(p^2 - pq + q^2)$;

3) $m^2 - c^2 = (m - c)(m + c)$;   4) $d^3 - t^3 = (d - t)(d^2 + 2dt + t^2)$?

4②. Перетворіть вираз у многочлен:

1) $(3a - 5)^2$;   2) $(7 + 2b)(2b - 7)$.

5②. Розкладіть многочлен на множники:

1) $a^2 + 6a + 9$;   2) $-25 + 36x^2$;

3) $b^3 + 64$;   4) $7c^2 - 7d^2$.

6②. Доведіть тотожність:

$$(4x+3)^2-(4x-5)(4x+5)-24x=34.$$

7③. Спростіть вираз:

1) $(-4a+3b)^2+(-4a+5b)(5b+4a)+24ab$;

2) $(a-2)(a^2+2a+4)-a(a-3)(a+3)$.

8③. Розв'яжіть рівняння:

1) $2x^3-50x=0$; 2) $x^3-10x^2+25x=0$.

9④. Доведіть, що вираз $x^2+8x+17$ набуває лише додатних значень при всіх значеннях змінної x. Якого найменшого значення набуває цей вираз і при якому значенні x?

Додаткові завдання

10④. Перетворіть вираз у многочлен:

1) $(a+3)^3$; 2) $(2m-5)^3$.

11④. Якими є останні дві цифри числа 293^3-93^3?

12④. Розкладіть на множники тричлен x^2+6x-7.

Вправи для повторення розділу II

До § 4

737①. Випишіть окремо числові вирази, а окремо — вирази зі змінними. Підкресліть однією рискою цілі раціональні вирази, а двома — дробові раціональні вирази:

1) $m-7$; 2) $\frac{a^2-b}{5}$; 3) $\frac{7+9\cdot 2}{3}$; 4) $\frac{3}{a+c^3}$;

5) $-\frac{1}{6}ab$; 6) $(3-9)+7\cdot 8$; 7) $\frac{1}{x}+\frac{1}{3}$; 8) a^3-a^2+a.

738②. На склад завезли a мішків цукру по 50 кг у кожному. Запишіть виразом масу всього завезеного цукру. Знайдіть значення цього виразу, якщо $a=12$.

739③. Запишіть у вигляді виразу двоцифрове число, в якому:

1) x десятків і y одиниць;

2) 5 десятків і a одиниць.

Запишіть у вигляді виразу трицифрове число, в якому:

3) a сотень, b десятків і c одиниць;

4) m сотень, n десятків і 6 одиниць.

740④. Відомо, що $x - y = 2$ і $p = 3$. Знайдіть значення виразу:

1) $x + p - y$; 2) $x - y + 5p$; 3) $(y - x)p$;

4) $\frac{3(y-x)}{-p+4(x-y)}$; 5) $7x - 7y - p$; 6) $\frac{6}{p} - \frac{4}{5(y-x)}$.

До § 5

741①. Спростіть вираз:

1) $2 + 3a - 5$; 2) $4m + m$; 3) $3p - 2p + 5$; 4) $-(m - 3)$.

742②. Розкрийте дужки і зведіть подібні доданки:

1) $7(5x + 8) - 12x$; 2) $9m + 3(15 - 4m)$;

3) $6(x + 1) - 6x - 9$; 4) $12x - 2(3x - 5)$;

5) $-(2x + 1) - 3(2x - 5)$; 6) $5(x - 2) - 4(2x - 3)$.

743①. Доведіть тотожність:

1) $18(a - 2) = 12a - (20 - (6a - 16))$;

2) $2(x - y + t) - 3(x + y - t) - 5(t - y) = -x$.

744④. Доведіть, що сума трьох послідовних цілих чисел ділиться на 3.

745*. Чи є тотожністю рівність:

1) $|a + 5| = a + 5$; 2) $|m^2 + 1| = m^2 + 1$;

3) $|m - n| = |n - m|$; 4) $|a| + |b| = |a + b|$?

До § 6

746①. Подайте добуток у вигляді степеня:

1) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$; 2) $-2 \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$;

3) aa; 4) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$.

Подайте степінь у вигляді добутку рівних множників:

1) m^3; 2) 17^4; 3) $(p + 2)^2$; 4) $\left(\frac{a}{9}\right)^5$.

747②. Обчисліть:

1) 2^6; 2) $(0{,}2)^3$; 3) $\left(-\frac{1}{8}\right)^2$; 4) $\left(-1\frac{1}{6}\right)^3$;

5) $-(-2)^3$; 6) $-\left(\frac{1}{4}\right)^2$; 7) $-(-0{,}1)^2$; 8) $-(-1)^{27}$.

748③. Не виконуючи обчислень, порівняйте з нулем значення виразу:

1) $(-1{,}7)^{15} \cdot (-2{,}7)^2$; 2) $(-2{,}3)^3 : (-5{,}89)$;

3) $-3{,}7^2 \cdot (-2{,}8)^4$; 4) $-(-2{,}6)^8 \cdot (-5{,}7)^5$.

749③. Знайдіть останню цифру числа:

1) 2005^{13}; 2) 5011^7; 3) 1006^{17}; 4) $15^9 + 16^8 + 101^{17}$.

750*. Чи ділиться:

1) число $10^{17} + 5$ на 3; 2) число $10^{29} + 7$ на 9?

До § 7

751①. Подайте у вигляді степеня:

1) b^7b^3; 2) a^3a; 3) $9^8 \cdot 9^7$; 4) $p^{10} : p^3$;

5) $19^8 : 19^6$; 6) $7^{15} : 7^{14}$; 7) $(a^3)^4$; 8) $(2^5)^3$.

752②. Обчисліть:

1) $3^8 : 3^7$; 2) $2^5 \cdot 2^{12} : 2^{15}$; 3) $\frac{10^4 \cdot 10^9}{10^{10}}$; 4) $\frac{8^5 \cdot 8^{10}}{8^{11} \cdot 8^3}$.

753③. Знайдіть значення x, при якому рівність стає тотожністю:

1) $(x^7)^x = x^{21}$; 2) $(3^2)^6 = 3^{3x}$; 3) $\left(\left(\left(\frac{1}{7}\right)^x\right)^3\right)^4 = \left(\frac{1}{7}\right)^{24}$.

754③. Запишіть у вигляді степеня (n — натуральне число):

1) $(a^{18} : a^{2n}) \cdot (a^7 : a^n)$, $n < 7$; 2) $\frac{a^8 \cdot a^{2n}}{a^n \cdot a^5} \cdot a^{4n}$.

755*. Якою цифрою закінчується число:

1) 8^{4n}; 2) 7^{4n+1},

де n — довільне натуральне число?

До § 8

756①. Які з виразів є одночленами? Які з одночленів подано у стандартному вигляді:

1) $-a^2c$; 2) $7a \cdot 2b \cdot 4$; 3) $p + 1$; 4) $a \cdot ab \cdot 7a$;

5) $6\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y\right)$; 6) 17; 7) $-p^2$; 8) $c^9 - c$?

757②. Зведіть одночлен до стандартного вигляду, вкажіть його коефіцієнт і степінь:

1) $-\frac{1}{2}a^2b \cdot 2ab^7$; 2) $3m \cdot (-2m^2) \cdot 5m^7$; 3) $-7ap^2 \cdot 0{,}1a^2p^9$;

4) $1\frac{1}{8}m^2 \cdot \frac{8}{9}mc^2$; 5) $-a \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-5d)$;

6) $p^9 \cdot (-2a^2) \cdot (-5p^7) \cdot a^8$.

758③. Складіть по два одночлени стандартного вигляду, які містять змінні a і b так, щоб:

1) степінь кожного одночлена дорівнював 7, а коефіцієнт дорівнював −8;

2) степінь кожного одночлена дорівнював 3, а коефіцієнт дорівнював 17.

До § 9

759①. Знайдіть добуток одночленів:

1) $3m \cdot 2n$; 2) $-4p \cdot 2a$; 3) $8m^2 \cdot 3n$; 4) $-2a^3 \cdot (-b^7)$.

760②. Подайте вираз у вигляді одночлена стандартного вигляду:

1) $-2{,}5m^2 \cdot (-4m^3p)$; 2) $12p^2m \cdot \left(-\frac{5}{6}p^3m^7\right)$;

3) $0{,}6m^7a^9 \cdot 10m^2a^7 \cdot \frac{1}{2}m^3$; 4) $(-mn^7)^3$;

5) $(-2a^5b^7)^2$; 6) $(m^3p^7a^9)^5$.

761③. Знайдіть одночлен A, якщо:

1) $A \cdot 14m^2n = 42m^4n^2$; 2) $3p^2q^7 \cdot A = -27p^3q^7$.

762③. Виконайте множення одночленів $0{,}4m \cdot 10nm^2$ і знайдіть значення отриманого виразу, якщо $m = -2$; $n = 0{,}5$.

763④. Чи можна подати у вигляді квадрата одночлена вираз:

1) $49m^8n^{12}$; 2) $-25a^4b^8$;

3) $-0{,}2m^4n^2 \cdot (-5m^2n^4)$; 4) $-(-3a^4)^3 \cdot 3a^{12}$?

764*. При якому значенні n буде правильною рівність: $(2{,}5a^8c)^n \cdot 0{,}16c^5 = 2{,}5a^{24}c^8$?

До § 10

765①. Складіть многочлен з одночленів та вкажіть його степінь:

1) $5a^2$ і $4b$; 2) $-a^2$; ab і m;

3) $5c^3$ і -8; 4) $3mn^2$; $4mn$; $-5m^2n$ і -7.

766②. Зведіть подібні члени многочлена:

1) $8a^2b - 7ab^2 + 5a^2b + 4b^2a$; 2) $5mn - 2mn - 8 - 3mn$;

3) $7m^3 + m^2 - 8 - m^3 + 3m^2$; 4) $2x^2y - 7xy^2 - 5xy + 3yx^2 + 7y^2x$.

767③. Зведіть многочлен:

$$-\frac{1}{4}ab\cdot(-8ab^2) + 8a^2\cdot(-1{,}5ab) + 20ab\cdot(-0{,}1ab^2) + a^2ab + 2a\cdot 6a^2b$$

до стандартного вигляду і обчисліть його значення, якщо $a = 5$, $b = -\frac{1}{25}$.

768④. Чи існують такі цілі значення a, при яких значення многочлена $2a^2 + 6a + 7$ є парним числом?

До § 11

769②. Спростіть вираз:

1) $(3m + 5n) + (9m - 7n) - (-2n + 5m)$;

2) $(12ab - b^2) - (5ab + b^2) + (ab + 2b^2)$;

3) $(3x^2 + 2x) + (2x^2 - 3x - 4) - (17 - x^2)$;

4) $(m - n + p) + (m - p) - (m - n - p)$.

770③. 1) Подайте вираз $4x^3 - 4x^2 + 5x - 7$ у вигляді суми яких-небудь двочленів.

2) Подайте вираз $x^3 - 5x + 7x^2 - 9$ у вигляді різниці одночлена і тричлена.

771③. Який многочлен в сумі з многочленом $2x^2 - 3x + 7$ тотожно дорівнює:

1) 0; 2) 5; 3) $-3x + 1$; 4) $x^2 - 5x + 7$?

772④. Доведіть, що сума двох послідовних непарних чисел ділиться на 4.

773④. Спростіть вираз

$$5xy - 8x^2y - \left(3xy - \left(4\frac{1}{4}xy^2 + 8x^2y\right) - 2{,}75xy^2\right)$$

і знайдіть його значення, якщо $x = -1$; $y = 3$.

До § 12

774①. Виконайте множення:

1) $a(b + 7)$; 2) $c(2 - x)$; 3) $-a(m - 3)$; 4) $-b(a - x + y)$.

775②. Перетворіть добуток у многочлен:

1) $2xa(a^2 - 3ax)$; 2) $-3mp(2m^3 - 5mp)$;

3) $4ab^2(a^2-2ab-b^2)$; 4) $(4m^3-2mn^2-n^2)mn^2$;

5) $(-0{,}1x^3y+0{,}2x^2y-y^3)(-5x^2y)$; 6) $-10n^3x(5nx^2-2n^2x+x^5)$.

776③. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $2x(x+y)-y(2x-y)-y(y+1)$, якщо $x=-5$, $y=-10$;

2) $m^2(m^2-5m+1)-2m(m^3-4m^2+m)+m^4-3m^3+2$, якщо $m=-3$.

777③. При якому значенні змінної значення виразу $2x(6x-5)$ на 5 менше від відповідного значення виразу $3(4x^2-5)$?

778④. Перетворіть вираз

$$\frac{1}{8}x^n-\frac{5}{8}x^2(1+x^{n-2})+\frac{1}{2}x^3(x^{n-3}+2),$$

де $n>3$, n — натуральне число.

779④. Першого дня магазин продав на 3ц овочів більше, ніж другого дня, а третього дня $\frac{4}{9}$ того, що продали за перші два дні разом. Скільки центнерів овочів магазин продавав щодня, якщо за три дні було продано 65 ц?

780*. Розв'яжіть рівняння $\frac{1-\frac{3x}{2}}{4}+\frac{2-\frac{x}{4}}{3}=x-2$.

До § 13

781①. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $5x-5y$; 2) $7m+7n$; 3) $ap+ac$; 4) $bm-bk$.

782②. Розкладіть на множники:

1) $7ax-7bx$; 2) $8a+24ac$; 3) $18p-24p^2$;

4) $5m^3-10m^2$; 5) $-15a^2-20a^3$; 6) $a^7-a^2+a^5$.

783③. Винесіть за дужки спільний множник:

1) $6xy-12x^2y+15x^2y$; 2) $7mn^5+28m^2n^3-7m^3n^2$;

3) $a(x-2)+3b(x-2)-2(2-x)$; 4) $8(m-1)^2-n(1-m)$.

784④. Розв'яжіть рівняння:

1) $x|x-3|-5|x-3|=0$;

2) $|x|\,|x-2|-7|x-2|=0$.

785*. При деякому значенні x значення виразу $x^2-3x-13$ дорівнює -1. Знайдіть, чому дорівнює при цьому самому значенні x значення виразу:

1) $2x^2-6x-26$; 2) $x^2(x^2-3x-13)-3x(x^2-3x-13)$;

3) $3x^2-9x-8$; 4) $\frac{5}{12}x^2-\frac{5}{4}x+3$.

До § 14

786①. Виконайте множення:

1) $(m - p)(a + x)$;   2) $(2 + t)(a - 3)$;
3) $(a + b)(2 + c)$;   4) $(a - 2)(b - 3)$.

787②. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(2m - 3p)(3m + 2p)$;   2) $(2a^2 + b)(3b - 5a^2)$;
3) $(7x^2 - 2x)(3x + 1)$;   4) $(5a^3 - 4a^2)(9a^2 + 8a)$;
5) $(3a^2 + 5ba)(3b - 4a)$;   6) $(mn - n^2)(4n^3 + 2n^2m)$.

788③. Спростіть вираз:

1) $(a - 8)(2a - 2) - (a + 9)(a - 3)$;
2) $(x - y)(x + 3) - (x + y)(x - 3)$;
3) $(3a - 5b)(5a + 3b) - (5a - 3b)(3a + 5b)$;
4) $(a^3 + 4m)(a^2 - 4m) - (a^2 + 4m)(a^3 - 4m)$.

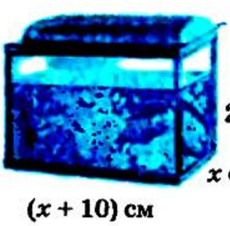
789③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(3x - 1)(2x + 6) - (2x - 2)(3x + 1) = -24$;
2) $(3x + 9)(x - 5) - (x - 7)(3x - 1) = 12 + 8x$.

790④. Доведіть, що значення виразу
$2(10x - 5)(x + 0{,}6) + (4x^2 - 1)(2x - 5) - (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$
не залежить від значення x.

791④. Доведіть, що $(x + 1)(y + 1) - (x - 1)(y - 1) = 8$, якщо $x + y = 4$.

792*. Два акваріуми мають форму прямокутного паралелепіпеда. В одного довжина на 10 см більша від ширини. Другий акваріум більший від першого. Його довжина на 20 см більша за довжину першого, а ширина на 10 см більша за ширину першого. Коли обидва акваріуми наповнюють водою на висоту 25 см, то другий акваріум вміщує води на 37,5 л більше, ніж перший. Знайдіть довжину і ширину першого акваріума.



До § 15

793①. Закінчіть розклад многочлена на множники:
$ab - 7b + 3a - 21 = (ab - 7b) + (3a - 21) = b(a - 7) +$
$+ 3(a - 7) = \ldots$

794②. Розкладіть на множники:
1) $m(a - b) + 3a - 3b$; 2) $a(b + c) + b + c$;
3) $3a - 3c + xa - xc$; 4) $ab - ac - 4b + 4c$.

795③. Подайте у вигляді добутку:
1) $12x^2c - 8x^2y - 9cy^3 + 6y^4$;
2) $1{,}6mn^2 - 2{,}4mp^2 - n^3 + 1{,}5np^2$.

796④. Розв'яжіть рівняння $x^2 + 5x - 6 = 0$, застосувавши розкладання многочлена на множники.

До § 16

797①. Подайте у вигляді многочлена:
1) $(x - p)^2$; 2) $(m + a)^2$; 3) $(b - k)^2$; 4) $(y + c)^2$.

798②. Перетворіть вираз у многочлен:
1) $(3a - 7)^2$; 2) $(2b + 5)^2$; 3) $(10m - 5k)^2$;
4) $(4p + 9q)^2$; 5) $(0{,}1m - 5p)^2$; 6) $\left(\frac{1}{6}a + 6b\right)^2$.

799③. Спростіть вираз і знайдіть його значення:
1) $(a - 1)^2 - (a - 2)^2$, якщо $a = 1\frac{1}{2}$;
2) $(3b + 2)^2 + (3b - 2)^2$, якщо $b = -\frac{1}{3}$.

800③. Знайдіть число, квадрат якого при збільшенні цього числа на 3 збільшується на 159.

801④. Чи є тотожністю рівність: $(a - b)^2 = |a - b|^2$?

802④. Подайте у вигляді многочлена:
1) $((x + y) + a)^2$; 2) $((b - c) - d)^2$;
3) $(m + n + 2)^2$; 4) $(a + 3 - c)(a + 3 - c)$.

До § 17

803①. Подайте у вигляді квадрата двочлена:
1) $m^2 - 2mp + p^2$; 2) $b^2 + 2by + y^2$; 3) $a^2 - 2 \cdot a \cdot 4 + 4^2$.

804②. Розкладіть на множники:

1) $m^2 + 20m + 100$; 2) $49 - 14b + b^2$; 3) $0{,}09x^2 + 0{,}6x + 1$;

4) $\frac{1}{36} - \frac{1}{3}p + p^2$; 5) $4x^2 + 20x + 25$; 6) $14m^2 - 12mp + 9p^2$.

805③. Обчисліть значення виразу:

1) $-100m^2 + 20m - 1$, якщо $m = 0{,}1;\ -0{,}9$;

2) $-4x^2 - 12xy - 9y^2$, якщо $x = 0{,}03$, $y = -0{,}02$.

806④. Розв'яжіть рівняння:

1) $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$; 2) $5y^2 + 2y + \frac{1}{5} = 0$.

807④. Змініть у виразі один із коефіцієнтів так, щоб отриманий тричлен можна було подати у вигляді квадрата двочлена (виконайте завдання трьома різними способами):

1) $100m^2 + 40mn + n^2$; 2) $25a^2 - ab + 9b^2$.

808*. Доведіть, що при будь-яких значеннях змінних вираз набуває лише невід'ємних значень:

1) $4x(4x - 10) + 25$; 2) $(a - 2)((a - 2) + 2m) + m^2$;

3) $(a + b)(a + b + 8) + 16$.

До § 18

809①. Які з рівностей є тотожностями:

1) $(b - x)(b + x) = b^2 + x^2$; 2) $(c - d)(c + d) = c^2 - d^2$;

3) $(m + n)(m - n) = (m + n)^2$; 4) $(p + q)(p - q) = p^2 - q^2$.

810②. Виконайте множення многочленів:

1) $(c + 7)(7 - c)$; 2) $(5m - 3)(5m + 3)$;

3) $(3k + 7)(3k - 7)$; 4) $(2p - 9q)(9q + 2p)$;

5) $(10m + 9n)(9n - 10m)$; 6) $\left(\frac{2}{3}c - \frac{4}{5}d\right)\left(\frac{2}{3}c + \frac{4}{5}d\right)$.

811②. Подайте у вигляді многочлена:

1) $4(a - 1)(a + 1)$; 2) $b(b - 2)(b + 2)$;

3) $7p(p + 3)(p - 3)$; 4) $-3x(x + 4)(x - 3)$.

812②. Спростіть вираз і обчисліть його значення:

1) $(1{,}9x - 3)(3 + 1{,}9x) + 0{,}39x^2$, якщо $x = 2$;

2) $9{,}99 - (5y - 0{,}1)(5y + 0{,}1)$, якщо $y = \frac{1}{5}$;

3) $(2x-3y)(2x+3y)-(3x+2y)(3x-2y)$, якщо $x=1{,}8$; $y=-1{,}8$;

4) $(ab+1)(ab-1)(a^2b^2+1)$, якщо $a=5$; $b=\frac{1}{5}$.

813④. Обчисліть: $7^{40}\cdot 3^{40}-(21^{20}-1)(21^{20}+1)$.

До § 19

814①. Які з рівностей є тотожностями:

1) $m^2-p^2=(m+p)(m-p)$; 2) $a^2-7^2=(a-7)(a+7)$;

3) $c^2-d^2=(c-d)(c+d)$; 4) $9^2-a^2=(9-a)(9-a)$.

815②. Розкладіть на множники:

1) x^2-49; 2) $100-p^2$; 3) $49m^2-n^2$;

4) $25x^2-36y^2$; 5) $16a^2-b^2c^2$; 6) $121m^2a^2-9b^2$.

816③. Розв'яжіть рівняння:

1) $a^2x^2-b^2=0$, де x — змінна, $a\neq 0$;

2) $x^2-0{,}09a^2=0$.

817④. Чи ділиться без остачі:

1) 138^2-136^2 на 4; 2) 349^2-347^2 на 6?

818④. Розкладіть вираз на множники:

1) $9-(2x-8)(3x+2)-2x(5x+10)$;

2) $(3x+5)(4x-5)-2x(2{,}5+1{,}5a)$.

До § 20

819①. Який вираз є неповним квадратом суми виразів m і n, а який — неповним квадратом різниці виразів m і n:

1) $m^2-2mn+n^2$; 2) m^2+mn+n^2;

3) $m^2+2mn+n^2$; 4) m^2-mn+n^2?

820②. Розкладіть на множники:

1) x^3-y^3; 2) p^3+l^3; 3) a^3-64;

4) $\frac{1}{125}+b^3$; 5) $1000m^3-1$; 6) $8x^3+27p^3$.

821③. Доведіть, що значення виразу 37^3+13^3 ділиться на 50.

822④. Доведіть тотожність:

$$x^6-y^6=(x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2).$$

До § 21

823①. Закінчіть розкладання на множники:

1) $ym^2 - 4y = y(m^2 - 4) = y(m^2 - 2^2) = \ldots$;

2) $ca^2 + 2ac + c = c(a^2 + 2a + 1) = \ldots$.

824②. Розкладіть на множники многочлен:

1) $mp^2 - mq^2$; 2) $20a^2 - 5$; 3) $c - c^3$;

4) $64a^2 - a^4$; 5) $5x^2 - 10xy + 5y^2$; 6) $2b + 4bn + 2bn^2$.

825③. Подайте у вигляді добутку:

1) $9a^3 - 9b^3$; 2) $\frac{1}{81}p^4 - 1$;

3) $2mn - 2bn + 6bn - 6b$; 4) $m^2 - 4mn + n^2 - 25$;

5) $b^2 - 36 + b - 6$; 6) $m^3 - 4m - m^2n + 4n$.

826④. Розкладіть на множники:

1) $am^4 - m^4 - am^2 + m^2$; 2) $a^3b - a^3 - ab + b$;

3) $b^3 + 1 - b^2 - b$; 4) $x^3 - 27 + x^4 - 9x^2$.

827④. Доведіть тотожність:

1) $(a + 1)^3 - 4(a + 1) = (a + 1)(a - 1)(a + 3)$;

2) $(m^2 + 9)^2 - 36m^2 = (m - 3)^2(m + 3)^2$.

Розділ III
ФУНКЦІЇ

§ 22. ФУНКЦІЯ. ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ І ОБЛАСТЬ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ. СПОСОБИ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

Урок 57

На практиці нам часто трапляються залежності між різними величинами. Наприклад, периметр квадрата залежить від його сторони, площа прямокутника від його довжини і ширини, маса шматка крейди від його об'єму, відстань, що подолав велосипедист, від його швидкості та часу руху тощо. Розглянемо приклади *залежності між двома величинами.*

Приклад 1. Периметр квадрата залежить від довжини його сторони. Нехай сторона квадрата дорівнює a см, а його периметр дорівнює P см.

Для кожного значення змінної a можна знайти відповідне значення змінної P. Наприклад,

якщо $a = 5$, то $P = 4 \cdot 5 = 20$;
якщо $a = 8$, то $P = 4 \cdot 8 = 32$;
якщо $a = 1,2$, то $P = 4 \cdot 1,2 = 4,8$.

Залежність змінної P від змінної a виражається формулою:

$$P = 4a.$$

Оскільки кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає певне значення його периметра, то кажуть, що маємо *відповідність* між довжиною сторони квадарата і його периметром (або *відповідність між змінними a і P*). При цьому вважають, що значенню $a = 5$ *відповідає* значення $P = 20$, або значення $P = 20$ *є відповідним* значенню $a = 5$.

Змінну a, значення якої вибирають довільно, називають ***незалежною змінною***, а змінну P, значення якої визначаються взятими значеннями a,— ***залежною змінною***.

Приклад 2. Шлях, пройдений автомобілем зі швидкістю 80 км/год, залежить від часу руху.

Позначимо час руху автомобіля (у годинах) буквою t, а пройдений шлях (у кілометрах) буквою s. Для кожного значення змінної t (де $t \geq 0$) можна знайти відповідне значення s. Наприклад,

якщо $t = 1{,}5$, то $s = 80 \cdot 1{,}5 = 120$;
якщо $t = 3$, то $s = 80 \cdot 3 = 240$;
якщо $t = 4{,}5$, то $s = 80 \cdot 4{,}5 = 360$.

Залежність змінної s від змінної t виражається формулою:

$$s = 80t.$$

У цьому прикладі t є незалежною змінною, а s — залежною змінною.

У математиці, як правило, незалежну змінну позначають буквою x, а залежну змінну — буквою y.

У розглянутих прикладах кожному значенню незалежної змінної відповідає *єдине значення* залежної змінної.

! Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини відповідає єдине значення змінної y, то таку залежність називають ***функціональною залежністю***, або ***функцією***.

Незалежну змінну інакше називають ***аргументом***, а про залежну змінну говорять, що вона є ***функцією*** від цього аргументу. В розглянутих прикладах периметр P квадрата є функцією від довжини його сторони a; шлях s, пройдений автомобілем зі сталою швидкістю, є функцією від часу руху t. Значення залежної змінної називають ***значенням функції***.

! Усі значення, яких набуває незалежна змінна (аргумент), утворюють *область визначення функції;* усі значення, яких набуває залежна змінна (функція), утворюють *область значень функції.*

Наприклад, область визначення функції, розглянутої у прикладі 1, складається з усіх додатних чисел $a > 0$, а область визначення функції, розглянутої в прикладі 2, складається з усіх невід'ємних чисел $t \geq 0$. Область значень функції, розглянутої у прикладі 1, складається з усіх додатних чисел $P > 0$, а область значень функції, розглянутої у прикладі 2, з усіх невід'ємних чисел $s \geq 0$.

Приклад 3. Функцію задано формулою $y = \frac{8}{x-2}$. Знайти:

1) область визначення функції; 2) значення функції, відповідне значенню аргументу, що дорівнює: -2; 6; 10; 3) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -1.

Р о з в'я з а н н я. 1) Областю визначення функції є всі значення x, при яких має зміст дріб $\frac{8}{x-2}$. Знайдемо те значення x, при якому знаменник дробу дорівнює нулю: $x - 2 = 0$; $x = 2$. Отже, областю визначення функції є всі числа, крім 2.

2) Якщо $x = -2$, то $y = \frac{8}{-2-2} = \frac{8}{-4} = -2$; якщо $x = 6$, то $y = \frac{8}{6-2} = \frac{8}{4} = 2$; якщо $x = 10$, то $y = \frac{8}{10-2} = \frac{8}{8} = 1$.

3) Щоб знайти x, при якому $y = -1$, розв'яжемо рівняння: $-1 = \frac{8}{x-2}$; $x - 2 = -8$; $x = -6$. Отже, значення $y = -1$ функція набуває при $x = -6$.

Задавати функцію можна різними способами. У розглянутих прикладах *функції задано формулами*: $P = 4a$; $s = 80t$ і $y = \frac{8}{x-2}$. Такий спосіб задання функції є досить зручним, бо дає змогу для довільного значення аргументу знаходити відповідне значення функції, та компактним, оскільки у більшості випадків формула займає один рядок.

Задавати функцію можна і *таблицями* (*табличний спосіб задання функції*).

Приклад 4. Починаючи з восьмої години до тринадцятої години, через одну годину вимірювали атмосферний тиск і дані записували в таблицю:

Час t, год	8	9	10	11	12	13
Атмосферний тиск p, мм. рт. ст.	753	754	756	754	753	752

Таблиця задає відповідність між годинами t доби і атмосферним тиском p. Ця відповідність є функцією, бо кожному значенню змінної t відповідає єдине значення змінної p. У цьому прикладі t є незалежною змінною, а p — залежною змінною. Область визначення функції утворюють числа: 8; 9; 10; 11; 12; 13; (числа першого рядка таблиці), а область значень 752; 753; 754; 756 (чисел другого рядка таблиці).

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для знаходження її значень не треба робити ніяких обчислень. Незручним є те, що таблиці займають багато місця і до того ж у таблицях бувають значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких. Зокрема, у прикладі 4 неможливо знайти значення функції, якщо значення аргументу дорівнює, наприклад, 8,5.

До розгляду функцій можуть бути зведені й задачі практичного змісту. В цих випадках функція є *математичною моделлю реальних процесів*. Так у прикладі 2 функція $s = 80t$ є моделлю руху автомобіля зі сталою швидкістю 80 км/год, а в прикладі 4 побудована таблиця — модель вимірювання тиску у відповідні години.

Історичні відомості

Функції — одне з найважливіших понять сучасної математики. Воно було введено у XVII ст., коли у зв'язку з розвитком механіки у математику проникли ідеї зміни і руху.

Так, французькі математики *П'єр Ферма* (1601—1665) та *Рене Декарт* (1596—1650) розглядали функцію як залежність ординати точки кривої від її абсциси.

Термін «функція» (від латинського functio — виконання, звершення) для назви залежностей вперше ввів *Готфрід Лейбніц* (1646—1716). Він пов'язував функцію з графіками.

Швейцарські математики *Йоганн Бернуллі* (1667—1748) та його видатний учень *Леонард Ейлер* (1707—1783) розглядали функцію як аналітичний вираз, тобто вираз, утворений із змінних чисел за допомогою тих чи інших аналітичних операцій. Функцію як залежність однієї змінної величини від іншої ввів чеський математик *Бернард Больцано* (1781—1848).

Найзагальніше сучасне означення поняття «функція» запропонувала в середині XX ст. група математиків, яка виступила під псевдонімом *Нікола Бурбакі*.

? Наведіть приклади функціональної залежності однієї змінної від іншої, назвіть незалежну змінну і залежну. • Що називається функцією? • Що називається областю визначення функції і що — областю значень функції? • Які є способи задання функції? • Наведіть приклад задання функції за допомогою формули.

828①. (Усно.) Чи залежить периметр рівностороннього трикутника від довжини його сторони? Чи є периметр цього трикутника функцією від довжини сторони трикутника? Як можна задати цю функцію, якщо сторона трикутника дорівнює a?

829①. (Усно.) Яка із залежностей є функцією? Назвіть для неї незалежну змінну (аргумент) та залежну змінну (функцію від цього аргументу):

1) $a = 5b - 7$; 2) $m = n^2 + n + m^3$; 3) $y = \frac{1}{5x-7}$;

4) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = 0$; 5) $p = t^2 + t - 5$; 6) $abc = 4$.

830①. Площа прямокутника зі сторонами x см і 10 см дорівнює S. Виразіть формулою залежність S від x. Чи задає ця формула функцію?

831②. Обчисліть значення функції, заданої формулою $y = 5x - 7$ для значень аргументу, що дорівнюють -2; 0; 5; 10.

832②. Функцію задано формулою $y = -\frac{6}{x}$. У таблиці наведено значення аргументу. Заповніть таку таблицю в зошиті, обчисливши відповідні значення функції:

x	-12	-6	-5	-3	2	4	8	10
y								

833②. Поїзд, рухаючись зі швидкістю 65 км/год, проходить за t год відстань s км. Задайте формулою залежність s від t. Обчисліть значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює 1; 2,4; 3; 5,8.

834①. Яка із залежностей є функцією? Назвіть для неї аргумент і функцію від цього аргументу:

1) $m = 2n^2 - 5$; 2) $y = x^3 - x^2 + 3$; 3) $ab + a^2 + b^2 = 0$;

4) $x + y = xy$; 5) $d = \frac{m^2+1}{m-1}$; 6) $p^2m^3 = \frac{p+m}{p-m}$.

835②. Об'єм куба з ребром a см дорівнює V см³. Виразіть формулою залежність V від a. Чи задає ця формула функцію? Знайдіть значення функції, що задається цією формулою, якщо:

1) $a = 5$; 2) $a = 7$; 3) $a = \frac{3}{4}$.

836②. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = \frac{20}{x}$, для значень аргументу, що дорівнюють -40; -10; 4; 5.

837②. Функцію задано формулою $y = 4x + 3$. У таблиці наведено значення аргументу. Заповніть таку таблицю в зошиті, обчисливши відповідні значення функції:

x	-7	-5	-3	-1	2	4	6	8
y								

Урок 58

838①. (Усно.) Площу круга знаходять за формулою $S = \pi r^2$, де r — радіус круга. Чи задає ця формула функцію? Який її аргумент та область визначення?

839②. (Усно.) Функцію задано формулою $y = -2x$.

1) Яка змінна є незалежною, а яка залежною?

2) Знайдіть значення функції, що відповідає значенню аргументу $x = -3; 0; 8$.

840②. Кожному натуральному значенню n відповідає число N, яке у 3 рази більше. Задайте формулою залежність N від n. Знайдіть значення функції, що відповідає значенню аргументу 2; 7; 13; 20.

841②. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 2x - 7$; 2) $y = \frac{5x+7}{8}$; 3) $y = \frac{10}{x}$;4) $y = \frac{5}{x+3}$.

842②. Знайдіть значення аргументу, при якому:

1) функція $y = -3x$ набуває значення -6; 9; 15;

2) функція $y = 5x - 1$ набуває значення -1; 4; 14.

843②. Функцію задано таблицею:

x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	2	7

Знайдіть:

1) значення функції, якщо $x = -2; 0; 1$;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -3; 2; 7;

3) область визначення функції;

4) область значень функції.

844③. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{4}x$. Заповніть порожні клітинки таблиці:

x	-8		1,6		20,8		
y		-9		$-\frac{3}{8}$		$1\frac{5}{7}$	20,7

845②. Периметр прямокутника зі сторонами x дм і 8 дм дорівнює P дм. Запишіть формулу залежності P від x. Для значень аргументу $x = 2; 4; 5; 15$ знайдіть відповідні значення функції P.

846②. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = 3x + 8$; 2) $y = \frac{5x-3}{9}$; 3) $y = -\frac{8}{x}$; 4) $y = \frac{7}{x-5}$.

847②. Знайдіть значення аргументу, при якому:

1) функція $y = 4x$ набуває значення -8; 0; 12;

2) функція $y = 4x + 3$ набуває значення -1; 3; 17.

848②. Функцію задано таблицею:

x	1	2	3	4	5
y	-2	0	2	5	7

Знайдіть:

1) значення функції, відповідне значенню аргументу, що дорівнює 1; 3; 4;

2) значення аргументу, при якому $y = 0$; 5; 7;

3) область визначення функції;

4) область значень функції.

849③. Функцію задано формулою $y = \frac{3}{5}x$. Заповніть порожні клітинки таблиці:

x	-10		0		8,5	
y		$-1{,}2$		$\frac{3}{5}$		13,5

Урок 59

850②. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = x^2 - 3$, для значень аргументу -3; -2; -1; 0; 1; 2.

851③. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

1) $y = \frac{5}{x^2-9}$; 2) $y = \frac{17}{x^2+4}$; 3) $y = \frac{9}{x(x-3)}$;

4) $y = \frac{7x+1}{x^2+x}$; 5) $y = \frac{9}{(x-1)(x+4)}$; 6) $y = \frac{15}{x-2} + \frac{7}{x+3}$.

852③. На початку нагрівання вода мала температуру 20°. При нагріванні температура води підвищувалася щохвилини на 5°.

1) Задайте формулою залежність температури T води від часу t її нагрівання.

2) Знайдіть значення T, що відповідає значенню аргументу $t = 7$; 9; 10.

3) Знайдіть значення t, яким відповідає $T = 45$; 60; 70.

4) При якому значенні t вода закипить?

853③. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-3	-2	1	-3	5	1	6	-2	-3

Знайдіть:

1) значення y, коли $x = -4; -1; 0; 3$;

2) значення x, яким відповідає $y = -3; -2; 5$;

3) значення x, якому відповідає таке саме значення y;

4) область визначення функції;

5) область значень функції.

854③. Складіть таблицю значень функції $y = 0{,}6 - 0{,}3x$, де $-2 \le x \le 5$ із кроком, що дорівнює 1. Користуючись складеною таблицею, вкажіть:

1) значення функції, що відповідає значенню аргументу, яке дорівнює 0;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 0.

855④. Знайдіть значення функції, відповідне значенню аргументу, що дорівнює -5; 0; 3.

1) $y = \begin{cases} 4x - 3, \text{ якщо } x < 0, \\ -2x, \text{ якщо } x \ge 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 7, \text{ якщо } x \le 1, \\ x^2, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$

856④. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 + 2x + 5$.

857②. Складіть таблицю значень функції, заданої формулою $y = 5 - x^2$, для значень аргументу $-2; -1; 0; 1; 2; 3$.

858③. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \dfrac{7}{x^2-4}$; 2) $y = \dfrac{13}{x^2+1}$; 3) $y = \dfrac{14}{(x+2)x}$;

4) $y = \dfrac{9}{x^2-x}$; 5) $y = \dfrac{7}{(x+5)(x-3)}$; 6) $y = \dfrac{14}{x+3} + \dfrac{7}{x-1}$.

859③. Проїхавши 10 км від міста, велосипедист змушений був зупинитися. Потім він продовжив рух зі швидкістю 15 км/год.

1) Задайте формулою залежність шляху s (у км), що проїхав велосипедист, від часу t (у год), що відраховується після зупинки.

2) Знайдіть значення s, що відповідає значенню аргументу $t = 1$; $t = 2$; $t = 5$.

3) Знайдіть значення t, яким відповідає $s = 34$; $s = 55$; $s = 70$.

860③. У таблиці подано залежність функції y від аргументу x.

x	−8	−6	−4	−2	0	2	4	6	8
y	−1	2	4	2	4	7	2	−1	9

Знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -8; -2; 4; 6$;

2) значення x, яким відповідає $y = -1; 4; 7$;

3) значення x, якому відповідає протилежне йому значення y;

4) область визначення функції;

5) область значень функції.

861④. Знайдіть значення функції, відповідне значенню аргументу, що дорівнює −2; 0; 4:

1) $y = \begin{cases} 7x - 2, \text{ якщо } x \le 0, \\ -3x, \text{ якщо } x > 0; \end{cases}$

2) $y = \begin{cases} 3, \text{ якщо } x \le 2, \\ -x^2, \text{ якщо } x > 2. \end{cases}$

862③. Обчисліть:

$$\frac{8}{15} \cdot 0{,}5625 - \left(\frac{11}{24} + 1\frac{13}{36}\right) \cdot 1{,}44 + 2\frac{8}{25}.$$

863③. Спростіть:

1) $64 - (8 - 3m)^2$; 2) $a^2b^2 - (ab + 7)^2$;

3) $t^2 + 25 - (t - 5)^2$; 4) $p^4 - 16 - (p^2 + 4)^2$.

864③. Які одночлени треба записати замість *, щоб утворилася тотожність:

1) $(3x - 2y)(* + *) = 9x^2 - 4y^2$;

2) $(5m + *)(5m - *) = 25m^2 - 36$;

3) $(7c^2 - *)(* + 3p) = 49c^4 - 9p^2$;

4) $(4m + 9a^2)(* - *) = 81a^4 - 16m^2$?

865④. Сторона квадрата на 4 см більша від однієї сторони прямокутника і на 5 см менша від другої його сторони. Знайдіть сторону квадрата, якщо його площа на 10 см² більша за площу прямокутника.

§ 23. ГРАФІК ФУНКЦІЇ. ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ ЗАДАННЯ ФУНКЦІЇ

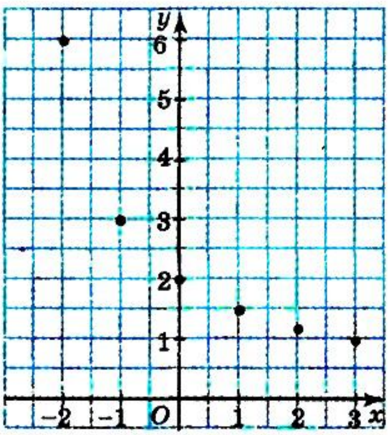
Урок 60

Приклад 1. Розглянемо функцію $y = \frac{6}{x+3}$, де $-2 \le x \le 3$. Знайдемо значення цієї функції для цілих значень аргументу і занесемо результати у таблицю:

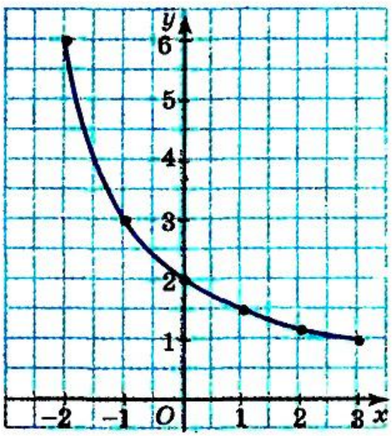
x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	1,5	1,2	1

Позначимо точки, координати яких подано у таблиці, тобто точки $(-2; 6)$, $(-1; 3)$, $(0; 2)$, $(1; 1{,}5)$, $(2; 1{,}2)$, $(3; 1)$ на координатній площині. Абсциси цих точок дорівнюють вибраним значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції (мал. 6). Якщо взяти інші значення x з проміжку від -2 до 3 і обчислити відповідні їм значення y за формулою $y = \frac{6}{x+3}$, то дістанемо інші пари значень x і y. Кожній із цих пар відповідає певна точка координатної площини. Усі такі точки утворюють фігуру, яка називається *графіком функції* $y = \frac{6}{x+3}$, де $-2 \le x \le 3$ (мал. 7).

! ***Графіком функції*** **називається фігура, яка складається з усіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.**



Мал. 6



Мал. 7

Приклад 2. Побудувати графік функції $y = x^2 - 1$, де $-3 \le x \le 2$.

Р о з в'я з а н н я. Складемо таблицю значень функції для цілих значень аргументу:

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	8	3	0	-1	0	3

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці на координатній площині, і сполучимо їх плавною лінією (мал. 8). Дістали графік функції $y = x^2 - 1$, де $-3 \le x \le 2$.

Зауважимо, що чим більше буде позначено точок, що належать графіку, і чим щільніше вони будуть розміщені, тим точніше буде побудований графік.

Дивлячись на графік, відразу можна сказати, при яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких — від'ємні і при яких дорівнюють нулю, а також знайти область значень функції.

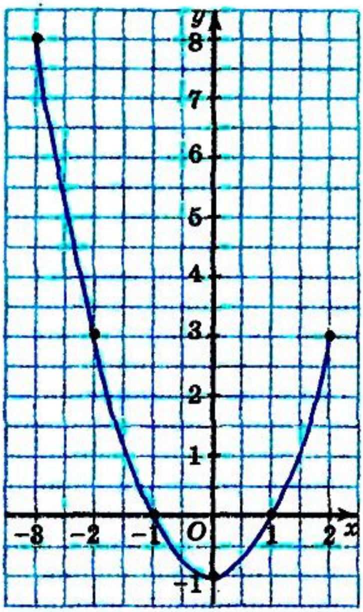
Нуль функції **— значення аргументу, при якому значення функції дорівнює нулю.**

Приклад 3. Використовуючи графік функції $y = x^2 - 1$, де $-3 \le x \le 2$, знайти: 1) нулі функції; 2) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень; 3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень; 4) область значень функції.

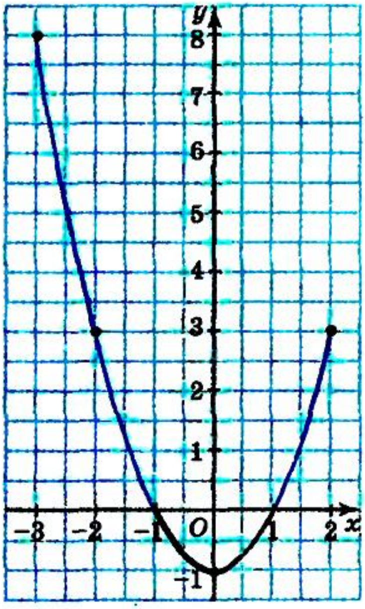
Р о з в'я з а н н я. 1) Нулі функції — це абсциси точок перетину графіка функції з віссю x. Тому, $x = -1$ і $x = 1$ — нулі функції (див. мал. 8). Зауважимо, що нулі функції можна було знайти, і не використовуючи графік. Для цього досить було розв'язати рівняння $x^2 - 1 = 0$.

2) Для значень x таких, що $-3 \le x < -1$, точки графіка розміщені вище від осі абсцис (на малюнку 9 ця частина графіка позначена кольором). Тому, якщо $-3 \le x < -1$, то функція набуває додатних значень. Також вище від осі абсцис знаходяться точки графіка для значень x таких, що $1 < x \le 2$ (див. мал. 9, частина графіка також позначена кольором). Тому, якщо $1 < x \le 2$, то функція набуває додатних значень. Отже, якщо $-3 \le x < -1$ або $1 < x \le 2$, то функція набуває додатних значень.

3) Для значень x таких, що $-1 < x < 1$, точки графіка розміщені нижче від осі абсцис (на малюнку 9 ця частина графіка



Мал. 8



Мал. 9

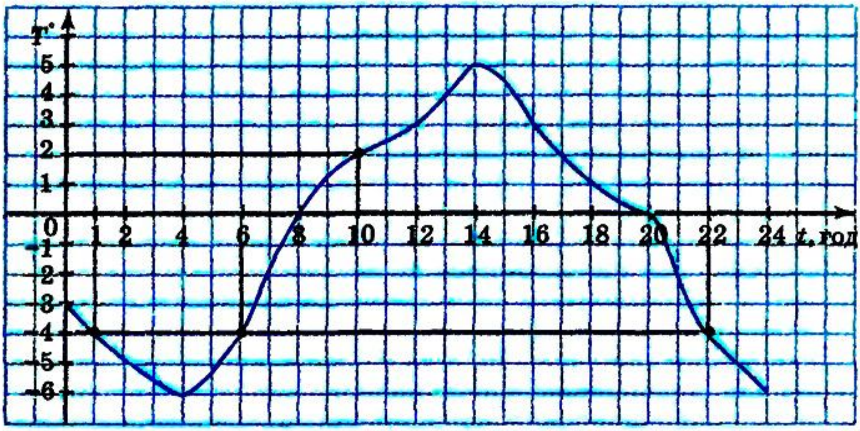
позначена чорним кольором). Тому, якщо $-1 < x < 1$, то функція набуває від'ємних значень.

4) Функція може набувати будь-яких значень від -1 до 8. Тому областю значень функції є всі значення y, такі, що $-1 \leq y \leq 8$.

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу з області визначення знайти відповідне значення функції. Також, користуючись графіком, можна скласти таблицю значень функції. Отже робимо висновок: *графік задає функцію*. Такий спосіб задання функції називається *графічним*. Цей спосіб задання функції зручний своєю наочністю і часто використовується для відображення змін, які відбуваються у практичній діяльності людини.

Приклад 4. За допомогою термографа (приладу, який фіксує зміну температури протягом певного часу, подаючи ці зміни у вигляді графіка) дістали графік температури повітря протягом доби (мал. 10). За допомогою цього графіка знайти: 1) якою була температура о 10 год; 2) о котрій годині температура була -4°.

Р о з в'я з а н н я. 1) Через точку осі t з координатами (10; 0) проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 10). Точка перетину цього перпендикуляра з графіком температури має координати (10; 2). Отже, о 10 год температура повітря була 2°.



Мал. 10

2) Через точку осі T з координатами $(0; -4)$ проведемо перпендикуляр до цієї осі (мал. 10). Цей перпендикуляр перетинає графік температури в точках $(1; -4)$, $(6; -4)$ і $(22; -4)$. Отже, температура повітря $-4°$ була о 1 год, о 6 год і о 22 год.

Дайте означення графіка функції. • Як побудувати графік функції? • Покажіть, як за допомогою графіка функції знайти значення функції, відповідне даному значенню аргументу, та значення аргументу, яким відповідає дане значення функції, (на прикладі одного з графіків на мал. 7, 8 і 10).

866②. На малюнку 11 подано графік функції.

1) Користуючись графіком, заповніть у зошиті таку таблицю:

x	-3	$-2,5$	-2	$-1,5$	$-0,5$	0	1	2	3
y									

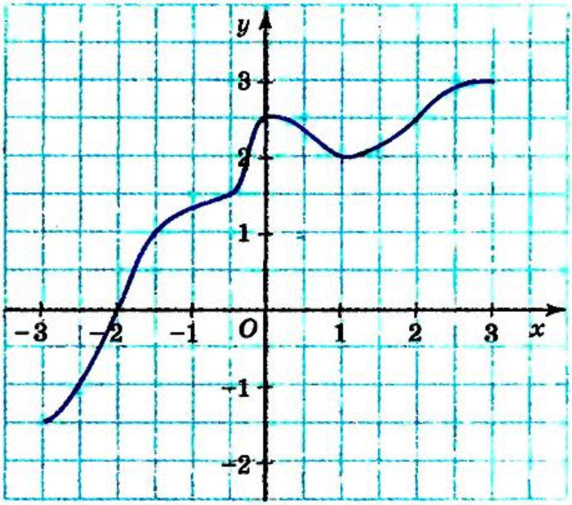
2) Знайдіть область визначення і область значень функції.

867②. 1) Побудуйте графік функції $y = x - 3$, де $-2 \le x \le 5$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.

2) Чи належить графіку функції точка A $(3; 0)$; точка B $(-1; 2)$?

3) Знайдіть за графіком значення функції, якщо $x = 2$; $x = 4$.

4) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = -3$; $y = 2$.



Мал. 11

868②. Не виконуючи побудови графіка, знайдіть нулі функції:

1) $y = 3x$; 2) $y = 2x - 4$; 3) $y = -\frac{x}{8}$; 4) $y = \frac{x-5}{4}$.

869③. За графіком на малюнку 10 знайдіть:

1) Якою була температура повітря в 0 год; о 2 год; о 9 год; о 12 год; о 18 год?

2) О котрій годині температура повітря була $-6°$; $-2°$; $1°$; $3°$?

3) Якою була найнижча температура і о котрій годині?

4) Якою була найвища температура і о котрій годині?

5) Протягом якого часу температура підвищувалась?

6) Протягом якого часу температура знижувалась?

7) Протягом якого часу температура повітря була нижча від нуля?

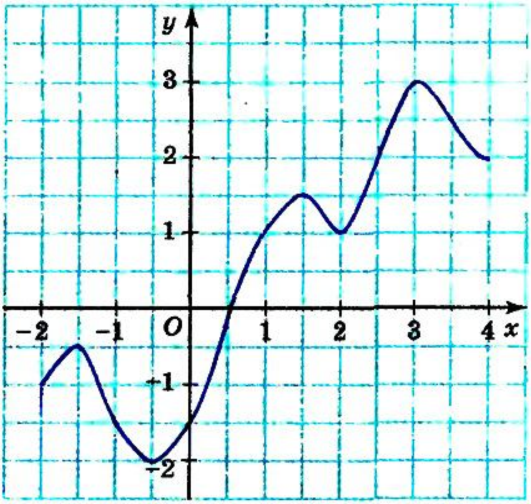
8) Протягом якого часу температура повітря була вища від нуля?

870②. На малюнку 12 подано графік функції.

1) Користуючись графіком, заповніть таблицю:

x	−2	−1,5	−1	−0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
y													

2) Знайдіть область визначення і область значень функції.



Мал. 12

871②. 1) Побудуйте графік функції $y = x + 2$, де $-4 \le x \le 3$, склавши таблицю для цілих значень аргументу.

2) Чи належить графіку функції точка $C(2;\ 5)$, точка $D(-2;\ 0)$?

3) Знайдіть за графіком значення функції, якщо $x = -3$; $x = 1$.

4) Знайдіть за графіком значення аргументу, якому відповідає значення функції $y = 1$; $y = 5$.

872②. Не будуючи графік, знайдіть нулі функції:

1) $y = -2x$; 2) $y = 6 - 2x$; 3) $y = \frac{x}{9}$; 4) $y = \frac{x+2}{7}$.

873②. Знайдіть за графіком на малюнку 10:

1) Якою була температура повітря о 3 год; о 5 год; о 7 год; о 21 год?

2) О котрій годині температура повітря була -5°; 0°; 5°?

Урок 61

874③. За графіком на малюнку 13 знайдіть:

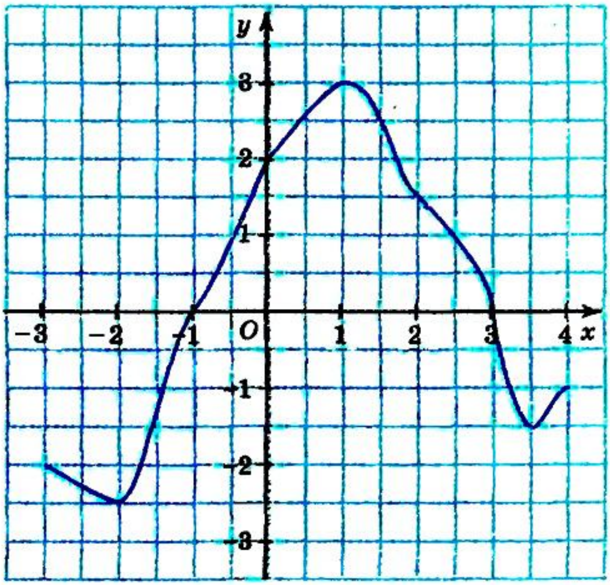
1) значення y, якщо $x = -3$; -2; $-0{,}5$; $1{,}5$; 4;

2) значення x, яким відповідає $y = -2{,}5$; $-1{,}5$; 1;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.



Мал. 13

875[③]**.** Не виконуючи побудови, визначте, чи належить графіку функції $y = x^2 - 3x$ точка:

1) $A\ (1; -2)$; 2) $B\ (-2; -2)$;
3) $C\ (0; -3)$; 4) $D\ (-1; 4)$.

876[③]**.** Ламана ABC — графік деякої функції, причому $A\ (-3; 2)$, $B\ (1; 6)$, $C\ (4; 0)$. Побудуйте графік і знайдіть за його допомогою:

1) значення функції, які відповідають $x = -2;\ 0;\ 1$.

2) значення аргументу, яким відповідає $y = 2;\ 4;\ 6$.

877[③]**.** Не будуючи графік, знайдіть нулі функції:

1) $y = x^2 - 4x$; 2) $y = x^2 - 16$; 3) $y = 2x^2 + 10x$.

878[③]**.** Побудуйте графік функції:

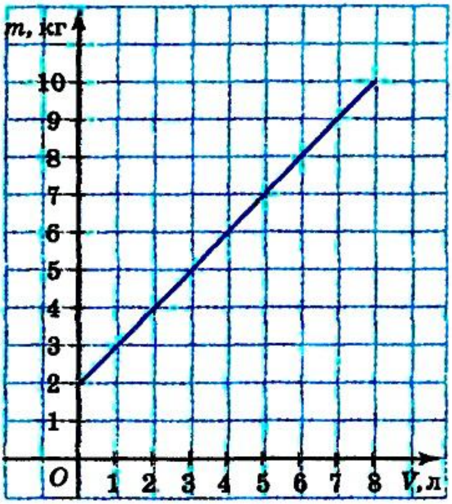
1) $y = \frac{8-x}{2}$, де $-2 \le x \le 10$;

2) $y = x(4 + x)$, де $-5 \le x \le 1$.

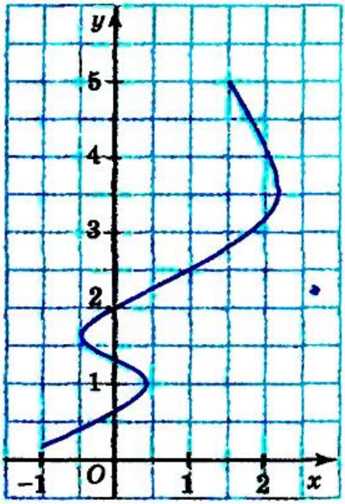
879[④]**.** На малюнку 14 зображено графік залежності маси m (у кг) відра з водою від об'єму води V (у л). Знайдіть за графіком:

1) масу порожнього відра;

2) масу відра з 4 $л$ води;



Мал. 14



Мал. 15

3) масу одного літра води;

4) об'єм води у відрі, якщо маса відра з водою дорівнює 8 кг.

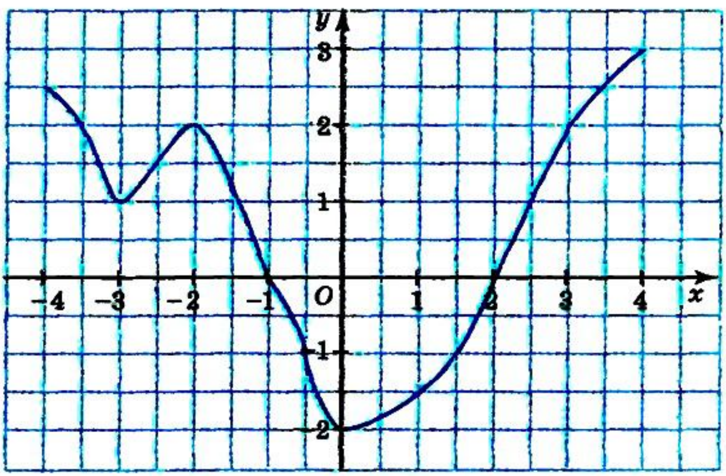
880. Чи є графіком функції *лінія*, зображена на малюнку 15?

881. За графіком функції (мал. 16) знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -3{,}5$; -2; $-1{,}5$; 0; 1; $2{,}5$.

2) значення x, яким відповідає $y = -1$; 1; 2; 3;

3) нулі функції;



Мал. 16

4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

882③. Не будуючи графік функції $y = 2x + x^2$, визначте, чи належить йому точка:

1) $A(1; 3)$; 2) $B(-1; 3)$; 3) $C(0; 0)$; 4) $D(-2; 4)$.

883③. Ламана MNL — графік деякої функції, причому $M(-2; -1)$, $N(2; 3)$, $L(6; -1)$. Побудуйте графік і знайдіть за його допомогою:

1) значення функції, які відповідають $x = -2; 0; 2; 5$;

2) значення аргументу, яким відповідає $y = -1; 1; 2$.

884③. Не будуючи графік, знайдіть нулі функції:

1) $y = x^2 + 2x$; 2) $y = x^2 - 25$; 3) $y = 3x^2 - 12x$.

885③. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{x+3}{2}$, де $-5 \le x \le 7$;

2) $y = x(4 - x)$, де $-1 \le x \le 5$.

886③. Спростіть вираз:

1) $(a - 5)(a + 5) - a(a + 7)$; 2) $m(m - 4) + (9 - m)(m + 9)$;

3) $2a(a - b) - (a - b)^2$; 4) $(5p - q)(q + 5p) - (p - 5q)^2 - 10pq$.

887④. Доведіть, що різниця трицифрового натурального числа і суми його цифр кратна 9.

§ 24. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ, ЇЇ ГРАФІК ТА ВЛАСТИВОСТІ

Урок 62

Багато функцій можна задати формулою $y = kx + b$, де k і b — дані числа.

Приклад 1. Маса одного цвяха 4 г, а маса порожнього ящика 600 г. Залежність між масою ящика із цвяхами m (у г), в якому x цвяхів (де x — натуральне число), можна задати формулою:

$$m = 4x + 600.$$

Приклад 2. Зарплата продавця за місяць становить 500 грн. та премія в розмірі 1 % від вартості реалізованого товару. Залежність між зарплатою y (у грн.) і вартістю x (у грн.) реалізованого товару можна задати формулою:

$$y = 0{,}01x + 500, \text{ де } x \ge 0.$$

В обох прикладах функції задано формулами виду $y = kx + b$, де k і b — числа.

Лінійною **називається функція, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — незалежна змінна, k і b — деякі числа.**

Розглянемо питання про графік лінійної функції. У формулі $y = kx + b$ незалежній змінній x можна надавати будь-яких значень, тому область визначення лінійної функції складається з усіх чисел.

Приклад 3. Побудувати графік лінійної функції $y = 0{,}25x - 1$.

Р о з в'я з а н н я. Складемо таблицю кількох значень незалежної змінної x та відповідних значень функції y:

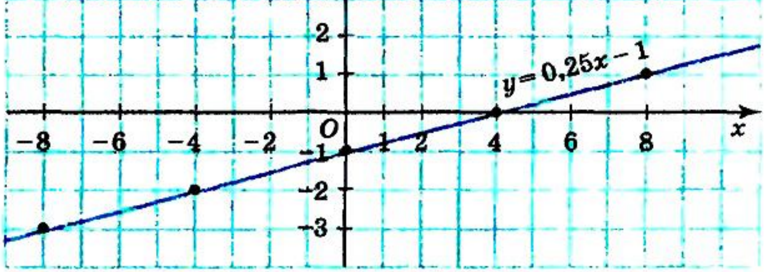
x	−8	−4	0	4	8
y	−3	−2	−1	0	1

Позначимо точки, координати яких подано в таблиці на координатній площині (мал. 17). За допомогою лінійки можна пересвідчитися, що всі побудовані точки лежать на одній прямій. Ця пряма є графіком лінійної функції $y = 0{,}25x - 1$.

У старших класах ви переконаєтеся, що

графіком будь-якої лінійної функції є пряма.

Для побудови прямої, яка є графіком лінійної функції, досить знайти координати двох точок графіка, позначити ці точки на координатній площині і провести через них пряму.



Мал. 17

Приклад 4. Побудувати графік функції $y = -2x + 3$.

Р о з в'я з а н н я. Складемо таблицю для двох яких-небудь значень аргументу:

x	0	4
y	3	−5

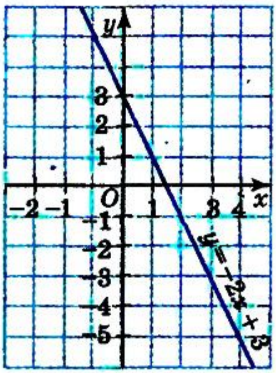
Позначимо на координатній площині отримані точки та проведемо через них пряму (мал. 18). Дістали графік функції $y = -2x + 3$.

Для побудови графіка зручно, щоб координати точок були цілими числами. Тому, якщо є можливість, цілочисельні значення незалежної змінної x вибирають так, щоб значення залежної змінної y також було цілим числом. Наприклад, щоб побудувати графік функції $y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$, зручно взяти дві точки $(-1; -1)$ і $(5; 1)$.

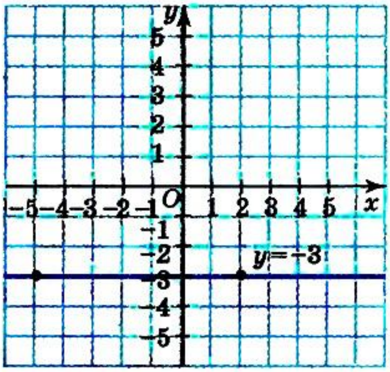
Якщо $k = 0$, формула $y = kx + b$, якою задається лінійна функція, набирає вигляду $y = 0x + b$, тобто $y = b$. Лінійна функція, що задана формулою $y = b$, набуває одне й те саме значення при будь-якому x.

Приклад 5. Побудувати графік функції $y = -3$.

Р о з в'я з а н н я. Будь-якому значенню x відповідає одне й те саме значення y, що дорівнює −3. Графіком функції є пряма, утворена точками з координатами $(x; -3)$, де x — будь-яке число. Позначимо дві будь-які точки з ординатою −3, наприклад, $(-5; -3)$ і $(2; -3)$, і проведемо через них пряму (мал. 19). Ця пряма є графіком функції $y = -3$. Зауважимо, що вона паралельна осі x. Отже,



Мал. 18



Мал. 19

щоб побудувати графік функції $y = b$, досить позначити на осі y точку з координатами $(0; b)$ та провести через цю точку пряму, паралельну осі x.

Якщо $b = 0$, $k \neq 0$, формула $y = kx + b$ набирає вигляду $y = kx$.

Функція, яку можна задати формулою виду $y = kx$, де x — незалежна змінна, k — число, відмінне від нуля, називається *прямою пропорційністю*.

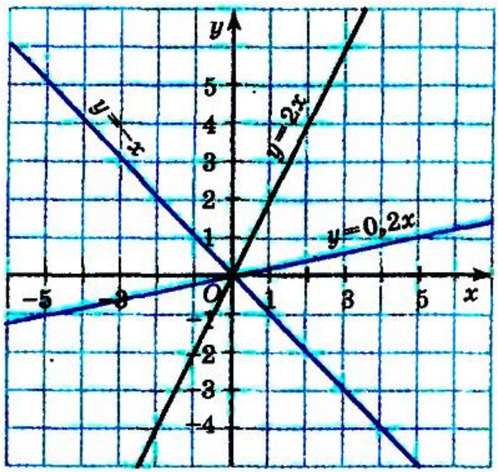
Оскільки пряма пропорційність є окремим випадком лінійної функції, і до того ж, коли $x = 0$, то й значення y дорівнює 0, тому

графіком прямої пропорційності є пряма, яка проходить через початок координат.

Приклад 6. На малюнку 20 зображено графіки функцій $y = -x$; $y = 2x$; $y = 0{,}2x$.

Узагальнимо *властивості лінійної функції* $y = kx + b$:

1. Область визначення функції складається з усіх чисел.
2. Область значень функції при $k \neq 0$ складається з усіх чисел; при $k = 0$ функція набуває єдиного значення: $y = b$.
3. Графіком функції є пряма.



Мал. 20

Сформулюйте означення лінійної функції. • Що є графіком лінійної функції? • Як його побудувати? • Як побудувати графік функції $y = b$, де b — число? • Яка функція називається прямою пропорційністю? • Які властивості має лінійна функція?

888①. (Усно.) Чи є лінійною функція, задана формулою:

1) $y = 2x - 5$; 2) $y = 2x - 5x^2$; 3) $y = 8$;

4) $y = \frac{7}{x}$; 5) $y = \frac{x}{7} + 3$; 6) $y = x - 1 - x^5$.

889②. Ширина прямокутника x см, а довжина на 3 см більша. Задайте формулою залежність периметра прямокутника від його ширини і залежність площі прямокутника від ширини. Яка з цих залежностей є лінійною функцією?

890②. Учень купив альбом для марок за 5 грн. і кілька зошитів по 2 грн. Задайте залежність кількості гривень y, які витратив учень, від кількості куплених зошитів x. Чи є ця залежність лінійною функцією? Якою є область визначення цієї функції?

891②. Лінійну функцію задано формулою $y = 0{,}5x + 3$. Знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -12$; 0; 18;

2) при якому значенні x значення y дорівнює -4; 8; 2,5.

892②. Заповніть таблицю у зошиті і побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = -x + 2$; 2) $y = 2x - 3$.

x	0	4
y		

x		
y		

893①. Які з функцій є лінійними:

1) $y = 3x^2 - 4$; 2) $y = 3x - 4$; 3) $y = \frac{5}{x}$;

4) $y = \frac{x}{5} - 2$; 5) $y = -8$; 6) $y = 5x - x^3$?

894②. Учень мав 3 грн. На ці гроші він купив x олівців по 15 к., після чого в нього залишилося y к. Задайте формулою залежність y від x. Чи є ця залежність лінійною функцією?

895②. Лінійну функцію задано формулою $y = -2x + 3$. Знайдіть:

1) значення y, якщо $x = 1{,}5;\ -4;\ -6{,}5$;

2) значення x, при якому $y = 5;\ 0;\ -8$.

896②. Заповніть таблицю і побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x - 3$;

x	0	3
y		

2) $y = -3x + 1$.

x		
y		

Урок 63

897①. (Усно.) Які з функцій задають пряму пропорційність:

1) $y = 5x$; 2) $y = \frac{5}{x}$; 3) $y = x + 5$;

4) $y = 5$; 5) $y = -\frac{x}{5}$; 6) $y = \frac{x}{5}$?

898①. Назвіть які-небудь дві точки, що належать графіку функції $y = 5x - 2$.

899② Побудуйте графік лінійної функції:

1) $y = x + 2$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = 0{,}5x - 3$;

4) $y = \frac{2}{3}x - 1$; 5) $y = -1$; 6) $y = -x + 4{,}5$.

900②. Мотоцикліст рухається зі швидкістю 65 км/год. Задайте формулою залежність пройденого шляху s (у кілометрах) від часу t (у годинах). Чи є ця залежність прямою пропорційністю?

901③. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 1{,}8x - 7$, з'ясуйте, чи проходить цей графік через точку:

1) $A\,(0;\ 7)$; 2) $B\,(-5;\ -16)$; 3) $C\,(5;\ -2)$; 4) $D\,(10;\ 11)$.

902③. Знайдіть значення k, якщо відомо, що графік функції $y = kx - 2$ проходить через точку $A\,(6;\ -11)$.

903④. Графік прямої пропорційності проходить через точку $M\,(1;\ -2)$. Чи проходить цей графік через точку $N\,(4;\ 8)$?

904① Чи є прямою пропорційністю функція, задана формулою:

1) $y = -4x$; 2) $y = -4x + 2$; 3) $y = -\frac{4}{x}$;

4) $y = -4$; 5) $y = \frac{x}{4}$; 6) $y = -\frac{x}{4}$?

905②. Побудуйте графік лінійної функції.

1) $y = x - 1$; 2) $y = -2x + 5$; 3) $y = -0{,}5x + 3$;

4) $y = \frac{3}{4}x + 1$; 5) $y = 4$; 6) $y = x - 1{,}5$.

906②. Напишіть формули, що виражають залежність довжини кола C від його радіуса r і площі круга S, обмеженого цим колом, від радіуса r. Яка з цих залежностей є прямою пропорційністю?

907②. Не будуючи графік функції $y = -3x + 7$, з'ясуйте, чи проходить цей графік через точку:

1) $A(1; -4)$; 2) $B(0; 7)$; 3) $C(-1; 10)$; 4) $D(10; -37)$.

908③. Знайдіть значення b, якщо графік функції $y = -\frac{1}{5}x + b$ проходить через точку $M(10; -5)$.

Урок 64

909①. (Усно.) Лінійні функції задано формулами:

1) $y = -0{,}8x + 7$; 2) $y = 2{,}4x$;
3) $y = -15$; 4) $y = 0$.

Чому дорівнюють коефіцієнти k і b у кожній з цих формул?

910②. Запишіть формули двох будь-яких лінійних функцій, графіки яких проходять через точку $P(1; -5)$.

911②. Не виконуючи побудови, знайдіть нулі функції:

1) $y = 2x - 6$; 2) $y = -\frac{1}{2}x + 8$;

3) $y = 7x$; 4) $y = -5x$.

912③. Накресліть графік функції $y = -2{,}5x + 5$. Знайдіть за графіком:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює -4; 0; 2;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює -5; 0; 10;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень;

6) точки перетину з осями координат.

913③. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

1) $y = 1{,}5x - 20$; 2) $y = -\frac{x}{4} + 5$.

914③. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій та знайдіть точки їх перетину:

1) $y = -0{,}5x - 1$ і $y = x - 4$; 2) $y = -2$ і $y = 3x - 5$.

915④. Функцію $y = 2x + 1$ задано для $-3 \le x \le 4$. Яка область значень цієї функції?

916②. Графіки яких функцій проходять через точку $F(1; -4)$:

1) $y = 4x$; 2) $y = 2x - 2$; 3) $y = 1$;

4) $y = -4$; 5) $y = -4x$; 6) $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$?

917②. Не будуючи графік, знайдіть нулі функції:

1) $y = 4x + 12$; 2) $y = -8x$.

918③. Побудуйте графік функції $y = 1{,}5x - 3$. Знайдіть за графіком:

1) яке значення y відповідає $x = -2$; 0; 4;

2) якому значенню x відповідає $y = -3$; 0; 6;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень;

6) точки перетину з осями координат.

919③. В яких точках перетинає осі абсцис і ординат графік функції:

1) $y = 0{,}2x - 40$; 2) $y = -\frac{1}{3}x + 18$?

920③. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 1{,}5x - 4$ і $y = 2$ та знайдіть координати точки їх перетину.

Урок 65

921②. Використовуючи графік функції (мал. 21), заповніть таблицю:

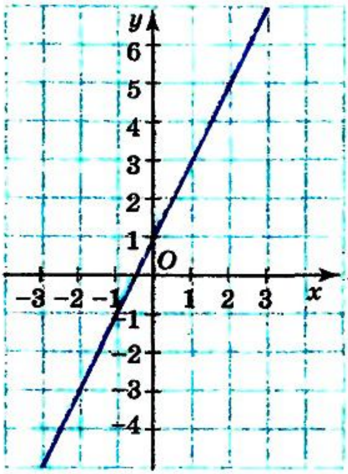
x	−2	0	1	3			
y					−5	−1	5

922②. Побудуйте графік прямої пропорційності, заданої формулою:

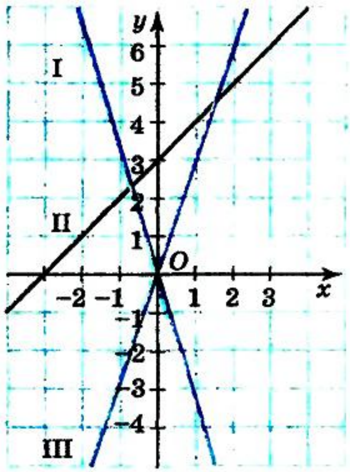
1) $y = x$; 2) $y = -2{,}5x$;

3) $y = -x$; 4) $y = \frac{1}{2}x$.

923③. Точка $A(0{,}7; 70)$ належить графіку функції, яка є прямою пропорційністю. Запишіть формулою цю функцію.



Мал. 21



Мал. 22

924③. Побудуйте графік функції:

1) $y = \frac{1}{2}(6 - x)$; 2) $y = \frac{x-5}{5}$.

925③. Усі точки графіка функції $y = kx + b$ мають одну й ту саму ординату, яка дорівнює 5. Знайдіть k і b.

926④. На малюнку 22 зображено графіки функцій $y = 3x$; $y = -3x$ і $y = x + 3$. Яка формула відповідає кожному з них?

927④. Не будуючи графік функції $y = 4x - 6$, знайдіть точку цього графіка, в якої:

1) абсциса дорівнює ординаті;

2) абсциса і ордината — протилежні числа;

3) абсциса у два рази менша за ординату.

928④. Побудуйте графік функції:

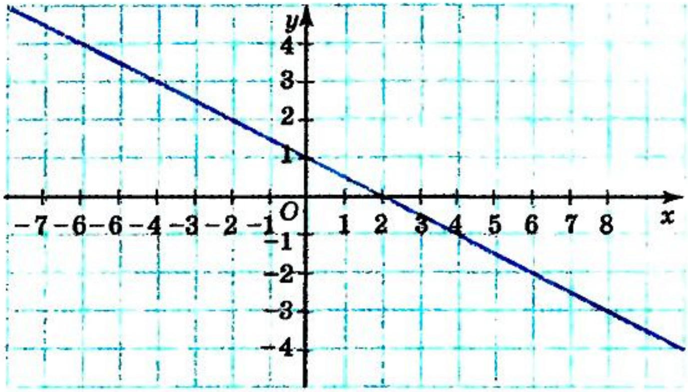
1) $y = \begin{cases} x + 1, \text{ якщо } x \le 0; \\ 1, \text{ якщо } x > 0; \end{cases}$ 2) $y = \begin{cases} 2x, \text{ якщо } x < -2; \\ 3x + 2, \text{ якщо } x \ge -2. \end{cases}$

929②. Використовуючи графік функції (мал. 23), заповніть таблицю:

x	-6	-2	2			
y				-3	-1	3

930②. Побудуйте графік прямої пропорційності, заданої формулою:

1) $y = 1{,}5x$; 2) $y = -2x$.



Мал. 23

931③. Задайте формулою пряму пропорційність, якщо відомо, що її графік проходить через точку $B(-2;\ 18)$.

932③. Графік функції $y = kx + b$ паралельний осі абсцис і проходить через точку $M(0;\ -5)$. Знайдіть k і b.

933④. Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} 2 - 3x, \text{ якщо } x < 1; \\ 2x - 3, \text{ якщо } x \geq 1. \end{cases}$$

934③. Розв'яжіть рівняння:

1) $(2x + 5)^2 - (2x - 3)^2 = 16$;

2) $(7x + 1)^2 - (49x - 2)(x - 1) = -66$.

935③. Подайте у вигляді многочлена:

1) $(5m - 2)(5m + 2) - m(10m - 1) + \left(m - \frac{1}{2}\right)^2$;

2) $(a + 4y)^2 - (a - 2y)(a + 2y) - y(4a - 5y)$.

936③. Порівняйте з нулем значення виразу, якщо $x > 0$.

1) $7x$; 2) $-x$; 3) $x + 5$; 4) $-2x$; 5) $\frac{x}{10}$; 6) $-\frac{8}{x}$.

937④. На столі — 73 зошити, а в коробці — 17 зошитів. Скільки зошитів треба перекласти зі стола у коробку, щоб зошитів у коробці стало у 2 рази менше, ніж на столі?

938④. Подайте у вигляді квадрата двочлена, якщо це можливо, вираз:

1) $\frac{1}{9}p^2 + pq + 9p^2$; 2) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{15}xy + \frac{1}{25}y^2$;

3) $4x^2 - 20xy - 25y^2$; 4) $-36ab + 9a^2 + 36b^2$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 22—24

Урок 66

1①. Які із залежностей є функціями?

1) $y = x^2 + x$; 2) $y = \frac{x-1}{y+2}$;

3) $y = \frac{1}{x-8}$; 4) $xy = (x-y)^2$?

2①. Чи є лінійною функція, задана формулою:

1) $y = 3x - 7$; 2) $y = x^2 - 5$;

3) $y = 4$; 4) $y = \frac{1}{2x-4}$?

3①. Лінійну функцію задано формулою:

1) $y = -2x + 6$; 2) $y = 7{,}4x$.

Чому дорівнюють коефіцієнти k і b у кожній з цих формул?

4②. Функцію задано формулою $y = -2x + 7$. Знайдіть:

1) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 5;

2) значення аргументу, якщо значення функції дорівнює 3.

5②. Побудуйте графік функції $y = 2x - 5$. За графіком знайдіть:

1) значення функції, якщо $x = 4$;

2) значення аргументу, при якому $y = -3$.

6②. Функцію задано формулою $y = 0{,}8x - 7{,}2$. Не виконуючи побудови:

1) знайдіть нулі функції;

2) з'ясуйте, чи проходить графік функції через точку $A(10; 1)$.

7③. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{7}{x^2-5x}$.

8③. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = -2{,}5x$ і $y = -5$ та знайдіть координати точки їх перетину.

9④. Знайдіть найменше значення функції $y = x^2 - 6x + 11$.

Додаткові завдання

10④. Функцію $y = 3x - 7$ задано для $-2 \le x \le 5$. Знайдіть область значень цієї функції.

11④. Побудуйте графік функції $y = \begin{cases} 2x + 6, \text{ якщо } x < 0; \\ 6 - x, \text{ якщо } x \ge 0. \end{cases}$

За графіком знайдіть:

1) нулі функції;

2) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;

3) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

Вправи для повторення розділу III

До § 22

939①. Чи залежить площа квадрата від довжини його сторони? Чи є площа квадрата функцією від довжини сторони квадрата? Як можна задати цю функцію, якщо сторона квадрата дорівнює a?

940②. Функції задано формулами $y = \frac{x+2}{x-3}$ і $g = \frac{x-4}{5}$. Заповніть таблицю, обчислюючи відповідні значення функції:

x	-4	-2	0	2	4
y					
g					

941③. Із села до міста, віддаленого на відстань 48 км, вирушив велосипедист зі швидкістю 14 км/год. Задайте формулою залежність змінної s від змінної t, де s — відстань велосипедиста до міста (у кілометрах), а t — час його руху (у годинах). Знайдіть за формулою:

1) s, якщо $t = 1{,}5$; 2) t, якщо $s = 13$.

942④. Знайдіть область визначення функції:

1) $y = \frac{12}{9x^2-17x}$; 2) $y = \frac{x}{|x|-1}$; 3) $y = \frac{2}{|x|+5}$;

4) $y = \frac{9}{3-|x-1|}$; 5) $y = \frac{15}{|2x-3|-5}$; 6) $y = \frac{2}{1-\frac{1}{x}}$.

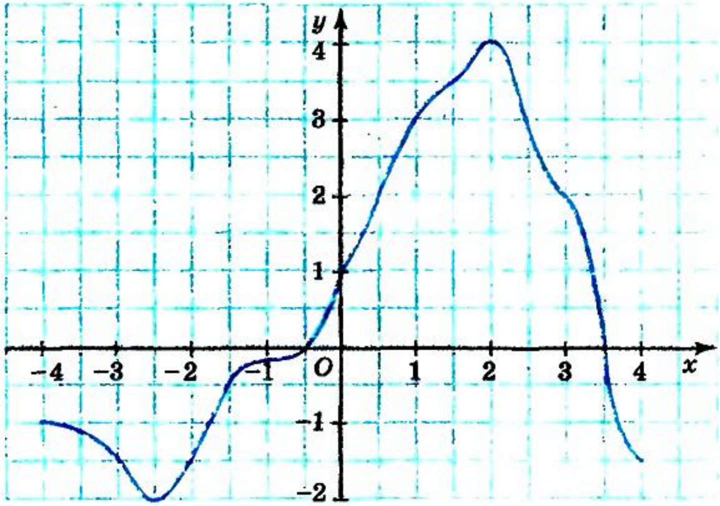
До § 23

943②. Функцію задано формулою $y = 2x - 3$, де $-2 \le x \le 3$.

1) Заповніть таблицю:

x	-2	$-1{,}5$	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	$1{,}5$	2	$2{,}5$	3
y											

2) Побудуйте графік функції.



Мал. 24

944③ На малюнку 24 зображено графік функції. За графіком знайдіть:

1) значення y, якщо $x = -3$; $x = -1{,}5$; $x = 0$; $x = 1{,}5$; $x = 3$;

2) значення x, яким відповідає $y = -1{,}5$; $y = 2$; $y = 3$;

3) область визначення функції;

4) область значень функції;

5) нулі функції;

6) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;

7) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

945④. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x|$, де $-2 \le x \le 4$; 2) $y = |x + 3|$, де $-5 \le x \le 3$.

До § 24

946①. Які з функцій — лінійні, які — задають пряму пропорційність:

1) $y = -3x$; 2) $y = -3x + 4$; 3) $y = -3x + 4x^2$;

4) $y = -3$; 5) $y = -\frac{3}{x}$; 6) $y = -\frac{1}{3}x$?

947②. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2x$; 2) $y = -x + 1$; 3) $y = 2$;

4) $y = 4x - 1$; 5) $y = -3x$; 6) $y = \frac{1}{2}x + 2$.

948③. Побудуйте графік прямої пропорційності $y = -\frac{3}{4}x$. Знайдіть за графіком:

1) якого значення набуває функція, якщо аргумент дорівнює -4; 0; 8;

2) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює -6; 3; 6;

3) нулі функції;

4) значення аргументу, при яких функція набуває додатних значень;

5) значення аргументу, при яких функція набуває від'ємних значень.

949③. Графіки функцій $y = kx$ і $y = 2x + b$ перетинаються в точці $A(-2; 4)$. Знайдіть k і b.

950④. Побудуйте графік функції:

1) $y = |x| + 3$; 2) $y = 2 - |x|$.

951④. На малюнках 25 і 26 зображено два графіки:

на одному — процес наповнення бака водою, а на другому — процес витікання води з бака. По кожному графіку дайте відповіді на запитання:

1) скільки літрів води було у баку в початковий момент часу;

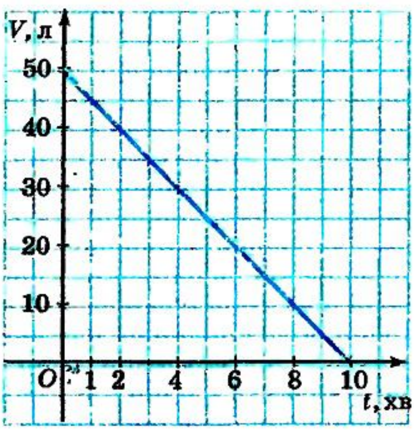
2) скільки літрів води було в баку через 1 хв; через 6 хв; через 8 хв;

3) через скільки хвилин у баку було 25 л води;

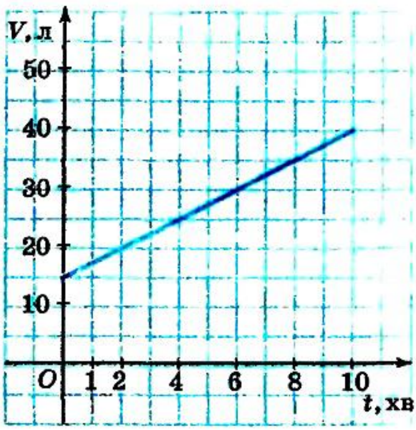
4) на якому з малюнків який процес зображено;

5) скільки літрів води наливається в бак (виливається з бака) щохвилини?

6) Задайте формулою залежність об'єму води V у баку від часу t.



Мал. 25



Мал. 26

$$\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 5x - y = 9 \end{cases}$$

Розділ IV СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ

§ 25. РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ. РОЗВ'ЯЗОК РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ. ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Урок 67

Розглянемо приклад, який приводить до рівняння з двома змінними.

Приклад 1. Сума першого числа та квадрата другого дорівнює 17. Якщо перше число *позначити буквою x*, а друге — буквою y, то співвідношення між ними можна записати у вигляді рівності:

$$x + y^2 = 17,$$

яка містить дві змінні x і y. Такі рівності називаються ***рівняннями з двома змінними*** (або *рівняннями з двома невідомими*).

Інші приклади рівнянь з двома змінними: $5x - 2y = 7$; $2x^2 - 3y^3 = 5$; $xy = 7$; $x^2 + y^2 = 16$.

Якщо $x = 1$; $y = 4$, рівняння $x + y^2 = 17$ перетворюється у правильну рівність: $1 + 4^2 = 17$. Кажуть, що пара значень змінних $x = 1$; $y = 4$ є *розв'язком* рівняння $x + y^2 = 17$.

Розв'язком рівняння з двома змінними називається пара значень змінних, при яких рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Розв'язками рівняння $x + y^2 = 17$ є також пари $x = -8$, $y = 5$; $x = 8$, $y = 3$; $x = 16$, $y = -1$. Скорочено ці розв'язки можна записати так: $(-8; 5)$, $(8; 3)$, $(16; -1)$. При такому запису необхідно знати, значення якої із змінних стоїть на першому місці, а якої — на другому. Якщо рівняння містить змінні x і y, то треба на першому місці писати значення змінної x, а на другому — значення змінної y.

Щоб знайти розв'язок рівняння з двома змінними, можна підставити в рівняння значення однієї із змінних і, розв'язавши утворене рівняння, знайти відповідне значення другої змінної.

Для прикладу знайдемо ще кілька розв'язків рівняння $x + y^2 = 17$.

Якщо $y = -2$, то $x + (-2)^2 = 17$, звідки $x = 13$;

якщо $y = 6$, то $x + 6^2 = 17$, звідки $x = -19$.

Знайшли ще два розв'язки рівняння (13; −2) і (−19; 6).

! ***Лінійним рівнянням з двома змінними*** **називається рівняння виду $ax + by = c$, де x і y — змінні; a, b, c — числа.**

Приклади лінійних рівнянь з двома змінними: $7x - 2y = 19$; $x + 3{,}8y = 9$; $10x + 3y = 6$; $2x + 0y = 8$.

Рівняння з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називаються ***рівносильними***. Рівняння, які не мають розв'язків, також вважаються рівносильними.

Рівняння з двома змінними мають такі самі ***властивості***, як і рівняння з однією змінною:

1) *якщо у будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;*

2) *якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то дістанемо рівняння, рівносильне даному;*

3) *якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме, відмінне від нуля, число, то дістанемо рівняння, рівносильне даному.*

Приклад 2. Розглянемо рівняння $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$. Це рівняння з двома змінними. Розкриємо дужки у правій частині цього рівняння: $7x + 3y + 2 = 5y - 5$. Після цього перенесемо доданок $5y$ у ліву частину рівняння, змінивши його знак на протилежний, а доданок 2 — у праву частину рівняння, також змінивши його знак на протилежний: $7x + 3y - 5y = -5 - 2$. Після зведення подібних доданків маємо: $7x - 2y = -7$. Лінійне рівняння з двома змінними $7x - 2y = -7$ рівносильне рівнянню $7x + 3y + 2 = 5(y - 1)$.

Використовуючи властивості рівняння з двома змінними, можна знаходити розв'язки рівняння й іншими способами.

Приклад 3. Розглянемо рівняння $3x + 5y = 2$. Використовуючи властивості рівнянь, *виразимо* з цього рівняння *одну* *змінну через іншу*. Наприклад, виразимо змінну y через змінну x. Для цього перенесемо доданок $3x$ у праву частину рівняння, змінивши його знак на протилежний: $5y = -3x + 2$.

Поділимо обидві частини рівняння на 5. Дістанемо: $y = -0{,}6x + 0{,}4$. Це рівняння рівносильне рівнянню $3x + 5y = 2$. Користуючись формулою $y = -0{,}6x + 0{,}4$, можна знайти скільки завгодно розв'язків рівняння $3x + 5y = 2$. Для цього достатньо взяти довільне значення змінної x і обчислити відповідне йому значення змінної y. Пари деяких відповідних значень змінних x і y зручно подати у вигляді таблиці:

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
y	3,4	2,8	2,2	1,6	1	0,4	–0,2	–0,8	–1,4	–2	–2,6

Пари чисел кожного стовпчика — розв'язки рівняння $3x + 5y = 2$. Це рівняння має безліч розв'язків.

Наведіть приклад рівняння з двома змінними. • Що називається розв'язком рівняння з двома змінними? • Дайте означення лінійного рівняння з двома змінними. • Наведіть приклад лінійного рівняння з двома змінними. • Які рівняння з двома змінними називаються рівносильними? • Які властивості мають рівняння з двома змінними?

952①. Назвіть рівняння з двома змінними:

1) $x^2 + 2xy = 7$; 2) $3x^2 - 2x - 7 = 0$; 3) $7x - 2y = 9$;

4) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; 5) $2x + 3x^2 = 7y^2 - 5y$; 6) $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = 1$.

953①. (Усно.) Чи є рівняння з двома змінними лінійним:

1) $2x - 3y = 7$; 2) $2x^2 - 3y = 7$; 3) $5x + 13y = 0$;

4) $\frac{x+1}{y-3} = 9$; 5) $0x + 5y = 20$; 6) $7x + 25y^2 = 3$?

954①. Чи є пара чисел $x = 5$; $y = 2$ розв'язком рівняння $x + y = 7$? Знайдіть ще три розв'язки цього рівняння.

955①. Які з пар чисел (10; 1), (1; 10), (7; 2), (7; –2), (9; 0) є розв'язками рівняння $x - y = 9$?

956②. Розв'язком яких рівнянь є пара чисел (–1; 3):

1) $2x - 17y = 53$; 2) $3x^2 + y^2 = 12$; 3) $(x - 3)(y + 2) = -20$;

4) $0x + 4y = -12$; 5) $0x + 0y = 0$; 6) $x^2 + 1 = y^2 - 7$?

957②. Знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:

1) $x + y = -3$; 2) $x - 2y = 5$.

958②. Складіть будь-яке лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $x = 3;\ y = -2$.

959①. Назвіть рівняння з двома змінними. Які з них є лінійними:

1) $2x - 5y = 19$; 2) $7x^2 - 5y^2 = 9$; 3) $xyz = 3$;
4) $7x - 0y = 14$; 5) $(x-2)(y+3) = 17$;
6) $1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{5}y = 2\frac{3}{7}$?

960①. Які з пар чисел (2; 1), (2; –1), (0; 5), (1; 3), (–1; 5) є розв'язками рівняння $2x + y = 5$?

961②. Розв'язком яких рівнянь є пара чисел $x = 2;\ y = -1$:

1) $3x + y = 5$; 2) $x^2 + y^2 = 3$; 3) $2x + 0y = 4$;
4) $x(y + 3) = 14$; 5) $0x + 0y = 7$; 6) $\frac{1}{2}x + y = 0$?

962②. Знайдіть три будь-які розв'язки рівняння:

1) $x - y = 2$; 2) $x + 3y = 0$.

963②. Складіть лінійне рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел (–2; 0).

Урок 68

964①. (Усно.) Чи є розв'язком рівняння $x - y = 0$ пара чисел:

1) (5; 5); 2) (–3; 3); 3) (0; 0)?

965②. Виразіть з рівняння $5x + y = 7$ змінну y через змінну x.

966③. З лінійного рівняння $3x - 2y = 12$ виразіть:

1) змінну y через змінну x;
2) змінну x через змінну y.

967③. Виразіть з рівняння змінну y через змінну x. Користуючись виведеною формулою, знайдіть два будь-яких розв'язки рівняння:

1) $x + y = 29$; 2) $5x + y = 7$;
3) $3x - 2y = 15$; 4) $6y - x = 5$.

968③. Пара чисел (–5; p) є розв'язком рівняння $2x - y = -13$. Знайдіть p.

969③. Знайдіть m, якщо пара чисел (–1; –3) є розв'язком рівняння:

1) $8x + 9y = m$; 2) $mx - 2y = -9$.

970③. Знайдіть два розв'язки рівняння $2(x - y) = 3(x + y) + 4$.

971③. Серед розв'язків рівняння $x + 3y = 20$ знайдіть ту пару чисел, яка складається з двох однакових чисел.

972④. Знайдіть усі пари натуральних чисел, які є розв'язками рівняння:

1) $2x + y = -7$; 2) $3x + 2y = 5$;

3) $x + 7y = 15$; 4) $xy = 7$.

973②. Виразіть з рівняння $x - 3y = 9$ змінну x через змінну y.

974③. Виразивши в рівнянні змінну y через змінну x або змінну x через змінну y, знайдіть три будь-яких розв'язки рівняння:

1) $x - 2y = -8$; 2) $7x - y = 9$;

3) $3x + 2y = 6$; 4) $5x - 7y = 12$.

975③. Пара $(n; -1)$ є розв'язком рівняння $3x + 5y = 4$. Знайдіть n.

976③. При якому значенні d пара чисел $(2; -1)$ є розв'язком рівняння:

1) $7x - 5y = d$; 2) $3x + dy = 8$?

977③. Знайдіть p, якщо:

1) пара $(p; p)$ є розв'язком рівняння $4x - 9y = -10$;

2) пара $(p; -p)$ є розв'язком рівняння $17x + 12y = 105$.

978②. Функцію задано формулою $y = \frac{2x+1}{x-6}$. Заповніть таблицю, обчисливши відповідні значення функції:

x	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
y								

979③. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

1) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$, якщо $x = -1$;

2) $(5m + 3)^2 - (5m - 3)^2$, якщо $m = -\frac{17}{60}$.

980④. Відомо, що $a + b = -1$, $ab = -6$. Знайдіть значення виразів:

1) $a^2b + ba^2$; 2) $a^2 + b^2$; 3) $(a - b)^2$; 4) $a^3 + b^3$.

§ 26. ГРАФІК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ

Урок 69

Кожну пару чисел, яка є розв'язком рівняння з двома змінними x і y, можна зобразити у координатній площині точкою, координатами якої є ця пара чисел (абсцисою є значення x, а ординатою — значення y). Усі такі точки утворюють *графік рівняння з двома змінними*.

Графіком рівняння з двома змінними x і y **називається фігура, що складається з усіх точок координатної площини, кооординати яких є розв'язком цього рівняння.**

З'ясуємо, що являє собою графік лінійного рівняння з двома змінними.

Приклад 1. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $5x + 2y = 8$.

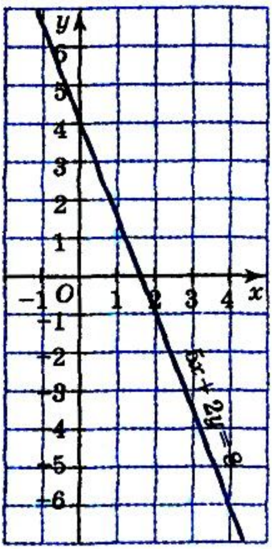
Р о з в' я з а н н я. Виразимо змінну y через змінну x: $2y = - 5x + 8$; $y = - 2,5x + 4$.

Формулою $y = - 2,5x + 4$ задається лінійна функція, графіком якої є пряма. Складемо таблицю відповідних значень x і y для двох довільних точок:

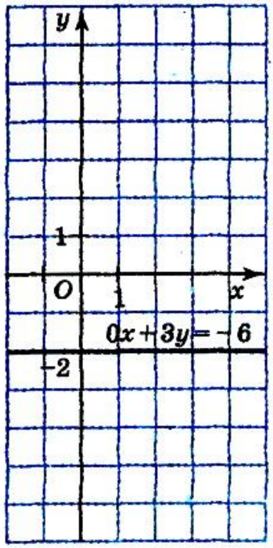
x	0	4
y	4	-6

Графік функції $y = - 2,5x + 4$ побудовано на малюнку 27. Оскільки рівняння $5x + 2y = 8$ і $y = - 2,5x + 4$ *рівносильні*, то побудована пряма і є графіком рівняння $5x + 2y = 8$.

Приклад 2. Побудувати графік лінійного рівняння з двома змінними $0x + 3y = - 6$.



Мал. 27



Мал. 28

Р о з в' я з а н н я. Рівняння $0x + 3y = -6$ рівносильне рівнянню $y = -2$. Графіком функції $y = -2$ є пряма, паралельна осі x, яка проходить через точку $(0; -2)$ (мал. 28). Ця пряма є також графіком рівняння $0x + 3y = -6$.

За допомогою аналогічних міркувань можна показати, що графіком будь-якого лінійного рівняння з двома змінними $ax + by = c$, де $b \neq 0$, є пряма. Розглянемо випадок, коли $b = 0$.

Приклад 3. Побудувати графік рівняння $2x + 0y = 8$.

Р о з в' я з а н н я. Розв'язком даного рівняння є кожна пара чисел $(4; y)$, де y — будь-яке число, наприклад $(4; -2)$, $(4; 0)$, $(4; 3)$, $(4; 7{,}5)$. Графік рівняння складається з усіх точок, абсциса яких дорівнює 4, а ордината — будь-яке число. Такі точки утворюють пряму, яка проходить через точку $(4; 0)$ і паралельна осі y (мал. 29).

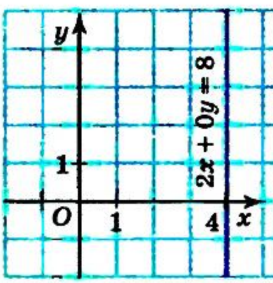
! ***Графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля, є пряма.***

Приклад 4. На малюнку 30 зображено графік рівняння $0x + 1{,}7y = 5{,}1$, або $y = 3$, а на малюнку 31 — графік рівняння $\frac{1}{3}x + 0y = -1$, або $x = -3$.

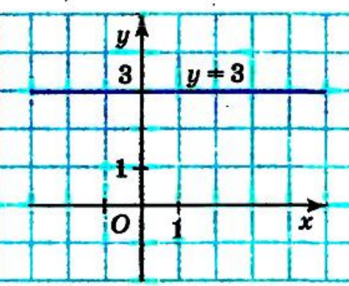
! **1)** ***Щоб побудувати графік рівняння $y = m$, досить позначити на осі y точку $(0; m)$ та провести через цю точку пряму, паралельну осі x.***

2) ***Щоб побудувати графік рівняння $x = n$, досить позначити на осі x точку $(n; 0)$ та провести через цю точку пряму, паралельну осі y.***

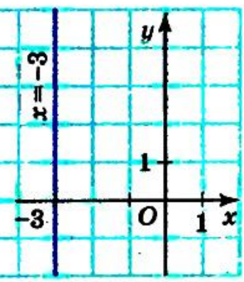
Розглянемо випадок, коли у лінійному рівнянні $ax + by = c$ обидва коефіцієнти a і b дорівнюють нулю.



Мал. 29



Мал. 30



Мал. 31

Приклад 5. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = c$, $c \neq 0$, наприклад $0x + 0y = 2$. Це рівняння не має розв'язків і його графік не містить жодної точки.

Приклад 6. Нехай $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Тоді маємо рівняння $0x + 0y = 0$. Будь-яка пара чисел є розв'язком цього рівняння, а його графік — уся координатна площина.

Що називається графіком рівняння з двома змінними x і y? • Що є графіком рівняння $ax + by = c$, у якому хоча б один з коефіцієнтів a або b відмінний від нуля? • Як побудувати графік рівняння $y = m$, де m — число; графік рівняння $x = n$, де n — число?

981①. (Усно.) Чи належить графіку рівняння $x + y = 8$ точка:
1) A (7; 1); 2) B (5; –3); 3) C (2; 7); 4) D (8; 0)?

982②. Чи проходить пряма, що є графіком рівняння $7x + 5y = 25$, через точку:
1) A (7; –4); 2) B (5; –2); 3) C (–1,4; 7); 4) D (35; –44)?

983②. Графік якого рівняння проходить через точку P (–2; 3):
1) $7x + 9y = 15$; 2) $4x - 17y = -59$; 3) $0x + 5y = 15$;
4) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y = -1$; 5) $0x + 0y = 5$; 6) $1{,}7x + 1{,}2y = 0{,}2$?

984②. Побудуйте графік рівняння:
1) $x - y = 5$; 2) $0{,}5x + y = 3$;
3) $x + 3y = 0$; 4) $0{,}2x - 0{,}4y = 2$.

985②. Назвіть будь-яке лінійне рівняння з двома змінними, графік якого проходить через точку P (1; –3).

986③. На графіку рівняння $2x + 3y = 7$ взято точку з абсцисою –4. Знайдіть ординату цієї точки.

987①. Які з точок A (5; 0), B (1; 4), C (4; –1), D (0; 5), E (3; 2) належать графіку рівняння $x - y = 5$?

988②. Доведіть, що графіки рівнянь $5x - 8y = -66$, $0x + 3y = 21$ і $-4x + 7y = 57$ проходять через точку M (–2; 7).

989②. Побудуйте графік рівняння:
1) $x + y = 6$; 2) $y - 2x = 0$;
3) $x - 0{,}5y = 4$; 4) $2x + 3y = 5$.

990③. На графіку рівняння $5x - 7y = 16$ взято точку з ординатою –2. Яка абсциса цієї точки?

Урок 70

991②. Назвіть дві будь-які точки, що належать графіку рівняння $2x - 5y = 20$.

992③. Побудуйте графік рівняння:

1) $0x + 2{,}5y = 12{,}5$; 2) $7x + 0y = -14$;

3) $1{,}9x = 5{,}7$; 4) $3y = -7{,}5$.

993③. (Усно.) Графіки яких рівнянь зображено на малюнках 32—35?

994③. При якому значенні m графік рівняння:

1) $5x + 7y = m$ проходить через початок координат;

2) $mx + 2y = 14$ проходить через точку $(2; -3)$;

3) $3x - 4y = m + 2$ проходить через точку $(-1; 5)$?

995③. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіків рівнянь:

1) $x + 7y = -21$; 2) $5x - 3y = 15$.

996③. Побудуйте графік рівняння:

1) $2(x + y) - 3y = 1$; 2) $\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = \frac{1}{6}$.

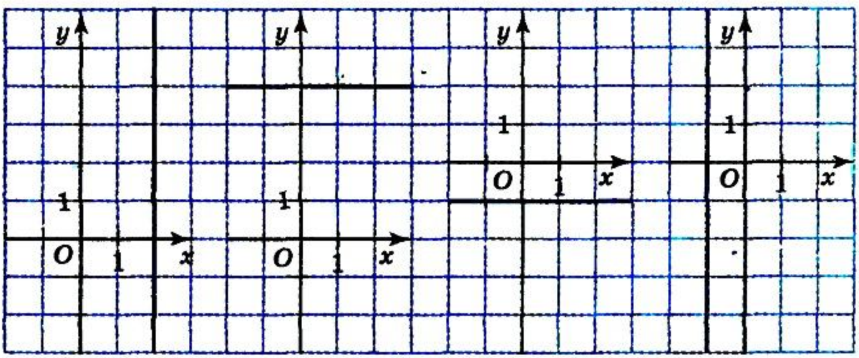
997④. Не виконуючи побудови, визначіть, у яких координатних чвертях розміщений графік рівняння:

1) $2x - 6y = 0$; 2) $3x + y = 0$;

3) $1{,}9x = 190$; 4) $-8y = 720$.

998④. Побудуйте графік рівняння $\frac{x-3}{5} + \frac{y+4}{3} = \frac{7}{15}$.

999②. Знайдіть дві точки, що належать графіку рівняння $3x + 2y = 12$ і дві точки, які не належать графіку цього рівняння.



Мал. 32 Мал. 33 Мал. 34 Мал. 35

1000③. Побудуйте графік рівняння:

1) $3x + 0y = -12$; 2) $0x - 1{,}2y = 3{,}6$;

3) $1{,}8y = 7{,}2$; 4) $4x = 6$.

1001③. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіків рівнянь:

1) $3x + y = 18$; 2) $-7x - 2y = 28$.

1002③. Побудуйте графік рівняння:

1) $5(x - y) - 4(x + y) = -7$; 2) $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

1003④. Побудуйте в одній системі координат графіки рівнянь $2x + 3y = 6$ і $4x + 6y = 8$. Чи перетинаються ці графіки?

1004②. Пряму пропорційність задано формулою $y = -\frac{1}{4}x$.

Знайдіть:

1) значення y, яке відповідає x, що дорівнює -8; 0; 12; 20;

2) значення x, якому відповідає y, що дорівнює -2; 3; 10.

1005③. Подайте у вигляді многочлена:

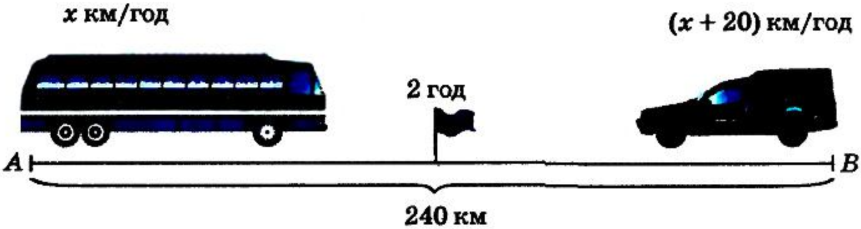
1) $64a^2 - (8a - 1)^2 + 14a$;

2) $m^2 + 4n^2 - (m + 2n)^2 - 12mn$;

3) $2m(m - 5) - (m - 5)^2$;

4) $(x - 3)(x + 5) - (x + 1)^2$.

1006④. Автобус і легковий автомобіль одночасно виїхали назустріч один одному з пунктів A і B, відстань між якими 240 км. Швидкість легкового автомобіля на 20 км/год більша за швидкість автобуса. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість автомобіля, якщо вони зустрілися через 2 год після виїзду і легковий автомобіль зробив на шляху півгодинну зупинку.



§ 27. СИСТЕМА ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ ТА ЇЇ РОЗВ'ЯЗОК. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ ГРАФІЧНИМ СПОСОБОМ

Урок 71

Приклад 1. Зошит і олівець разом коштують 96 к., причому зошит на 16 к. дорожчий за олівець. Скільки коштує зошит і скільки олівець?

Розв'язання. Цю задачу можна розв'язати арифметичним способом (за допомогою дій) або склавши рівняння з однією змінною. (Розв'яжіть задачу вказаними способами самостійно!) Можна розв'язати її іншим способом.

Нехай зошит коштує x к., а олівець — y к. За умовою задачі разом вони коштують 96 к., тобто

$$x + y = 96.$$

Оскільки зошит дорожчий за олівець на 16 к., то

$$x - y = 16.$$

Маємо два рівняння з двома змінними. Щоб розв'язати задачу, треба знайти такі значення змінних x і y, які б одночасно перетворювали у правильну рівність кожне з рівнянь $x + y = 96$ і $x - y = 16$, тобто знайти спільні розв'язки цих рівнянь.

Якщо треба знайти спільний розв'язок двох (або більшої кількості) рівнянь, то кажуть, що ці рівняння утворюють ***систему рівнянь***. Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою: {. Складену за умовою задачі ***систему лінійних рівнянь з двома змінними*** записують так:

$$\begin{cases} x + y = 96, \\ x - y = 16. \end{cases}$$

Пара значень змінних $x = 56$, $y = 40$ є розв'язком кожного з рівнянь системи, бо обидві рівності $56 + 40 = 96$ і $56 - 40 = 16$ правильні. Таку пару чисел називають ***розв'язком системи***.

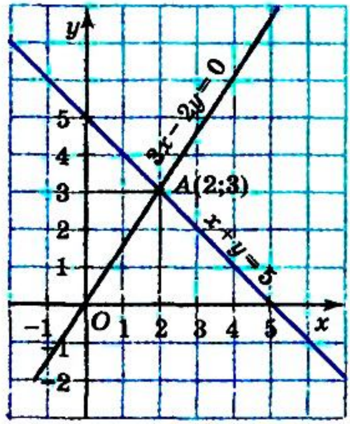
Розв'язком системи рівнянь з двома змінними називається пара значень змінних, при яких кожне рівняння перетворюється у правильну числову рівність.

Розв'язати систему рівнянь означає знайти всі її розв'язки або довести, що розв'язків немає.

Щоб розв'язати систему лінійних рівнянь з двома змінними, можна використовувати графіки рівнянь. Такий спосіб називається ***графічним способом розв'язування систем***.

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 3x - 2y = 0. \end{cases}$$



Мал. 36

Р о з в' я з а н н я. Побудуємо на одній координатній площині графіки обох рівнянь (мал. 36). Координати кожної точки прямої, яка є графіком рівняння $x + y = 5$, задовольняють це рівняння. Аналогічно, координати кожної точки прямої, яка є графіком рівняння $3x - 2y = 0$, задовольняють це рівняння. Координати точки перетину прямих задовольняють як перше, так і друге рівняння, тобто є розв'язком системи. Графіки перетинаються в точці A (2; 3).

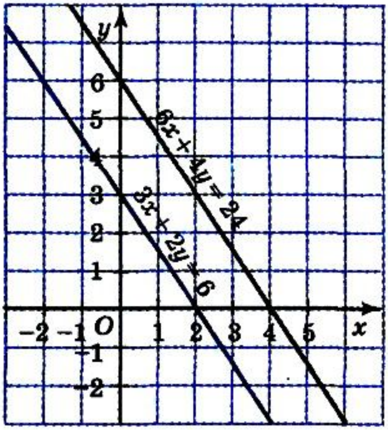
Отже, система має єдиний розв'язок $x = 2$; $y = 3$. Його можна записати ще так: (2; 3), де на першому місці — значення змінної x, а на другому — значення змінної y.

Зауважимо, що графічний спосіб звичайно дає змогу знаходити розв'язки лише наближено. Але, підставивши значення $x = 2$ і $y = 3$ в рівняння даної системи, переконуємося, що (2; 3) — точний розв'язок. Справді, $2 + 3 = 5$ і $3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 = 0$ — правильні числові рівності.

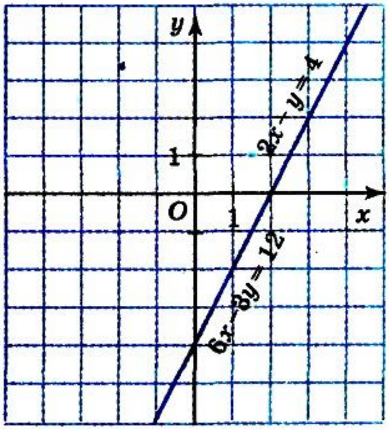
Розглянемо системи двох лінійних рівнянь з двома змінними, у кожному з яких хоча б один з коефіцієнтів при змінних відмінний від нуля. Графіками обох рівнянь системи є прямі. Якщо ці прямі перетинаються, то система має єдиний розв'язок; якщо прямі не перетинаються (паралельні), то система розв'язків не має; якщо прямі збігаються, то система має безліч розв'язків.

Отже, розв'язуючи систему графічним способом, необхідно:

1) *побудувати графіки рівнянь на одній координатній площині*;
2) *знайти координати точки перетину графіків або впевнитися в тому, що графіки рівнянь не перетинаються (є паралельними) або збігаються*;
3) *якщо координати точки перетину — цілі числа, то виконати перевірку; якщо ні, то розв'язок системи визначити наближено*;
4) *дати відповідь*.



Мал. 37



Мал. 38

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 6x + 4y = 24. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. I *спосіб.* Побудуємо графіки рівнянь на одній координатній площині (мал. 37). Графіки рівнянь є паралельними прямими, тому система рівнянь розв'язків не має.

II *спосіб.* Поділивши обидві частини другого рівняння на 2, маємо:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 3x + 2y = 12. \end{cases}$$

Очевидно, що немає таких значень змінних x і y, при яких одночасно виконувалися б рівності $3x + 2y = 6$ і $3x + 2y = 12$, оскільки значення одного й того самого виразу $3x + 2y$ не може набувати різних значень (6 і 12) при одних і тих самих значеннях змінної. Отже, система рівнянь не має розв'язків.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 6x - 3y = 12. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. I *спосіб.* Побудуємо графіки рівнянь на одній координатній площині (мал. 38). Графіки рівнянь збігаються, тому система рівнянь має безліч розв'язків. Будь-яка пара чисел, яка задовольняє перше рівняння, також задовольняє і друге. Виразимо з першого рівняння y через x : $y = 2x - 4$. Остаточно маємо, що будь-яка пара чисел $(x; 2x - 4)$, де x — довільне число, є розв'язком системи.

II *спосіб*. Поділивши обидві частини другого рівняння на 3, маємо:

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ 2x - y = 4. \end{cases}$$

Очевидно, що графіки рівнянь збігаються. Потім міркуємо так само, як у I способі.

Історичні відомості

Системи лінійних рівнянь китайські математики вміли розв'язувати ще понад 2000 років тому. Вони розробили загальний метод розв'язування таких систем, і не тільки з двома, а й з більшою кількістю змінних.

Древньогрецький математик Діофант (бл. III ст.) вмів розв'язувати і деякі системи нелінійних рівнянь з двома змінними.

Що називається розв'язком системи рівнянь з двома змінними? • Що означає розв'язати систему рівнянь? • Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь з двома змінними? • Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь з двома змінними графічним способом?

1007①. (Усно.) Які із систем є системою двох лінійних рівнянь з двома змінними:

1) $\begin{cases} x + y = 5, \\ x - y^2 = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = -7, \\ 3x - 9y = 13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x - y = 19, \\ xy = -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{y} = 5, \\ x - y = -7 \end{cases}$?

1008①. (Усно.) Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 1, \end{cases}$ пара чисел:

1) (3; 4); 2) (4; 3); 3) (6; 1)?

1009②. Які з пар чисел є розв'язком системи $\begin{cases} 3x + 4y = 5, \\ -2x - 7y = 1: \end{cases}$

1) (−1; 2); 2) (−1; 3); 3) (3; −1)?

1010②. Складіть систему лінійних рівнянь з двома змінними, розв'язком якої є пара чисел:

1) (1; −3); 2) (4; 5).

1011②. **Розв'яжіть графічно систему рівнянь:**

1) $\begin{cases} y = -x, \\ y = 4 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 2x, \\ y = 3 + x; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 2; \\ x + 2y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - y = 1, \\ x - y = 4. \end{cases}$

1012③. Пара (2; –5) є розв'язком системи $\begin{cases} 2x + by = 5, \\ ax - 6y = 13. \end{cases}$

Знайдіть a і b.

1013①. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x - y = 5, \\ x + y = 1, \end{cases}$ пара чисел:

1) (5; 0); 2) (2; 3); 3) (3; 2)?

1014②. Які з пар (8; 1), (5; –2), (–2; 5) є розв'язком системи
$\begin{cases} 2x + 3y = 11, \\ 4x - y = -13? \end{cases}$

1015②. Розв'яжіть систему рівнянь графічно:

1) $\begin{cases} y = x, \\ y = 6 - x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -2x, \\ y = 4 - x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x - 2y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x + y = 7, \\ x + y = 3. \end{cases}$

1016③. Пара (10; –2) є розв'язком системи $\begin{cases} ax - 5y = 17, \\ 3x + by = 9. \end{cases}$ Знайдіть a і b.

Урок 72

1017①. (Усно.) Скільки розв'язків має кожна система, графіки рівнянь яких зображено на малюнках 39 і 40?

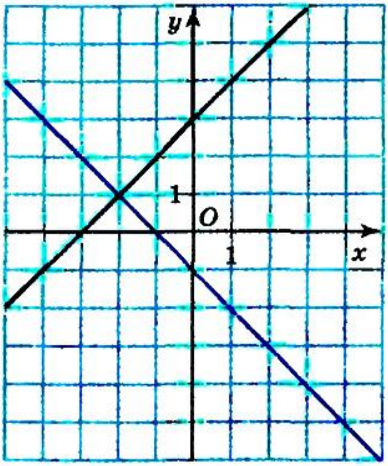
1018②. (Усно.) Чи є пара чисел (–2; 1) розв'язком системи:

1) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 3x - 7y = -13; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 9x - 11y = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x = 5 - 9y, \\ 7y - 12x = 31? \end{cases}$

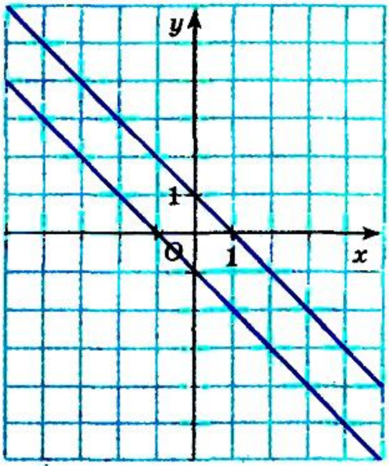
1019②. Знайдіть координати точки перетину прямих (мал. 41). Запишіть відповідну систему рівнянь. Перевірте розв'язок підстановкою координат у рівняння.

1020③. Розв'яжіть графічно систему:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 13, \\ 3x - y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 7y = 12, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$



Мал. 39



Мал. 40

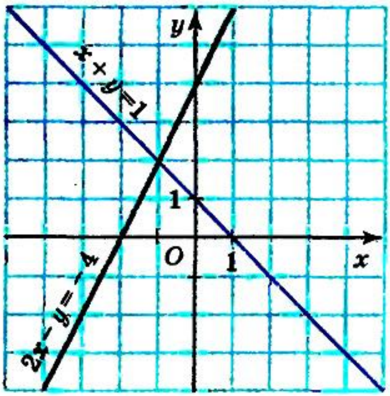
1021③. З'ясуйте, чи має система розв'язки і скільки:

1) $\begin{cases} 2x - y = 5, \\ 3x + y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}5x - y = 4, \\ -x + 2y = -8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 5y = 7, \\ y = -0{,}2x; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

1022③. Розв'яжіть графічно систему $\begin{cases} 2x + y = -3, \\ x + 5y = 4. \end{cases}$

Перевірте, чи є отриманий розв'язок точним. Чи є розв'язком системи пара чисел $\left(-2\frac{1}{9}; 1\frac{2}{9}\right)$?



Мал. 41

1023④. Не виконуючи побудови графіків, покажіть, що система:

1) $\begin{cases} x - 7y = 8, \\ -4x + 28y = -31 \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} 2x + 5y = 18, \\ -3x - 7{,}5y = -27 \end{cases}$ має безліч розв'язків.

1024④. Розв'яжіть систему:

1) $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ -6x + 4y = -10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 3y = -4, \\ 3x + 9y = 12. \end{cases}$

1025④. До рівняння $x + 3y = 5$ доберіть друге рівняння так, щоб отримати систему рівнянь, яка:

1) має єдиний розв'язок;

2) має безліч розв'язків;

3) не має розв'язків.

1026②. Яка з пар (3; −4), (7; 2), (4; −3) є розв'язком системи:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = 17, \\ 5x + 2y = 14; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 7y = 0, \\ 3x + 5y = 31? \end{cases}$

1027③. Розв'яжіть графічно систему:

1) $\begin{cases} 2x - 3y = -10, \\ 6x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 5y = -4, \\ 7x - 2y = 25. \end{cases}$

1028③. Чи має система розв'язки і скільки:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 3x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 2x - 4y = 7; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = 2y, \\ 1{,}5x - 3y = 0? \end{cases}$

1029③. Розв'яжіть графічно систему $\begin{cases} x + 3y = 7, \\ 3x - y = 4. \end{cases}$

Перевірте, чи є отриманий розв'язок точним. Чи є розв'язком системи пара чисел (1,9; 1,7)?

1030④. Знайдіть які-небудь розв'язки системи $\begin{cases} 3x + y = 5, \\ -9x - 3y = -15. \end{cases}$

Скільки всього розв'язків має система? Розв'яжіть її.

1031②. Які з точок A (4; −2); B (0; 0); C (−1; 5); D (1; 2) належать графіку прямої пропорційності, заданої формулою:

1) $y = -\frac{1}{2}x$; 2) $y = 5x$?

1032③. Спростіть вираз:

1) $7m(m-3)-3(m-2)(m+2)$;

2) $(1-2x)(2x+1)-(3x-1)^2$;

3) $(2x+3y)^2-(x+3y)(2x-y)$;

4) $(4a-5b)(5b+4a)-(2a-5b)^2$.

1033④. Доведіть, що вираз $-x^2+8x-17$ набуває лише від'ємних значень при всіх значеннях x. Якого найбільшого значення набуває цей вираз? При якому значенні x це відбувається?

§ 28. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ПІДСТАНОВКИ

Урок 73

Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь досить громіздкий, і, до того ж, частіше дає наближені розв'язки. Розглянемо інший спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними, який називається ***способом підстановки***.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ -3x+4y=-10. \end{cases} \qquad (1)$$

Р о з в' я з а н н я. Виразимо з першого рівняння змінну y через змінну x:

$$y=3-2x.$$

Підставимо у друге рівняння замість змінної y вираз $3-2x$. Дістанемо систему:

$$\begin{cases} y=3-2x, \\ -3x+4(3-2x)=-10. \end{cases} \qquad (2)$$

Друге рівняння системи (2) містить лише одну змінну x. Розв'яжемо це рівняння:

$$-3x+12-8x=-10;$$
$$-11x=-22,$$
$$x=2.$$

Підставимо замість x число 2 у рівність $y=3-2x$. Дістанемо відповідне значення y:

$$y=3-2\cdot 2,$$
$$y=-1.$$

Пара (2; −1) є розв'язком системи (2). Числові рівності: $-1 = 3 - 2\cdot2$ і $-3\cdot2 + 4(3 - 2\cdot2) = -10$ правильні. Також пара (2; −1) є розв'язком системи (1), оскільки числові рівності $2\cdot2 + (-1) = 3$ і $-3\cdot2 + 4\cdot(-1) = -10$ також правильні.

Системи рівнянь з двома змінними, які мають одні й ті самі розв'язки, називаються *рівносильними*. Системи, які не мають розв'язків, також вважають рівносильними.

Розв'язуючи систему (1) способом підстановки, ми замінили її рівносильною системою (2), друге рівняння якої містило одну змінну.

Подамо схему розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки на прикладі розв'язування системи $\begin{cases} 3x - 7y = 1, \\ 4x + 9y = 38. \end{cases}$

1.	Виражаємо одну змінну з якого-небудь рівняння системи через другу.	$3x = 1+7y,$ $x = \dfrac{1+7y}{3}.$
2.	Замість цієї змінної підставляємо в друге рівняння системи утворений вираз.	$4\cdot\dfrac{1+7y}{3} + 9y = 38.$
3.	Розв'язуємо отримане рівняння з однією змінною.	$4(1 + 7y) + 3\cdot9y = 3\cdot38,$ $4 + 28y + 27y = 114,$ $55y = 110,$ $y = 2.$
4.	Знаходимо відповідне значення другої змінної.	$x = \dfrac{1+7\cdot2}{3},$ $x = 5.$
5.	Відповідь.	(5; 2).

Способом підстановки зручно користуватися тоді, коли хоча б один з коефіцієнтів при змінних x і y дорівнює 1 (або −1). Саме змінну з цим коефіцієнтом і слід виражати через іншу.

Способом підстановки можна розв'язувати і більш складні системи.

Приклад 2. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 4(y+3) - 3(x-1) = 40, \\ \frac{x+2}{3} + \frac{y-4}{2} = -\frac{1}{3}. \end{cases}$$

Р о з в' я з а н н я. У першому рівнянні системи розкриємо дужки, ліву і праву частини другого рівняння помножимо на 6 (найменше спільне кратне знаменників дробів). Маємо:

$$\begin{cases} 4y + 12 - 3x + 3 = 40, \\ 2(x+2) + 3(y-4) = -2. \end{cases}$$

Зведемо кожне рівняння системи до лінійного:

$$\begin{cases} 4y - 3x = 40 - 12 - 3, \\ 2x + 4 + 3y - 12 = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} -3x + 4y = 25, \\ 2x + 3y = 6. \end{cases}$$

Застосуємо спосіб підстановки:

$$4y = 25 + 3x, \ y = \frac{25+3x}{4}.$$

$$2x + 3 \cdot \frac{25+3x}{4} = 6,$$

$$8x + 3(25 + 3x) = 24,$$

$$8x + 75 + 9x = 24,$$

$$17x = -51,$$

$$x = -3,$$

$$y = \frac{25+3\cdot(-3)}{4},$$

$$y = 4.$$

В і д п о в і д ь: (−3; 4).

? Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки?

1034①. (Усно.) У якій рівності правильно виконано підстановку для розв'язування системи рівнянь $\begin{cases} x = 7y - 5, \\ 2x + 3y = 9: \end{cases}$

1) $2(7y + 5) + 3y = 9$; 2) $2x + 3(7y - 5) = 9$;

3) $2(7y - 5) + 3y = 9$?

1035②. Розв'яжіть систему рівнянь способом підстановки:

1) $\begin{cases} 7x = 21, \\ 2x - 3y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - y = 17, \\ -2y = 10. \end{cases}$

1036②. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = y + 2, \\ 4x - 8y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x - 3, \\ 5x + 2y = 29. \end{cases}$

1037②. Знайдіть розв'язок системи:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ 2x + y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = -2, \\ x - 2y = 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 4x + y = 15; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x + 2y = 2, \\ x - 2y = 10; \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x - 3y = 7, \\ 2x - 3y = -3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 5x - 3y = -19, \\ 2x + y = -1. \end{cases}$

1038②. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + y = 4$ і $2x + 3y = 9$.

1039①. У якій рівності правильно виконано підстановку для розв'язування системи $\begin{cases} y = 4x + 3, \\ 7x + 2y = 9: \end{cases}$

1) $7(4x + 3) + 2y = 9$; 2) $7x + 2(4x - 3) = 9$;

3) $7x + 2(4x + 3) = 9$?

1040②. Знайдіть розв'язок системи:

1) $\begin{cases} -4x = 8, \\ 5x - 2y = 4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = x + 5, \\ 7x + 3y = -5. \end{cases}$

1041②. Розв'яжіть систему способом підстановки:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x + y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x - 2y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - x = -5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ x + 2y = 2. \end{cases}$

1042②. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x - y = 3$ і $3x + 2y = 14$.

Урок 74

1043③. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 0, \\ 2x - 7y = 29; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x - 5y = 41, \\ 4x + 3y = -7; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2a - 5b = 0, \\ -7a + 4b = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10m - 2n = 39, \\ 9m + 4n = 38. \end{cases}$

1044③. Знайдіть розв'язок системи:

1) $\begin{cases} 7(x-3)+8=4+5x, \\ 4(x-y)-7y=6{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(x+y)-3y=2, \\ 9(x-2y)-6x=-11. \end{cases}$

1045③. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \frac{1}{8}(x-y)=9, \\ \frac{1}{3}(x+y)=7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 0{,}2(2x+y)=3, \\ 0{,}7(x-4y)=-1{,}05. \end{cases}$

1046④. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x+1}{5}+\frac{y-1}{3}=1, \\ \frac{x+2}{6}+\frac{y+2}{3}=2. \end{cases}$$

1047④. Доведіть, що графіки рівнянь $2x-3y=4$ і $4x-6y=9$ — паралельні прямі.

1048④. Графік функції $y=kx+b$ перетинає осі координат у точках $A\ (0; -3)$ і $B\ (-2; 0)$. Знайдіть k і b.

1049④. При яких значеннях m система:

1) $\begin{cases} 2x+y=8, \\ 4x+my=10, \end{cases}$ не має розв'язків;

2) $\begin{cases} x-3y=5, \\ mx-12y=20, \end{cases}$ має безліч розв'язків?

1050③. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4x+3y=0, \\ 5x-7y=-43; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x+9y=-59, \\ 5x-4y=38; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3p-7q=0, \\ 2p+9p=41; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 6a-7b=51, \\ 2a+3b=-15. \end{cases}$

1051③. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 4(x+y)-8y=-4, \\ 7(y+1)-(y+3)=19; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8(x+y)-12y=6, \\ 6(3x-y)+18x=13. \end{cases}$

1052③. Знайдіть розв'язки системи:

1) $\begin{cases} 0{,}4(x+y)=12, \\ 0{,}6(x-y)=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{1}{7}(2x+y)=13, \\ \frac{1}{3}(x-3y)=14. \end{cases}$

1053④. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{x-4}{2}+\dfrac{y+11}{4}=1,\\ \dfrac{x+7}{3}+\dfrac{y-4}{7}=2.\end{cases}$$

1054④. Графіком функції $y = kx + b$ є пряма, яка проходить через точки $A(-2; -4)$ і $B(4; 11)$. Задайте формулою цю функцію.

1055②. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y=\frac{2}{3}x$. За допомогою графіка знайдіть:

1) значення y, відповідне значенню x, що дорівнює -6; 0; 3.

2) значення x, при якому y дорівнює -2; 0; 4.

1056③. Розкладіть на множники многочлен:

1) $9m^2+12m^5-18m^3$; 2) $3x^4y^2-9x^2y^3+12x^3y$;

3) $a^6-6-2a^2+3a^4$; 4) $pq-6p+p^2-6q$.

1057④. Доведіть, що не має розв'язків рівняння:

1) $x^2+4=0$; 2) $x^2-6x+13=0$;

3) $4x^2-12x+16=0$; 4) $x^2+x+2=0$.

§ 29. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ ДВОХ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ДВОМА ЗМІННИМИ СПОСОБОМ ДОДАВАННЯ

Урок 75

Розглянемо ще один спосіб розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними — *спосіб додавання*. Розв'язуючи системи способом додавання, переходимо від даної системи до рівносильної їй системи, в якій одне з рівнянь містить одну змінну.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases}3x+5y=1,\\ 4x-5y=-22.\end{cases} \qquad (1)$$

Р о з в' я з а н н я. Особливістю цієї системи є те, що коефіцієнти при одній із змінних, а саме при змінній y — протилежні числа. Додамо до лівої частини першого рівняння ліву частину другого рівняння, а до правої частини першого рівняння праву частину другого рівняння (таке додавання рівнянь системи називають *почленне додавання*). Отримаємо рівняння з однією змінною:

$$7x = -21.$$

Замінимо одне з рівнянь системи (1), наприклад перше, рівнянням $7x = -21$. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} 7x = -21, \\ 4x - 5y = -22. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) рівносильна системі (1).

З першого рівняння системи (2) маємо $x = -3$. Підставимо це значення у друге рівняння системи (2). Маємо:

$$4 \cdot (-3) - 5y = -22;$$
$$-5y = -10,$$
$$y = 2.$$

В і д п о в і д ь. $(-3; 2)$.

Самостійно перевірте, що пара $(-3; 2)$ є розв'язком як системи (2), так і системи (1).

Способом додавання зручно розв'язувати системи, в яких коефіцієнти при якій-небудь змінній — протилежні числа. До систем такого вигляду можна звести будь-яку систему лінійних рівнянь з двома змінними, після чого застосувати спосіб додавання.

Приклад 2. Розв'язати систему $\begin{cases} 5x + 2y = 10, \\ 7x + 4y = 8. \end{cases}$

Р о з в' я з а н н я. У цій системі коефіцієнти при змінній x і коефіцієнти при змінній y не є протилежними числами. Але, якщо помножити обидві частини першого рівняння системи на -2, а друге рівняння залишити без змін, то коефіцієнти при змінній y в обох рівняннях будуть протилежними числами. Після чого можна виконати почленне додавання рівнянь системи. Оформити розв'язання можна так:

$$\begin{cases} 5x + 2y = 10, \,|\times(-2) \\ 7x + 4y = 8; \end{cases} \qquad +\begin{cases} -10x - 4y = -20, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases}$$
$$\overline{\quad -3x = -12, \quad}$$
$$x = 4;$$

$7 \cdot 4 + 4y = 8$, $4y = -20$, $y = -5$.

В і д п о в і д ь. $(4; -5)$.

Подамо схему розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання на прикладі розв'язування системи $\begin{cases} 7x - 4y = 2, \\ 5x + 3y = 19. \end{cases}$

1.	Множимо (якщо є необхідність) обидві частини одного чи обох рівнянь системи на такі числа, щоб коефіцієнти при одній із змінних стали протилежними числами.	$\begin{cases} 7x - 4y = 2, \mid \times 3 \\ 5x + 3y = 19; \mid \times 4 \end{cases}$ $\begin{cases} 21x - 12y = 6, \\ 20x + 12y = 76. \end{cases}$
2.	Додаємо почленно ліві і праві частини рівнянь системи.	$41x = 82.$
3.	Розв'язуємо утворене рівняння з однією змінною.	$x = 2.$
4.	Підставляємо знайдене значення змінної в одне з рівнянь системи (краще початкової) і знаходимо відповідне значення другої змінної.	$7 \cdot 2 - 4y = 2,$ $-4y = -12,$ $y = 3.$
5.	Відповідь.	(2; 3).

Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки?

1058①. (Усно.) Яке рівняння дістанемо, якщо почленно додамо рівняння системи:

1) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 3y = 9, \\ -4x + y = 1? \end{cases}$

1059①. (Усно.) На яке число треба помножити обидві частини першого рівняння системи, щоб дістати у рівняннях протилежні коефіцієнти при змінній y:

1) $\begin{cases} 2x + y = 8, \\ 3x - 2y = 10; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 7y = 5, \\ 3x + 21y = 7? \end{cases}$

1060②. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 3y = 7, \\ -4x - y = -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 8y = 7, \\ -2x + 7y = 5. \end{cases}$

1061②. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = -1, \\ 4x + 3y = 1. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 2y = 5, \\ 7x - 3y = 45. \end{cases}$

1062②. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x + y = 4, \\ 3x - 5y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + 7y = 11. \end{cases}$

1063①. На яке число треба помножити обидві частини першого рівняння, щоб дістати у рівняннях протилежні коефіцієнти при змінній x:

1) $\begin{cases} x - 4y = 9, \\ -2x + 7y = 8; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 7y = 19, \\ 12x - 8y = 4? \end{cases}$

1064②. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x - y = 8, \\ 3x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 8, \\ -3x + 5y = -1. \end{cases}$

1065②. Знайдіть розв'язок системи рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 4x + y = 7, \\ 5x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 5, \\ 2x - 4y = -9. \end{cases}$

1066②. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + 3y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + y = 2, \\ 5x - 4y = 25. \end{cases}$

Урок 76

1067②. (Усно.) Яким способом (підстановки чи додавання) зручніше розв'язувати систему:

1) $\begin{cases} 3x + y = 9, \\ 17x + 19y = 15; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + 7y = 8, \\ 10x - 7y = 17; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 15y = 27, \\ 12x + 17y = 49; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + y = 10, \\ 2007x + 2006y = 2008? \end{cases}$

1068②. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 7x + 2y = -3, \\ -14x + 3y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 5y = 19, \\ 7x - 10y = 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 5y = 7, \\ 2x - 3y = -2; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x + 9y = -1, \\ 7x + 36y = -8. \end{cases}$

1069③. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

1) $\begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ 3x + 5y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2a - 3b = 7, \\ 3a + 4b = 2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10m - 6n = 18, \\ 15m + 7n = 59; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 14x - 8y = -6, \\ 21x + 10y = 2. \end{cases}$

1070③. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 5(x - 2) = 2y - 1, \\ 3(x + 3) = 7(y + 3); \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(a + 2b) - 5a = 0{,}4, \\ 7(3a - 4b) + 3b = 5{,}9. \end{cases}$

1071④. Складіть рівняння прямої виду $y = kx + b$, графік якої проходить через точки:

1) $A\ (4;\ -4)$ і $B\ (12;\ -1)$; 2) $M\ (-3;\ 6)$ і $N\ (9;\ -2)$.

1072④. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{2-x}{6} + \dfrac{y+4}{3} = 2\dfrac{5}{6}, \\ \dfrac{x+4}{12} - \dfrac{2-y}{6} = \dfrac{5}{12}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - 1)^2 + y = (x + 2)^2 + 6, \\ (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = x^2 + (y + 7)^2. \end{cases}$

1073④. Чи має система рівнянь розв'язки і скільки:

1) $\begin{cases} 3x - y = 2, \\ -6x + 2y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x + 3y = 7, \\ -8x + 6y = 14? \end{cases}$

1074②. Розв'яжіть систему рівнянь способом додавання:

1) $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ -9x + 7y = 23; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 2y = 2, \\ 5x - 4y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5x + 3y = 1, \\ 15x - 7y = 51; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4m + 5b = 5, \\ 7m + 20b = 11. \end{cases}$

1075③. Знайдіть розв'язок системи способом додавання:

1) $\begin{cases} 3x + 4y = 10, \\ 5x - 7y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 15x - 3y = -15, \\ 20x - 7y = -41. \end{cases}$

1076③. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 7(x + 3) = 3y + 1, \\ 4(2 - x) = 5(y + 1) + 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4(m - 2n) - 7m = 9{,}6, \\ 5(4m + 3n) + 8n = -18{,}5. \end{cases}$

1077④. Графік лінійної функції проходить через точки $(-4;\ 5)$ і $(12;\ 1)$. Задайте цю функцію формулою.

1078④. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} \dfrac{x+3}{4} - \dfrac{y-4}{8} = 1\dfrac{3}{4}, \\ \dfrac{x-4}{6} + \dfrac{y+2}{9} = -\dfrac{1}{2}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x-1)(y+2) = x(y-1), \\ x(y+3) = (x+1)(y-2). \end{cases}$

1079②. Чи належить графіку функції $y = -4{,}5x + 1$ точка:

1) $A\,(-2;\ 10)$; 2) $B\,(0;\ -1)$;
3) $C\,(4;\ 17)$; 4) $D\,(10;\ -44)$?

1080③. Пара чисел $(-2;\ -3)$ є розв'язком системи рівнянь:

$$\begin{cases} ax - 2y = 8, \\ bx - ay = 7. \end{cases}$$

Знайдіть a і b.

1081④. Які одночлени треба записати замість $*$, щоб утворилася тотожність:

1) $(7m - *)^2 = * - * + 25a^8$;

2) $(* + *)^2 = 36p^4 + * + 121b^2$;

3) $(3p + *)^2 = * + 24p^2m^7 + *$;

4) $(* - *)^2 = * - 32mn^2 + 16n^4$.

§ 30. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ

Урок 77

Багато задач, особливо тих у яких треба знайти значення двох невідомих величин, можна розв'язати за допомогою систем рівнянь.

Приклад 1. За 7 ручок і 2 блокноти заплатили 12,9 грн. Скільки коштує одна ручка і скільки коштує один блокнот, якщо відомо, що 3 ручки дорожчі за один блокнот на 3,3 грн.?

Розв'язання. Нехай ручка коштує x грн., а блокнот — y грн. Тоді за 7 ручок заплатили $7x$ грн., а за 2 блокноти — $2y$ грн. Оскільки разом за них заплатили 12,9 грн., то

$$7x + 2y = 12{,}9.$$

За умовою задачі 3 ручки дорожчі за один блокнот на 3,3 грн. Звідси дістанемо друге рівняння:

$$3x - y = 3{,}3.$$

Щоб відповісти на запитання задачі, необхідно знайти такі значення x і y, які задовольняють як перше складене рівняння, так і друге, тобто задовольняють систему:

$$\begin{cases} 7x + 2y = 12{,}9, \\ 3x - y = 3{,}3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо $x = 1{,}5$, $y = 1{,}2$.

В і д п о в і д ь. Ручка коштує 1,5 грн., блокнот — 1,2 грн. Зауважимо, що цю задачу, як і деякі інші з цього параграфа, можна розв'язати за допомогою рівняння з однією змінною. Але в більшості випадків складати систему легше, ніж рівняння з однією змінною.

Розв'язуючи задачу за допомогою системи рівнянь, дотримуються такої схеми:

1) *позначаємо деякі дві невідомі величини буквами* (наприклад, x і y);

2) *за умовою задачі складаємо систему рівнянь*;

3) *розв'язуємо отриману систему*;

4) *знайдені значення невідомих витлумачуємо відповідно до умови задачі*;

5) в і д п о в і д ь.

Приклад 2. За 5 год за течією і 2 год проти течії моторний човен проходить 120 км. За 2 год за течією і 1 год проти течії цей самий човен проходить 51 км. Знайти власну швидкість човна і швидкість течії.

Р о з в' я з а н н я. Нехай власна швидкість човна x км/год, а швидкість течії — y км/год. Тоді швидкість човна за течією річки дорівнює $(x + y)$ км/год, а швидкість човна проти течії — $(x - y)$ км/год. За 5 год за течією човен проходить $5(x + y)$ км, а за 2 год проти течії — $2(x - y)$ км. За умовою задачі:

$$5(x + y) + 2(x - y) = 120.$$

Міркуючи аналогічно, за умовою задачі можна скласти друге рівняння:

$$2(x + y) + (x - y) = 51.$$

Дістали систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5(x + y) + 2(x - y) = 120, \\ 2(x + y) + (x - y) = 51. \end{cases}$$

Спростивши рівняння системи, дістанемо:

$$\begin{cases} 7x + 3y = 120, \\ 3x + y = 51. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, дістанемо: $x = 16,5$, $y = 1,5$.

В і д п о в і д ь. Власна швидкість човна 16,5 км/год, швидкість течії 1,5 км/год.

Якої схеми дотримуються, розв'язуючи задачу за допомогою систем лінійних рівнянь?

1082②. У класі 32 учні, причому дівчат на 4 більше, ніж хлопців. Скільки в класі дівчат і скільки хлопців?

1083②. За олівець і три зошити заплатили 2,2 грн., а за три олівці і зошит — 1,8 грн. Скільки коштує один олівець і скільки один зошит?

1084②. Учень мав 12 монет по 25 к. і 50 к., всього на суму 4 грн. Скільки в учня монет по 25 к. і скільки по 50 к.?

1085②. За 3 футбольних і 2 волейбольних м'ячі заплатили 136 грн. Скільки коштує футбольний м'яч і скільки волейбольний, якщо два волейбольних м'ячі на 24 грн. дорожчі за один футбольний?

1086③. Разом мамі і доньці 42 роки. Через рік мама буде старша за доньку в 3 рази. Скільки років кожній з них тепер?

1087②. За 2 год робітник виготовив 26 деталей, причому за другу годину на 2 деталі більше, ніж за першу. Скільки деталей виготовив робітник за першу годину і скільки за другу?

1088②. За 2 год пішки і 1 год на велосипеді турист подолав *відстань 18 км, а за 1 год пішки і 2 год на велосипеді* — 27 км. Яка швидкість туриста пішки і яка на велосипеді?

1089②. Купили 16 зошитів у клітинку і лінійку, заплативши за всю покупку 8 грн. 20 к. Зошит у клітинку коштує 55 к., а в лінійку — 45 к. Скільки купили зошитів у клітинку і скільки в лінійку?

1090②. 2 ручки і 5 олівців коштують разом 4,4 грн. Скільки коштує одна ручка і скільки один олівець, якщо ручка коштує стільки ж, скільки три олівці?

Урок 78

1091②. Основа рівнобедреного трикутника на 2 см більша за його бічну сторону. Знайдіть основу трикутника та його бічну сторону, якщо периметр трикутника дорівнює 26 см.

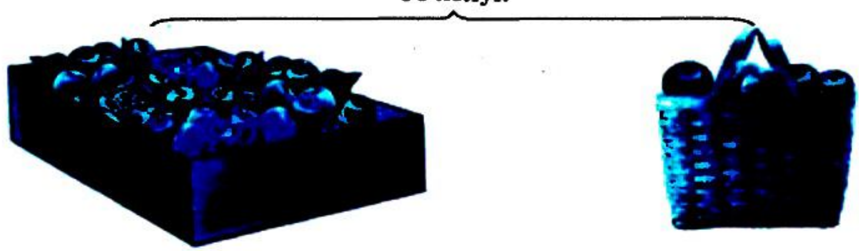
1092③. Човен за 3 год руху за течією і 2 год руху проти течії долає 92 км. За 9 год руху за течією човен долає відстань у 5 разів більшу, ніж за 2 год руху озером. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.

1093③. З пунктів A і B, відстань між якими 168 км, вирушають одночасно велосипедист і мотоцикліст. Якщо вони будуть рухатися назустріч один одному, то зустрінуться через 3 год. А якщо вони рухатимуться в одному напрямі, то мотоцикліст наздожене велосипедиста через 6 год. Знайдіть швидкість кожного учасника руху.

1094③. Розв'яжіть систему. Складіть задачу, яка розв'язується за допомогою цієї системи:

1) $\begin{cases} x + y = 17, \\ x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + 3y = 15, \\ x - y = 1. \end{cases}$

1095③. У ящику і кошику разом 95 яблук. Якщо кількість яблук у ящику зменшити вдвічі, а кількість яблук у кошику збільшити на 25, то яблук у ящику і кошику стане порівну. Скільки спочатку було яблук у ящику і скільки в кошику?



1096③. Сума двох чисел дорівнює 45. Знайдіть ці числа, якщо 60% одного з них дорівнює 75% другого.

1097④. У двох бригадах разом 75 робітників. Після того, як половину робітників з першої бригади перевели до другої, робітників там стало у 4 рази більше, ніж у першій. Скільки робітників було спочатку у першій бригаді і скільки у другій?

1098②. Довжина прямокутника на 8 дм більша за ширину. Знайдіть довжину прямокутника і його ширину, якщо периметр прямокутника дорівнює 56 дм.

1099③. Човен рухався 2 год за течією і 5 год проти течії, пройшовши за цей час 110 км. Швидкість човна проти течії становить 70% швидкості човна за течією. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.

1100③. Розв'яжіть систему. Складіть задачу, яка розв'язується за допомогою цієї системи:

1) $\begin{cases} x - y = 8, \\ x + y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 18, \\ 3x - y = 2. \end{cases}$

1101③. Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 200 і $\frac{11}{24}$ одного з них дорівнює $\frac{3}{8}$ другого.

1102④. На двох полицях разом 57 книжок. Після того, як з першої полиці переставили на другу 5 книжок, на другій полиці книжок стало вдвічі більше, ніж на першій. Скільки книжок було спочатку на кожній полиці?

Урок 79

1103③. Сума двох чисел дорівнює 62. Знайдіть ці числа, якщо 70% одного числа і 60% другого разом становлять 39,6.

1104③. Змішали два види цукерок ціною 15 грн. і 18 грн. за кілограм, після чого утворилося 25 кг суміші ціною 16 грн. 32 к. за кілограм. Скільки взяли кілограмів цукерок кожного виду?

1105④. За 5 хокейних ключок і 4 м'ячі заплатили 268 грн. Після того, як ключка подешевшала на 15%, а м'яч подорожчав на 10%, за одну ключку і один м'яч заплатили 59 грн. Якими були початкові ціни ключки і м'яча?

1106④. Якщо чисельник дробу збільшити на 7, то дріб дорівнюватиме $\frac{2}{3}$. Якщо ж знаменник початкового дробу збільшити на 2, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{4}$. Знайдіть цей дріб.

1107④. Скільки грамів 2-відсоткового і скільки грамів 6-відсоткового розчинів солі треба взяти, щоб одержати 200 г 5-відсоткового розчину солі?

1108④. 4 роки тому батько був у 8 разів старший за сина, а через 20 років батько буде у 2 рази старший за сина. Скільки років батькові і сину тепер?

1109④. Сума цифр двоцифрового числа, збільшена у 5 разів, дорівнює самому числу. Якщо поміняти місцями його цифри, то дістанемо число, яке більше даного на 9. Знайдіть дане число.

1110③. 20% одного числа на 2,4 більше за 10% другого. Знайдіть ці числа, якщо їх сума дорівнює 72.

1111③. З двох сортів печива ціною 8 грн. і 10 грн. утворили 40 кг суміші ціною 8 грн. 90 к. за кілограм. Скільки кілограмів печива кожного виду взяли для суміші?

1112④. Дві бригади повинні разом виготовити 300 деталей. До обіду перша бригада виконала 55% свого завдання, а друга — 60% свого. При цьому перша бригада виготовила на 27 деталей більше, ніж друга. Скільки деталей повинна була виготовити кожна бригада?

1113④. Якщо чисельник дробу зменшити на 2, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{2}$; якщо ж знаменник початкового дробу збільшити на 4, то дріб дорівнюватиме $\frac{1}{2}$. Знайдіть цей дріб.

1114④. В одному сплаві міститься 9% цинку, а в другому 24% цинку. Скільки треба взяти від першого і скільки від другого сплаву, щоб, сплавивши їх, одержати 260 г сплаву, що містить 15% цинку?

1115②. Розкладіть на множники многочлен:

1) $m^2 + 10m + 25$; 2) $c^2 - 8c + 16$;

3) $p^2 - 0{,}36$; 4) $-49a^2 + b^2$.

1116③. Спростіть вираз:

1) $2x(3x - 4x^3) - (x + 3x^2)^2$;

2) $2p^2(2p^2 - 6pm) - (2p^2 - 3mp)^2$.

1117④. Побудуйте графік функції:

$$y = \begin{cases} -3x, \text{ якщо } x < -1, \\ 3, \text{ якщо } -1 \le x \le 1, \\ 2x + 1, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ДО § 25—30

Урок 80

1①. Яке з рівнянь є лінійним рівнянням з двома змінними:

1) $2x + 3y = 9$; 2) $2x + 3y^2 = 9$?

2①. Чи є розв'язком рівняння $2x + y = 7$ пара чисел:

1) (3; −5); 2) (4; −1)?

3①. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x + y = 11, \\ x - y = 3 \end{cases}$ пара чисел:

1) (6; 5); 2) (7; 4)?

4②. Розв'яжіть графічним способом систему рівнянь

$$\begin{cases} y = 3x, \\ 2x + y = -5. \end{cases}$$

5②. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x + y = 3. \end{cases}$$

6②. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x + 3y = 3, \\ 4x - 3y = 24. \end{cases}$$

7③. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2(x + 3) = 7y - 5, \\ 6(x - 3) - 5(y + 1) = -24. \end{cases}$$

8④. За 8 зошитів і 3 блокноти заплатили 9 грн. 30 к. Після того, як зошит подорожчав на 15%, а блокнот подешевшав на 10%, за один зошит і один блокнот заплатили 2 грн. 04 к. Якими були початкові ціни зошита і блокнота?

Додаткові завдання

9④. Побудуйте графік рівняння

$$\frac{x+2}{4} + \frac{y-3}{6} = -\frac{1}{12}.$$

10④. Графік функції $y = kx + b$ проходить через точки $(3; -4)$ і $(-12; -9)$. Знайдіть k і b.

11④. При якому значенні a система рівнянь

$$\begin{cases} 7x - ay = 5, \\ 21x + 6y = 15 \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

Вправи для повторення розділу IV

До § 25

1118①. Чи є пара чисел (7; 1) розв'язком рівняння $x - y = 6$? Знайдіть ще чотири розв'язки цього рівняння.

1119②. Знайдіть два будь-які розв'язки рівняння:

1) $2x + y = 4$; 2) $x - 3y = 7$.

1120③. Виразіть:

1) змінну y через змінну x з рівняння $7x - y = 18$;
2) змінну x через змінну y з рівняння $3x + 9y = 0$;
3) змінну y через змінну x з рівняння $13x - 2y = 6$;
4) змінну x через змінну y з рівняння $8x + 15y = 24$.

1121③. Замініти * числами, щоб пари (*; 3); (6; *); (*; −3); (18; *) були розв'язками рівняння $x - 3y = 9$.

1122④. Доведіть, що рівняння з двома змінними не має розв'язків:

1) $x + y^2 = -4$; 2) $|x| + y^2 + 1 = 0$;

3) $-|x| - |y| = 5$; 4) $2x^4 + 3|y| = -2$.

1123④. Знайдіть усі пари цілих чисел, які є розв'язками рівняння $|x| + |y| = 2$.

До § 26

1124②. Побудуйте графік рівняння:

1) $x - y = 1$; 2) $1{,}5x + y = 7$;

3) $x - 4y = 5$; 4) $0{,}1x + 0{,}2y = 2$.

1125③. Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $x + y = 5$ і $7x - 4y = 2$. Знайдіть координати точки перетину графіків. Переконайтеся, що знайдена пара є розв'язком кожного з рівнянь.

1126③. Ордината деякої точки прямої, яка є графіком рівняння $-9x + 5y = 27$, дорівнює 0. Знайдіть абсцису цієї точки.

1127④. Побудуйте графік рівняння:

1) $|x| + y = 0$; 2) $|x| + x - y = 0$.

1128④. Побудуйте ту частину графіка $2x + y = 4$, яка розміщена у першій чверті.

До § 27

1129①. Чи є розв'язком системи $\begin{cases} x - y = 0, \\ x + y = 8 \end{cases}$ пара чисел:

1) $x = 5$; $y = 5$; 2) $x = 4$; $y = 4$?

1130②. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} y = -4x, \\ 2x + y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 3, \\ x + 2y = -3. \end{cases}$

1131③. Розв'яжіть графічно систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 0x + 3y = 6, \\ 3x - 2y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7{,}1x = -14{,}2, \\ 2x + 7y = 17. \end{cases}$

1132④. При якому значенні a система:

1) $\begin{cases} 2x + y = 5, \\ 6x + ay = 15 \end{cases}$ має безліч розв'язків;

2) $\begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ -6x + 4y = a \end{cases}$ не має розв'язків?

До § 28

1133②. Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x = y - 7, \\ 2x - y = -6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 3x - 5y = 21; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 3x - 4y = -19, \\ x + 7y = 27; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5x + 7y = -3, \\ 8x - y = -17. \end{cases}$

1134③. Не виконуючи побудов, знайдіть координати точки перетину графіків:

1) $2x + 3y = 0$ і $4x - 5y = -22$;

2) $4x - 7y = 34$ і $2x + 7y = -4$.

1135③. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3(y - x) - 4 = -7y, \\ 5(x + y) + 9 = 8x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} + y = 5, \\ x - \dfrac{y}{3} = 3. \end{cases}$

1136④. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{y+7}{2} = 5, \\ \dfrac{3x-1}{5} + \dfrac{2y+1}{3} = \dfrac{6x+8y}{15}. \end{cases}$$

1137④. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

1) $|x - y| + (x + 2y - 1)^2 = 0$;

2) $|x + y - 6| + x^2 - 4xy + y^2 = 0$.

До § 29

1138②. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 3x - y = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x + y = 6, \\ 5x + 9y = 14; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + 9y = -7, \\ 3x - 7y = 13; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x - 5y = 2, \\ 7x + 15y = 51. \end{cases}$

1139③. **Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь:**

1) $\begin{cases} 7x + 2y = 3, \\ 4x + 3y = -2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x + 12y = 53, \\ 5x - 18y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4x + 7y = -5, \\ 6x + 9y = -6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 5(a - 3b) + 6a = 7, \\ 0,5(a + 6b) - 1,5b = 2,5. \end{cases}$

1140④. **Скільки розв'язків має система рівнянь $\begin{cases} 2x + y = 3, \\ 4x + ay = 6 \end{cases}$ залежно від коефіцієнта a?**

До § 27—29

1141②. **Розв'яжіть систему рівнянь трьома способами (графічним, підстановки і додавання):**

1) $\begin{cases} x - 2y = 3, \\ x + y = -1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x + y = 7, \\ -x + 3y = 0. \end{cases}$

1142③. **Розв'яжіть систему рівнянь:**

1) $\begin{cases} 2 - 5x = 3(1 - y), \\ 2(x + y) = 0,5x + 5,5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4(x + 7) - 9(y - 13) = 139, \\ 5(x - 1) + 4(3 - y) = -15. \end{cases}$

1143③. **Розв'яжіть систему рівнянь:**

1) $\begin{cases} \dfrac{2x}{3} - \dfrac{4y}{5} = 2\dfrac{4}{15}, \\ \dfrac{3x}{7} + \dfrac{2y}{5} = -\dfrac{13}{35}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2x}{5} - \dfrac{y}{4} = \dfrac{23}{40}, \\ \dfrac{4x}{15} - \dfrac{3y}{5} = 1\dfrac{1}{30}. \end{cases}$

1144④. **Розв'яжіть систему рівнянь:**

1) $\begin{cases} \dfrac{x+2}{3} + \dfrac{y-5}{3} = 2, \\ \dfrac{x+2}{2} - \dfrac{y-5}{6} = \dfrac{5}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{2x+1}{7} + \dfrac{2y+2}{5} = \dfrac{1}{5}, \\ \dfrac{3x-2}{2} + \dfrac{y+4}{4} = 4. \end{cases}$

1145④. **Розв'яжіть систему рівнянь:**

1) $\begin{cases} 2x + y = -2, \\ -6x - 3y = 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - 3y = 5, \\ 2x - 6y = 7. \end{cases}$

1146④. Чи має розв'язок система:

1) $\begin{cases} 4x + 3y = 1, \\ 7x + 5y = 2, \\ 3x + 2y = 4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - 4y = 10, \\ 4x + 7y = 1, \\ 5x + 6y = 4? \end{cases}$

1147④. Графік прямої $y = kx + b$ перетинає вісь x у точці з абсцисою 4, а вісь y — у точці з ординатою -5.

1) Задайте функцію формулою;

2) Чи проходить графік функції через точку $(-80; -105)$?

1148④. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3(x - 2y) + x(7 - 2y) = 2y(1 - x), \\ 4(x - y - 1) + 5(x + y - 1) = 32; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = (x + 3)^2 + (y + 1)^2, \\ (y - 2)^2 - (y + 2)^2 = (x + 6)^2 - (x - 1)^2. \end{cases}$

1149④. При якому значенні a система $\begin{cases} 5x + 4y = 2, \\ 10x + 8y = a: \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;

2) не має розв'язків?

Чи існує таке значення a, при якому система має єдиний розв'язок?

1150④. При якому значенні b система $\begin{cases} 12x - 9y = 15, \\ 4x + by = 5: \end{cases}$

1) має безліч розв'язків;

2) має єдиний розв'язок? Знайдіть цей розв'язок.

До § 30

1151②. За 3 год їзди автобусом і 5 год потягом турист подолав 450 км. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість потяга, якщо швидкість потяга на 10 км/год більша за швидкість автобуса.

1152②. За 7 кг апельсинів і 2 кг бананів заплатили 52 грн. Скільки коштує 1 кг апельсинів і скільки 1 кг бананів, якщо 2 кг апельсинів на 3 грн. дешевші за 3 кг бананів?

1153③. Теплохід проходить за 3 год за течією і 2 год проти течії 142 км. Цей самий теплохід за 4 год проти течії проходить на 14 км більше, ніж за 3 год за течією. Знайдіть власну швидкість теплохода і швидкість течії.

1154③. Майстер і його учень повинні були виготовити 114 деталей. Після того, як учень працював 2 год, до роботи підключився майстер, і вони разом закінчили виготовлення деталей за 3 год. Скільки деталей за годину виготовляв майстер і скільки учень, якщо майстер за 2 год виготовляв стільки ж деталей, скільки учень за 3 год?

1155④. У двох кошиках знаходяться сливи. Якщо з другого кошика перекласти в перший 10 слив, то в обох кошиках слив буде порівну. Якщо ж з першого кошика перекласти в другий 44 сливи, то у першому кошику слив залишиться в 4 рази менше, ніж у другому. Скільки слив було в кожному кошику?

1156④. Різниця половини одного числа і $\frac{3}{4}$ другого дорівнює 8. Якщо ж перше число зменшити на $\frac{1}{7}$ його, а друге збільшити на дев'яту його частину, то їх сума дорівнюватиме 100. Знайдіть ці числа.

1157④. Сума трьох чисел, з яких друге у 5 разів більше за перше, дорівнює 140. Якщо друге число збільшити на 15%, третє — зменшити на 10%, а перше не змінювати, то сума цих чисел становитиме 139,5. Знайдіть початкові три числа.

1158④. Периметр прямокутника на 154 см більший від однієї із сторін і на 140 см більший від другої. Знайдіть площу прямокутника.

1159④. Сума цифр двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо поміняти місцями його цифри, то дістанемо число, яке більше даного на 18. Знайдіть дане число.

1160*. У двох бідонах місткістю 20 л і 15 л є певна кількість молока. Якщо більший бідон долити доверху молоком з меншого, то в меншому залишиться половина початкової кількості молока. Якщо ж долити менший бідон доверху молоком з більшого, то в більшому залишиться $\frac{2}{3}$ початкової кількості молока. Скільки літрів молока у кожному бідоні?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ ЗНАНЬ ЗА КУРС АЛГЕБРИ 7 КЛАСУ

1①. Чи є число 7 коренем рівняння:

1) $x - 2 = 5$; 2) $56 : x = 6$?

2①. Виконайте дії: 1) p^4p^3; 2) $t^9 : t^5$.

3①. Чи проходить графік рівняння $x - y = 5$ через точку:

1) $M\ (6;\ 2)$; 2) $N\ (4;\ -1)$?

4②. Спростіть вираз:

1) $(x - 3)(x + 3) - x(x - 5)$; 2) $(a + 2)^2 + (a - 7)(a + 3)$.

5②. Розкладіть на множники:

1) $14p^3 - 21p^2m$; 2) $3a^2 - 12b^2$.

6②. Розв'яжіть рівняння $5(x - 3) - 3(x + 2) = 3 - x$.

7③. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій $y = 3x - 4$ і $y = 5$ і знайдіть координати точки їх перетину.

8③. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5, \\ -4x + 3y = 16. \end{cases}$$

9④. З пункту A в пункт B вийшов пішохід. Через 1 год назустріч йому з пункту B виїхав велосипедист. Відстань між пунктами A і B дорівнює 58 км. Відомо, що швидкість велосипедиста на 10 км/год більша за швидкість пішохода. Знайдіть швидкість велосипедиста і швидкість пішохода, якщо до зустрічі пішохід був у дорозі 4 год.

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

Лінійні рівняння з однією змінною

1161. Знайдіть усі цілі значення a, при яких корінь рівняння $(a + 2)x = 8$ є натуральним числом.

1162. Перша цифра чотирицифрового числа 7. Якщо цю цифру переставити на останнє місце, то дістанемо число, менше за початкове на 1746. Знайдіть початкове число.

1163. Не розв'язуючи рівняння $5(2007x + 2008) = 13$ доведіть, що його корінь не є цілим числом.

1164. Розв'яжіть рівняння:

1) $|x| + |x - 2| = 0$; 2) $|x - 3| + |6 - 2x| = 0$.

1165. Скільки розв'язків залежно від числа a (кажуть: параметра a) має рівняння:

1) $ax = 2$; 2) $ax = 0$?

1166. Для кожного значення параметра a розв'яжіть рівняння відносно змінної x:

1) $2x - a = 15$; 2) $7x - a = 2x + 4a - 9$;

3) $(a - 3)x = 7$; 4) $ax = a$;

5) $ax + 1 = x + a$; 6) $a(x - 2) = x(a + 3)$.

Розв'язання. 4) Якщо $a = 0$, то маємо рівняння $0 \cdot x = 0$, x — будь-яке число. Якщо $a \neq 0$, то, поділивши ліву і праву частини рівняння на a, дістанемо $x = 1$.

Відповідь. Якщо $a = 0$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 0$, то $x = 1$.

1167. При якому значенні параметра a рівносильні рівняння:

1) $7x + a = 5(x - a)$ і $7(x + a) = 4(10 - a)$;

2) $(a + 7)\,x = 18$ і $|x| = -1$?

1168. Поїзд проходить повз нерухомого пасажира за 7 с, а уздовж платформи завдовжки 378 м — за 25 с. Знайдіть швидкість і довжину поїзда.

1169. Поїзд проходить мостом завдовжки 171 м за 27 с, а повз пішохода, який йде назустріч поїзду зі швидкістю 1 м/с,— за 9 с. Знайдіть швидкість і довжину поїзда.

1170. Через першу трубу басейн наповнюється за половину того часу, за який через другу трубу наповнюється $\frac{2}{3}$ цього басейна. Через другу трубу окремо басейн наповнюється на 4 год довше, ніж через першу трубу окремо. Скільки часу наповнюється басейн окремо через кожну трубу?

1171. Знайдіть кути рівнобедреного трикутника, якщо один з них становить 20% другого.

1172. Для обклеювання двох кімнат купили шпалери. На обклеювання першої кімнати пішло на 2 рулони більше половини куплених рулонів, а на обклеювання другої кімнати пішло $\frac{2}{3}$ кількості рулонів, використаних на обклеювання першої кімнати. Скільки рулонів шпалер купили, якщо після обклеювання обох кімнат залишився один невикористаний рулон?

1173. Сплав міді і цинку містить міді на 320 г більше, ніж цинку. Після того, як зі сплаву виділили $\frac{6}{7}$ міді і 60% цинку, що в ньому містилися, маса сплаву стала дорівнювати 100 г. Якою була початкова маса сплаву?

Р о з в' я з а н н я. Подамо умову у вигляді таблиці:

Речовина	Було, г	Виділили	Залишилося	Залишилося, г
Мідь	$x+320$	$\frac{6}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}(x+320)$
Цинк	x	60 %	40 %	$0{,}4x$

За умовою $\frac{1}{7}(x+320)+0{,}4x=100$. Звідси $x=100$ (г). Тоді початкова маса сплаву $x+320+x=2x+320=2\cdot100+320=$ $=520$ (г).

В і д п о в і д ь. 520 г.

Цілі вирази

1174. Справедливою є рівність: $(І+В+А+Н)^4=\overline{ІВАН}$. Знайдіть число $\overline{ІВАН}$.

1175. На скільки відсотків збільшиться площа прямокутника, якщо його довжину збільшити на 15%, а ширину — на 20%?

1176. Що більше: $\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$ чи $\frac{10^{16}+1}{10^{17}+1}$?

1177. Доведіть, що число $2007\cdot2009+1$ є квадратом деякого натурального числа. Якого саме?

1178. Доведіть, що значення виразу $8n^3 - 8n$ при всіх натуральних n кратне 24.

1179. Подайте вираз $2m^2 + 2n^2$ у вигляді суми двох квадратів.

1180. Який многочлен треба записати замість $*$, щоб дістати тотожність:

1) $(x + 1) \cdot * = x^2 - 4x - 5$;

2) $(x^2 - x + 1) \cdot * = x^3 + 2x^2 - 2x + 3$?

1181. Розкладіть на множники:

1) $a^2b^2 - 2ab^2 + b^2 + a^4 - 2a^2 + 1$;

2) $1 - 3t + 3t^2 - t^3$; 3) $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4$;

4) $2(m + 3n) + (m - n)(m + n) - 8$;

5) $a^3 + a^2 - b^3 - b^2$; 6) $8x^3 + 4x^2 - 2$.

1182. Чи може сума квадратів п'яти послідовних натуральних чисел бути квадратом натурального числа?

1183. Спростіть вираз

$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1)(2^{64} + 1)$.

1184. Середнім арифметичним чисел a і c є число b. Доведіть, що $a^2 + ac + c^2$ є середнім арифметичним чисел $a^2 + ab + b^2$ і $b^2 + bc + c^2$.

1185. Задача Ж. Л. Лагранжа. Доведіть тотожність

$$(x^2 + y^2 + z^2)(m^2 + n^2 + p^2) - (xm + yn + zp)^2 =$$
$$= (xn - ym)^2 + (xp - zm)^2 + (yp - zn)^2.$$

1186. Доведіть, що число $\overline{abcabc}$ кратне 7, 11 і 13.

Розв'язання. $\overline{abc\,abc} = 100\,000a + 10\,000b + 1000c + 100a + 10b + c = 100\,100a + 10\,010b + 1001c = 1001\,(100a + 10b + c) = 1001\overline{abc}$. Оскільки 1001 кратне числам 7, 11, 13, то і число $\overline{abcabc}$ кратне числам 7, 11, 13. Твердження задачі доведено.

1187. Доведіть, що значення виразу $555^{777} + 777^{555}$ кратне 37.

1188. Яке трицифрове число є квадратом двоцифрового числа і кубом одноцифрового числа?

1189. Доведіть, що значення виразу $191^6 + 734^6 - 593^3$ кратне 10.

1190. Доведіть, що значення виразу $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ при будь-якому натуральному n кратне 10.

1191. Подайте вираз $2x(x^2 + 3y^2)$ у вигляді суми кубів двох многочленів.

1192. Доведіть тотожність:

1) $(x-2)(x-1)x(x+1)+1 = (x^2 - x - 1)^2$;

2) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2$.

1193. Використовуючи результат попередньої задачі, доведіть, що число $2007 \cdot 2008 \cdot 2009 \cdot 2010 + 1$ є квадратом деякого натурального числа x, і знайдіть x.

1194. Доведіть, що різниця кубів двох послідовних натуральних парних чисел при діленні на 48 дає в остачі 8.

1195. Розкладіть на множники:

1) $y^5 + y + 1$;
2) $m^4 + m^2 + 1$;
3) $x^4 + 5x^2 + 9$;
4) $n^4 + 4$;
5) $x^4 + 2a^2x^2 - 4a^2b^2 - 4b^4$;
6) $m^3 - 2m - 1$;
7) $m^3 - 5m - 2$;
8) $x^4 - 2x^3y - 6x^2y^2 - 4xy^3 - y^4$.

1196. Порівняйте 5^{15} і 3^{23}.

Функції

1197. Побудуйте графік функції:

1) $y = 2|x| + x$;
2) $y = |x| - 4x$;
3) $y = |2x| + 2x - 1$;
4) $y = 3x - |4x| + 3$.

1198. Точка $A\,(a;\,b)$, де $a \neq 0$, $b \neq 0$, належить графіку функції $y = x^2$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $B(-a;\,b)$;
2) $C(a;\,-b)$;
3) $D(-a;\,-b)$?

1199. Точка $M(m;\,n)$, де $m \neq 0$, $n \neq 0$, належить графіку функції $y = x^3$. Чи належить цьому графіку точка:

1) $N(-m;\,n)$;
2) $K(m;\,-n)$;
3) $P(-m;\,-n)$?

1200. Знайдіть точки перетину графіків функцій:

$$y = \begin{cases} 2x + 1, \text{ якщо } x \le 0, \\ -3x + 1, \text{ якщо } x > 0 \end{cases} \text{ і } y = -4|x| + 3?$$

Системи лінійних рівнянь з двома змінними

1201. Василь може купити без здачі 7 бубликів і 3 пиріжки або 3 бублики і 4 пиріжки. Який відсоток від вартості пиріжка становить вартість бублика?

1202. Чи має розв'язки рівняння з двома змінними:

1) $x^2 + y^4 = -1$; 2) $|y| + x^2 = 0$;

3) $x^2 - |y| = 5$; 4) $5x^2 + y^8 + |x| = 0$?

1203. У рівнянні $ax + by = 43$ коефіцієнти a і b — цілі числа. Чи може розв'язком цього рівняння бути пара чисел (5; 10)?

1204. Скільки розв'язків має рівняння:

1) $(x + 1)^2 + y^2 = 0$;

2) $x^2 + y^2 + (y - 2)^2 = 0$;

3) $|x| + (y + 1)^2 = 0$;

4) $x((x - 3)^2 + (y + 4)^2) = 0$?

1205. Сергій придбав кілька зошитів по 40 к. і олівців по 50 к., заплативши за всю покупку 6 грн. Скільки зошитів придбав Сергій?

1206. Побудуйте графік рівняння:

1) $(x + 1)(x - 2y) = 0$; 2) $x^2 - xy = 0$;

3) $(x^2 - 4)(y^2 + 4) = 0$; 4) $(|x| + 1)(|y| - 3) = 0$;

5) $|x| + x = y$; 6) $x = y|x|$.

1207. Доведіть, що рівняння $x^2 - y^2 = 26$ не має розв'язків у цілих числах (тобто коли обидві змінні x і y — цілі числа).

1208. Чи перетинає графік рівняння $y + x^2 = 4$: 1) вісь x; 2) вісь y. Якщо відповідь позитивна, то назвіть координати точок перетину.

1209. Знайдіть всі пари натуральних чисел, що задовольняють рівняння $11x + 8y = 104$.

1210. Не виконуючи побудови, знайдіть координати точки перетину графіка рівняння $(x - 3)(y + 5) = 0$: 1) з віссю x; 2) з віссю y.

1211. Учень задумав два двоцифрових числа, кожне з яких починається цифрою 6, причому інші цифри кожного з чисел не дорівнюють 6. Якщо переставити місцями цифри в кожному із задуманих чисел, то значення добутків двоцифрових чисел не зміниться. Які числа задумав учень?

1212. Сергій народився у XX столітті. У 2009 р. йому буде стільки років, якою є сума цифр його року народження. В якому році народився Сергій?

1213. При якому значенні a прямі $3x + 4y = 5$ і $2x + 8y = a$ перетинаються в точці, що лежить на осі y?

1214. Доберіть, якщо це можливо, таке значення m, при якому дана система має єдиний розв'язок; не має розв'язків; має нескінченну множину розв'язків:

1) $\begin{cases} 2x - y = 7, \\ mx - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + 2y = 6, \\ 1{,}5x + y = m; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} mx - 2y = 1, \\ 4x - 8y = 4. \end{cases}$

1215. При якому значенні a має розв'язок система рівнянь

$$\begin{cases} 4x - 3y = 10, \\ 2x + 5y = -8, \\ a(x + y) = 7\,? \end{cases}$$

1216. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} x - y = 2, \\ y - z = 3, \\ z + x = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 7, \\ y + z = 5, \\ z + x = -4. \end{cases}$

1217. При множенні многочлена $4x^3 - 2x^2 + 3x - 8$ на многочлен $ax^2 + bx + 1$ у добутку дістали многочлен, який не містить ні x^4, ні x^3. Знайдіть коефіцієнти a і b та многочлен, який дістали у добутку.

1218. Розв'яжіть систему рівнянь:

1) $\begin{cases} (x - 1)(y - 4x) = 0, \\ x + y = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} (x - y)(x + 1) = 0, \\ (y - 2)(x + y - 6) = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$

Р о з в' я з а н н я. 4) З першого рівняння системи маємо $x^2 + 2xy + y^2 = 1$; $(x + y)^2 = 1$. Звідси $x + y = 1$ або $x + y = -1$. Отже, розв'язування початкової системи звелося до розв'язування двох систем:

1) $\begin{cases} x + y = 1, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$ Звідси $x = 1$; $y = 0$;

2) $\begin{cases} x + y = -1, \\ 3x - y = 3. \end{cases}$ Звідси $x = 0{,}5$; $y = -1{,}5$.

В і д п о в і д ь. (1; 0), (0,5; –1,5).

1219. Розв'яжіть рівняння з двома змінними:

1) $(x-2)^2 + (3x-y)^2 = 0$; 2) $(2x-y)^2 + x^2 + 8x + 16 = 0$;

3) $(7x + y - 3)^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 0$;

4) $|x - y + 5| + x^2 - 4xy + 4y^2 = 0$;

5) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = 0$; 6) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 6y + 9 = 0$.

1220. Число b на 10% більше за число a і на 30% більше за число c. Знайдіть числа a, b і c, якщо a на 8 більше за c.

1221. Через 4 роки вік брата буде відноситися до віку сестри, як 7 : 5. Скільки років нині кожному з них, якщо 2 роки тому брат був удвічі старший за сестру?

1222. Якщо задумане двоцифове число поділити на суму його цифр, то у частці дістанемо 4 і в остачі 6, якщо ж від задуманого числа відняти потроєну суму його цифр, то дістанемо 16. Яке число задумали?

1223. Число десятків деякого трицифрового числа удвічі більше, ніж число одиниць. Сума цифр цього числа дорівнює 13. Якщо поміняти місцями цифри сотень і одиниць, то дістанемо число, яке на 495 менше за дане. Знайдіть дане число.

1224. Якщо перше з двох даних чисел збільшити на 10%, а друге — на 15%, то сума чисел збільшиться на 13%. Якщо ж перше з даних чисел зменшити на 5%, а друге — на 10%, то сума чисел зменшиться на 8%. Знайдіть дані числа.

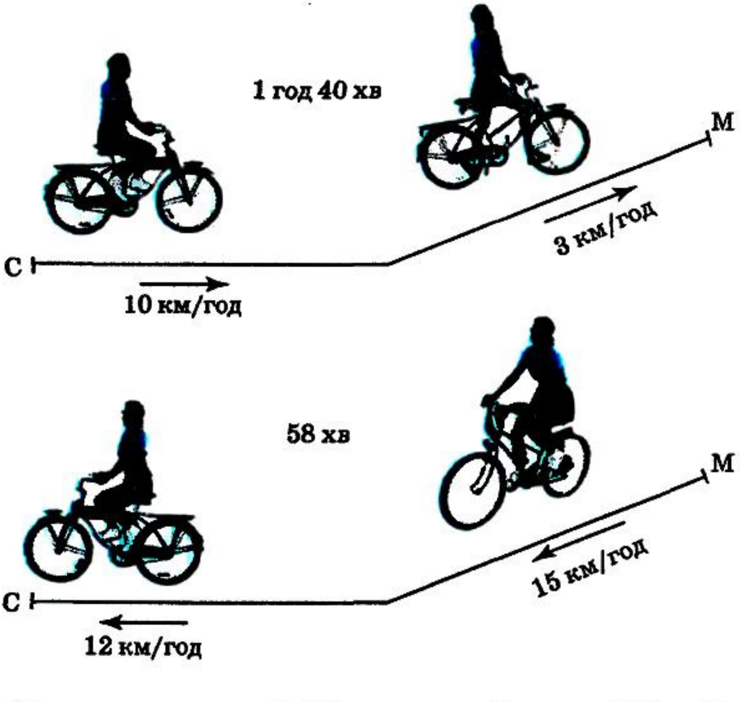
1225. У магазин завезли цукерки і печиво. Першого дня продали $\frac{1}{5}$ завезених цукерок і $\frac{1}{4}$ завезеного печива, що становить 205 кг. Другого дня продали $\frac{1}{4}$ цукерок, які залишилися, що на 37 кг більше п'ятої частини маси печива, що залишилося після першого дня. Скільки було завезено до магазину кілограмів цукерок і скільки печива?

1226. Одна сторона трикутника у три рази більша за другу. Периметр трикутника на 22 см більший за їх півсуму і на 27 см більший за їх піврізницю. Знайдіть сторони трикутника.

1227. Якщо довжину прямокутника збільшити на 3 см, а ширину збільшити на 2 см, то його площа збільшиться на 37 см². Якщо ж кожну сторону прямокутника зменшити на 1 см, то його площа зменшиться на 12 см². Знайдіть периметр початкового прямокутника.

1228. Один сплав складається з двох металів, маси яких відносяться, як 3 : 4, а другий містить ті самі метали, але маси їх відносяться, як 1 : 2. Скільки кілограмів кожного сплаву треба взяти, щоб одержати 10 кг сплаву, в якому маси тих самих металів відносяться, як 2 : 3?

1229. Шлях із села до міста йде спочатку горизонтально, а потім вгору. Турист проїхав на велосипеді горизонтальну частину шляху зі швидкістю 10 км/год, а вгору йшов пішки зі швидкістю 3 км/год і прибув у місто через 1 год 40 хв після виїзду із села. У зворотному напрямку шлях під гору турист проїхав зі швидкістю 15 км/год, а горизонтальну ділянку шляху зі швидкістю 12 км/год і прибув у село через 58 хв після виїзду з міста. Скільки кілометрів від села до міста?



1230. В одному резервуарі 490 л води, а в іншому 560 л. Якщо долити перший резервуар доверху водою з другого, то другий резервуар виявиться наповненим тільки наполовину. Якщо другий резервуар долити доверху водою з першого, то перший буде наповнений водою тільки на одну третину. Визначіть місткість кожного резервуара.

1231. Автобус і маршрутне таксі, які вирушають назустріч одне одному за розкладом о 8 год з пунктів A і B, звичайно зустрічаються о 8 год 12 хв. Але одного разу маршрутне таксі вирушило в рейс о 8 год 8 хв і зустрілося з автобусом о 8 год 17 хв. Знайдіть швидкість автобуса і швидкість маршрутного таксі, якщо відстань між A і B дорівнює 24 км.

1232. З пункту M у пункт N, відстань між якими 37 км, о 7 год і о 7 год 30 хв виїхали два автобуси з однією і тією самою швидкістю. О 7 год 10 хв з N в M виїхав велосипедист. Він зустрів перший автобус о 7 год 40 хв, а другий — о 8 год 01 хв. Знайдіть швидкість кожного з автобусів і велосипедиста.

1233. З міста в село, відстань між якими 24 км, вийшов турист. Через 1 год 20 хв слідом за ним виїхав велосипедист, який через півгодини наздогнав туриста. Після прибуття в село велосипедист, не зупиняючись, повернув назад і зустрів туриста через півтори години після першої зустрічі. Знайдіть швидкість туриста і швидкість велосипедиста.

1234. З міста A в місто B о 9 год виїхали два автобуси. В той самий час з міста B в місто A виїхав велосипедист. Один автобус він зустрів о 10 год 20 хв, а другий — об 11 год. Відстань між містами 120 км. Знайдіть швидкість велосипедиста та швидкість кожного з автобусів, якщо швидкість одного автобуса становить $\frac{7}{12}$ швидкості другого.

1235. По колу, довжина якого 500 м, рухаються два тіла. Вони зустрічаються через кожні 10 с, рухаючись у протилежних напрямах, і через кожні 50 с, рухаючись в одному напрямі. Знайдіть швидкість кожного тіла.

ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5—6 КЛАСІВ

Натуральні числа

Числа 1, 2, 3, 4, 5..., які використовуються під час лічби предметів, називають *натуральними числами.* Найменше натуральне число —1, найбільшого — не існує.

При *округленні натурального числа* до певного розряду всі наступні за цим розрядом цифри замінюють нулями. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишилася, збільшують на одиницю. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, яка залишилася, не змінюють.

Наприклад, при округленні до сотень: $4520 \approx 4500$, $17\,287 \approx \approx 17\,300$, $12\,950 \approx 13\,000$.

Подільність натуральних чисел

Якщо говорять, що одне натуральне число *ділиться* на інше, то мають на увазі ділення без остачі.

Якщо натуральне число a ділиться на натуральне число b, то a називають *кратним* b, а b — *дільником* a. Наприклад, 20 кратне 5; 7 — дільник 28.

Ознаки подільності:

на 10 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0;

на 5 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується цифрою 0 або цифрою 5;

на 2 діляться всі ті натуральні числа, запис яких закінчується парною цифрою;

на 9 діляться всі ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 9;

на 3 діляться всі ті натуральні числа, сума цифр яких ділиться на 3.

Натуральне число називається *простим*, якщо воно має тільки два різних дільники: одиницю і саме це число. Натуральне число називається *складеним*, якщо воно має більше двох дільників.

Наприклад, числа 2, 3, 5, 7, 11 — прості, а числа 4, 6, 15, 108 — складені. Число 1 не належить ні до простих, ні до складених.

Будь-яке складене число можна *розкласти на прості множники.* Наприклад:

$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$; $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$; $693 = 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$.

Найбільше натуральне число, на яке діляться числа a і b, називається *найбільшим спільним дільником* (НСД) цих чисел. Щоб знайти НСД двох (або більшої кількості) чисел, треба розкласти ці числа на прості множники і знайти добуток спільних простих множників:

$$\begin{array}{r|l} 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Наприклад, НСД(180; 450) $= 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 90$. Якщо НСД($a$; b) $=$ $= 1$, то числа a і b називаються *взаємно простими*.

Найменше натуральне число, яке ділиться на числа a і b, називається *найменшим спільним кратним* (НСК) цих чисел. Щоб знайти НСК двох (або більшої кількості) чисел, треба розкласти ці числа на прості множники і доповнити розклад першого з них тими множниками інших чисел, яких не вистачає в розкладі першого, після чого знайти добуток отриманих множників.

Наприклад, НСК(180; 450) $= \underbrace{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5}_{180} \cdot 5 = 900$.

Якщо при діленні натурального числа a на натуральне число b дістали частку q і остачу r, то $a = bq + r$, де $r < b$.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} 108 & \underline{13} \\ \underline{104} & 8 \\ 4 & \end{array} \qquad 108 = 13 \cdot 8 + 4.$$

Десяткові дроби

З двох десяткових дробів *більший* той, у якого більша ціла частина. Якщо цілі частини дробів рівні, то більший той, у якого більше десятих, і т. д.

Наприклад: $18{,}7 > 16{,}92$; $12{,}37 < 12{,}41$; $5{,}32 > 5{,}319$.

При *округленні десяткового дробу* до певного розряду всі наступні за цим розрядом цифри замінюють нулями або відкидають (якщо вони стоять після коми). Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишилася, збільшують на одиницю. Якщо перша наступна за цим розрядом цифра 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, що залишилася, не змінюють.

Наприклад, при округленні до сотих: $4,783 \approx 4,78$; $5,925 \approx \approx 5,93$; $4,798 \approx 4,80$.

Додавання і віднімання десяткових дробів виконують порозрядно, записуючи їх один під одним так, щоб кома розміщувалися під комою. Наприклад:

$$\begin{array}{r} 4,52 \\ +\;\; 3,8 \\ \hline 8,32 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13,29 \\ -\;\; 4,273 \\ \hline 9,017 \end{array}$$

Щоб *помножити два десяткових дроби*, треба виконати множення, не звертаючи уваги на коми, а потім у добутку відокремити комою справа стільки цифр, скільки їх стоїть після коми в обох множниках разом.

Наприклад:

$$\begin{array}{r} 4,07 \\ \times\;\; 2,9 \\ \hline 3663 \\ +\; 814 \\ \hline 11,803 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,017 \\ \times\;\; 0,9 \\ \hline 0,0153 \end{array}$$

Щоб помножити десятковий дріб на 10^n, де n — натуральне число, треба в цьому дробі перенести кому на n цифр вправо. Наприклад:

$4,17 \cdot 10 = 41,7$; $0,29 \cdot 100 = 29$; $4,8 \cdot 1000 = 4800$.

Щоб помножити десятковий дріб на 0,1; 0,01; 0,001..., треба в цьому дробі перенести кому вліво на стільки знаків, скільки нулів стоїть у другому множнику перед одиницею (включаючи і нуль цілих). Наприклад:

$17,2 \cdot 0,1 = 1,72$; $293 \cdot 0,01 = 2,93$; $1,45 \cdot 0,001 = 0,00145$.

Щоб поділити десятковий дріб на натуральне число, треба виконати ділення, не звертаючи уваги на кому, проте після закінчення ділення цілої частини діленого треба в частці поставити кому.

Наприклад:

$$\begin{array}{r|l} 42,84 & 12 \\ \cline{2-2} -\;36 & 3,57 \\ \cline{1-1} 68 & \\ -\;60 & \\ \cline{1-1} 84 & \\ -\;84 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Щоб поділити десятковий дріб на 10^n, треба в цьому дробі перенести кому на n цифр уліво. Наприклад: 14,5 : 10 = 1,45; 2,37 : 100 = 0,0237.

Щоб поділити десятковий дріб на десятковий, треба в діленому і дільнику перенести кому на стільки цифр вправо, скільки їх стоїть після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число.

Наприклад: 12,1088 : 2,56 = 1210,88 : 256 = 4,73.

Щоб поділити десятковий дріб на 0,1; 0,01; 0,001, ..., треба в цьому дробі перенести кому вправо на стільки знаків, скільки нулів містить дільник перед одиницею (враховуючи нуль цілих).

Наприклад: 4,73 : 0,1 = 47,3; 2,5 : 0,01 = 250;
0,0427 : 0,001 = 42,7.

Звичайні дроби

Частку від ділення числа a на число b можна записати у вигляді *звичайного дробу* $\frac{a}{b}$, де a — *чисельник дробу*, b — його *знаменник*.

Правильним дробом називається дріб, у якого чисельник менший від знаменника.

Неправильним дробом називається дріб, у якого чисельник більший від знаменника або дорівнює йому.

Значення правильного дробу менше від 1, а неправильного — не менше від 1.

З неправильного дробу можна виділити цілу і дробову частину (отримаємо *мішане число*). Наприклад: $\frac{12}{5} = 2\frac{2}{5}$; $\frac{175}{4} = 43\frac{3}{4}$.

Мішане число можна подати у вигляді неправильного дробу. Наприклад: $4\frac{1}{3} = \frac{4\cdot3+1}{3} = \frac{13}{3}$.

Основна властивість дробу: величина дробу не зміниться, якщо чисельник і знаменник дробу помножити або поділити на одне й те саме натуральне число.

Наприклад: $\frac{15}{20} = \frac{15:5}{20:5} = \frac{3}{4}$ (скоротили дріб $\frac{15}{20}$ на 5), $\frac{3}{7} = \frac{3\cdot2}{7\cdot2} = \frac{6}{14}$ (звели дріб $\frac{3}{7}$ до знаменника 14).

Дроби з однаковими знаменниками додають і віднімають, використовуючи формули:

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c} \quad \text{і} \quad \frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{a-b}{c}.$$

Наприклад: $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{5}{7}$; $\frac{13}{19}-\frac{2}{19}=\frac{11}{19}$.

Щоб додати або відняти дроби з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника, а потім виконують дію за правилом додавання або віднімання дробів з однаковими знаменниками.

Наприклад: $\frac{1^{\backslash 5}}{6}+\frac{3^{\backslash 3}}{10}=\frac{5+9}{30}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$; $\frac{7^{\backslash 3}}{8}-\frac{5^{\backslash 2}}{12}=\frac{21-10}{24}=\frac{11}{24}$.

Як виконують додавання і віднімання мішаних чисел, показано на прикладах:

$$5\frac{1^{\backslash 4}}{3}+2\frac{3^{\backslash 3}}{4}=7\frac{4+9}{12}=7\frac{13}{12}=8\frac{1}{12};$$

$$7\frac{4^{\backslash 4}}{5}-6\frac{3^{\backslash 5}}{4}=1\frac{16-15}{20}=1\frac{1}{20};$$

$$5\frac{4^{\backslash 2}}{9}-2\frac{5^{\backslash 3}}{6}=3\frac{8}{18}-\frac{15}{18}=2\frac{26-15}{18}=2\frac{11}{18}.$$

Щоб помножити два дроби, треба помножити окремо їх чисельники і знаменники й перший добуток записати чисельником, а другий — знаменником:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}.$$

Наприклад: $\frac{5}{8}\cdot\frac{14}{15}=\frac{\overset{1}{\cancel{5}}\cdot\overset{7}{\cancel{14}}}{\underset{4}{\cancel{8}}\cdot\underset{3}{\cancel{15}}}=\frac{7}{12}$; $7\cdot\frac{3}{5}=\frac{7}{1}\cdot\frac{3}{5}=\frac{7\cdot 3}{1\cdot 5}=\frac{21}{5}=4\frac{1}{5}$;

$$2\frac{1}{3}\cdot 4\frac{2}{7}=\frac{7}{3}\cdot\frac{30}{7}=\frac{\overset{1}{\cancel{7}}\cdot\overset{10}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{3}}\cdot\underset{1}{\cancel{7}}}=\frac{10}{1}=10.$$

Щоб поділити один дріб на другий, треба ділене помножити на дріб, обернений до дільника:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

Наприклад: $\frac{2}{5}:\frac{3}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{3}=\frac{2\cdot 7}{5\cdot 3}=\frac{14}{15}$;

$$2\frac{1}{2}:1\frac{3}{4}=\frac{5}{2}:\frac{7}{4}=\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{7}=\frac{5\cdot\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{1}{\cancel{2}}\cdot 7}=\frac{10}{7}=1\frac{3}{7}.$$

Відношення і пропорції

Частка двох чисел називається *відношенням цих чисел*. Приклади відношень: $2 : 7$; $0{,}3 : \frac{1}{5}$.

Рівність двох відношень називається *пропорцією*. Наприклад: $8 : 2 = 10 : 2{,}5$ — пропорція.

Середні члени пропорції

$$a : b = c : d.$$

Крайні члени пропорції

Основна властивість пропорції: добуток крайніх членів пропорції дорівнює добутку середніх членів пропорції, тобто якщо

$$a : b = c : d \quad \left(\text{або } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}\right), \quad \text{то } ad = bc.$$

Дві змінні величини, відношення відповідних значень яких є сталим, називаються *прямо пропорційними*. Якщо дві величини прямо пропорційні, то із збільшенням (зменшенням) значення однієї з них у кілька разів, значення другої величини збільшується (зменшується) у стільки ж разів.

Додатні і від'ємні числа

Два числа, що відрізняються одне від одного лише знаком, називаються *протилежними числами*. Наприклад: числа 5 і -5 — протилежні.

Модулем числа називається відстань від початку відліку до точки, що зображує це число на координатній прямій.

Модулем додатного числа і числа нуль є саме це число, а модулем від'ємного числа — протилежне йому число:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ якщо } a \geq 0, \\ -a, \text{ якщо } a < 0. \end{cases}$$

Будь-яке від'ємне число менше від нуля і менше від будь-якого додатного числа. Із двох від'ємних чисел більшим є те, модуль якого менший, і меншим є те, модуль якого більший.

Наприклад: $2 > -10$; $-5 < 0$; $-3 < -1$; $-4 > -15$.

Щоб додати два від'ємних числа, треба додати їх модулі і поставити перед одержаним числом знак $-$. Наприклад: $-2 + (-7) = -9$.

Щоб додати два числа з різними знаками, треба від більшого модуля доданків відняти менший модуль і поставити перед знайденим числом знак того доданка, модуль якого більший.

Наприклад: $-7 + 7 = 0$; $5 + (-3) = 2$; $-8 + 1 = -7$.

Щоб від одного числа відняти друге, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику:

$$a - b = a + (-b).$$

Наприклад: $5 - 9 = 5 + (-9) = -4$; $-2 - 5 = -2 + (-5) = -7$; $-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$.

Добуток двох чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів. Добуток двох чисел із різними знаками дорівнює добутку їх модулів, взятому зі знаком «−».

Наприклад: $-4 \cdot (-3) = 12$; $2 \cdot (-5) = -10$.

Частка двох чисел з однаковими знаками дорівнює частці від ділення їх модулів. Частка двох чисел із різними знаками дорівнює частці від ділення їх модулів, взятій зі знаком «−».

Наприклад: $-8 : (-2) = 4$; $6 : (-3) = -2$; $-18 : 6 = -3$.

Цілі числа (додатні та від'ємні), дробові числа (додатні та від'ємні) та число 0 називаються *раціональними числами*.

Для будь-яких раціональних чисел виконуються *властивості*:

$a + b = b + a$ — переставна властивість додавання;

$(a + b) + c = a + (b + c)$ — сполучна властивість додавання;

$ab = ba$ — переставна властивість множення;

$(ab)c = a(bc)$ — сполучна властивість множення;

$(a + b)c = ac + bc$ — розподільна властивість множення.

Перетворення виразів

Щоб *звести подібні доданки*, треба додати їх коефіцієнти і знайдений результат помножити на спільну буквену частину.

Наприклад: $5x + 2x = 7x$; $9a - a = 8a$; $4b + 7b - 2b = 9b$.

Щоб *розкрити дужки, перед якими стоїть знак «+»*, треба опустити дужки і знак «+», що стоїть перед ними, і записати всі доданки зі своїми знаками.

Наприклад: $4x + (2m - 5p) = 4x + 2m - 5p$.

Щоб *розкрити дужки, перед якими стоїть знак «−»*, треба опустити дужки і знак «−», що стоїть перед ними, і записати всі доданки із протилежними знаками.

Наприклад: $7x - (5a - 2b) = 7x - 5a + 2b$.

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ВПРАВ

Розділ I

9. 1), 2), 4), 6), 7). Так; 3), 5), 8) ні. **33.** 2) −2; 3) −4,75; 4) −10. **38.** 2) −3; 3) −2,5; 4) −5. **41.** 1) 4; 2) 1,6. **43.** 1) 2; 2) $1\frac{5}{7}$; 3) −9. **44.** 1) Рівняння не має розв'язків; 2) x — будь-яке число. **45.** 1) 5; 2) 3; 3) −5; 4) −1. **46.** 1) $b = 11$; 2) $b = 4,5$. **47.** 1) 6; −6; 2) 3; −4. **48.** −4; −2; −1; 1; 2; 4. **50.** 1) 1,2; 2) −1,8. **51.** 1) x — будь-яке число; 2) рівняння не має розв'язків. **52.** 1) 1; 2) 3; 3) $\frac{1}{5}$; 4) −2. **53.** −6; −3; −2; −1. **73.** 1400 грн. **74.** 45 км/год; 18 км/год. **75.** 12 км. **78.** 15 кг; 12 кг. **79.** 60 деталей; 63 деталі. **80.** 48. **84.** У I — 125 робітників, у II — 137 робітників, у III — 168 робітників. **85.** Ні. **86.** 36 кущів і 12 кущів. **87.** 10 у клітинку і 14 у лінійку. **89.** 24 дм; 33 дм; 48 дм. **90.** Ні. **91.** 7 ручок по 50 к. і 5 ручок по 65 к. **93.** Через 4 роки. **94.** 40 зошитів. **95.** 28 учнів. **96.** 48 і 18. **97.** 18 км/год. **98.** 6,5 год; 78 км. **99.** 5 кг; 10 кг; 15 кг. **100.** 50 кг. **101.** 24 кг. **102.** 90 і 120. **103.** 2 км/год. **104.** 7 задач; 10 задач; 14 задач. **108.** 1) $a > 0$; 2) $a < 0$. **112.** Ні. **116.** 1) 0; 2) −3. **117.** Якщо $a = 1$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 1$, то $x = \frac{8}{a-1}$. **120.** 40 к. **121.** 6 кг; 24 кг. **122.** 2 км/год. **123.** 60 км/год. **124.** 24 банани і 48 бананів. **125.** 8 робітників, 900 грн. **126.** 5 днів. **127.** 45 г 15-відсоткового і 135 г 5-відсоткового.

Розділ II

147. 1) 9; 2) −2,25; 3) $\frac{4}{9}$; 4) $-\frac{3}{4}$. **156.** 84 км. **216.** 1) $5\frac{2}{15}$; 2) $-2\frac{11}{25}$. **217.** Так. **252.** 1) 7; 2) 12; 3) 324; 4) $\frac{3}{16}$. **258.** 1) 7; 2) 12; 3) 20; 4) $\frac{81}{256}$. **260.** 2) 74,8 грн.; 4) на 6,5%. **297.** 1) $\frac{7}{3}$; 2) $\frac{35}{3}$; 3) −49; 4) 343. **302.** 1) $\frac{9}{5}$; 2) $\frac{63}{5}$; 3) −81; 4) 729. **305.** 98. **327.** 1), 6) додатні 3), 4) від'ємні. **362.** 1) Рівняння не має розв'язків; 2) x — будь-яке число. **377.** 1) $2^{60} = 4^{30}$; 2) $2^{60} = 8^{20}$; 3) $2^{60} = 16^{15}$;

4) $2^{60} = 32^{12}$. **395.** 2) −1,5. **396.** 16 деталей. **405.** 25 к.; 60 к; 90 к. **406.** 18 км/год. **408.** 1) Рівняння не має розв'язків; 2) x – будь-яке число. **411.** 18 зошитів у клітинку і 12 зошитів у лінійку. **413.** 1) x – будь-яке число; 2) рівняння не має розв'язків. **416.** 1) 8; 2) 87,5. **458.** 24 см і 8 см. **476.** На 2. **480.** 1) −2; 2) −1. **481.** На 3. **488.** Довжина 18 см, ширина 12 см. **498.** 14; 15; 16. **499.** 18; 19; 20; 21. **504.** 2) $27b^3$; 1. **505.** 24; 25; 26; 27. **527.** 1) $(t^2 - p)(a + t - b)$; 2) $(a - m)(x^2 + y^2 - 1)$; 3) $(m - 7)(b - 1 + m^2)$; 4) $(a - b)(6x + 3y - z)$. **528.** 1) $(x + 1)(x + 4)$; 2) $(x - 1)(x - 4)$; 3) $(x - 2)(x + 3)$; 4) $(a + b)(a + 3b)$. **531.** 1) $(2m^2 - 4x^3)(4c - 3x)$; 2) $(0{,}4xy^2 - 0{,}5x^5y)(4x^2 + 3y)$. **532.** 1) $(ab + 1)(a + b + 9)$; 2) $(4x + 5m)(2a + b - 1)$. **533.** 1) $(x - 2)(x - 3)$; 2) $(x - 3)(x + 2)$; 3) $(x - 3)(x + 5)$; 4) $(a + 2b)(a + 3b)$. **578.** $17\frac{5}{7}$. **580.** 24; 26; 28. **598.** 1) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0$; 2) $-x^2 + 2x - 1 = -(x - 1)^2 \leq 0$. **599.** В к а з і в к а. $x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1$. **606.** В к а з і в к а. $x^2 + 6x + 11 = x^2 + 6x + 9 + 2 = (x + 3)^2 + 2$. **608.** 2) 0. **609.** 9 грн. і 3 грн. **638.** $9\frac{5}{6}$. **640.** 120 деталей; 8 год. **659.** 1) 2; 1,5; 2) 3; −3; 3) $\frac{1}{2}$; $-\frac{1}{2}$; 4) рівняння не має розв'язків. **695.** 50 зошитів і 10 зошитів. **712.** 3) 0. **717.** 3) 0. **724.** 1) 5; 1; −1; 2) 2; −2. **725.** 1) $(a^2 - 2ab + 4b^2)(a + 2b + 1)$; 2) $(m - 2n)(m^2 - 2mn + 4n^2 + m - 2n)$. **731.** 1) 1; −1; 2) 1; 3; −3. **732.** 1) $(a - b)(a^2 + ab + b^2 + a - b)$; 2) $(c + d - x - y)(c + d + x + y)$. **735.** −16. **736.** 8 тижнів. **740.** 1) 5; 2) 17; 3) −6; 4) −1,2; 5) 11; 6) 2,4. **745.** 1), 4) Ні; 2), 3) так. **749.** 1) 5; 2) 1; 3) 6; 4) 2. **750.** 1) Так; 2) ні. **754.** 1) a^{25-3n}; 2) a^{5n+3}. **755.** 1) 6; 2) 7. **764.** 3. **768.** Ні. **779.** I день — 24 ц., II день — 21 ц., III день — 20 ц. **780.** 2. **784.** 1) 5; 3; 2) 2; 7; −7. **785.** 1) −2; 2) −12; 3) 28; 4) 8. **792.** 50 см; 40 см. **800.** 25. **801.** Так. **806.** 1) В к а з і в к а. Домножити ліву і праву частини рівняння на 3. **818.** В к а з і в к а. Спочатку необхідно спростити вирази.

Розділ III

862. 0. **865.** 10 см. **902.** $k = -1{,}5$. **908.** $b = -3$. **915.** $-5 \leq y \leq 9$. **926.** 1) $y = -3x$; 2) $y = x + 3$; 3) $y = 3x$. **927.** 1) (2; 2); 2) (1,2; −1,2); 3) (3; 6). **937.** 13 зошитів.

Розділ IV

971. (5; 5). **972.** 1) Таких пар натуральних чисел немає; 2) (1; 1); 3) (8; 1), (1; 2); 4) (1; 7), (7; 1). **980.** 1) 6; 2) 13.

Вказівка. $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$; 3) 25; 4) −19. **1006.** 80 км/год і 60 км/год. **1012.** $a=-8{,}5$; $b=-0{,}2$. **1016.** $a=0{,}7$; $b=10{,}5$. **1020.** 1) (2; 3); 2) (−1; 2). **1024.** 1) (x; $1{,}5x+2{,}5$), де x — будь-яке число; 2) система не має розв'язків. **1027.** 1) (1; 4); 2) (3; −2). **1033.** **Вказівка.** Показати, що $-x^2+8x-17=-((x-4)^2+1)$. **1044.** 1) (8,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **1048.** $k=-1{,}5$; $b=-3$. **1049.** 1) $m=2$; 2) $m=4$. **1051.** 1) (1,5; 2,5); 2) $\left(\frac{1}{6};-1\frac{1}{6}\right)$. **1054.** $y=2{,}5x+1$. **1070.** 2) $a=0{,}4$; $b=0{,}1$. **1073.** 1) Система не має розв'язків; 2) система має безліч розв'язків. **1075.** 2) (0,4; 7). **1076.** 1) (−2; 2); 2) $m=0{,}8$; $n=-1{,}5$. **1077.** $y=-0{,}25x+4$. **1078.** 1) (1; −2); 2) (−2; −8). **1085.** Футбольний — 28 грн., волейбольний — 26 грн. **1086.** 32 роки і 10 років. **1089.** 10 у клітинку і 6 у лінійку. **1090.** Ручка коштує 1,2 грн., а олівець — 0,4 грн. **1092.** 18 км/год; 2 км/год. **1093.** 42 км/год; 14 км/год. **1095.** 80 яблук у ящику і 15 яблук у кошику. **1096.** 20 і 25. **1097.** 30 робітників у першій бригаді; 45 робітників у другій бригаді. **1099.** 17 км/год; 3 км/год. **1101.** 90 і 110. **1102.** 24 книжки на I полиці і 33 книжки на II полиці. **1103.** 24 і 38. **1104.** 14 кг цукерок по 15 грн. і 11 кг цукерок по 18 грн. **1105.** Ключка коштувала 28 грн., а м'яч — 32 грн. **1106.** $\frac{5}{18}$. **1107.** 50 г 2-відсоткововового розчину і 150 г 6-відсоткового розчину. **1108.** 36 років і 8 років. **1109.** 45. **1110.** 32 і 40. **1111.** 22 кг печива по 8 грн. і 18 кг печива по 10 грн. **1112.** 180 деталей перша бригада і 120 деталей друга бригада. **1113.** $\frac{7}{10}$. **1114.** 156 г першого сплаву і 104 г другого сплаву. **1123.** (−2; 0), (−1; 1), (−1; −1), (0; 2), (0; −2), (1; 1), (1; −1), (2; 0). **1132.** 1) $a=3$; 2) $a\neq-14$. **1137.** 1) $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$, 2) (4; 2). **1140.** Якщо $a=2$, то система має безліч розв'язків; якщо $a\neq2$, то система має єдиний розв'язок. **1142.** 2) (−6; −2). **1143.** 1) (1; −2); 2) (0,5; −1,5). **1144.** 1) (2; 7); 2) $\left(3\frac{7}{37};-3\frac{5}{37}\right)$. **1145.** 1) ($x$; $-2-2x$), де x — будь-яке число; 2) система не має розв'язків. **1146.** 1) Ні; 2) так; (2; −1) — розв'язок системи. **1147.** 1) $y==1{,}25x-5$. **1149.** 1) $a=4$; 2) $a\neq4$; 3) не існує. **1150.** 1) $a=-3$; 2) якщо $a\neq-3$, то $x=1{,}25$, $y=0$. **1151.** 50 км/год; 60 км/год. **1152.** Апельсини — 6 грн., банани — 5 грн. **1153.** 28 км/год; 2 км/год. **1154.** 18 деталей за годину виготовляє майстер і 12 — учень. **1155.** 80 слив і 100 слив. **1156.** 70 і 36. **1157.** 10; 50 і 80. **1158.** 2352 см². **1159.** 35. **1160.** 15 л і 10 л. *Вказівка.* Позначити x л — у першому бідоні, y л — у другому. Тоді маємо систему $\begin{cases} x + \frac{1}{2} y = 20, \\ y + \frac{1}{3} x = 15. \end{cases}$

Задачі підвищеної складності

1161. –1; 0; 2; 6. **1162.** 7583. *Вказівка.* Позначити шукане число $\overline{7abc}$, після чого $\overline{abc} = x$. **1164.** 1) Рівняння не має розв'язків; 2) $x = 3$. **1165.** 1) Якщо $a = 0$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок; 2) якщо $a = 0$, то рівняння має безліч розв'язків; якщо $a \neq 0$, то рівняння має єдиний розв'язок. **1166.** 1) Для всіх a: $x = \frac{15+a}{2}$; 2) для всіх a: $x = \frac{5a-9}{5}$; 3) якщо $a = 3$, то рівняння не має розв'язків; якщо $a \neq 3$, то $x = \frac{7}{a-3}$; 5) якщо $a = 1$, то x — будь-яке число; якщо $a \neq 1$, то $x = 1$; 6) для всіх значень $a: x = -\frac{2a}{3}$. **1167.** 1) $a = -4$; 2) $a = -7$. **1168.** 21 м/с; 147 м. *Вказівка.* Позначивши x м/с — швидкість поїзда, матимемо рівняння $25x = 378+7x$. **1169.** 10 м/с; 99м. *Вказівка.* Нехай x м/с — швидкість поїзда, тоді його довжина $9x + 9$. Дістанемо рівняння $27x = (9x + 9) + 171$. **1170.** 2 год; 6 год. **1171.** 30°, 30° і 120° або 20°, 80° і 80°. **1172.** 26 рулонів. **1174.** 2401. **1175.** На 38 %. **1176.** $\frac{10^{15}+1}{10^{16}+1}$. **1177.** 2008^2. **1179.** $(m+n)^2 + (m-n)^2$. **1180.** 1) $x - 5$; 2) $x + 3$. **1181.** 1) $(a-1)^2(b^2 + a^2 + 2a + 1)$; 2) $(1-t)^3$; 3) $(x-1)(x+1) \times \times (x^4 - 2x^2 + 4)$. *Вказівка.* $x^6 - 3x^4 + 6x^2 - 4 = (x^6 + 8) - 3(x^4 - -2x^2 + 4)$; 4) $(m - n + 4)(m + n - 2)$. *Вказівка.* $2(m + 3n) + (m - -n)(m + n) - 8 = (m^2 + 2m + 1) - (n^2 - 6n + 9)$; 5) $(a-b)(a^2 + ab + b^2 + +a + b)$; 6) $2(2x-1)(2x^2 + 2x + 1)$. *Вказівка.* $8x^3 + 4x^2 - 2 = = (8x^3 - 1) + (4x^2 - 1)$. **1182.** Ні. **1183.** $2^{128} - 1$. **1184.** *Вказівка.* Розглянути вираз $\frac{(a^2 + ab + b^2) + (b^2 + bc + c^2)}{2}$ та скористатися тим, що $b = \frac{a+c}{2}$. **1188.** 729. **1190.** *Вказівка.* Довести, що $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n = 10(3^n - 2^{n-1})$. **1191.** $(x+y)^3 + (x-y)^3$.

1192. $x = 4\ 034\ 071$. **1194.** В к а з і в к а. $(2n+2)^3 - (2n)^3 = 24n(n+1)+8$. **1195.** 1) $(y^2+y+1)(y^3-y^2+1)$. В к а з і в к а. $y^5+y+1 = y^5-y^2+y^2+y+1 = y^2(y^3-1)+y^2+y+1$; 2) $(m^2+m+1)\times(m^2-m+1)$. В к а з і в к а. $m^4+m^2+1 = m^4-m+m^2+m+1$; 3) $(x^2-x+3)(x^2+x+3)$. В к а з і в к а. $x^4+5x^2+9 = (x^4+6x^2+9)-x^2$; 4) $(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$. В к а з і в к а. $n^4+4 = (n^4+4n^2+4)-4n^2$; 5) $(x^2-2b^2)(x^2+2a^2+2b^2)$. В к а з і в к а. $x^4+2a^2x^2-4a^2b^2-4b^4 = (x^4+2a^2x^2+a^4)-(a^4+4a^2b^2+4b^4)$; 6) $(m+1)(m^2-m-1)$. В к а з і в к а. $m^3-2m-1 = (m^3+m^2)-(m^2+2m+1)$; 7) $(m+2)(m^2-2m-1)$. В к а з і в к а. $m^3-5m-2 = (m^3+8)-(5m+10)$, або $m^3-5m-2 = (m^3-4m)-(m+2)$; 8) $(x+y)(x^3-3x^2y-3xy^2-y^3)$. В к а з і в к а. $x^4-2x^3y-6x^2y^2-4xy^3-y^4 = (x^4-y^4)-(2x^3y+2x^2y^2)-(4x^2y^2+4xy^3)$. **1196.** $5^{15} < 3^{23}$. В к а з і в к а. $5^{15} = 5\cdot(5^2)^7$, $3^{23} = 9\cdot(3^3)^7$. **1198.** 1) Так; 2), 3) ні. **1199.** 1), 2) Ні; 3) так. **1200.** $(-1;\ 1)$ і $(2;\ -5)$. **1201.** 25 %. **1202.** 1) Ні; 2), 3), 4) так. **1203.** Ні. **1204.** 1) Один; 2) жодного; 3) один; 4) безліч. **1205.** 5 або 10. **1206.** 1) Прямі $x = -1$ і $x - 2y = 0$; 2) прямі $x = 0$ і $y = x$; 3) прямі $x = 2$ і $x = -2$; 4) прямі $y = 3$ і $y = -3$; 5) $y = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x < 0, \\ 2x, \text{ якщо } x \geq 0; \end{cases}$ 6) прямі $x = 0$, $y = 1$, для $x > 0$ і $y = -1$ для $x < 0$. **1208.** 1) Так, $(2;\ 0)$, $(-2;0)$; 2) так; $(0;\ 4)$. **1209.** $(8;\ 2)$. **1210.** 1) $(3;\ 0)$; 2) $(0;\ -5)$. **1211.** 69 і 64. В к а з і в к а. $\overline{6x}\cdot\overline{6y} = \overline{x6}\cdot\overline{y6}$, звідки $xy = 36$. **1212.** У 1990 р. В к а з і в к а. Нехай Сергій народився в $\overline{19xy}$ році. Тоді в 2009 р. йому буде $2009 - \overline{19xy}$, що за умовою дорівнює $(1+9+x+y)$. **1213.** $a = 10$. **1214.** 1) $m = 2$ — немає розв'язків; $m \neq 2$ — єдиний розв'язок; 2) $m = 3$ — безліч розв'язків; $m \neq 3$ — немає розв'язків; 3) $m = 1$ — безліч розв'язків; $m \neq 1$ — єдиний розв'язок. **1215.** $a = -7$. **1216.** 1) $x = 5$, $y = 3$, $z = 0$. В к а з і в к а. Додати почленно всі рівняння системи; 2) $x = -1$, $y = 8$, $z = -3$. **1217.** $a = -2$; $b = -1$; $-8x^5 + 11x^2 + 11x - 8$. **1218.** 1) $(1;\ 2)$, $(0{,}6;\ 2{,}4)$; 2) $(2;\ 2)$, $(3;\ 3)$, $(-1;\ 2)$, $(-1;\ 7)$. 3) $(2;\ 2)$, $(-1;\ 1)$. **1219.** 1) $(2;\ 6)$; 2) $(-4;\ -8)$; 3) $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2}\right)$; 4) $(-10;\ -5)$; 5) $(2;\ -1)$; 6) $(-3;\ -3)$. **1220.** $a = 52$; $b = 57{,}2$; $c = 44$. **1221.** Брату зараз 10 років, сестрі — 6 років. **1222.** 46. **1223.** 742. **1224.** 24 і 36. **1225.** 500 кг цукерок і 420 кг печива. **1226.** 5 см;

15 см; 12 см. 1227. 26 см. **1228.** 7 кг першого сплаву, 3 кг другого сплаву. **1229.** 12 км. **1230.** 630 л; 840 л. **1231.** Швидкість автобуса 45 км/год, таксі — 75 км/год. **1232.** Швидкість кожного з автобусів 42 км/год, велосипедиста — 18 км/год. **1233.** 4,5 км/год; 16,5 км/год. В к а з і в к а. Якщо x км/год — швидкість туриста, а y км/год — швидкість велосипедиста, то маємо систему $\begin{cases} 1\frac{5}{6}x = \frac{1}{2}y, \\ 3\frac{1}{3}x + 2y = 48. \end{cases}$ **1234.** 18 км/год; 42 км/год; 72 км/год. В к а з і в к а. Якщо позначити швидкість велосипедиста x км/год, швидкість першого автобуса — y км/год, тоді швидкість другого — $\frac{7}{12}y$ км/год. Матимемо систему $\begin{cases} 1\frac{1}{3}(x+y) = 120, \\ 2\left(x + \frac{7}{12}y\right) = 120. \end{cases}$ **1235.** 30 м/с і 20 м/с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аргумент 128

Винесення спільного множника за дужки 69
Вирази зі змінними 24
Віднімання многочленів 59
Відповідність між змінними 127
Властивості рівняння з двома змінними 159
— — з однією змінною 6
— степеня з натуральним показником 39

Графік лінійної функції
— рівняння $ax + by = c$ 163
— — з двома змінними 162
— функції 136
Графічний спосіб задання функції 138
— — розв'язування систем 168

Двочлен 53
Дії першого (другого, третього) степеня 34
Доведення тотожностей 29
Додавання многочленів 59
Дробовий раціональний вираз 25

Залежна змінна 127
Зведення подібних членів множення 53
Значення функції 128
— числового виразу 24

Квадрат різниці 86
— суми 86
— числа 33
Коефіцієнт 46
Корінь рівняння 5
Куб числа 33

Лінійна функція 145

Лінійне рівняння з двома змінними 159
— — з однією змінною 9

Математична модель задачі 16
Многочлен 53
— стандартного вигляду 54
Множення многочлена на многочлен 75
— одночлена на многочлен 64
— одночленів 48

Незалежна змінна 127
Неповний квадрат різниці 104
— — суми 105
Нуль функції 137

Область визначення функції 128
— значень функції 128
Одночлен 45
Основа степеня 33
Основна властивість степеня 39

Піднесення до степеня 33
— одночлена до степеня 48
Подібні члени многочлена 53
Показник степеня 33
Почленне додавання 181
Правило ділення степенів 40
— множення степенів 39
— піднесення до степеня добутку 41
— — степеня до степеня 40
Пряма пропорційність 147

Раціональний вираз 25
Рівносильні рівняння з двома змінними 159
— — з однією змінною 6
— системи рівнянь з двома змінними 176

Рівняння з двома змінними 158
— з однією змінною 5
— першого степеня з однією змінною 9
Різниця квадратів 100
— кубів 104
Розв'язок рівняння з двома змінними 158
— — з однією змінною 5
— системи рівнянь з двома змінними 168
Розкладання многочлена на множники 69

Система рівнянь 168
— лінійних рівнянь з двома змінними 168
Спосіб групування 81
— додавання 180
— підстановки 175
Спрощення виразів 29
Стандартний вигляд многочлена 54
— — одночлена 45
Степінь з натуральним показником 33
— многочлена 54
— одночлена 46
Сума кубів 104

Табличний спосіб задання функції 129
Тотожні вирази 28
— перетворення виразів 29
Тотожність 29
Тричлен 53

Числове значення виразу 24
Числові вирази 24
Члени многочлена 53

Формули скороченого множення 86
Функція 128

Цілий раціональний вираз 25

ЗМІСТ

Розділ I
Лінійні рівняння з однією змінною

§ 1. Загальні відомості про рівняння (Урок 1) 5
§ 2. Лінійне рівняння з однією змінною. Розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною і рівнянь, що зводяться до них (Уроки 2—4) 9
§ 3. Розв'язування задач за допомогою лінійних рівнянь. Рівняння як математична модель задачі (Уроки 5—8) . . . 15
Завдання для перевірки знань до § 1—3 (Урок 9) 21
Вправи для повторення розділу I 22

Розділ II
Цілі вирази

§ 4. Вирази зі змінними. Цілі раціональні вирази. Числове значення виразу (Уроки 10, 11) 24
§ 5. Тотожні вирази. Тотожність. Тотожне перетворення виразу. Доведення тотожностей (Уроки 12, 13) 28
§ 6. Степінь з натуральним показником (Уроки 14, 15) 33
§ 7. Властивості степеня з натуральним показником (Уроки 16—18) 39
§ 8. Одночлен. Стандартний вигляд одночлена (Урок 19) 45
§ 9. Множення одночленів. Піднесення одночленів до степеня (Уроки 20, 21) 48
Завдання для перевірки знань до § 4—9 (Урок 22) 52
§ 10. Многочлен. Подібні члени многочлена та їх зведення (Уроки 23, 24) 53
§ 11. Додавання і віднімання многочленів (Уроки 25—27) . . . 58
§ 12. Множення одночлена на многочлен (Уроки 28—30) 64
§ 13. Розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки (Уроки 31—33) 69
§ 14. Множення многочлена на многочлен (Уроки 34—37) . . . 75
§ 15. Розкладання многочленів на множники способом групування (Уроки 38, 39) 81
Завдання для перевірки знань до § 10—15 (Урок 40) 85
§ 16. Квадрат суми і квадрат різниці (Уроки 41—43) 86
§ 17. Розкладання многочленів на множники за допомогою формул квадрата суми і квадрата різниці (Уроки 44, 45) 92

§ 18. Множення різниці двох виразів на їх суму (Уроки 46—48) 96
§ 19. Розкладання на множники різниці квадратів двох виразів (Уроки 49, 50) 100
§ 20. Сума і різниця кубів (Уроки 51, 52). 104
§ 21. Застосування кількох способів розкладання многочленів на множники (Уроки 53—55) 109
Завдання для перевірки знань до § 16—21 (Урок 56) 115
Вправи для повторення розділу II 116

Розділ III
Функції

§ 22. Функція. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції (Уроки 57—59) 127
§ 23. Графік функції. Графічний спосіб задання функції (Уроки 60, 61). 136
§ 24. Лінійна функція, її графік та властивості (Уроки 62—65) 144
Завдання для перевірки знань до § 22—24 (Урок 66) 154
Вправи для повторення розділу III 155

Розділ IV
Системи лінійних рівнянь з двома змінними

§ 25. Рівняння з двома змінними. Розв'язок рівняння з двома змінними. Лінійне рівняння з двома змінними (Уроки 67, 68). 158
§ 26. Графік лінійного рівняння з двома змінними (Уроки 69, 70). 162
§ 27. Система двох лінійних рівнянь з двома змінними та її розв'язок. Розв'язування систем лінійних рівнянь з двома змінними графічпим способом (Уроки 71, 72). 168
§ 28. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом підстановки (Уроки 73, 74) 175
§ 29. Розв'язування систем двох лінійних рівнянь з двома змінними способом додавання (Уроки 75, 76) 180
§ 30. Розв'язування задач за допомогою систем лінійних рівнянь (Уроки 77—79). 185
Завдання для перевірки знань до § 25—30 (Урок 80) 190
Вправи для повторення розділу IV 191
Завдання для перевірки знань за курс алгебри 7 класу 197
Задачі підвищеної складності 198
Відомості з курсу математики 5—6 класів 207
Відповіді та вказівки до вправ 214
Предметний покажчик 220

Навчальне видання

ІСТЕР Олександр Семенович

АЛГЕБРА

Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

ВИДАНО ЗА РАХУНОК ДЕРЖАВНИХ КОШТІВ. ПРОДАЖ ЗАБОРОНЕНО

Відповідальна за випуск *Є. М. Коденко*
Редактор *Г. В. Криволапова*
Художник обкладинки *Л. А. Кузнецова*
Художній редактор *Л. А. Кузнецова*
Технічний редактор *Ц. Б. Федосіхіна*
Комп'ютерна верстка *О. М. Білохвост*
Коректори *А. В. Лопата, Г. А. Зацерковна*

Підписано до друку 12.06.07. Формат 60×90/16. Папір офс.
Гарнітура шкільна. Друк офс. Ум. друк. арк. 14 + 0,25 форзац.
Ум. фарбовідб. 29,0. Обл.-вид. арк. 9,81 + 0,43 форзац.
Тираж 152610 пр. Вид. № 37149. Зам. № 7-613.

Набір та верстка комп'ютерного центру видавництва «Освіта»

Видавництво «Освіта», 04053, Київ, вул. Юрія Коцюбинського, 5.
Свідоцтво ДК № 27 від 31.03.2000 р.

Надруковано з готових діапозитивів
у ТОВ «Оберіг», м. Харків, пр. Гагаріна, буд. 62, к. 97.
Свідоцтво ДК № 2249 від 01.08.2005 р.

ЛІНІЙНЕ РІВНЯННЯ З ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ

$ax = b$		
$a \neq 0$	$a = 0;\ b = 0$	$a = 0;\ b \neq 0$
$x = \frac{b}{a}$	x — БУДЬ-ЯКЕ ЧИСЛО	РІВНЯННЯ НЕ МАЄ КОРЕНІВ

КВАДРАТИ І КУБИ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ ВІД 1 ДО 10

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n^2	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	729	1000

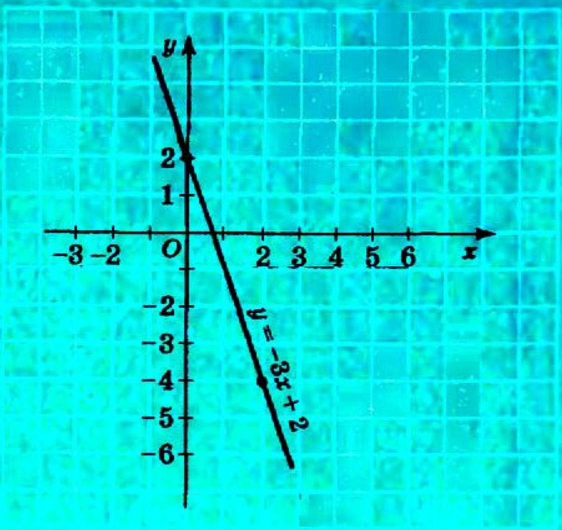
СТЕПЕНІ ЧИСЕЛ 2 І 3

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
3^n	3	9	27	81	243	729	2187	6561	19 683	59 049

ГРАФІК ЛІНІЙНОЇ ФУНКЦІЇ

$y = -3x + 2$

x	0	2
y	2	−4



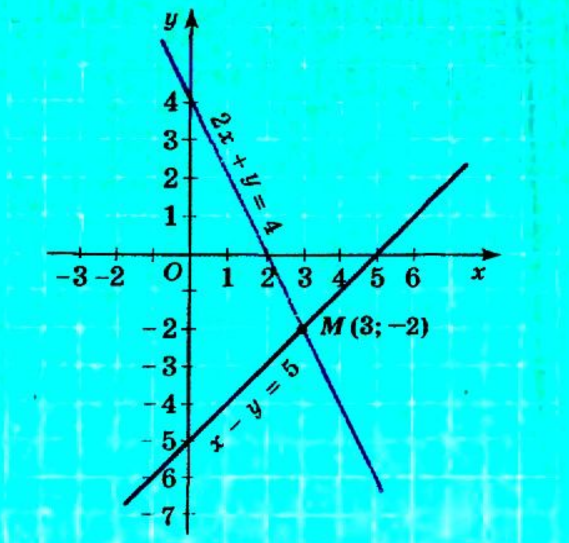
ГРАФІЧНИЙ СПОСІБ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + y = 4; \end{cases}$$

$x = 3;\ y = -2.$

ПЕРЕВІРКА:

$$\begin{cases} 3 - (-2) = 5, \\ 2 \cdot 3 + (-2) = 4. \end{cases}$$



Цей підручник є основною складовою навчального комплекту з алгебри для 7 класу

Автор О.С. Істер

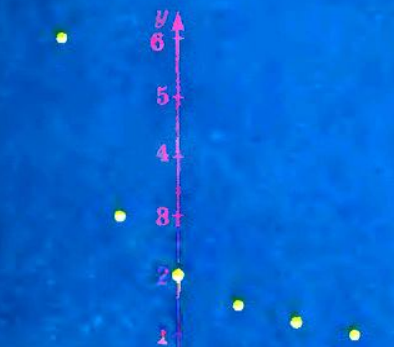
До комплекту входять:

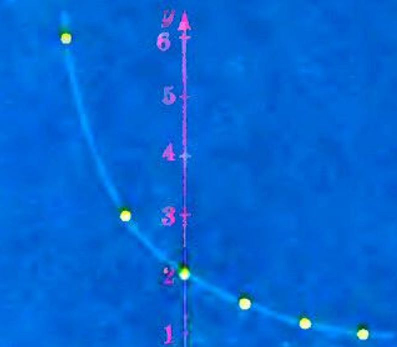
- підручник
- посібник «Тематичне оцінювання знань з алгебри».

Підручник відзначається високим науково-методичним і дидактичним рівнем викладу навчального матеріалу.

Завдяки оригінальній структурі підручника, вправам, які подано «із запасом», можна розподіляти навчальні години та добирати завдання залежно від поставленої мети навчання та рівня підготовленості учнів.

Завдання посібника сприяють кращому засвоєнню знань та їх перевірці. Авторська методика проведення тематичного оцінювання передбачає тематичні контрольні роботи та дає змогу швидко й ефективно здійснювати корекцію знань.





ISBN 978-966-04-0688-9