

Г. П. Бевз, В. Г. Бевз

АЛГЕБРА

**Підручник для 7 класу
загальноосвітніх навчальних закладів**

**Київ
2015**

УДК
ББК

Бевз Г. П.

Алгебра : підруч. для 7 класу загальноосвіт.
навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. — К.: Видавництво
«Відродження», 2015. — 288 с.

Зміст

Дорогі семикласники!	5
----------------------	---



Розділ 1. ЦІЛІ ВИРАЗИ 1

§ 1. Вирази зі змінними	7
§ 2. Тотожні вирази	14
§ 3. Вирази зі степенями	20
§ 4. Властивості степенів	29
§ 5. Одночлени	36
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	43
<i>Готуємося до тематичного оцінювання</i>	44
§ 6. Многочлени	46
§ 7. Додавання і віднімання многочленів	53
§ 8. Множення многочлена на одночлен	60
§ 9. Множення многочленів	67
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	74
<i>Історичні відомості</i>	75
<i>Головне в розділі</i>	76
<i>Запитання для самоперевірки</i>	77
<i>Готуємося до тематичного оцінювання</i>	78

Розділ 2. РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ
НА МНОЖНИКИ

§ 10. Винесення спільного множника за дужки	81
§ 11. Спосіб групування	88
§ 12. Квадрат двочлена	93
§ 13. Різниця квадратів	102
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	109
<i>Готуємося до тематичного оцінювання</i>	110
§ 14. Використання формул скороченого множення	112
§ 15. Різниця і сума кубів	119
§ 16. Застосування різних способів розкладання многочленів на множники	126
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	134
<i>Історичні відомості</i>	135
<i>Головне в розділі</i>	136
<i>Запитання для самоперевірки</i>	137
<i>Готуємося до тематичного оцінювання</i>	138



Розділ 3. ФУНКЦІЇ

§ 17. Що таке функція?	141
§ 18. Графік функції	150
§ 19. Лінійна функція	161
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	170
<i>Історичні відомості</i>	171
<i>Головне в розділі</i>	172
<i>Запитання для самоперевірки</i>	173
<i>Готуємося до тематичного оцінювання</i>	174



Розділ 4. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

§ 20. Загальні відомості про рівняння	177
§ 21. Лінійні рівняння	185
§ 22. Розв'язування задач за допомогою рівнянь	191
§ 23. Рівняння з двома змінними	202
§ 24. Графік лінійного рівняння з двома змінними	208
§ 25. Системи рівнянь	215
§ 26. Спосіб підстановки	221
§ 27. Спосіб додавання	227
§ 28. Розв'язування задач складанням системи рівнянь	235
<i>Завдання для самостійної роботи</i>	243
<i>Історичні відомості</i>	244
<i>Головне в розділі</i>	246
<i>Запитання для самоперевірки</i>	247
<i>Готуємося до тематичного оцінювання</i>	248

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ


Цілі вирази	251
Розкладання многочленів на множники	254
Функції	255
Рівняння і системи рівнянь	257
Задачі підвищеної складності	260
Відомості з курсу математики 5—6 класів	263
Відповіді та вказівки до вправ	274
Предметний покажчик	286

Дорогі семикласники!

Алгебра — частина математики, яка разом з арифметикою та геометрією належить до найдавніших складових цієї науки. У попередніх класах на уроках математики ви опановували переважно знання з арифметики, засвоювали розширені відомості про числа та дії над ними. Тепер починаєте вивчати алгебру.

Знання алгебри необхідні не тільки тому, що вона дає найкращі методи розв'язування найважчих задач, а й тому, що в ній формується математична мова, яка використовується фахівцями різних галузей науки і техніки. Алгебра досить багата за змістом і дуже потрібна. Ви вивчатимете її до закінчення школи, а дехто — й у вищих навчальних закладах.

Розпочати опанування курсу шкільної алгебри вам допоможе цей підручник. Читаючи теоретичний матеріал, основну увагу звертайте на слова, надруковані *курсивом*. Це математичні терміни. Треба зрозуміти, що ці слова означають, і запам'ятати їх. Виділені **жирним** шрифтом речення — це правила або інші важливі математичні твердження. Їх треба пам'ятати й уміти застосовувати.

Кожен параграф підручника містить рубрику «Хочете знати ще більше?», у якій пропонуються додаткові відомості для учнів, котрі особливо цікавляться математикою. Відповідайте на запитання рубрики «Перевірте себе», і ви зможете закріпити, узагальнити й систематизувати здобуті знання, уміння та навички, одержані під час вивчення теми. У рубриці «Виконаємо разом!» наведено зразки розв'язання найважливіших видів вправ. Пропонуємо ознайомитися з цими прикладами, перш ніж виконувати домашні завдання (їх позначено )

Підручник містить вправи різних рівнів складності — від успішних до досить важких. Номери останніх позначено зірочкою (*), і пропонуються вони тим учням, які згодом навчатимуться у класах з поглибленим вивченням математики. Добре підготуватися до тематичного оцінювання й отримати високі навчальні результати вам допоможуть матеріали відповідної рубрики. «Історичні відомості» сприятимуть розширенню кругозору кожного учня.

Бажаємо успіхів у навчанні!

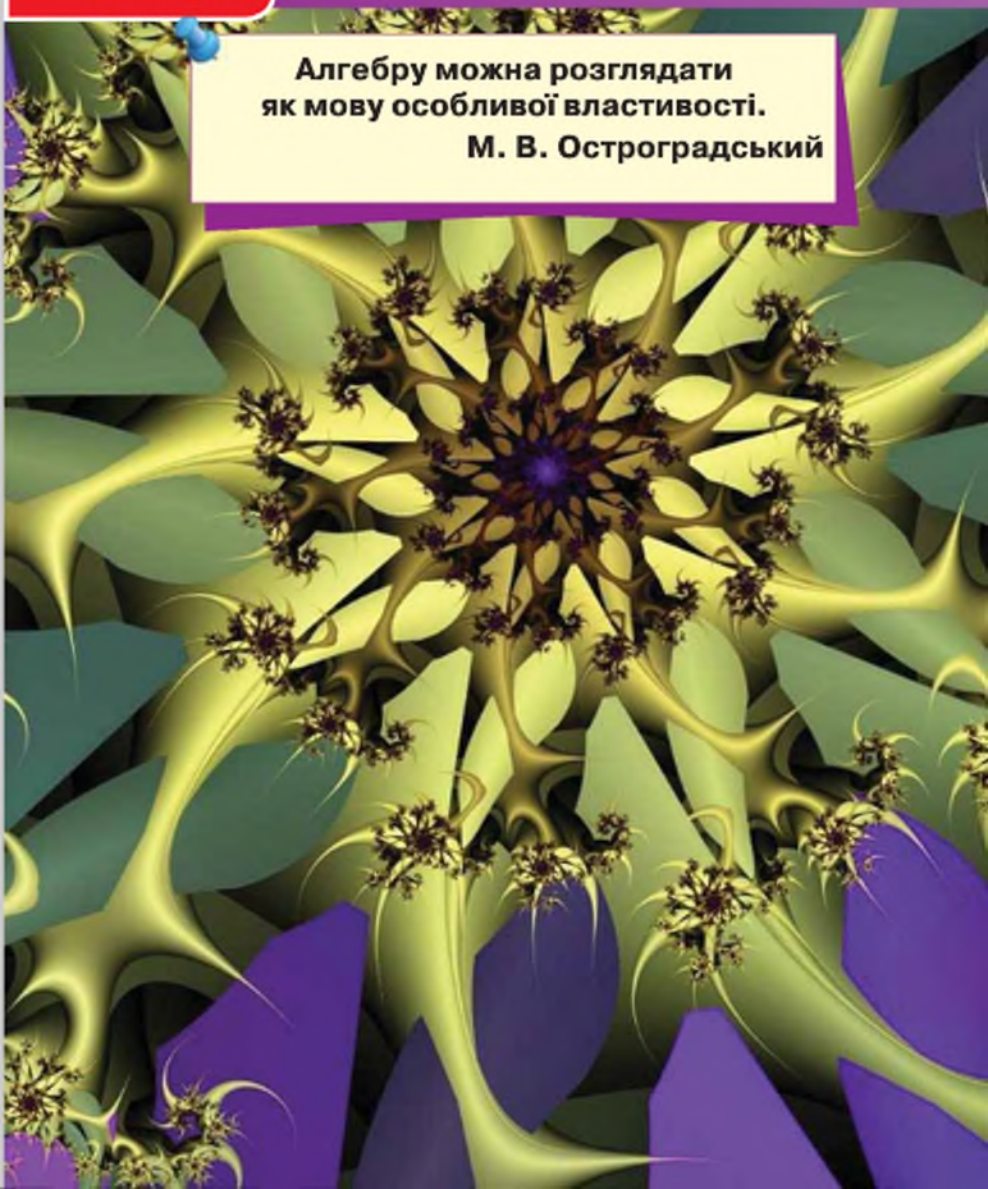
РОЗДІЛ

1

ЦІЛІ ВИРАЗИ

Алгебру можна розглядати
як мову особливої властивості.

М. В. Остроградський



Вирази в математиці відіграють приблизно таку саму роль, як слова в мові або як окремі цеглини в будинку. Математична мова — це мова виразів. Щоб опанувати її, треба навчитися оперувати математичними виразами, розуміти їх зміст, уміти записувати в зручному вигляді. Існують різні види математичних виразів.

У цьому розділі ви дізнаєтеся про:

- вирази зі змінними;
- вирази зі степенями;
- одночлени;
- многочлени;
- дії над многочленами.

§1. ВИРАЗИ ЗІ ЗМІННИМИ



Розглянемо, наприклад, рівняння:

$$\frac{2}{3}(x - 5) + 3x = 17 - 2x.$$

Ліва і права його частини — *вирази*:

$$\frac{2}{3}(x - 5) + 3x \text{ і } 17 - 2x.$$

Кожен із цих виразів містить одну змінну x . А бувають вирази з двома, трьома і більшою кількістю змінних. Наприклад, вираз $2ax + cx^2$ містить три змінні: a , c і x .

У математиці вирази зі змінними відіграють дуже важливу роль. Математична мова — це мова виразів. Невипадково значна частина шкільного курсу алгебри присвячена вивченню виразів.

Бувають вирази і без змінних, наприклад:

$$97 \cdot 17, \quad -\frac{3}{5} : 45; \quad \frac{0,2 \cdot 3 - 15 : 7}{2(3,5 - 1,8)}.$$

Такі вирази називають *числовими*.

Отже, вирази бувають числові та зі змінними (мал. 1). Далі ми розглядатимемо переважно вирази зі змінними.



Мал. 1

Кожний числовий вираз (який не містить ділення на 0) має одне значення. А вираз зі змінними при різних значеннях цих змінних може набувати різних значень.

Для прикладу знайдемо значення виразу $3a + 5$, якщо a дорівнює 1, 2, 3 і -4 .

Якщо $a = 1$, то $3a + 5 = 3 \cdot 1 + 5 = 8$;
 якщо $a = 2$, то $3a + 5 = 3 \cdot 2 + 5 = 11$;
 якщо $a = 3$, то $3a + 5 = 3 \cdot 3 + 5 = 14$;
 якщо $a = -4$, то $3a + 5 = 3 \cdot (-4) + 5 = -7$.

Результати обчислень запишемо в таблицю.

a	1	2	3	-4
$3a + 5$	8	11	14	-7

Якщо вираз містить кілька змінних, наприклад $2a - 3x$, то для знаходження його значення слід мати або надавати значення для кожної змінної. Наприклад, якщо $a = 7$ і $x = 5$, то $2a - 3x = 2 \cdot 7 - 3 \cdot 5 = -1$.

Якщо вираз не містить ніяких інших дій, крім додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня і ділення, його називають *раціональним виразом*. Приклади раціональних виразів:

$$2x + n, \quad -\frac{2}{3}(x - 5), \quad \frac{a - c}{2a + c}, \quad a + \frac{1}{x + c}.$$

Раціональний вираз, який не містить ділення на вираз зі змінною, називають *цілим*. Два перші з наведених вище виразів — цілі, інші — дробові. У цьому розділі ми розглядатимемо тільки цілі вирази.

Вирази $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$, $a : b$ — відповідно сума, різниця, добуток і частка змінних a і b . Читають їх і так: «сума чисел a і b », «різниця чисел a і b » і т. д.

Математичними виразами вважають також окремі числа або змінні, наприклад: 2 , 0 , x , $-a$. А записи, що містять знаки рівності або нерівності, наприклад: $2 + 3 = 5$, $x < 5$, — не вирази.



Хочете знати ще більше?

Раніше ви розрізняли *числові вирази* і *буквені вирази*, однак у сучасній математиці буквами позначають не тільки невідомі числа. Наприклад, буква π позначає відношення довжини кола до його діаметра; його наближене значення дорівнює $3,14$. Тому вираз $\pi + 2,5$, хоч і містить букву π , є числовим виразом. Згодом ви ознайомитеся з виразами $f(x)$, P_4 , C_5^2 , $\sin \pi$ та багатьма іншими, які містять букви, але не такі, замість яких можна підставляти числа. Тому далі ті букви, замість яких можна підставляти різні числа, ми називатимемо *змінними*, розуміючи, що їх значення можуть змінюватися. А вирази, які містять такі змінні, називатимемо *виразами зі змінними*.

Словом *вираз* в українській мові часто називають і висловлення (наприклад, крилатий вираз), і вияв настрою (вираз обличчя) тощо. У математиці цим словом коротко називають математичний вираз. А *математичний вираз* — це написані в якому-небудь зрозумілому порядку математичні символи, включаючи числа, букви, знаки дій, дужки, знаки відсотків, модуля тощо. Наприклад, старшокласники, крім інших, розглядають і такі вирази:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \sum_{n=1}^5 n^2, \quad \int_0^5 x^2 dx.$$

Що вони означають, ви згодом дізнаєтесь.

Перевірте себе

1. Наведіть приклад числового виразу.
2. Наведіть приклади виразів зі змінною, із двома змінними.
3. Які вирази називають раціональними?
4. Які вирази називають цілими?
5. Наведіть приклад виразу з модулями.



Виконаємо разом!

1. Напишіть у вигляді виразу число, яке має:
 - а) a сотень, b десятків і c одиниць; б) m тисяч і n десятків.
- ✓ Розв'язання. а) $100a + 10b + c$; б) $1000m + 10n$.

2. Відомо, що $a + b = 35$. Знайдіть значення виразу $7a + 7 + 7b$.

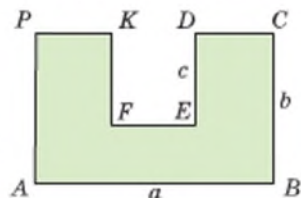
✓ Розв'язання. Скористаємось переставним, сполучним і розподільним законами:

$$\begin{aligned} 7a + 7 + 7b &= 7a + 7b + 7 = \\ &= (7a + 7b) + 7 = 7(a + b) + 7 = \\ &= 7 \cdot 35 + 7 = 252. \end{aligned}$$

3. Знайдіть периметр многокутника, зображеного на малюнку 2, якщо $AB = a$, $BC = b$, $DE = c$.

✓ Розв'язання. Оскільки $CD + EF + KP = AB$, то

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + DE + EF + FK + KP + PA &= 2AB + 2BC + 2FK = \\ &= 2a + 2b + 2c. \end{aligned}$$



Мал. 2

Виконайте усно

1. Прочитайте вираз:

а) $m + n$; б) $m - x$; в) $1 + c$; г) $2ax$; р) $\frac{1}{2}(x + y)$; д) $\frac{2}{3}(x - 2)$.

2. Який із записів є виразом:

а) $2ax - x^2$; б) $a + b = b + a$; в) $3x + 5 = 7$; г) $2(3 - 0,7) - 3,5?$

3. Який із виразів — числовий, а який — зі змінними:

а) $37x - 2,4$; б) $2,5$; в) $48 - 3,7(2 - 3,5)$; г) 24% ?

4. Довжини сторін прямокутника — a і b . Що означають вирази: ab ; $2(a + b)$; $a + b$?

Рівень А

5. Запишіть у вигляді числового виразу:

а) суму чисел 5 і 7; б) різницю чисел 8 і -3;
в) добуток чисел 15 і -4; г) відношення чисел 12 і 4.

Знайдіть значення виразу (6—8).

6. а) $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + 2,5$; б) $2,7 - \frac{3}{10} \cdot 7$; в) $2\frac{1}{3} - \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}$.

7. а) $30,5 : 0,5 - 1976 : 32,5$; б) $3,85 \cdot 5\frac{1}{7} + 69,25 : 27,7$.

8. а) $\left(1,75 : \frac{2}{3} - 1\frac{5}{8}\right) \cdot 16$; б) $\left(5 - 11\frac{7}{8} : 2,5\right) : 0,0625$.

9. Напишіть суму, різницю, добуток і частку виразу:

а) $2ic$; б) $2xic - x$.

10. Напишіть:

- а) суму чисел a і x ; б) добуток чисел k і n ;
 в) півдобуток чисел c і d ; г) півсуму чисел x і y ;
 г) піврізницю чисел a і x ; д) подвоєний добуток a і x .



11. Знайдіть значення виразу:

- а) $0,5x - 3$, якщо $x = 10$; б) $x + 9,7$, якщо $x = -10$;
 в) $x(x + 2)$, якщо $x = 0,5$; г) $3x(5 - x)$, якщо $x = -2,5$.

12. Знайдіть значення виразу:

- а) $a + c - 3$, якщо $a = 2$ і $c = 7,5$;
 б) $2x - 3z + 1$, якщо $x = 1$ і $z = \frac{1}{3}$;
 в) $2xy(x - y)$, якщо $x = 2$ і $y = 5$;
 г) $3a(x + y - 4)$, якщо $a = \frac{1}{3}$, $x = 7$ і $y = 5$.



13. Заповніть таблицю.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$5 - 2n$								

14. Заповніть таблицю.

a	3	4	5	6	7	8	9
n	0	1	-1	2	-2	3	-3
$2a + 5n$							

15. Для яких значень x значення виразів дорівнюють одне одному:

- а) $2x + 5x$ і $2(x + 5)$; б) $1 + 3(x - 5)$ і $(1 + 3x) - 5x$?

16. Напишіть у вигляді виразу число, яке має:

- а) a десятків і 6 одиниць; б) 5 десятків і b одиниць;
 в) m десятків і n одиниць; г) a сотень і c одиниць.

Рівень **Б**

17. Знайдіть суму і різницю значень виразів:

- а) $65 \cdot 27$ і $35 \cdot 27$; б) $3,6 \cdot 10^3$ і $2,4 \cdot 10^3$.



18. Запишіть у вигляді виразу:

- а) подвоєний добуток чисел 74 і 0,5;
 б) піврізницю чисел 38 і 7,6;
 в) добуток суми чисел 35 і 12 на їх різницю.

Знайдіть значення виразу (19—22).

19. а) $2,37 + 4,23 - 13,7 \cdot 0,1$; б) $8,21 \cdot 3,14 - 8,11 \cdot 3,14$;
 в) $(2,75 - 0,65 : 2,6) \cdot 4 - 1$; г) $5 - (0,8 + 15,15 : 7,5)$.



20. а) $3,18 - (0,13 + 4,27 : 1,4)$; б) $5,9 - (6,3 : 3,5 - 5,6)$;

в) $\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{10} + 12\frac{2}{15}\right) : \frac{1}{15}$; г) $\left(\frac{2}{5} - \frac{3}{10} + \frac{1}{20}\right) \cdot 1\frac{2}{3} + \frac{3}{4}$.

21. а) $\left(1 - \frac{2}{3}\right) : \frac{2}{3} + \left(\frac{4}{5} - 1\right) \cdot 5$; б) $\left(\frac{7}{8} - \frac{1}{2}\right) : \frac{3}{4} - 5 : \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{8}\right)$.

22. а) $\left(7,344 : 0,36 + 16\frac{1}{4} : 5 - 0,5 \cdot 0,2\right) \cdot 0,08$;

б) $\left(0,02 \cdot 0,5 + 7,904 : 0,38 - 21 : 10\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2}{9}$.

23. Заповніть таблицю.

a	-2	0	3	5	5	6	10	-10
b	1	3	0	7	-2	2	7	-7
$2a(a - b)$								



24. Заповніть таблицю.

x								
$3x + 8$	23	38	41	68	8	2	1	0

25. Для яких значень x дорівнюють одне одному значення виразів:

- а) $3(x + 1) - 7$ і $2x - 9$; б) $8 - 2(3 - x)$ і $5 - 3(3 - 2x)$;
 в) $0,5x + 2(7 - x)$ і $1,5x - 5(x + 2)$;
 г) $\frac{2}{3}x - \frac{7}{9} + 5$ і $x - \frac{1}{6}(2 - 6x)$?



26. Напишіть у вигляді виразу число, яке має:

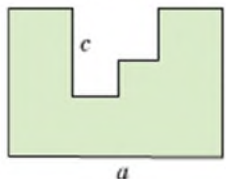
- а) a одиниць, b десятків і c сотень;
 б) a одиниць, c сотень і d тисяч;

- в) a одиниць, n десятих і m сотих;
 г) c десятків, a одиниць, n десятих і m сотих.

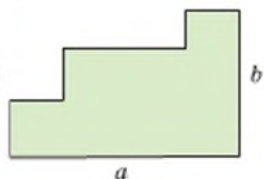
27*. Складіть формулу числа:

- а) кратного 5; б) кратного 5 і парного;
 в) кратного 5 і непарного; г) кратного 5 і 3 одночасно.

28*. Визначте периметри многокутників, зображених на малюнках 3—5.




Мал. 3



Мал. 4



Мал. 5

 **29.** Відомо, що $x - y = 12$. Знайдіть значення виразу:

а) $\frac{1}{3}(x - y)$; б) $4y - 4x$; в) $\frac{y - 6 - x}{9}$; г) $\frac{4(x + y) - 8y}{15}$.

30. Відомо, що $a = -5$, $b - c = 4$. Знайдіть значення виразу:

а) $3a + 2b - 2c$; б) $\frac{ac - ab}{10}$; в) $\frac{3a(b - c + 1)}{75}$; г) $\frac{6c - 6b}{5} - \frac{a + 6}{4}$.

31. Трицифрове число має a сотень, b десятків і c одиниць. Запишіть у вигляді виразу суму даного числа і числа, записаного тими самими цифрами, але в зворотному порядку.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

32. Розв'яжіть рівняння:

а) $(2x + 3) + (4x - 8) = 37$; б) $5 - 3z - (3 - 4z) = 42$;
 в) $0,7 + x - (-0,7 + 4x) = -37$; г) $-7,2 - (3,6 - 4,5x) = 2,7x$.

33. Переможці інтерактивного конкурсу отримали для своїх шкіл 120 нетбуків. Скільки нетбуків дісталось кожній школі, якщо за перше місце вручили удвічі більше нетбуків, ніж за друге?

34. Довжини сторін трикутника пропорційні числам 9, 10 і 11. Знайдіть сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 30 см.

35. Знайдіть суму всіх дільників числа: а) 8; б) 18; в) 28; г) 38.

§ 2. ТОТОЖНІ ВИРАЗИ



✦ Два вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають **тотожно рівними**, або **тотожними**.

Наприклад, тотожно рівними є вирази $5a + 8a$ і $13a$, бо при кожному значенні змінної a ці вирази мають рівні значення (за розподільним законом множення). Тотожно рівними є також вирази $7x - 2x$ і $5x$, $c + 2c + 3c$ і $6c$.

Два тотожно рівні вирази, сполучені знаком рівності, утворюють **тотожність**.

Наприклад,

$$5a + 8a = 13a, \quad 2(x - 3) = 2x - 6.$$



Тотожністю є кожна рівність, що виражає закони дій:

$$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \\ ab = ba, \quad a(bc) = (ab)c, \quad a(b + c) = ab + ac.$$

Тотожностями також прийнято вважати правильні числові рівності, наприклад $3^2 + 4^2 = 5^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$. Однак ми говоритимемо тільки про тотожності зі змінними.

✦ **Заміну даного виразу іншим, тотожним йому, називають тотожним перетворенням виразу.**

Кожна рівність — це твердження, яке може бути правильним або неправильним. Говорячи «тотожність», розуміють, що вона правильна. Щоб переконатися в цьому, її доводять, як у геометрії теореми. Щоб довести правильність (істинність) числової тотожності, наприклад $3^2 + 4^2 = 5^2$, досить обчислити її ліву і праву частини і показати, що вони рівні:

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \text{ і } 5^2 = 25, \text{ отже, } 3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Тотожності, які містять змінні, найчастіше доводять, посилаючись на закони дій і на вже відомі правила зведення подібних доданків, розкриття дужок тощо. Щоб довести тотожність, як правило, перетворюють одну з її частин (ліву або праву) так, щоб одержати іншу її частину.

Приклад 1. Доведіть тотожність:

$$9x - 18 + 3(1 - 2x) = 3x - 15.$$

Д о в е д е н н я. Спростимо ліву частину тотожності.

$$9x - 18 + 3(1 - 2x) = 9x - 18 + 3 - 6x = 9x - 6x - 18 + 3 = 3x - 15.$$

Ліва частина доводжуваної рівності тотожно дорівнює правій. Отже, тотожність доведена.

Інколи для доведення тотожності доцільно перетворити кожну з її частин.

Приклад 2. Доведіть тотожність:

$$a - 3(3 + a) = 4(1 - a) - (13 - 2a).$$

Д о в е д е н н я. Спростимо кожну частину тотожності.

$$a - 3(3 + a) = a - 9 - 3a = -2a - 9,$$

$$4(1 - a) - (13 - 2a) = 4 - 4a - 13 + 2a = -2a - 9.$$

Права й ліва частини тотожності дорівнюють одному і тому самому виразу $-2a - 9$. Тотожність доведена.

Існують й інші способи доведення тотожностей. З ними ви ознайомитеся пізніше.



Хочете знати ще більше?

Кажучи, що якийсь вираз тотожний, обов'язково слід зазначити, якому саме виразу він тотожний. Ідеться про *відношення тотожності* двох виразів (як про відношення перпендикулярності прямих, відношення рівності кутів тощо).

Відношення тотожності виразів має такі властивості:


- 1) кожний вираз тотожний самому собі;
- 2) якщо вираз A тотожний виразу B , то й вираз B тотожний виразу A ;
- 3) якщо вираз A тотожний виразу B , а вираз B тотожний виразу C , то й вираз A тотожний виразу C .

Подібні властивості мають також відношення рівності чисел або фігур, паралельності прямих тощо.

Якщо в тотожності замість змінної скрізь написати один і той самий вираз, дістанемо нову тотожність. Наприклад, якщо в тотожності $4(a - 2) + 8 = 4a$ змінну a замінити виразом $z + 3$, то дістанемо рівність $4(z + 1) + 8 = 4(z + 3)$, яка також є тотожністю.

Перевірте себе

1. Які два вирази називають тотожно рівними?
2. Що таке тотожність?
3. Що таке «тотожне перетворення виразу»?
4. Чи кожна рівність є тотожністю?

 **Виконаємо разом!**

1. Доведіть тотожність $2a + 6 = 6 - 4(a - 5) + 2(3a - 10)$.

✓ Доведення. $6 - 4(a - 5) + 2(3a - 10) = 6 - 4a + 20 + 6a - 20 = 2a + 6$. Права частина рівності тотожно дорівнює лівій, тому ця рівність — тотожність.

2. Чи завжди правильна рівність $|a^2| = a^2$?

✓ Розв'язання. Яким би не було значення a , значення виразу a^2 додатне або дорівнює нулю. Модуль невід'ємного числа дорівнює цьому самому числу. Отже, рівність $|a^2| = a^2$ правильна для кожного значення a .

Виконайте усно

36. Чи тотожні вирази:


- а) $2a + a$ і $3a$; б) $x + 2x - 3x$ і 0 ; в) $8c - 3c$ і $5c$;
 г) $4a + \pi$ і $5a\pi$; р) $7xy - 2x$ і $5y$; д) $-3c + 9$ і $9 - 3c$?


37. Які з виразів: $2x - y$, $y - 2x + 3$, $4(y - 2x)$, $-y + 2x$ тотожні виразу $2x - y$?

Рівень А

38. Чи тотожні вирази:

- а) p^2p і p^3 ; б) $x + x^2 + x^3 + x^4$ і x^5 ; в) $a - c$ і $c - a$;
 г) $-a^2$ і $(-a)^2$; р) $ax + ax + ax$ і $3ax$; д) $x - 2a$ і $-2a + x$?


 39. Порівняйте відповідні значення виразів x^2 і x , якщо $x = -1$, $x = 0$ і $x = 1$. Чи тотожні ці вирази?

 40. Запишіть у вигляді тотожності твердження:

- а) сума двох взаємно протилежних чисел дорівнює нулю;
 б) добуток двох взаємно обернених чисел дорівнює 1;
 в) добуток двох чисел дорівнює добутку протилежних до них чисел.

Спростіть вираз (41—42).


41. а) $2c + 3c - 5$; б) $3x - 4x + x$; в) $12n - 17 - 2n$;
 г) $19c - 3c + 8$; р) $63 - 23p + 32p$; д) $4x + 65 - 10x$.

 42. а) $-4ac + 3a - 7a$; б) $9 - 23x + 40x$; в) $-4 - 12 + 8ac$.

Доведіть тотожність (43—45).

43. а) $5x + 3x + x = 9x$; б) $5x - 3x - x = x$; в) $m + 2m + 3m = 6m$.

44. а) $2x + 3x = x + 4x$; б) $-a + 7a = 7a - a$; в) $5 - 2a - 3 = 2 - 2a$.

 45. а) $7x - 5x + x = 3x$; б) $5x - 9x = 2x - 6x$; в) $a = 2a + 4a - 5a$.


46. Запишіть у вигляді тотожності твердження: а) квадрати протилежних чисел — рівні; б) куби протилежних чисел — протилежні числа; в) квадрат будь-якого числа дорівнює квадрату модуля цього числа; г) модуль куба будь-якого числа дорівнює кубу модуля цього числа.

47. Складіть усі можливі тотожності з виразів:

$$-p \cdot p; \quad -p \cdot (-p); \quad p^2; \quad -p^2; \quad -(-p)^2; \quad (-1)^2 \cdot p^2.$$


Спростіть вираз (48—50).

48. а) $19x - 4(x + 5)$; б) $7(2 - 3x) + 21$; в) $2,5 + 5(a - 1,5)$;
г) $0,1x + 3(1 - x)$; р) $-3(2y + 1) + 4$; д) $-2 - (7a - 5)$.

 49. а) $35 + 7(x - 1)$; б) $2(c - 3) - 5(2 - 4c)$; в) $-(9 - 2x) + 4x$;
г) $-4 + 4(5 - x)$; р) $-2(x + 5) + 3(x - 7)$; д) $-13 - 3(5 - 6x)$.

50. а) $12(x + 2) - (2x - 4)$; б) $1,5(5 - 2x) + 5(1,1 + x)$;
в) $-3(a - 2) + 7(2a - 1)$; г) $0,2(x + 2) - 3(2x - 0,4)$.

Доведіть тотожність (51—52).

 51. а) $3c - 3(c - 1) = 3$; б) $2xy + 2(3 - xy) = 6$;
в) $15x = 9 - 3(3 - 5x)$; г) $1 - 2x = 5 - 2(x + 2)$.

52. а) $8x = 6 + 2(4x - 3)$; б) $5(2x + y) = 10(x + y) - 5y$;
в) $7 = 12x - (-7 + 12x)$; г) $3c - 3(1 + c - x) = 3x - 3$.

53. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

а) $12(a - 3) + 3(a + 12)$, якщо $a = 0,2$;
б) $x^2(2 - x) - 2(x^2 - 3)$, якщо $x = -0,3$.

54. У тотожності $2x - 3x = 5x$ замініть змінну x виразом $a - b$. Чи є утворена рівність тотожністю?

Рівень Б

Спростіть вираз (55—57).

55. а) $2x + 4 + 2(x + 4) + 4(x - 8)$; б) $-(5a - c + 2) + 3a - c + 2$;
в) $0,5(a + b + c) - 0,5(a - b + c) - 0,5(a + b - c)$.

56. а) $5(12a - 23x) - 8(6x - 13a)$; б) $-6(ac - 4) + 3(7 - 2ac)$.

57. а) $2(x^2 - 3) - 4(17 - 4x^2)$; б) $4(x^2 - 3) - x(4x - 5)$;
в) $c(3 - 2c) + 3(c - 2c^2)$; г) $2y - 3 - 2(a + y - 1)$.

Доведіть тотожність (58—60).

58. а) $2(x-3) - 5(x-4) = 14 - 3x$; б) $3(2a-1) - 2(3a-1) = -1$;
в) $5(0,5+2x) - 5(1,1-x) = 15x - 3$; г) $9(x-1) - 3(2x-3) = 3x$.



59. а) $9x - 4(x+5) - 1 = 7(x-3) - 2x$;
б) $-2(2a+5) = 5(2a-9) - 7(2a-5)$.

60. а) $3(a+c+x) - 2(a+c-x) - (a-c+x) = 2(c+2x)$;
б) $2x+2 = 2(x^2+x+1) - (x^2-x+1) - (x^2+x-1)$;
в) $n - (1 - (n - (1 - n))) = 3n - 2$.

61. Чи тотожні вирази:

- а) $1 - (1 - (1 - c))$ і $1 - c$; б) $0,5(x+y) - 0,5(x-y) - y$ і 0 ;
в) $a - b + 1 - 2(b+1)$ і $2(a-b-1) - (a+b-1)$?



62. Заповніть таблицю.

x	-2	-1	0	1	2
$x^5 - 5x^3 + 5x$					

Чи тотожні вирази $x^5 - 5x^3 + 5x$ і x ?

63. Складіть усі можливі тотожності з виразів:

- а) $ac(-x)$, $ax(-c)$, $cx(-a)$;
б) acx , $a(-c)(-x)$, $(-a)(-c)x$, $(-a)(-x)c$.

64. Заповніть таблицю.

a	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$2(x^2 - 4) + 6$								
$2x^2 - 2$								

Чи тотожні вирази $2(x^2 - 4) + 6$ і $2x^2 - 2$?



65. Заповніть таблицю.


a	0	1	2	3	4	5	100	100000
$ a + 1$								
$ a + 1 $								

Чи правильна тотожність $|a| + 1 = |a + 1|$?


66. Чи є тотожністю рівність:

- а) $|x + 3| = x + 3$; б) $|x^2 + 5| = x^2 + 5$; в) $|a - b| \cdot |b - a| = (a - b)^2$;
 г) $|x - y| = x - y$; р) $|a + b| = |a| + |b|$; д) $|x| - |y| = |y| - |x|$?

67. Замініть у тотожності $x^2 - 2 = 2(x^2 - 1) - x^2$ змінну x виразом: а) $c + 3$; б) $ac - 1$; в) $x + 5$.

 68. У тотожності $5x + 3x = 8x$ замініть змінну x виразом $a^2 - ac + c^2$. Чи є тотожністю одержана рівність?

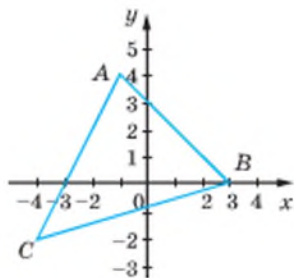
69. Довжина прямокутника дорівнює a см, а ширина — на c см менша. Запишіть у вигляді виразу периметр прямокутника.

 70. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a см, а бічна сторона — на 2 см довша. Чому дорівнює периметр трикутника?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

71. Із 150 випускників економічного коледжу 10 % було направлено на роботу в банки, 20 % — у заклади торгівлі, а 30 % продовжили навчання в університеті. Скільки випускників ще не працевлаштовано?

72. Укажіть координати точок, відмічених на малюнку 6. Знайдіть координати середини кожної зі сторін трикутника ABC .



Мал. 6

73. Розв'яжіть рівняння:

- а) $31(2 - x) = 93$; б) $15(1 - 2x) = 45$; в) $8,5(3 - 4x) = 17$;
 г) $4,7(3 - 5x) = 94$; р) $44 = 4(2 + 3x)$; д) $26 = 2(10 - 3x)$.

§ 3. ВИРАЗИ ЗІ СТЕПЕНЯМИ



В алгебрі часто доводиться мати справу з виразами, що містять степені чисел чи змінних.

Степеном називають добуток кількох рівних множників.

Наприклад,

$3 \cdot 3$ — *другий степінь* (або *квадрат*) числа 3;
 xxx — *третій степінь* (або *куб*) змінної x ;
 $ssssss$ — *шостий степінь* змінної s .

Ці степені позначають: $3 \cdot 3 = 3^2$, $xxx = x^3$, $ssssss = s^6$.

Піднести число 2 до десятого степеня — це означає перемножити десять двійок:

$$2^{10} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$$

Отже, $2^{10} = 1024$. Тут 2 — основа степеня, 10 — показник степеня, а 1024, або 2^{10} , — десятий степінь числа 2.

Число, яке підносять до степеня, називають основою степеня.

Число, яке показує, до якого степеня підносять основу, називають показником степеня.

- a^n — степінь;
- a — основа степеня;
- n — показник степеня.

Степені a^2 і a^3 називають квадратом і кубом тому, що для знаходження площі квадрата довжину його сторони підносять до другого степеня, а для знаходження об'єму куба довжину його ребра підносять до третього степеня.

Першим степенем будь-якого числа домовилися вважати саме це число: a^1 — те саме, що й a . Показник степеня 1 не прийнято писати.

$$a^1 = a,$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_n,$$

де n — натуральне число, $n \neq 1$.

Основою степеня може бути і дробове число, і від'ємне.

Наприклад,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{81},$$

$$(-0,2)^3 = (-0,2) \cdot (-0,2) \cdot (-0,2) = -0,008.$$

Щоб піднести до степеня від'ємне число, треба піднести до такого самого степеня модуль цього числа і перед результатом поставити знак «плюс», якщо показник степеня парний, або «мінус», — якщо показник степеня непарний.

Якщо $a \geq 0$, то $a^n \geq 0$.

Якщо $a < 0$, то $a^{2n} > 0$ і $a^{2n-1} < 0$.

Не плутайте слова «ступінь» і «ступінь». Додавання і віднімання вважаються діями *першого ступеня*, множення і ділення — *другого ступеня*, піднесення до степеня — дія *третього ступеня*. Обчислюючи значення виразу, спочатку виконують дії вищого ступеня, потім — нижчого. Дії одного й того самого ступеня виконують у тому порядку, в якому вони записані. Але коли вираз містить ділення на добуток, то спочатку знаходять значення добутку. Наприклад якщо $x=7$, $y=5$, то $70 : xy = 70 : 35 = 2$. Якщо вираз містить дужки, спочатку знаходять значення виразу в дужках.

Приклад. Знайдіть значення виразу

$$5a^2 + 27 : (a - 1)^3, \text{ якщо } a = -2.$$

Розв'язання. Підставимо замість a його значення -2 та виконаємо дії відповідно до їх ступеня.

Перший спосіб. $5 \cdot (-2)^2 + 27 : (-3)^3 = 5 \cdot 4 + 27 : (-27) = 20 - 1 = 19$.

Другий спосіб. $(-2)^2 = 4$, $(-3)^3 = -27$, $5 \cdot 4 = 20$, $27 : (-27) = -1$. Отже, $5 \cdot (-2)^2 + 27 \cdot (-3)^3 = 20 - 1 = 19$.

За допомогою калькулятора можна підносити число до степеня, помноживши це число на себе кілька разів. Наприклад, п'ятий степінь числа $3,7$ можна обчислити за такою програмою:

$$(3,7 \times) (3,7 \times) (3,7 \times) (3,7 \times) (3,7 \times) =$$

або коротше:

$$(3,7 \times) = = = = .$$

Калькулятори, які мають клавіші F і y^x , дають змогу спростити обчислення — 20-й степінь числа 1,2 можна обчислювати за такою програмою: 1,2 F y^x 20 $=$.

У математиці, фізиці, астрономії, біології та інших науках часто використовуються степені числа 10 для запису чисел у *стандартному вигляді*.

Будь-яке число A , більше за 10, можна записати у вигляді $A = a \cdot 10^n$, де $1 \leq a < 10$ і n — натуральне число. Такий запис числа A називається стандартним, а показник n називають *порядком числа A* .

Наприклад, в астрономії за одиницю довжини приймається 1 парсек (скорочено — пк).

$$1 \text{ пк} = 30\,800\,000\,000\,000 \text{ км} = 3,08 \cdot 10^{13} \text{ км}.$$



Хочете знати ще більше?

Ви вже знаєте, як записувати в стандартному вигляді великі числа. Щоб записати в стандартному вигляді малі додатні числа, наприклад, швидкість руху равлика (0,000003 м/с), використовують степені числа 10 із цілими від'ємними показниками. Покажемо, як слід розуміти степені числа 10 із цілим показником:

$$\begin{array}{cccccccc} 1000 & 100 & 10 & 1 & 0,1 & 0,01 & 0,001 & 0,0001 \\ \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel & \parallel \\ 10^3 & 10^2 & 10^1 & 10^0 & 10^{-1} & 10^{-2} & 10^{-3} & 10^{-4} \end{array}$$

А взагалі вважають, що 10^{-n} , де n — число натуральне, позначає десятковий дріб 0,0000...01 з n десятковими знаками.

Наприклад, $10^{-5} = 0,00001$, $10^{-10} = 0,0000000001$.

Використовуючи степені числа 10 із цілим показником, у стандартному вигляді можна записати будь-яке число:

$$A = a \cdot 10^n, \text{ де } 1 \leq a < 10 \text{ і } n \text{ — ціле число.}$$

Швидкість руху равлика в стандартному вигляді записують так:

$$0,000003 \text{ м/с} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}.$$

Якщо число A велике, його порядок — додатне число, а якщо додатне число A дуже мале, то його порядок — від'ємне число.

Перевірте себе

1. Що таке степінь числа?
2. Що таке квадрат числа, куб числа?
3. Що таке основа степеня, показник степеня?
4. Як інакше називають другий і третій степені?
5. Чи одне й те саме означають слова *ступінь* і *ступінь*?
6. Що таке стандартний вигляд числа? А порядок числа?

✓ Виконаємо разом!

1. Запишіть число $6,7 \cdot 10^8$ без показника степеня.
 ✓ Розв'язання. $6,7 \cdot 10^8 = 6,7 \cdot 100\,000\,000 = 670\,000\,000$.
2. Запишіть число $2\,000\,000\,000$ в стандартному вигляді.
 ✓ Розв'язання. $2\,000\,000\,000 = 2 \cdot 1\,000\,000\,000 = 2 \cdot 10^9$.
3. Знайдіть значення виразу: $3x^2 - 2x^3$, якщо $x = -0,2$.
 ✓ Розв'язання. Якщо $x = -0,2$, то $3 \cdot (-0,2)^2 - 2 \cdot (-0,2)^3 = 3 \cdot 0,04 - 2 \cdot (-0,008) = 0,12 + 0,016 = 0,136$.
4. Доведіть, що:
 - а) $111^{11} + 11^{111}$ ділиться на 2;
 - б) $10^{10} + 10^{20} + 10^{30}$ ділиться на 3.
 ✓ Доведення. а) Останні цифри чисел 111^{11} і 11^{111} — одиниці, а тому остання цифра суми цих чисел — двійка. Отже, число $111^{11} + 11^{111}$ ділиться на 2.
 б) Кожний із доданків — це число, яке можна записати у вигляді одиниці з наступними нулями. Сума цифр трьох таких чисел дорівнює трьом, тому саме число ділиться на три.
5. Скільки коренів має рівняння $x^5 = 0$; $x^5 = 1$; $x^4 = 1$?
 ✓ Розв'язання. Рівняння $x^5 = 0$ має тільки один корінь: $x = 0$, оскільки $0^5 = 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$, і не існує такого числа x , відмінного від 0, щоб виконувалась рівність $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = 0$.
 Так само можна переконатися, що рівняння $x^5 = 1$ має тільки один корінь $x = 1$, а рівняння $x^4 = 1$ має два корені: $x = 1$ і $x = -1$.
6. Запишіть у стандартному вигляді число:
 - а) $0,00000005$; б) $0,00123$.
 ✓ Розв'язання. а) $0,00000005 = 5 \cdot 10^{-8}$;
 б) $0,00123 = 1,23 \cdot 10^{-3}$.

Виконайте усно

74. Знайдіть квадрати чисел:
9; 10; 11; 20; 30; 40; 500; 0,2; 0,03.
75. Знайдіть куби чисел:
1; 2; 3; 10; 100; 0,1; 0,01; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$.
76. Знайдіть четвертий степінь чисел:
1, 2, 3, -1, -2, -3, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{1}{2}$, $-\frac{3}{2}$, $-\frac{1}{2}$.
77. Прочитайте вираз:
а) $a^2 + b^2$; б) $(a + b)^2$; в) $(x + y)^3$; г) $a^2 - b^2$; р) $(a - b)^2$.
78. Розв'яжіть рівняння:
а) $x^7 = 0$; б) $x^8 = 0$; в) $15x^6 = 0$; г) $x^8 = 1$; р) $x^3 = 1$.

Рівень А

Обчисліть (79—82).

79. а) 5^2 , 2^5 , 10^3 , 100^3 , 25^2 ; б) $(0,2)^3$, $(0,3)^2$, $(0,04)^3$;
в) $1,2^2$, $2,3^2$, $3,1^3$, $1,007^2$; г) $(-2)^4$, $(-13)^2$, $(-2)^5$;
р) $(-3)^4$, $-(-3^4)$, -3^4 , $(-0,5)^2$, $-0,5^2$, $(-1)^{150}$, $(-1)^{105}$.
80. а) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2$; б) $3^2 - 4^2 + 5^2 - 6^2 + 7^2$;
в) $(-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 + (-2)^6$.
81. а) $(0,3)^3 \cdot 10^4$; б) $11, 2 : 10^2$; в) $2400 \cdot (0,1)^4$;
г) $(-0,1)^5 : (0,01)^2$; р) $-0,2^4 \cdot (-1)^{15}$; д) $(-1)^{12} : (0,5)^3$.

82. а) $2 \cdot 6^2$; б) $\left(-2 \cdot \frac{1}{4}\right)^3$; в) $5 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2$; г) $-3^2 \cdot 2$; р) $(5,6 - 4,5)^3 : 0,1$.

83. Стародавня єгипетська задача.
У семи людей по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, із кожного колоска може вирости по сім вірочок ячменю. Які числа цього ряду та їх сума?



84. Чи правильна рівність:
а) $3^2 + 4^2 = 5^2$; б) $15^2 + 16^2 = 17^2$; в) $35^2 + 36^2 = 37^2$;
г) $3^3 + 3^2 = 6^2$; р) $4^3 + 6^2 = 10^2$; д) $97^2 - 96^2 = 97 + 96$?

85. Доведіть, що:

а) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$; б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 9^3 = 45^2$.

86. Обчисліть площу квадрата, сторона якого дорівнює:

а) 3 см; б) 10 м; в) 8,5 км.

87. Подайте число у вигляді степеня з показником, більшим за 1, і найменшою за модулем основою:

а) 125; б) -32; в) 2401; г) 243;
 р) 0,729; д) 0,4096; е) $-\frac{8}{27}$; є) $2\frac{46}{625}$.

88. Знайдіть значення виразу:

а) $(-7)^2 - (-1)^9 \cdot 3^4$; б) $(0,02 + 0,28)^4 \cdot 10^5$;

в) $63 - \left(4 \cdot \frac{2}{5}\right)^2 \cdot 6\frac{1}{4}$; г) $(-1)^{24} : \left(\frac{1}{2}\right)^6 + (-3)^5$;

р) $(5,6 - 4,5)^3 : 0,1$; д) $(0,3^2 + 0,4^2) - 0,5^2$.

89. Знайдіть значення виразу:

а) $3a^4 - 2a^2$, якщо $a = -3$; б) $5c^3 - 2c^2 + c$, якщо $c = 0,5$;

в) $n^3 + (n - 3)^2$, якщо $n = -2$; г) $(2m - 1)^2 : m^4$, якщо $m = -0,1$.

Розв'яжіть рівняння (90—91).

90. а) $5x^4 = 5$; б) $4x^2 = x^2$; в) $16(x + 5)^2 = 0$; г) $-2x^3 = 2$.

91. а) $x^3 + 1 = 0$; б) $x^6 - 1 = 0$; в) $2x^7 = 2$; г) $x^3 - 6 = 2$.

92. Запишіть у стандартному вигляді значення величин:

швидкість світла	— 300 000 км/с;
маса Землі	— 6 000 000 000 000 000 000 000 т;
маса Місяця	— 73 500 000 000 000 000 000 т;
об'єм Землі	— 1 083 000 000 000 км ³ .

93. Запишіть у стандартному вигляді числа:

а) 20 000; б) 7 530 000; в) 10 500 000; г) 909 900 000;
 р) 33 000; д) 105; е) 1 000 000 000; є) 12345,67.



94. Запишіть у звичайному вигляді числа:

- а) $5,2 \cdot 10^4$; б) $1,31 \cdot 10^3$; в) $7,1 \cdot 10^5$; г) $4,44 \cdot 10^2$;
 р) $2,05 \cdot 10^4$; д) $3,125 \cdot 10^6$; е) $9 \cdot 10^9$; є) $6,75 \cdot 10^5$.

Рівень **Б**



95. Чи правильна рівність:

- а) $2^2 + 2^2 + 6^2 + 10^2 = 12^2$; б) $2^2 + 4^2 + 6^2 + 13^2 = 15^2$;
 в) $2^2 + 6^2 + 8^2 + 25^2 = 27^2$; г) $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$?



96. Обчисліть значення виразу:

- а) $3,24 \cdot 10^2$; б) $(3^4 + 19)^5$; в) $(0,875 + 0,5^3)^{10}$;
 г) $(-0,3)^4 \cdot 10^3$; р) $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$; д) $(4^4 - 3^5 - 13)^{12}$.

97. Спростіть вираз:

- а) $(35 - 2^5)^4$; б) $4000 \cdot 0,2^3$; в) $(0,3^3 - 0,017)^6$;
 г) $(-1,1)^3 : 0,11$; р) $(2^7 - 5^3 - 4)^{15}$; д) $\left(-1\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$.

98. Знайдіть значення виразу:

- а) $(4x^2 - y^2)^2 : (2x - y)^2$, якщо $x = 0,6$, $y = -0,2$;
 б) $2x^5 + (x + 2y)^3 + y^2$, якщо $x = -2$, $y = 3$;
 в) $((1 + b)^2 - (a - 1)^2)^3 - (a + b)^2$, якщо $a = 1,1$, $b = 0,1$;
 г) $(2m - n)^2 - (4m^2 + n^2 - 4mn)$, якщо $m = 1,3$, $n = 2,5$.

99. Заповніть таблиці.

а)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$2x^2$									

б)

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$(2x)^2$									



100. Складіть таблицю значень виразу $x^4 - 3x^3 + 2x^2$ для x , що дорівнює: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4.

101. Обчисліть, користуючись калькулятором:

- а) $3,4^5$; б) $5,75^4 + 57$; в) $47,2 \cdot 2,84^3$; г) $3,7 + 2,7^4$.

102. Обчисліть і порівняйте:

- а) суму квадратів чисел 3 і 5 та квадрат їх суми;
 б) різницю квадратів чисел 10 і 6 та квадрат їх різниці.



103. Обчисліть і порівняйте:

- а) суму кубів чисел 3 і 2 та куб їх суми;
 б) різницю кубів чисел 5 і 2 та куб їх різниці.

104. На скільки: а) квадрат півсуми чисел 2, 3, 4 і 5 більший за півсуму їх квадратів; б) куб півсуми чисел 2, 3, 4 і 5 більший за півсуму їх кубів?



105. На картині художника М. П. Богданова-Бельського «Усна лічба» зображено урок математики в школі XIX ст. Учитель запропонував школярам усно скоротити дріб

$$\frac{10^2 + 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2}{365}$$

Спробуйте виконати це завдання і ви.



106. Значення якого з трьох даних виразів найбільше, а якого — найменше:

а) $\frac{7^2 + 3^2}{2}$, $\left(\frac{7+3}{2}\right)$, $\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2$;

б) $\frac{7^2 - 5^2}{2}$, $\left(\frac{7-5}{2}\right)^2$, $\left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2$;

в) $\frac{5^3 + 3^3}{2}$, $\left(\frac{5+3}{2}\right)^3$, $\left(\frac{5}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{2}\right)^3$?

107. Доведіть, що рівняння не має розв'язків:

а) $x^4 + 3 = 0$; б) $3x^2 + 8 = 0$; в) $(y - 3)^2 + 1 = 0$.

Розв'яжіть рівняння (108—109).

108. а) $(x - 5)^3 = 1$; б) $(x^2 + 1)^2 = 0$; в) $(x^2 + 1)^3 = 8$;

г) $(2x - 3)^5 = 1$; г') $(8 - 3z)^3 = -1$; д) $(x^4 + 3)^2 = 1$.



109. а) $2(y^2 - 1) = 0$; б) $3(z^4 - 1) = 0$; в) $0,5(x^3 + 2) = 1$;

г) $0,2(1 + z^3) = 0,4$; г') $(x + 2)^3 = -1$; д) $(5 - y)^7 + 2 = 1$.

110. Запишіть у стандартному вигляді числа:

а) 287 287 000; 17 530 000; 220 500; 90,99;

б) 0,0003; 0,235; 0,05; 0,0000000041;

в) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{20}$; $\frac{1}{200}$; $\frac{3}{5000}$; $\frac{73}{500\,000}$; $\frac{999}{1\,000\,000\,000}$.

111. Запишіть у звичайному вигляді числа:

а) $1,2 \cdot 10^3$; $3,47 \cdot 10^5$; $7,3 \cdot 10^4$; $14,23 \cdot 10^5$;

б) $2 \cdot 10^{-4}$; $1,1 \cdot 10^{-3}$; $9 \cdot 10^{-5}$; $6,75 \cdot 10^{-6}$.

112*. Доведіть, що:

а) $10^{12} + 2$ ділиться на 3; б) $1 + 10^{10} + 10^{100}$ ділиться на 3;

в) $10^{15} + 8$ ділиться на 9; г) $10^{10} - 1$ ділиться на 9.

113*. Доведіть, що для будь-якого натурального n значення дробу є натуральним числом:

а) $\frac{6^n - 1}{5}$; б) $\frac{10^n + 5}{3}$; в) $\frac{10^n - 1}{9}$; г) $\frac{3^{4n} + 4}{5}$.



114*. Замініть букви цифрами так, щоб була правильною рівність:

а) куб = e^e ; б) степінь = ee^e .

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

115. Чи тотожні вирази:

- а) $2a + a + a$ і $4a$; б) $x + x + x$ і x^3 ; в) $2b - 2a$ і $-2(a - b)$;
 г) $5 + 5 + 5x$ і $15x$; р) $3y + 2y + y - 6$ і y ; д) $a^3 - a$ і a^2 ?

116. За якої умови правильна пропорція:

- а) $3 : x = x : 27$; б) $y : 4 = 16 : y^2$?

117. Якщо відкрити меншу лиш трубу —

- басейн наповниться водою за добу;
 коли ж відкрити разом дві труби,
 він вщерть наповниться за чверть доби.
 Як довго наповнявся б він водою
 одною тільки більшою трубою?

118. Бічна сторона рівнобедреного трикутника на 3 см довша за основу. Знайдіть їх довжини, якщо периметр трикутника: а) 54 см; б) 6 см; в) a см.

§4. ВЛАСТИВОСТІ СТЕПЕНІВ



Далі розглянемо найважливіші тотожні перетворення виразів зі степенями. Почнемо з основної властивості степеня.



Яке б не було число a і натуральні показники степенів m і n , завжди

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Доведення.

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{aa \dots a}_{m \text{ разів}} \cdot \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ разів}} = \underbrace{aa \dots a}_{(m+n) \text{ разів}} = a^{m+n}.$$

Тотожність $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ називають *основною властивістю степеня*. З неї випливає, що при множенні степенів одного й того самого числа показники степенів додають, а основу лишають ту саму.

Наприклад,



$$3^2 \cdot 3^5 = 3^7; \quad 1,3^4 \cdot 1,3^5 = 1,3^9; \quad x^3 x^5 = x^8.$$

Якщо b не було число a ($a \neq 0$) і натуральні показники степеня m і n ($m > n$), завжди

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Доведення. За правилом множення степенів

$$a^{m-n} \cdot a^n = a^{m-n+n} = a^m, \text{ тому } a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Щоб поділити степені з однаковими основами (за умови, що показник степеня діленого більший від показника степеня дільника), потрібно основу залишити без змін, а від показника степеня діленого відняти показник степеня дільника.

Наприклад,



$$7^5 : 7^3 = 7^2; \quad (-13)^{11} : (-13)^7 = (-13)^4.$$

Якщо b не було число a і натуральні показники степеня m і n , завжди

$$(a^n)^m = a^{nm}.$$

Доведення.

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{m \text{ разів}} = a^{\overbrace{n+n+\dots+n}^m} = a^{nm}.$$

Щоб підняти степінь до степеня, потрібно показники степенів перемножити, а основу залишити ту саму.

Наприклад,



$$(2^3)^4 = 2^{12}; \quad (0,7^2)^5 = 0,7^{10}; \quad (c^7)^3 = c^{21}.$$

Для будь-яких чисел a і b та натурального показника степеня n

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n.$$

Доведення.

$$(ab)^n = \underbrace{ab \cdot ab \cdot \dots \cdot ab}_{n \text{ разів}} = \underbrace{aa \dots a}_{n \text{ разів}} \cdot \underbrace{bb \dots b}_{n \text{ разів}} = a^n \cdot b^n.$$

Отже,

n -й степінь добутку дорівнює добутку n -х степенів множників.

Наприклад,

$$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4; \quad (3m)^6 = 3^6 m^6.$$

Можна довести (спробуйте зробити це самостійно), що для будь-яких чисел a і b ($b \neq 0$) і натурального показника степеня n правильна рівність:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Отже, за вказаних умов:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$



Хочете знати ще більше?

Розглянуті властивості степенів з натуральними показниками можна поширити і на степені з цілими від'ємними показниками. Наприклад,

$$10^{-5} \cdot 10^{-3} = 10^{-5+(-3)} = 10^{-8};$$

$$(10^{-2})^{-3} = 10^6.$$

Використовуючи властивості степенів з цілими показниками, можна спростити виконання дій з будь-якими числами, записаними у стандартному вигляді. Знайдемо, для прикладу, добуток і частку чисел a і b , якщо $a = 3,5 \cdot 10^7$, $b = 4 \cdot 10^{-3}$.

$$a \cdot b = 3,5 \cdot 10^7 \cdot 4 \cdot 10^{-3} = 3,5 \cdot 4 \cdot 10^7 \cdot 10^{-3} = 14 \cdot 10^4 = 1,4 \cdot 10^5;$$

$$a : b = (3,5 \cdot 10^7) : (4 \cdot 10^{-3}) = (3,5 : 4) \cdot (10^7 : 10^{-3}) =$$

$$= 0,875 \cdot 10^{7-(-3)} = 0,875 \cdot 10^{10} = 8,75 \cdot 10^9.$$

Перевірте себе

1. Сформулюйте основну властивість степенів.
2. Сформулюйте правило піднесення до степеня добутку.
3. Як підносити до степеня степінь?
4. Як підносити до степеня дріб?

✓ Виконаємо разом!

1. Обчисліть: а) $0,5^{10} \cdot 4^5$; б) $0,2^8 \cdot 5^6$; в) $9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8$.

✓ Розв'язання. а) $0,5^{10} \cdot 4^5 = (0,5^2)^5 \cdot 4^5 = (0,25 \cdot 4)^5 = 1^5 = 1$;
 б) $0,2^8 \cdot 5^6 = 0,2^2 \cdot 0,2^6 \cdot 5^6 = 0,04 \cdot (0,2 \cdot 5)^6 = 0,04 \cdot 1^6 = 0,04$;

$$\text{в) } 9^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 9^5 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot 9^4 \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^4 = 9 \cdot 1^4 = 9.$$

Відповідь. а) 1; б) 0,04; в) 9.

2. Розв'яжіть рівняння $2x^2 \cdot x = 2$.

✓ Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на 2 і подамо ліву частину у вигляді степеня з основою x :

$$2x^2 \cdot x = 2, x^2 \cdot x = 1, x^3 = 1, \text{ звідси } x = 1.$$

Відповідь. $x = 1$.

3. Запишіть у вигляді степеня вираз:

а) $a^5 \cdot a^3 \cdot a$; б) $(x-2y)(x-2y)^2$; в) $81 \cdot 3^5 \cdot 27$.

✓ Розв'язання. а) $a^5 \cdot a^3 \cdot a = a^{5+3+1} = a^9$;

б) $(x-2y)(x-2y)^2 = (x-2y)^{1+2} = (x-2y)^3$;

в) $81 \cdot 3^5 \cdot 27 = 3^4 \cdot 3^5 \cdot 3^3 = 3^{4+5+3} = 3^{12}$.

Відповідь. а) a^9 ; б) $(x-2y)^3$; в) 3^{12} .

4. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел

$$a = 1,2 \cdot 10^5 \text{ і } c = 2 \cdot 10^4.$$

✓ Розв'язання. $a + c = 1,2 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 =$

$$= 12 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^4 = 14 \cdot 10^4 = 1,4 \cdot 10^5;$$

$$a - c = 1,2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^4 = 12 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^4 = 10 \cdot 10^4 = 10^5;$$

$$a \cdot c = 1,2 \cdot 10^5 \cdot 2 \cdot 10^4 = 1,2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = 2,4 \cdot 10^9;$$

$$a : c = (1,2 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^4) = (1,2 : 2) \cdot (10^5 : 10^4) = 0,6 \cdot 10 = 6.$$

Відповідь. $1,4 \cdot 10^5$; 10^5 ; $2,4 \cdot 10^9$; 6.

Виконайте усно

Спростіть вираз (119—120).

119. а) $3^5 \cdot 3^7$; б) $12^4 : 12^3$; в) $\left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$; г) $(-4)^2 \cdot (-4)^3$.

120. а) $x^5 \cdot x^8$; б) $m^3 \cdot m^7$; в) $f^4 : f$; г) $c^3 \cdot c^4 \cdot c^5$; р) $z^2 \cdot z^5 \cdot z$.

121. Подайте вираз у вигляді степеня:

а) 625; б) $(x^3)^5$; в) $x^2 \cdot y^2$; г) $8 \cdot 3^3$; р) $64 \cdot 49$; д) $x^4 \cdot y^6$.

122. Розв'яжіть рівняння:

а) $z^3 z = 0$; б) $4x^5 x^6 = 0$; в) $y^5 y^2 = 1$; г) $xx^3 = 1$.

Рівень **A**

Подайте добуток у вигляді степеня (123—124).

123. а) $3^{13} \cdot 3^6$; б) $18 \cdot 18^{14}$; в) $(-11)^5 \cdot (-11)^4$;

г) $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^7$; р) $\left(1\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(1\frac{2}{3}\right)$; д) $\left(-\frac{2}{5}\right)^9 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^{16}$;

е) $0,5^5 \cdot 0,5^5$; є) $(-1,2) \cdot (-1,2)$.

124. а) $a^5 \cdot a^3$; б) $x^4 \cdot x^4$; в) $m \cdot m^8$; г) $x \cdot x^2 \cdot x^3$; р) $y^7 \cdot y \cdot y^7 \cdot y$;
д) $z \cdot z^2 \cdot z^3 \cdot z^5$; е) $(a+b)^2 \cdot (a+b)^5$; є) $(x-y) \cdot (x-y)$.



125. Спростіть вираз:

а) $4^5 \cdot 4^7$; б) $a^7 \cdot a^4$; в) $x^2 \cdot x^4 \cdot x^5$; г) $0,2^5 \cdot 0,2^3$; р) $c^{10} : c^6$;

д) $c^8 \cdot c^3 \cdot c$; е) $13^8 : 13^7$; є) $n^5 \cdot n^{12}$; ж) $a^5 \cdot a^7 \cdot a^4$.

Виконайте піднесення до степеня (126—127).

126. а) $(a^2)^3$; б) $(x^3)^2$; в) $(y^7)^2$; г) $(-x^5)^6$; р) $((-a)^3)^4$;

д) $((-b)^3)^7$; е) $((x^5)^4)^3$; є) $(-x^3)^3$; ж) $(-a^4)^9$; з) $((-x)^4)^9$.



127. а) $(m^8)^3$; б) $(x^{10})^4$; в) $(a^5)^n$; г) $(z^m)^8$.

128. Знайдіть:

а) другий, третій і четвертий степені числа 2^4 ;

б) другий, третій і п'ятий степені числа $(-2)^3$.

129. Додатне чи від'ємне значення виразу:

а) $(-5)^{21} : (-5)^{13}$; б) $(-8)^8 \cdot (-8)^{10}$; в) $(-3)^5 \cdot (-3)^7 \cdot (-3)^4$?

Порівняйте значення виразів (130—131).

130. а) $(-2)^3 \cdot (-2)^{10}$ і $(-2)^8$; б) $(-3)^7 : (-3)^5$ і $(-3)^{75}$;

в) $(-1)^5 \cdot (-10)^{35}$ і $(-100)^{91}$; г) $(-2,5)^{32} : (-7)^{31}$ і $(-2,5) : (-7)$.



131. а) $(-6)^{21} \cdot (-6)$ і $(-6)^{30}$; б) $(-4)^{12} : (-4)^7$ і $(-4)^{16}$;

в) $(-2)^9 \cdot (-2)^{15}$ і $(-2)^{25}$; г) $(-5)^6 \cdot (-5)^5$ і $(-5)^{13}$.




132. Обчисліть значення виразу:

а) $2^{13} \cdot 0,5^{13}$; б) $0,5^{18} \cdot 2^{18}$; в) $25^7 \cdot 0,04^7$; г) $5^{33} \cdot 0,2^{33}$.

133. Знайдіть значення виразу:

а) $2^7 \cdot 5^7$; б) $0,25^{10} \cdot 4^{10}$; в) $(-8)^{11} \cdot 0,125^{11}$;

$$\text{г) } 0,2^8 \cdot 0,5^8; \quad \text{г) } 6^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6; \quad \text{д) } \left(1\frac{3}{5}\right)^{16} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{16}.$$

 **134.** Чи має розв'язки рівняння:

а) $x^2x^4 = -1$; б) $x^3x^6 = -1$; в) $x^7 \cdot 0 = 0$; г) $0 \cdot x^8 = 1$?

135. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^8 \cdot x^7 = 1$; б) $y^4 \cdot y^5 = -1$; в) $x^2 \cdot x^2 = 1$; г) $z^3 \cdot z^2 \cdot z^8 = -1$.

136. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

а) $2,4 \cdot 10^5$ і $3 \cdot 10^5$; б) $1,5 \cdot 10^7$ і $5 \cdot 10^7$;

в) $6,4 \cdot 10^4$ і $3,2 \cdot 10^4$.

137. Виконайте дії:

а) $2,5 \cdot 10^5 + 3,3 \cdot 10^5$; б) $7,7 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^7$;


в) $(6,4 \cdot 10^4) : (3,2 \cdot 10^4)$; г) $(6,4 \cdot 10^3) \cdot (2 \cdot 10^3)$.

Рівень **B**

Обчисліть (138—140).

138. а) $0,5^{12} \cdot 2^{13}$; б) $0,1^{21} \cdot 10^{20}$; в) $0,2^{41} \cdot (-0,5)^{40}$;
г) $5^{27} \cdot 0,2^{30}$; г) $(-0,25)^{15} \cdot 4^{16}$; д) $4^{31} \cdot 0,25^{30}$.

139. а) $\left(-\frac{5}{7}\right)^{12} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right)^{14}$; б) $7^{15} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)^{16}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{11}$;
г) $(-0,4)^8 \cdot 3^4 \cdot (-2,5)^8$; г) $0,2^7 \cdot 0,3^2 \cdot 5^7$; д) $25^{10} \cdot 2^8 \cdot 0,04^{10}$.


 **140.** а) $5^{20} \cdot 0,2^{18}$; б) $0,04^{12} \cdot 25^{11}$; в) $(-2,5)^{17} \cdot (0,4)^{19}$;
г) $10^{26} \cdot 0,1^{28}$; г) $\left(\frac{1}{8}\right)^{35} \cdot (-8)^{37}$; д) $(-1,25)^{22} \cdot (-0,8)^{23}$.

Подайте у вигляді степеня добуток (141—143).

141. а) $a^5 \cdot (a^2)^7$; б) $(x^2)^3 \cdot (x^3)^4$; в) $y \cdot (y^5)^2 \cdot y^6$;

г) $(b^3 \cdot b^5)^2$; г) $(x \cdot x^8)^3 \cdot x^3$; д) $(-a^2)^3 \cdot (a^3)^5$;


е) $(-y)^6 \cdot (-y^4)^5$; е) $((-x)^3)^2 \cdot (-x)^4$; ж) $(-a^4)^3 \cdot ((-a)^3)^5$.

 **142.** а) a^6x^6 ; б) $(-b)^7y^7$; в) $a^3b^3c^3$; г) $(-1)^9m^9$; г) $32x^5$;
д) $0,0081b^2$; е) $\left(\frac{1}{2}\right)^{10} a^{10}b^{10}$; е) $\frac{1}{27} x^3y^3$; ж) $10\,000 \left(\frac{m}{n}\right)^4$.

143. а) $5^6 \cdot 125$; б) $36 \cdot 6^8$; в) $2^{10} \cdot 64$; г) $0,001 \cdot 0,1^5$;
 р) $(-0,3)^{15} \cdot (-0,027)$; д) $0,4 \cdot 0,16$; е) $0,25 \cdot 0,125$;
 є) $\frac{27}{64} \cdot \frac{9}{16}$; ж) $\frac{16}{625} \cdot \left(-\frac{8}{125}\right)$.

144. Розв'яжіть рівняння:

- а) $3x^2 \cdot x^5 + 3 = 0$; б) $-2y^4 \cdot y^7 = 2$;
 в) $0,5x^2 \cdot x^5 + 1 = 1,5$; г) $\frac{1}{3}y^4 \cdot y^7 + 2 = 2\frac{1}{3}$.

 145. Замініть зірочку степенем так, щоб утворилась тотожність:


- а) $x^5 \cdot * = x^{15}$; б) $a^{10} \cdot * \cdot a = a^{17}$; в) $(*)^5 = x^{20}$; г) $(*)^7 = -a^{21}$.

146. Знайдіть таке значення змінної, при якому рівність буде правильною:

- а) $5^3 \cdot 5^4 = 5^{5+z}$; б) $3^x \cdot 3^5 = (3^2)^x$; в) $\left((4^3)^x\right)^4 = 4^x \cdot 4^{22}$;
 г) $(6^x)^4 = (6^3)^x$; р) $(7^6)^8 = 7^{12x}$; д) $(2^5)^x \cdot 2^2 = (2^3)^x \cdot (2^x)^4$.

147. Розв'яжіть рівняння:

- а) $(2x)^5 = -32$; б) $(3x)^4 = 81$; в) $12x^5 x^3 = 0$;
 г) $(x^9 \cdot x^4)^3 = -1$; р) $(x^7 \cdot x^{11})^5 = 1$; д) $(4(x+2)^2)^8 = 0$.

 148. Користуючись тотожністю

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n,$$

доведіть тотожність:


- а) $(xyz)^n = x^n \cdot y^n \cdot z^n$; б) $(xyzt)^n = x^n \cdot y^n \cdot z^n \cdot t^n$.

149. Доведіть тотожність:

- а) $a^m \cdot a^n \cdot a^h = a^{m+n+h}$; б) $((a^n)^m)^h = a^{nmh}$.

150. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

- а) $3 \cdot 10^{-7}$ і $2 \cdot 10^{-7}$; б) $4,5 \cdot 10^{10}$ і $3 \cdot 10^9$;
 в) $-6 \cdot 10^{13}$ і $1,2 \cdot 10^{12}$; г) $2,8 \cdot 10^{19}$ і $7 \cdot 10^{20}$.

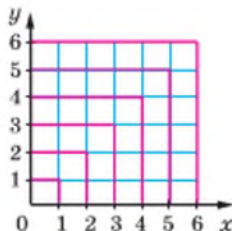
 151. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

- а) $1,4 \cdot 10^{-6}$ і $7 \cdot 10^{-6}$; б) $3,5 \cdot 10^{-4}$ і $5 \cdot 10^{-4}$.

152. Виконайте дії:

- а) $2,5 \cdot 10^4 + 3,3 \cdot 10^5$; б) $7,7 \cdot 10^7 - 5 \cdot 10^5$;
 в) $6,4 \cdot 10^5 : (3,2 \cdot 10^4)$; г) $5,5 \cdot 10^7 + 8,3 \cdot 10^6$;
 р) $7,7 \cdot 10^4 - 7,1 \cdot 10^6$; д) $6,4 \cdot 10^{-3} \cdot 2 \cdot 10^3$.

153. Користуючись малюнком 7, виразить квадрат довільного натурального числа n через суму n перших непарних чисел.



Мал. 7

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

154. Чи є тотожністю рівність:

а) $3x + 5 = 3(x + 5)$;

б) $3(x - 4) = 3x - 12$;

в) $(2a - b)^2 = (b - 2a)^2$;

г) $(2x - 3y)^3 = (3y - 2x)^3$;

р) $(a + b) \cdot 0 = a + b$;

д) $y(x - x) = 0$?

155. Добова потреба підлітка — 52—75 ккал на 1 кг маси тіла. Внаслідок інтенсивного росту та при збільшенні навантажень ця кількість кілокалорій може збільшуватись на $1/6$ частину. Виконайте відповідні підрахунки і встановіть кількість калорій, яка необхідна вам щоденно. Складіть тижневе меню, враховуючи, що їжа підлітка повинна містити білки, жири й вуглеводи у співвідношенні 1:1:4, а при фізичних навантаженнях — 1:1:6

§5. ОДНОЧЛЕНИ



Найпростіші вирази — числа, змінні, їх степені й добутки — називають *одночленами*. Наприклад,

$$6, -\frac{7}{12}, z, x^5, 0, 3a^2x, 3a \cdot 5c.$$

Якщо одночлен містить тільки один числовий множник, до того ж поставлений на перше місце, і якщо кожна змінна входить тільки до одного множника, такий одночлен називається *одночленом стандартного вигляду*. Такими є, наприклад, усі наведені вище одночлени, крім останнього. Одночлени $3a \cdot 5c$, $2x^3x^2$, $ab \cdot 8$ записано в нестандартному

вигляді: перший містить два числові множники 3 і 5, другий — два множники x^3 і x^2 з тією самою змінною x , у третьому числовий множник 8 поставлений не на перше місце.

Користуючись переставним і сполучним законами множення, кожний одночлен можна записати в стандартному вигляді.

Наприклад,

$$\begin{aligned} 3a \cdot 5c &= 3 \cdot 5 \cdot a \cdot c = 15ac, \\ 0,5xy \cdot 4y^3 &= 0,5 \cdot 4 \cdot x \cdot y \cdot y^3 = 2xy^4, \\ 4cx(-2cx^3) &= 4 \cdot (-2) \cdot c \cdot c \cdot x \cdot x^3 = -8c^2x^4. \end{aligned}$$

Числовий множник одночлена, записаного в стандартному вигляді, називають *коефіцієнтом* цього одночлена. Наприклад, коефіцієнти одночленів $15xz$, $-8,3a^2$, m^3 , $-p$ дорівнюють відповідно 15, $-8,3$, 1 і -1 . Коефіцієнти 1 і -1 не прийнято писати.

Зведення одночлена до стандартного вигляду полягає в множенні двох чи кількох одночленів.



Щоб перемножити одночлени, числові множники перемножують, а до буквених застосовують правило множення степенів з однаковими основами.

Якщо виникає потреба перемножити кілька одночленів, то їх сполучають знаком множення, а утворений таким способом одночлен зводять до стандартного вигляду.

Наприклад, знайдемо добуток одночленів $5a^2b$ і $-0,2ab^3$.

$$5a^2b \cdot (-0,2ab^3) = 5 \cdot (-0,2)a^2abb^3 = -a^3b^4.$$

В одночлені $-a^3b^4$ сума показників змінних дорівнює 7. Цю суму називають *степенем одночлена* $-a^3b^4$. Степінь одночлена $5xy$ дорівнює 2.

Узагалі, степінь одночлена — це сума показників усіх змінних, що входять до нього. Якщо одночлен — число, вважають, що його степінь дорівнює нулю.

Наприклад, одночлени $0,3$, 5^3 , $(-2)^5$ мають нульовий степінь.

Одночлени можна підносити до степенів. Для прикладу піднесемо до третього степеня одночлен $2ax^5$.

$$\begin{aligned} (2ax^5)^3 &= 2ax^5 \cdot 2ax^5 \cdot 2ax^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot x^5 \cdot x^5 \cdot x^5 = \\ &= 8a^3x^{15}. \end{aligned}$$

З тотожності $(ab)^n = a^n b^n$ випливає таке правило.



Щоб піднести до степеня одночлен, слід піднести до цього степеня кожний множник одночлена і знайдені степені перемножити.

Приклади. $(3my^2)^4 = 3^4 m^4 (y^2)^4 = 81m^4 y^8$,
 $\left(-\frac{1}{3}a^2x^3\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)^4 \cdot (a^2)^4 \cdot (x^3)^4 = \frac{1}{81}a^8x^{12}$.



Хочете знати ще більше?

Одночлени, як і числа, можна додавати, віднімати, множити і ділити. Проте сума, різниця і частка двох одночленів не завжди є одночленом. Наприклад, сума і різниця одночленів $6x$ і $2x$ дорівнюють відповідно одночленам $8x$ і $4x$. Але сума і різниця одночленів $8ax$ і $4ay$ дорівнюють виразам $8ax + 4ay$ і $8ax - 4ay$, а ці два вирази — не одночлени.

Частка одночленів $6c^3$ і $3c$ дорівнює одночлену $2c^2$ (оскільки $2c^2 \cdot 3c = 6c^3$). Але частка від ділення $12c$ на $6c^3$ — не одночлен.

Перевірте себе

1. Що таке одночлен?
2. Що таке коефіцієнт одночлена?
3. Коли говорять, що одночлен записаний у стандартному вигляді?
4. Як перемножити два одночлени?
5. Як піднести до степеня одночлен?
6. Що називають степенем одночлена?



Виконаємо разом!

1. Запишіть одночлен у стандартному вигляді:

а) $ax^2 \cdot 25x^3$; б) $-5a^2n \cdot 2a^2n^3$; в) $\frac{2}{3}xy^2 \cdot (-3x^3)$.

✓ Розв'язання. а) $ax^2 \cdot 25x^3 = 25 \cdot ax^2 \cdot x^3 = 25ax^5$;

б) $-5a^2n \cdot 2a^2n^3 = -5 \cdot 2 \cdot a^2 \cdot a^2 \cdot n \cdot n^3 = -10a^4n^4$;

в) $\frac{2}{3}xy^2 \cdot (-3x^3) = \frac{2}{3} \cdot (-3) \cdot x \cdot x^3 \cdot y^2 = -2x^4y^2$.

Відповідь. а) $25ax^5$; б) $-10a^4n^4$; в) $-2x^4y^2$.

2. Піднесіть до квадрата і куба одночлен $-2xz^3$.

✓ Розв'язання. $(-2xz^3)^2 = (-2)^2 \cdot x^2 \cdot (z^3)^2 = 4x^2z^6$;

$(-2xz^3)^3 = (-2)^3 \cdot x^3 \cdot (z^3)^3 = -8x^3z^9$.

Відповідь. $4x^2z^6$; $-8x^3z^9$.

Виконайте усно

156. Перемножте одночлени, щоб заповнити таблицю:

	x	$5x$	$-0,1x$	$2x^2$
a				
$2a$				
$-3ax$				
$4a^2$				

157. Який із виразів є одночленом:

- а) $\frac{2}{3}abc^3$; б) $(a+b)x$; в) $c^2 \cdot (-y^2)$; г) $-3,5$; р) $t^{125} : z$?

Рівень А

158. Вишипіть одночлени стандартного вигляду:

- а) $3mn^2m^4$; б) $-3xyz^5$; в) $3ab \cdot 7c$; г) $\frac{1}{2}c$; р) $2x \left(-\frac{1}{2y} \right)$.

 159. Запишіть одночлен у стандартному вигляді й підкресліть його коефіцієнт:


- а) $2a \cdot 3b$; б) $12ax \cdot a^2$; в) $-5cz \cdot cz$; г) $0,3a \cdot 2ab^2$;

- р) $\frac{1}{3}mn \cdot 3n^2$; д) $(-2ab) \cdot (-3)$; е) $a^2 \cdot 3bc \cdot a^3$; є) $-3 \cdot (-5)xy$;

- ж) $\frac{1}{3}x \cdot x^2 \cdot \frac{1}{2}x^3$; з) $2,5ax \cdot (-0,4)x^2$.

160. Знайдіть коефіцієнт одночлена:

- а) $2na^3$; б) xy^2z^3 ; в) $-ab^3c$; г) $\frac{2}{3}a^2 \cdot x^3$; р) $-2xy \cdot 3x^2$.

 161. Обчисліть значення одночлена:

- а) $2a^4b$, якщо $a = -1$, $b = 5$; б) $-x^2y^3$, якщо $x = 0,2$, $y = -3$;

- в) $-0,5xc^3$, якщо $x = -0,2$, $c = -\frac{1}{2}$.

Перемножте одночлени (162—163).

162. а) $2ab$ і $3a^2c$; б) $0,3xy^2$ і $\frac{1}{3}x^2y$; в) $-am^2$ і $3m^3p$;


г) $0,2xy$ і $-5xy$; р) $abcd$ і $-ab^2c^3$; д) $1\frac{2}{3}ax$ і $\frac{3}{5}z$.

163. а) $3a^3$, $2a^2z$ і $6az^3$; б) $2y$, $-3y^2$ і y^3 ; в) $\frac{2}{5}x^5y^4$ і $-\frac{5}{7}xy^3$.

164. Піднесіть до квадрата і до куба одночлен:

а) $2ax$; б) $-3a^2$; в) $5bc^2$; г) $0,2x^3m$; р) $-\frac{1}{2}x^5c^2$; д) $-\frac{2}{3}a^2x^3$.

Спростіть вираз (165—166).


 165. а) $(3ax^2)^3$; б) $(x^3y^3)^2$; в) $(-2ab)^3$; г) $-3xy^3 \cdot 2xy^2$; р) $(-2a^2b)^3$.

166. а) $2a(3mc)^2$; б) $\frac{1}{8}c^2(-2xc)^3$; в) $\frac{2}{3}a^3(-3ax)^4$;

г) $(-2a^3)^3 \cdot a^3$; р) $-0,7y^3 \left(-\frac{1}{7}y^3\right)^2$; д) $\left(-\frac{1}{3}pq^2\right)^4 p^3 \cdot p^3$.

Рівень B

Запишіть у стандартному вигляді одночлен (167—168).

 167. а) $2a \cdot 5x \cdot \left(-\frac{2}{5}a\right)$; б) $5c^3 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)cx$; в) $-4a \cdot 3axy \cdot \left(-\frac{3}{4}x^2y\right)$;

г) $0,8xyz \cdot (-5y)$; р) $\frac{2}{3}ac^3(-6c^2)$; д) $-5a^2z^3 \cdot \left(-\frac{3}{5}z\right)$.

168. а) $\frac{5}{7}xy \cdot \left(-\frac{7}{10}xy\right)$; б) $\left(-\frac{3}{4}acx\right) \cdot \left(-\frac{4}{5}ax^3\right)$;

в) $-3ax^2 \cdot 2a \cdot (-5x^3)$; г) $-2cz^3 \cdot 3z \cdot (-5cz)$; р) $-\frac{1}{2}cz^2 \cdot 4cx \cdot (-c)$.

169. Обчисліть значення одночлена:

а) $0,5a^5$, якщо $a = 2$; б) $2c^2x^3$, якщо $c = 1,5$, $x = -10$;

в) $-8xz^5$, якщо $x = 0,1$ і $z = -2$;

г) $-\frac{2}{3}a^2c^4$, якщо $a = \frac{1}{2}$ і $c = -3$;

р) $1\frac{13}{27} \cdot (6xy^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}xy\right)^3$, якщо $x = 3$, $y = \frac{1}{2}$;

д) $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot (-0,2xy)^4 \cdot (50y^3z)^2$, якщо $x = 0,2$, $y = 10$, $z = 0,06$.

170. Перемножте одночлени:

а) $-axyz$, $2az^2$ і $-3x$; б) $5a^2$, $3xy^3$ і $-\frac{2}{3}axy^3$;

в) $-2\frac{1}{3}ab^2$, $-\frac{3}{7}ab^2$ і $3b^2$; г) $-1\frac{2}{3}an^2m$, $-3an^2$ і $-0,2a$.



171. Заповніть порожні клітинки такими степенями змінної a , щоб добутки степенів у кожному рядку, у кожному стовпчику і в кожній діагоналі були тотожно рівними (мал. 8).

a		a^3
	a^4	a^2
	1	

Мал. 8



172. Піднесіть до куба одночлен:

а) $3cx$; б) $2a^2m$; в) $0,5axy^3$; г) $-\frac{2}{3}ab^2c^3$;

г) $-1\frac{1}{2}c^2n^2p$; д) $-2\frac{2}{5}an^2c^3$.

173. Піднесіть до четвертого степеня одночлен:

а) $2an$; б) $3x^2$; в) $0,1ax^2$; г) $-0,1ac^2$; г) $-\frac{2}{3}x^2y$; д) $-1\frac{1}{2}ab^2c$.

Спростіть вираз (174—176).

174. а) $(2ac^3)^4$; б) $(-ax^3)^4$; в) $(-3an^2)^5$; г) $(-0,2xy^2)^3$;
г) $\left(-\frac{2}{3}axy^2\right)^4$.



175. а) $x^5 \cdot (2ax^2)^3$; б) $3a^2 \cdot (2a^2c)$; в) $-x^2 \cdot (3x^2y)^3$;

г) $a \cdot (2cx^2)^2$; г) $c^3 \cdot (3cx^2)^2$; д) $(-2a^2x)^2 \cdot \frac{1}{2}a$.

176. а) $(2ax^3)^2 \cdot (ax)^3$; б) $(3nz^3)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}nzx\right)^3$;

в) $(-2x^2y^3)^2 \cdot (-5xy^2)^3$; г) $\left(-1\frac{2}{3}ax^2\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{5}a^3x\right)^2$;

г) $3x^2 \cdot (-5x^3y^4)^2$; д) $(-a^6b^3)^7 \cdot 6a^3b^4$;

е) $0,5mn^4 \cdot (-2m)^5$; е) $(-0,1x^2y)^4 \cdot 1000xy^2$.

177. Покажіть, що рівняння не має розв'язків:

а) $x^4 \cdot x^8 + 3 = 0$; б) $2x^7 \cdot x^5 = -31$; в) $-8y^4 \cdot y^8 = 64$.

178. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x^3)^4 \cdot x \cdot x^2 = -1$; б) $(-x^2)^3 \cdot x^5 \cdot (x^3)^3 = -1$;

$$в) (0,2x^7 \cdot x^6)^2 + 1,4 = (1,2)^2; \quad г) \frac{2}{3}(-x^5)^3 \cdot x^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9};$$

$$р) z^2 \cdot z^4 = z^2 \cdot z^3; \quad д) x^4 \cdot x^5 = 8x^6; \quad е) x^3 \cdot x^5 = x \cdot x^2.$$



179. Подайте вираз у вигляді квадрата одночлена:

$$а) 16a^4b^2; \quad б) 0,36x^8y^{12}; \quad в) 0,01a^{18}b^2c^{10};$$

$$г) 361m^6n^{30}; \quad р) \frac{9}{25}a^{26}b^{14}; \quad д) \frac{16}{49}x^{16}y^{22}z^4.$$

180. Подайте вираз у вигляді куба одночлена:

$$а) -8a^6; \quad б) 27x^9y^{15}; \quad в) -0,001a^3b^{12}; \quad г) 0,064x^{18}y^{27};$$

$$р) -\frac{1}{125}a^9b^6c^3; \quad д) 1\,000\,000y^{21}x^{30}.$$

181. Замініть зірочку одночленом так, щоб утворилася правильна рівність:

$$а) * \cdot \frac{1}{3}x^4y^6 = -0,1x^4y^6; \quad б) -8a^2b^2 \cdot * = 4a^5b^7;$$

$$в) 0,6a^2b \cdot * = 6a^2b^3; \quad г) 5m^2n^3 \cdot * = -m^5n^6.$$



182. Відомо, що $3x^2y^3 = 7$. Знайдіть значення виразу:

$$а) 1,8x^2y^3; \quad б) 5x^2y^3; \quad в) -9x^4y^6; \quad г) 6\frac{3}{7}x^6y^9.$$

183. Відомо, що $2b^2c = 5$, $(a^2b)^2 = 2$. Знайдіть значення виразу:

$$а) (-2a^2b^2c)^3 \cdot (3ab^2)^2; \quad б) (-0,5a^2b^4)^2 \cdot (2a^2bc)^3 \cdot a^2b.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

184. Знайдіть:

а) суму довжин усіх ребер куба, якщо вона більша за периметр його грані на 18 см;

б) площу поверхні та об'єм цього куба.

185. У саду росли яблуні та вишні, причому яблуні становили 40% усіх дерев. Вишень було на 64 більше, ніж яблунь. Скільки дерев росло в саду? Скільки серед них було вишень? Скільки — яблунь?

186. Розв'яжіть рівняння:

$$а) 2x - 3(x + 1) = 0; \quad б) 2x + 3 = 3(x + 1) - x;$$

$$в) 7(2x - 5) + 3 = 45; \quad г) 9(x + 2) - 3x = 6(x + 3).$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**Варіант I**

1°. Обчисліть: а) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; б) $1,7^2 - 8 \cdot 0,5^3$.

2°. Піднесіть до квадрата вираз $0,3ax^3$.

3°. Спростіть вираз: $(-2ac^2)^2 \cdot (0,5a^2x)^3$.

4°. Доведіть тотожність: $4(7x - 1) + 3x = 31x - 4$.

5°. Запишіть число 27 500 000 000 у стандартному вигляді.

Варіант II

1°. Обчисліть: а) $\left(-\frac{3}{4}\right)^3$; б) $2,1^2 - 8 \cdot 0,5^4$.

2°. Піднесіть до квадрата одночлен $-5cz^3$.

3°. Спростіть вираз: $(3am^2)^3 \cdot \left(-\frac{2}{3}xm^4\right)^2$.

4°. Доведіть тотожність: $5 - x + 3(3x - 4) = 8x - 7$.

5°. Запишіть число 17 770 000 000 у стандартному вигляді.

Варіант III

1°. Обчисліть: а) $\left(-\frac{4}{5}\right)^3$; б) $3,7^2 - 4 \cdot 0,5^3$.

2°. Піднесіть до куба одночлен $-1,2ac^2$.

3°. Спростіть вираз: $(-0,5ac^2)^2 \cdot (4a^2x)^3$.

4°. Доведіть тотожність: $5x - 2(x - 4) = 3x + 8$.

5°. Запишіть число 35 000 000 000 у стандартному вигляді.

Варіант IV

1°. Обчисліть: а) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$; б) $2,3^2 - 27 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$.

2°. Піднесіть до куба одночлен $-0,8x^2y$.

3°. Спростіть вираз: $(-0,4x^3)^2 \cdot (-10ax^2)^3$.

4°. Доведіть тотожність: $9x - 2(2x + 6) = 5x - 12$.

5°. Запишіть число 98 790 000 000 у стандартному вигляді.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ**Тестові завдання № 1**

1. Подайте у вигляді степеня число 0,0009:
а) $0,3^3$; б) $0,3^2$; в) $0,03^2$; г) $0,03^3$.
2. Подайте у вигляді степеня одночлен $625x^8$:
а) $(5x^2)^8$; б) $(5x^2)^4$; в) $(5x)^4$; г) $(5x)^8$.
3. Який вираз тотожний виразу ax^2 :
а) $a \cdot x(-x)$; б) $a \cdot x + ax$; в) $a(-x)(-x)$; г) $ax \cdot ax$?
4. При якому m справедлива рівність $a^{16}a^m = a^{32}$:
а) 14; б) 2; в) 1; г) 16?
5. При якому p справедлива рівність $(c^3)^p = c^{12}$:
а) 1; б) 0; в) 2; г) 4?
6. Яке з рівнянь не має розв'язків:
а) $x^2 = x^6$; б) $x \cdot x^3 = -1$; в) $0 \cdot x^3 = 0$; г) $x^5 \cdot x^3 = 1$?
7. При якому значенні d вирази $9(x-3) - 2(3x+5)$ і $dx - 37$ є тотожними:
а) -3; б) 3; в) -4; г) 4?
8. Запишіть суму квадратів чисел x і y :
а) $x^2 + y^2$; б) $(x+y)^2$; в) $2x + 2y$; г) $x^2 \cdot y^2$.
9. Запишіть у стандартному вигляді число 24000 000000:
а) $24 \cdot 10^9$; б) $2,4 \cdot 10^9$; в) $2,4 \cdot 10^{10}$; г) $0,24 \cdot 10^{10}$.
10. Знайдіть значення виразу $x^4 - 3x^2 + 4$, якщо $x = 2$:
а) 6; б) 7; в) 8; г) 9.

Типові завдання до контрольної роботи № 1

1°. Піднесіть до степеня:

а) 5^3 ; б) $(0,2)^4$; в) $(-1)^5$.

2°. Знайдіть значення виразу:

а) $0,5a^3 - 3,9$, якщо $a = 2$; б) $3m^2 - 82$, якщо $m = -5$.

3°. Подайте у вигляді одночлена стандартного вигляду вираз:

а) $6xy \cdot 0,5ax$; б) $a^2 \cdot 4a^2x$.

4°. Піднесіть до квадрата та куба одночлен:

а) $-a^3b^2c^5$; б) $1\frac{2}{3}m^2n$.

5°. Обчисліть:

а) $18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^3$; б) $2,4^2 - 1,6^2$; в) $\frac{15^4}{3^3 \cdot 5^5}$.

6°. Спростіть вираз:

а) $\left(\frac{1}{2}ab^3\right) \cdot (-6a^2b)$; б) $(-0,2m^2n)^2 \cdot (-5mn^2)$.

7°. Розв'яжіть рівняння:

а) $2x^2 \cdot x = 2$; б) $4x^3 \cdot x^2 = 0$; в) $3x^4 + 6 = 0$.

8°. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел $2,5 \cdot 10^{10}$ і $1,25 \cdot 10^8$.

9°. Чи є тотожністю рівність:

а) $|x - y| = |y - x|$; б) $|x^2| + 1 = |x^2 + 1|$?

10°. Доведіть, що для будь-якого натурального n значення дробу є натуральним числом:

$$\frac{7^{4n} - 1}{10}$$

§6. МНОГОЧЛЕНИ



У математиці часто доводиться додавати чи віднімати одночлени. Наприклад, $7x + 2a$ — сума, а $7x - 2a$ — різниця одночленів $7x$ і $2a$. Вираз $7x - 2a$ можна вважати також сумою одночленів $7x$ і $-2a$, бо $7x + (-2a) = 7x - 2a$. Вираз $2x^4 - 3x^3 + x^2 - 9x - 2$ — сума одночленів $2x^4$, $-3x^3$, x^2 , $-9x$ і -2 .

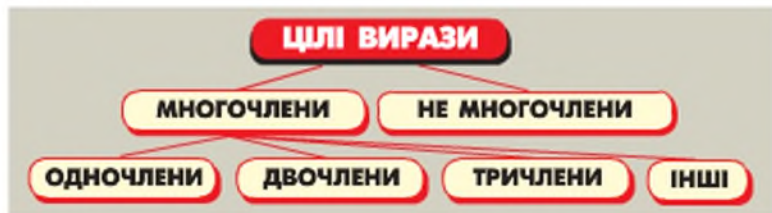
✦ Суму кількох одночленів називають **многочленом**.

Кожний доданок многочлена називають його *членом*. Наприклад, многочлен $2xy - 5x + 6$ містить три члени: $2xy$, $-5x$ і 6 .

✦ Якщо многочлен містить два доданки, його називають **двочленом**, три — **тричленом**. Одночлен також вважають окремим видом многочлена.

Існують цілі вирази, які не є многочленами.

Наприклад, вирази $(a + b)^2$, $2a - (b + x)^3$ цілі, але не є многочленами. Зв'язки між згадуваними виразами ілюструє мал. 9.



Мал. 9

Многочлен може мати *подібні члени*, тобто такі доданки, які відрізняються тільки коефіцієнтами або й зовсім не відрізняються. Наприклад, у тричлені $4x + 7x - 5$ перші два члени — подібні. Звівши їх, дістанемо двочлен $11x - 5$, який тотожно дорівнює даному тричлену.

Вважають, що многочлен записано в стандартному вигляді, якщо всі його члени — одночлени стандартного вигляду і серед них немає подібних.

Наприклад, серед многочленів

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 7, \quad ab + bc - ca, \quad 2ax - 3a \cdot 5x + 8$$

два перші вирази — многочлени стандартного вигляду, а третій — ні. На основі законів дій (див. с. 14) кожен многочлен можна подати в стандартному вигляді, наприклад:

$$2ax - 3a \cdot 5x + 8 = 2ax - 15ax + 8 = -13ax + 8.$$

Члени многочлена можна записувати в різній послідовності. Здебільшого їх упорядковують за спадними показниками тієї чи іншої змінної. Наприклад, упорядкувавши многочлен $5ax^2 + 6x^3 - 4a^2x + a^4$ за спаданням степенів змінної x , одержимо $6x^3 + 5ax^2 - 4a^2x + a^4$. Найвищий показник степеня змінної x дорівнює трьом, тому такий многочлен називають многочленом третього степеня відносно x . Його можна впорядкувати і за спаданням степенів змінної a : $a^4 - 4a^2x + 5ax^2 + 6x^3$. Це многочлен четвертого степеня відносно змінної a .



Хочете знати ще більше?

Чи є многочленом вираз $(a + b)c$? Іноді відповідають на це запитання ствердно, бо, мовляв, згідно з розподільним законом множення даний вираз тотожно дорівнює двочленові $ac + bc$, а отже і він є двочленом. Це неправильно. **В алгебрі вирази прийнято називати відповідно до того, як вони записані, а не до того, як їх можна записати.**

Розглянемо приклад. Вираз $8a$ можна подати у вигляді суми двох, трьох чи будь-якої іншої кількості доданків:

$$8a = 3a + 5a, \quad 8a = a + 3a + 4a, \quad 8a = a + a + a + a + 4a.$$

Якщо, виходячи з цього, вираз $8a$ називати і одночленом, і двочленом, і тричленом тощо, то це буде дуже незручно. Тому в алгебрі домовилися вирази називати так, як вони записані, а не так, як їх можна записати, виконавши ті чи інші тотожні перетворення.

Отже, вираз $(a + b)c$ не є ні одночленом, ні многочленом.

Перевірте себе

1. Що таке многочлен?
2. Наведіть приклади двочлена, тричлена, чотиричлена.
3. Які члени многочлена називають подібними?
4. Чи можна одночлен вважати видом многочлена?
5. Коли говорять, що многочлен записано в стандартному вигляді?

✓ Виконаємо разом!

1. Запишіть многочлен у стандартному вигляді:

- а) $5x + 4x^2 + 3x^3 - 5x^3 - 4x^2 - 3x$;
 б) $2ab + 3a^2 \cdot ab + 7ab^2(-ab) + 3b$.

✓ Розв'язання. а) Зведемо подібні доданки і впорядкуємо за степенями члени многочлена:

$$\underline{5x} + \underline{4x^2} + \underline{3x^3} - \underline{5x^3} - \underline{4x^2} - \underline{3x} = -2x^3 + 2x.$$

б) Зведемо до стандартного вигляду кожний одночлен заданого многочлена і впорядкуємо його члени за степенями змінної a :

$$2ab + 3a^2 \cdot ab + 7ab^2(-ab) + 3b = 2ab + 3a^3b - 7a^2b^3 + 3b = \\ = 3a^3b - 7a^2b^3 + 2ab + 3b.$$

Відповідь. а) $-2x^3 + 2x$; б) $3a^3b - 7a^2b^3 + 2ab + 3b$.

2. Обчисліть значення многочлена

$$5x^5 - 3x^4 + 4x^3 + 7 + 2x^4 - 4x^3 + x^4 - 4x^5 + 2, \text{ якщо } x = 2.$$

✓ Розв'язання. Зведемо многочлен до стандартного вигляду:

$$\underline{5x^5} - \underline{3x^4} + \underline{4x^3} + 7 + \underline{2x^4} - \underline{4x^3} + \underline{x^4} - \underline{4x^5} + 2 = x^5 + 9.$$

Якщо $x = 2$, то $x^5 + 9 = 2^5 + 9 = 32 + 9 = 41$.

Відповідь. 41.

3. Два велосипедисти одночасно виїхали з пунктів A і B назустріч один одному. Знайдіть відстань між A і B , якщо вони їхали зі швидкостями a км/год і b км/год і зустрілися через t год.

✓ Розв'язання. 1-й спосіб. За t год перший велосипедист проїхав at км, а другий — bt км. Отже, вся відстань дорівнює $(at + bt)$ км або $(a + b)t$ км.

2-й спосіб. За 1 год велосипедисти наближались на $(a + b)$ км, до моменту зустрічі через t год вони проїхали $(a + b)t$ км. Це і є шукана відстань.

Відповідь. $(a + b)t$ км.

Виконайте усно

187. Який із виразів є многочленом:

а) $2x - 3$; б) $37at^2$; в) $x^2 - 3x + \frac{5}{x}$; г) $y(x - y)$; ґ) -21 ?

188. Сумою яких одночленів є многочлен:

а) $ax - cx^2 + 3$; б) $-2x^2 + 3x - 7$; в) $-m^2 - n^2$;
г) $2c^3 - 3c^2 - 5c + 1$; ґ) $\frac{1}{5}x^3 - 2 + x^4 + 3x$?

189. Назвіть многочлен стандартного вигляду:

а) $2x + 3a - 5$; б) $a^2 - a + 5a + b$; в) $-x + 3xa - a + a^2$;
г) $m - m - n^2$; ґ) $x^3 + 3x^2 - 3x + 7$; д) $-0,5a - 4a^2 + 3a - 1$.

190. Укажіть степінь многочлена відносно змінної x :

а) $2ax - 3a + 5$; б) $x^3 - x^5 + 4x$; в) $2x^3y - 3x^2y^2 - 1$;
г) $0,1abx + 3,7x^2 - ab$; ґ) $3ax^3 - bx$; д) $m^3x^5 - mx^5$;
е) $0,7ax + 8a^2x + 5$; є) $3x - x^3 + 27px$; ж) $y^5 - a^3y$.

Рівень А

191. Знайдіть суму одночленів:

а) $3xi + bx$; б) $2abc^2 + 3abc^2$; в) $2ix$; г) $7aci + 3ax$;
ґ) $-a^2 + a^2$; д) $14x^2y + 6ac^2$; е) $2ai + 3b$; є) $-a + a^2$;
ж) $3ci - 2y$; з) $-0,5 + 0,5x$; и) $-4xi + 2x$; і) $q^3 + \frac{1}{3}q^3$.

192. Знайдіть різницю одночленів:

а) $2a + 3x$; б) $-m + 5c$; в) $-4p + 2p$;
г) $-4,7xi + 5$; ґ) $-3a^2x + 8a^2x$; д) $a + a$.

193. Зведіть подібні члени:

а) $4x^2 + x - 5x^2 - 12$; б) $-6ab + 2a^2 + b^2 - ab$;
в) $8a - 10ab + 3a$; г) $-0,5x^2 - y^2 + 2,2x^2 + 0,8y$;
ґ) $2a^2b - b^2a + 7ab^2$; д) $\frac{2}{3}xy^3 - \frac{3}{5}x^3y - 1\frac{1}{3}xy^3 + 2x^3y$.



194. Виконайте зведення подібних членів:

а) $4x^2 + 2x - 7x^2 - 9x^3 - 2x$; б) $3a^4 - 12 + 13a^2 + 5 - a^2 + 8a^4$;
в) $27m^5 - 17m^3 - 7 + 10m^3 - 30m^5$;
г) $y^4 - 2y^3 + 2 + 5y^3 - 2y - 14 + 7y^4$.

195. Спростіть вираз:

а) $a - b + 3a + 2b^2$;

б) $7x - y^2 + 5xy - 2x \cdot 3y$;

в) $37 - z^3 + 3t - 35z^3$;

г) $x + x^2 + x^3 - 2x^2 - x$;

р) $\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}a \cdot 3c - ac$;

д) $-105p + 15q + 10p \cdot 10,5$.



196. Упорядкуйте за спаданням степенів x многочлен:

а) $3x^4 - 5x^2 - x^3 - 2x$;

б) $1 - x^2 - px - qx^3$;

в) $ax + bx^2 + cx^3 + dx^4$;

г) $1 - x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x$.

197. Обчисліть значення многочлена:

а) $x^2 - 5x + 6$, якщо $x = 2$; б) $0,7x^2 + 0,3x^2$, якщо $x = 0,5$;

в) $2,8a - 1,8a^2$, якщо $a = -0,2$.

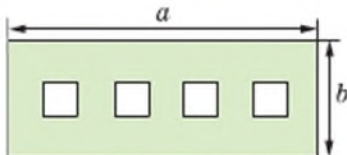


198. Обчисліть значення многочлена:

а) $m^3 - n^2$, якщо $m = 2$, $n = -3$;

б) $s + 2t^2 - 4$, якщо $s = 2,3$, $t = 0,5$.

199. Визначте площу фігури, зображеної на малюнку 10, якщо кожний із чотирьох її отворів — квадрат, сторона якого дорівнює c .



Мал. 10

200. Упорядкуйте многочлен за спаданням степенів a :

а) $3a^2 - 3a + 5 - a^3 + a^4$;

б) $1 + a + a^2 - a^3 - a^5$;

в) $5a^5 - 5 + 2a + a^3 - 3a^2$;

г) $2ac - 3a^2c + c^2 - a^3$.

Рівень Б

201. Обчисліть значення многочлена:

а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, якщо $x = 1,2$;

б) $2c^3 - 5c^2 - c + 7$, якщо $c = -2,1$;

в) $3a^2 - 2ax - x^2$, якщо $a = -0,4$ і $x = 1,2$;

г) $0,25n^2 + 0,5m - m^2$, якщо $n = 4,8$ і $m = 2,4$.

202. Запишіть многочлен у стандартному вигляді:

а) $x^3 - 2x^2 + 3x - 5x^2$;

б) $4x - 2x \cdot 3y - 3y - 5xy$;

в) $2,3 - ac + a^2c - 1,3$;

г) $2 - c^2 + c^3 - 2c^3 + c^3 \cdot 5$;

р) $2a^2 \cdot 3a^3 + 5a^4 \cdot (-2a)$;

д) $x \cdot 2x^2 + 2x \cdot x^2 - x^2 \cdot x^2$;

е) $3a - 7a(-2a^2)^2 + a^5 + a$;


е) $(2x^3)x + x(-2x)^3 + x^3(-x^2)$.

 203. Запишіть многочлен у стандартному вигляді:

а) $(2a^2)^3 + 4 \cdot 3a^5 - 5a - 9 - 3a^6 + a$;

б) $x^2 + 2x^3 - (3x)^2 - 4x^2 \cdot x^3 + 7 - 2x^3$;

в) $(-5x) \cdot 2x - (x^4)^2 + 6x^2 + 10 + x^3 \cdot 3x^5 - 3x^5$.

 204. Запишіть у вигляді многочлена число, яке має:

а) a тисяч, b сотень, 0 десятків і c одиниць;

б) a десятків тисяч, b сотень, c десятків і 0 одиниць.


205. Запишіть у вигляді двочлена число, яке від ділення на число m :

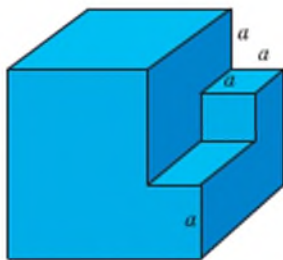
а) дає частку 43 і остачу 2 ; б) дає частку 5 і остачу r .

Запишіть у вигляді многочленів відповіді до задач (206—213).


206. У конкурсі «Левенятко» бере участь a учнів, а в конкурсі «кенгуру» — на b учнів більше. Скільки учнів бере участь в обох конкурсах разом?

207. Один кілограм картоплі коштує m грн, а один кілограм капусти — n грн. Скільки треба заплатити разом за 8 кг картоплі й 4 кг капусти?

 208. З куба, ребро якого дорівнює $3a$, вирізали два прямокутні паралелепіпеди, як показано на малюнку 11. Знайдіть об'єм і площу поверхні многогранника, що залишився.



Мал. 11

 209. Книжка коштує a грн, а 10 зошитів — m грн. Скільки треба заплатити разом за 3 книжки і 5 зошитів?

210. На машину навантажили m мішків пшениці, n мішків гречки й один мішок цукру. Знайдіть масу всього вантажу, якщо маса одного мішка пшениці — a кг, гречки — b кг, а цукру — 50 кг.

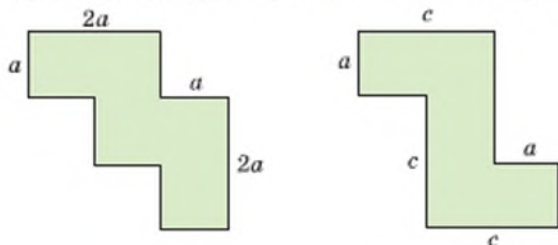
211. Перший поїзд їде зі швидкістю v_1 км/год, а другий — v_2 км/год. На скільки кілометрів вони наблизяться за півгодини, рухаючись назустріч один одному?

212. З міста до села виїхав один велосипедист, а через півгодини назустріч йому із села до міста — другий. Їхали вони зі швидкостями v_1 км/год і v_2 км/год відповідно і зустрілися через півгодини. Знайдіть відстань від міста до села.

213. З міст A і B одночасно в одному напрямку виїхали автомобіль і мотоцикл. Їхали вони зі швидкостями v_1 км/год і v_2 км/год відповідно. Знайдіть відстань від A до B , якщо автомобіль наздогнав мотоцикл через 1,5 год.

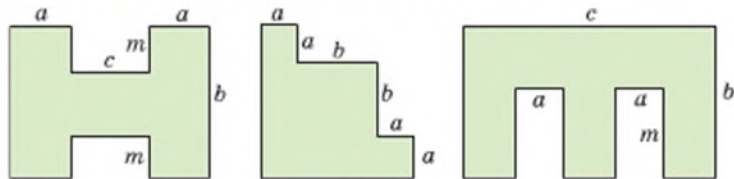


214. Визначте периметри фігур, зображених на малюнку 12.



Мал. 12

215. Визначте площі фігур, зображених на малюнку 13.



Мал. 13



216. Спростіть вираз:

- $-44xy^2 + 16y + x^2y + 50xy^2 - 16y - 7x^2y$;
- $8 - a^2b^2 - 4b^2 + 23a^6 + 5a^2b^2 - 30 + 4a^6$;
- $9a^2 - 2ax^3 + a^4 - a^2x^3 + ax^3 - a^4 + 5ax^3$;
- $-10abc + 2ab + 2bc + 2ac - 7abc - 6ac$.

217. Обчисліть значення многочлена:

- $9x^2 - 4x^2 + 15 - x^5 + 7x^2 - 8x^5$, якщо $x = -7$;
- $2y^{10} - 10y^3 - 3y^{10} - y^4 + y^{10} + 6y^3$, якщо $y = -5$;
- $-6a^3b^2 + a^2b^3 - 10ab + 5a^3b^2 - a^2b^3$, якщо $a = 10$, $b = 0,9$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

218. Обчисліть:

- $2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$;
- $(-1)^2, (-1)^3, (-1)^4, \dots, (-1)^{2n}, (-1)^{2n+1}$;
- $10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6, 10^7, 10^8$;
- $0,1^2, 0,1^3, 0,1^4, 0,1^5, 0,2^2, 0,3^3, 0,4^4$.

219. Дано вирази $3x$ і $5y$. Запишіть: а) різницю їх квадратів; б) квадрат їх різниці; в) суму їх квадратів; г) квадрат їх суми.
220. Пенсіонер одержав путівку до санаторію зі знижкою 90 % і заплатив за неї 360 грн. Яка вартість путівки?

§7. ДОДАВАННЯ І ВІДНІМАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ



Щоб додати два многочлени, тобто знайти суму многочленів, достатньо сполучити їх знаком «плюс».

Наприклад, сумою многочленів $a^2 + ax + x^3$ і $c^2 + cx + x$ є многочлен $a^2 + ax + x^3 + c^2 + cx + x$. Якщо в знайденій сумі є подібні члени, їх слід звести. Так само додають три і більше многочленів.

Приклад. Додайте многочлени

$$x^2 + 2x + 4, \quad 3x^2 - 4 \quad \text{і} \quad 3 - 2x.$$

Розв'язання.

$$x^2 + 2x + 4 + 3x^2 - 4 + 3 - 2x = 4x^2 + 3.$$

Додавання многочленів підпорядковується *переставному* і *сполучному законам*: які б не були многочлени A, B і C , завжди

$$A + B = B + A \quad \text{і} \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

Щоб знайти різницю двох многочленів, треба від першого з них відняти другий.

Виконуючи таке завдання, після першого многочлена пишуть знак «мінус», а другий беруть у дужки.



Розкриваючи дужки, перед якими стоїть знак «мінус», знаки всіх членів, що були в цих дужках, змінюють на протилежні.

Приклад. Знайдіть різницю многочленів

$$ab + c - 4 \text{ і } 2ab + c - 3.$$

Розв'язання. $ab + c - 4 - (2ab + c - 3) =$
 $= ab + c - 4 - 2ab - c + 3 = -ab - 1.$

Отже, і сума, і різниця довільних многочленів — многочлени.



Хочете знати ще більше?

Якою може бути сума двох двочленів? Вона може мати кілька членів, дорівнювати якому-небудь числу, зокрема й нулю. Додайте, наприклад, до двочлена $4c - 5x$ послідовно двочлени $c^2 + 1$, $c^2 + 5x$, $5x - 7$, $5x - 4c$ і переконайтеся в цьому.

Оскільки многочленами вважають і одночлени, і будь-які числа, зокрема й нуль, то сума будь-яких многочленів є многочленом. Тому говорять, що в множині многочленів додавання і віднімання завжди можливі.

Перевірте себе

1. Як додають многочлени?
2. Як віднімають від одного многочлена інший?
3. Чи завжди сума кількох многочленів є многочленом?
4. Сформулюйте правила розкриття дужок.
5. Як ви розумієте твердження, що в множині многочленів дії додавання і віднімання завжди можливі?



Виконаємо разом!

1. Знайдіть суму і різницю многочленів

$$x^2 - 2x + 1 \text{ і } 2x^2 - x.$$

✓ **Розв'язання.** $x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - x = 3x^2 - 3x + 1;$

$$x^2 - 2x + 1 - (2x^2 - x) = x^2 - 2x + 1 - 2x^2 + x = -x^2 - x + 1.$$

Відповідь. $3x^2 - 3x + 1$ і $-x^2 - x + 1.$

2. Доведіть, що сума трьох послідовних натуральних чисел завжди ділиться на 3.

✓ **Доведення.**

Перший спосіб. Позначимо довільне натуральне число буквою n . Тоді наступні за ним натуральні числа будуть $n + 1$ і $n + 2$. Їх сума становитиме:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3.$$

Числа 3 і $3n$ при кожному натуральному n діляться на 3 . Отже, яке не було б натуральне число n , сума $n + (n + 1) + (n + 2)$ завжди ділиться на 3 . А це й вимагалось довести.

Другий спосіб. Якщо n — друге з трьох послідовних цілих чисел, то перше з них — $n - 1$, а третє — $n + 1$. Тоді $(n - 1) + n + (n + 1) = 3n$; число $3n$ ділиться на 3 .

3. Доведіть, що різниця чисел \overline{abc} і \overline{cba} ділиться на 99 .

Запис \overline{abc} означає трицифрове число, яке має a сотень, b десятків і c одиниць.

✓ **Доведення.** Запишемо кожне з чисел у вигляді многочлена, знайдемо їх різницю і зведемо подібні доданки.

$$\overline{abc} = 100a + 10b + c; \quad \overline{cba} = 100c + 10b + a.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \overline{abc} - \overline{cba} &= 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = \\ &= 100a + 10b + c - 100c - 10b - a = 99a - 99c = 99(a - c). \end{aligned}$$

Отже, $\overline{abc} - \overline{cba}$ ділиться на 99 .

Виконайте усно

221. Знайдіть суму і різницю многочленів:

- а) $2x^3 - c$ і $3c$; б) $5ax - 4$ і $-4ax + 4$;
в) $0,5n - p^2$ і $2,5p^2$; г) $-2y + c^2$ і $c + 2y$.

222. Знайдіть суму і різницю виразів:

- а) 0 і $a + c + x$; б) a і $a + c + x$; в) $a + c$ і $a + c - x$.


Рівень А

223. Додайте многочлени:

- а) $3a^2 + 8a - 5$ і $-5a^2 + 2a + 4$; б) $12x^3 - 7x$ і $4x^2 + 3x - 2$;
в) $-7a^3b + 5ab^2 - ab$ і $3a^2b - 4ab + 2a^3b$;
г) $6a^2 - 4b^2 + c^2 + 2ab - 3bc$ і $-10c^2 - 6a^2 - ac$.

224. Знайдіть різницю многочленів:

- а) $2x^3 - x^2 - 3x + 7$ і $x^3 - 3x + 17$;
б) $4x^5 + x - 2x^3 - 7$ і $x^5 - x^2 + 3x - 2$;
в) $8a^2c - 7ac^2 - a + c$ і $7a^2c^2 - a + 4$.


 Спростіть вираз (225—226).

225. а) $7x^2 - 2x + (5 + 11x - 6x^2)$; б) $8ab + 7b - (4ab + 7b - 3)$;


$$\begin{aligned} \text{в)} & 1 - n + n^2 - (3n^2 - 2n + 5) - 7n; \\ \text{г)} & x^2y + xy^2 - (3x^2y - 2xy^2 - 7) + 2x^2y. \end{aligned}$$

- 226.** а) $2a^2 + 3a - 4 + (5a^2 - a + 7)$;
 б) $6x^3 + 8x - 5 - (4x^2 + 8x - 5)$;
 в) $3z^4 - 2z^3 + 12z - 5 - (3z^4 - 2z - 5)$;
 г) $-5c^3 - 2c + 3c^2 - (1 - c - 2c^2 - 4c^3)$;
 ґ) $(2x + y) + (3x - 4y) - (5x + 3y - 1)$;
 д) $8ac - (3a^2 - 2c^2 + 2ac) - (4a^2 + 2c^2)$.

Обчисліть значення виразу (227—228).


-  **227.** а) $c^3 - 2c^2 + 3c - 4 - (c^3 - 3c^2 - 5)$, якщо $c = 2$;
 б) $4x^2 - (-2x^3 + 4x^2 - 5)$, якщо $x = -3$;
 в) $2p - (1 - p^2 - p^3) - (2p + p^2 - p^3)$, якщо $p = \frac{2}{3}$.

- 228.** а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (3x - 3x^2)$, якщо $x = 3$;
 б) $5a^4 - 2a^3 - (4a^4 - 2a^3 + 1)$, якщо $a = -2$;
 в) $a^2 - 2ab + b^2 - (a - b - 3)$, якщо $a = 5$, $b = 4$;
 г) $2 + xy - x^2 - (y^2 - 2xy + 4)$, якщо $x = 0,2$, $y = -0,5$.

-  **229.** При якому значенні x значення многочленів $x^2 - 8x + 9$ і $x^2 + 6x + 4$ дорівнюють одне одному?

- 230.** При якому значенні t значення тричлена $t^2 - 2t + 1$ на 2 більше за значення двочлена $t^2 + 5$?

Розв'яжіть рівняння (231—232).

-  **231.** а) $4x - 5 - (7x + 8) = 2$; б) $9z + 17 - (4z - 5) = 38$;
 в) $24 - (x^2 + 8x - 17) = 5 - 5x - x^2$;
 г) $19 - (3x^2 - 2x) - (6x - x^2) = 7 - 2x^2$.

- 232.** а) $(5x^2 + x^3 - 7) - (2x^3 - 5 + 4x^2) = -(1 + x^3)$;
 б) $(x^3 - 2x^4 + 7) - (3x^3 + 3 - 5x^4) = 6 + 3x^4$;
 в) $0,5y - (4,3y + 2,7) + 0,3y = 46,3$;
 г) $\frac{1}{3}t + \frac{2}{5} + \left(\frac{3}{5} + \frac{2}{3}t\right) = 2 - 3t$;
 ґ) $-2,5x - (3,7 - 4,3x) = 1,7$;
 д) $\frac{2}{5}z = -\left(\frac{2}{5} - z\right) + \frac{3}{5}z + 8$.

Рівень **Б**

233. Знайдіть суму многочленів:

а) $n^3 + 3n^2 + 3n + 1$ і $3 - 3n - n^2 - 2n^2 + n^4$;

б) $-5xy - 4x^2 + y^2$ і $y^3 - 3x^2 + 5xy - y^2 - 2$;

в) $0,7c^4 - 2,8c^2 + 7$ і $2,8c^2 - 0,7c^4 - 7$;

г) $\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 12$ і $\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{3}x + x^4 - 10$;

р) $0,8x^3 + 1,2x^2 - 3$, $4,5x^2 - x - 0,3$ і $0,2x^3 - 1,2x^2 + 3,3$.

234. Знайдіть різницю многочленів:

а) $2x^2 + 3x + 1$ і $x^3 + 3x$; б) $9m^3 + 2m + 5$ і $4m^3 - m + 6$;

в) $\frac{1}{2}a + b^2$ і $3a - \frac{1}{2}b^2 - a^2$; г) $-2xc^2$ і $0,25xc^2 - 2x^2$;

р) $-4a^3b + 3a^2b^2$ і $3a^3 - b^3 + 3a^2b^2 - 4ab^3$;

д) $-\frac{2}{3}xy - \frac{3}{5}x^2y$ і $2\frac{1}{3}xy - x^2y - 2\frac{1}{2}y^2$.

Спростіть вираз (235—237):



235. а) $1 - a + 3a^2 + 4a^3 + (-a^2 - 3a^3)$;

б) $x - 2xy + 3xy^2 + (4xy^3 + 2xy - 3x)$;

в) $(2az - 3z^2) + (-az - z^2) + (-5az)$;

г) $0,7a - 0,7a^2 - 0,7 - (5,7a^2 - 4,7a - 1,7)$;

р) $-4m^2 - (m - n^2) + (3m + 4m^2) - 2n^2$.

236. а) $36cx^2 + 18c^2x - (13c^2x - 16cx^2 - x)$;

б) $-z^3 + 3mz - 2 - (2 + z - 3mz)$;

в) $2\frac{1}{3}az^2 - \left(\frac{2}{3}a^2z - 2\frac{1}{6}az^2 - 1\frac{5}{6}z^3\right)$;

г) $x^2 - x + c - (x^2 + c) - (3c - 5 - x)$;

р) $2\frac{1}{2}an - 3\frac{1}{2}am - \left(\frac{1}{2}an - 5\right) - 1,5an$.

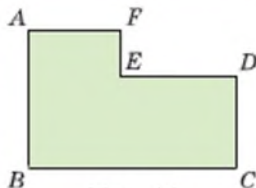
237. а) $\frac{1}{2}ax^2 - \frac{2}{3}a^2x - 2ax^2 - a^2x + \frac{1}{3}a^2x$;

б) $0,3m^2n - 1,7mn^2 - 0,2mn^2 - 1,3m^2n$;

в) $\frac{3}{4}a + \frac{2}{3}ax^3 - \left(-\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}a + 5\right)$;

г) $2\frac{1}{2}ax^2c + 1\frac{1}{3}x^2c - \left(\frac{4}{3}cx^2 + \frac{5}{2}ax^2c\right)$.

238. Периметр многокутника $ABCDEF$ дорівнює $2p$, $AB = a$, $AF = c$, $EF = b$. Знайдіть довжину кожної зі сторін BC , ED і DC (мал. 14).



Мал. 14

239. Доведіть, що вираз при будь-яких значеннях змінної набуває додатного значення:

а) $(x^3 + 3x^2 - 3x) + (x^6 + 4x^3 - 7x) - (5x^3 - 10x - 5)$;
 б) $-((2x^3)^2 - 7x^9) - (5(x^3)^2 - (x^3)^3 - 5) + (10(x^2)^3 - (2x^3)^3)$.

240. Доведіть, що вираз при будь-яких значеннях змінної набуває від'ємного значення:

а) $(5x^5 + 3x^3 - 1) - (x^8 + 4x^5 - 8x^3) - (x^5 + 5x^4 + 11x^3)$;
 б) $(4 - (3x^5)^3) - ((3x^5)^2 - (2x^3)^5) - ((x^2)^5 + 9 + 5x^{15})$.

241. Замініть зірочку многочленом так, щоб утворилась тотожність:

а) $* - (8a^3 - 2a^2 + 7) = 3 - a^2$;
 б) $* + (3x + 8) = -3x^2 + 2x - 15$;
 в) $(2xy - 11x^2 + 10y^2) - * = 5x^2 + 4y^2 - 6$.

242. Який многочлен слід додати до $2a^3 - a^2 - a + 3$, щоб одержати:

а) $3a^3 - 5a^2 - a + 7$; б) $a^2 - 6a + 13$?

243. До якого многочлена слід додати $5x^2 - x + 17$, щоб одержати:

а) $x^3 - 8x^2 + 3x + 9$; б) $-6x^2 + 4x - 23$?

244. Від якого многочлена слід відняти $9c^2 - 6c + 2$, щоб одержати:


а) $5c^3 - 8c^2 - 6c - 8$; б) $a^3 - c^2 + c + 2$?

245. Який многочлен слід відняти від $6y^3 - y^2 + 3y - 1$, щоб одержати:

а) $y^3 + 3y^2 + 3y + 1$; б) $2y^4 + 3y^2 + 3y - 2$?

246. Доведіть тотожність:

а) $(3a^2 + 2b^2 + c^2) - (3c^2 + 2a^2 - b^2) + (-3b^2 + 2c^2 - a^2) = 0$;
 б) $-z^2 - (x^2 + (y^2 - (x^2 + y^2 + z^2) + z^3) + y^2) - x^2 = -x^2 - y^2 - z^2$;
 в) $ab + bc + ac - (abc + ab - (abc - bc - (abc + ac))) = -abc$;
 г) $a^3 - (b^3 - (a^2b - ab^2)) - (-(-a^2b - ab^2) + b^3) - a^3 = 2a^3$.

 247. Доведіть, що при будь-якому натуральному значенні n значення виразу:

- а) $(7n + 21) - (10 - 4n)$ кратне 11;
 б) $8n^2 + 7n - 4 - (3n^2 + 12n - 19)$ кратне 5;
 в) $(12n - 5) - (5n - 9)$ при діленні на 7 дає в остачі 4.

248*. Подайте у вигляді многочлена число:


- а) \overline{abc} ; б) \overline{xux} ; в) $\overline{abc} + \overline{ac}$;
 г) $\overline{xuz} - \overline{xu}$; д) $\overline{abc} + \overline{bca}$; д) $\overline{xuz} - \overline{zux}$.

249*. Доведіть, що:

- а) сума чисел \overline{ab} , \overline{bc} і \overline{ca} кратна 11;
 б) сума чисел \overline{xuz} , \overline{uzx} і \overline{zux} кратна 111;
 в) різниця чисел $\overline{a0b}$ і $\overline{b0a}$ кратна 99;
 г) різниця $(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ca} + \overline{cb} + \overline{ba})$ кратна 18.

250*. Доведіть, що:

- а) сума семи послідовних натуральних чисел завжди ділиться на 7;
 б) сума чотирьох послідовних натуральних чисел завжди при діленні на 4 дає в остачі 2;
 в) сума трьох послідовних парних натуральних чисел завжди ділиться на 6;
 г) сума трьох послідовних непарних натуральних чисел завжди ділиться на 3 і ніколи не ділиться на 6.

 251*. Покажіть, що числа, розташовані так, як на малюнку 15, утворюють магічний квадрат при будь-яких значеннях змінних a і c .

$a + 7c$	a	$a + 5c$
$a + 2c$	$a + 4c$	$a + 6c$
$a + 3c$	$a + 8c$	$a + c$

Мал. 15

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Обчисліть (252—253).

252. а) $-\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{4}\right) - \frac{2}{9} + \left(-\frac{2}{3}\right)^2$;

б) $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}\right) \cdot (-2)^3 - 3\frac{1}{4} : \left(-\frac{1}{2}\right)^2$.

253. а) $6 - (-0,2) : 0,4 + 0,8 - 2,4 : 6;$

б) $-2\frac{3}{5} - 6 : (-1,5) + (3,2 - 0,2 \cdot 6)^2.$

254. Неоднаково вродила на полі пшениця:

на третині із гектара —

центнерів по тридцять,

а на решті —

по півсотні зерна золотого.

То ж по скільки в середньому взяли з поля того?

§ 8. МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНА НА ОДНОЧЛЕН



Помножимо двочлен $a + b$ на одночлен m . За розподільним законом множення:

$$(a + b)m = am + bm.$$

Так само можна помножити довільний многочлен $a + b - c$ на m :

$$(a + b - c)m = am + bm - cm.$$

Кожна з цих рівностей — тотожність. Якщо в будь-яку з них замість якої-небудь змінної написати один і той самий вираз, то знову одержимо тотожність:

$$(2x + b)m = 2xm + bm,$$

$$(a + b - c) \cdot 4a^2 = a \cdot 4a^2 + b \cdot 4a^2 - c \cdot 4a^2 = 4a^3 + 4a^2b - 4a^2c.$$



Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на даний одночлен і результати додати.

За цим правилом можна також множити одночлен на многочлен, бо множники можна міняти місцями.

Приклад.

$$\begin{aligned} 2ax \cdot (3x^2 - x + 4) &= 2ax \cdot 3x^2 - 2ax \cdot x + 2ax \cdot 4 = \\ &= 6ax^3 - 2ax^2 + 8ax. \end{aligned}$$



Хочете знати ще більше?

Для додатних значень a , b , m рівність $(a + b)m = am + bm$ можна проілюструвати геометрично (мал. 16). Площа прямокутника з основою m і висотою $a + b$ дорівнює сумі площ двох прямокутників, основи яких — a і b , а висота — m .

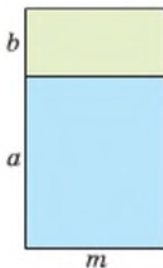
В алгебрі рівність $(a + b)m = am + bm$ вважається правильною не тільки для додатних числа a , b , m , а й для від'ємних, будь-яких інших чисел і навіть виразів. Зокрема, якщо замість змінної b підставити вираз $-c$ або $c - d$, то матимемо:

$$(a - c)m = (a + (-c))m = am + (-c)m = am - cm,$$

$$(a + c - d)m = (a + (c - d))m = am + (c - d)m = am + cm - dm.$$

Отже, $(a - c)m = am - cm$, $(a + c - d)m = am + cm - dm$.

Кожна з цих рівностей — тотожність, тобто рівність правильна для довільних чисел і виразів a , b , c , d , m .



Мал. 16

Перевірте себе

1. Як помножити многочлен на одночлен?
2. Наслідком якого закону є це правило?
3. Сформулюйте розподільний закон множення.
4. Чи правильна тотожність $(a + b)c = c(a + b)$? Чому?
5. Чому дорівнює добуток різниці $a - b$ на c ?



Виконаємо разом!

1. Перемножте вирази $2a + 3b - c$ і $5xy$.
 ✓ Розв'язання. $(2a + 3b - c) \cdot 5xy = 2a \cdot 5xy + 3b \cdot 5xy - c \cdot 5xy = 10axy + 15bxy - 5cxy$.
 Відповідь. $10axy + 15bxy - 5cxy$.
2. Розв'яжіть рівняння: $(3x - 5) \cdot 2x = 6x^2 + 7$.
 ✓ Розв'язання. $3x \cdot 2x - 5 \cdot 2x = 6x^2 + 7$,
 $6x^2 - 10x = 6x^2 + 7$, $-10x = 7$, $x = -0,7$.
 Відповідь. $-0,7$.
3. Один брат старший від іншого на 6 років, а 3 роки тому він був старший від брата у два рази. Скільки років кожному з них?
 ✓ Розв'язання. Якщо молодшому брату x років, то старшому $(x + 6)$ років. Три роки тому молодший мав $(x - 3)$ років,

а старший — $(x + 6 - 3)$ роки. Тоді старшому брату було у два рази більше років, ніж молодшому, отже,

$$x + 3 = 2(x - 3).$$

Розв'яжемо це рівняння:

$$x + 3 = 2x - 6, \quad -x = -9, \quad x = 9.$$

Отже, молодшому братові — 9 років, а старшому — $9 + 6 = 15$.

Відповідь. 9 років і 15 років.

Виконайте усно

255. Подайте у вигляді многочлена добуток:

а) $(x + y)c$, $(x - y)c$, $(2x - y)c$;

б) $(x + y)n$, $(x - y)n$, $(3x - y)n$;

в) $(2 + a)c$, $(2 - a)c$, $(2 - an)c$.

256. Чи тотожні вирази:

а) $2(a - 5)$ і $2a - 10$;

б) $(x - y)5$ і $5x - 5y$;

в) $3c(a - x)$ і $3ac - 3cx$;

г) $(x - 7)(-2)$ і $14 - 2x$?

257. Розв'яжіть рівняння:

а) $x(x - 3) = 0$;

б) $x(x + 5) = 0$;

в) $(y - 12) \cdot 7y = 0$.

Рівень А

Перемножте вирази (258—260).



258. а) $3a + c$ і $2a$;

б) $8x - y$ і $3xy$;

в) $x^2 - x$ і $2x$;

г) $m^3 + 3m$ і m^2 ;

р) $2a + 3$ і $4a$;

д) $3x - y$ і $2xy$.

259. а) $8ac - 1$ і $2ac^2$;

б) $6an - m$ і amn ;

в) $a^2 - 2c$ і $0,5c^2$;

г) $4c^3 - ac$ і $0,5ac^2$;

р) $-x - 3y^2$ і $5x^4y$;

д) $-0,5a - xy^2$ і $-2a^2$.

260. а) $x^3 + 3x - 1$ і x^2 ;

б) $x^2 + mx + m^2$ і $-3mx$;

в) $2 - a + a^2$ і $-\frac{1}{2}ab^2$;

г) $1\frac{2}{3}x - x^2 - \frac{2}{3}$ і $-9xy^2$.



261. Подайте у вигляді многочлена вираз:

а) $(x + 1)x^2$;

б) $a^2(b - c)$;

в) $(n^2 - n)n^3$;

г) $(2a + 3b) \cdot 0,1$;

р) $(-a + ac)c^2$;

д) $-2a(a^2 - 1)$.

262. Спростіть вираз:

а) $2a^3(4a^2 + 3a) - 6a^4$;

б) $7x^2 - 2x(3x - y)$;

в) $2x(x - 1) - x^2$;

г) $(3 - a)a^2 - 3a^2$;

р) $(m - n)mn + 2n^2m$;

д) $(z - 2) \cdot (-3z)$;

е) $-3c^3 + (c - 1)c^2$;

е) $2p - (p^2 + 2)p$.

263. Чи тотожні вирази:

а) $(a - x)a$ і $a^2 - ax$;

б) $(x - y)x^2$ і $x^3 - x^2y$;

в) $(2p^2 + q)q$ і $q^2 + 2p^2q$;

г) $(m - n - 1)mn$ і $m^2n - n^2m$?



264. Обчисліть значення виразу:

а) $(b^2 - 4)b - b^3 + 3b$, якщо $b = -2, 7$;

б) $(a^2 - 1)a - (a - 1)a^2$, якщо $a = 0, 8$;

в) $c + c^2 + c^3 - c(1 + c)$, якщо $c = 0, 5$;

г) $(x - y)x + (x - y)y$, якщо $x = 2$ і $y = 3$.

Розв'яжіть рівняння (265—267).

265. а) $2(x - 3) + 5(x - 2) = 12$;

б) $3(1 - x) - 2(3 - x) = 5$;

в) $3z - 7(2z + 4) = 18$;

г) $2 + 3y - 7(5 - y) = 15$.



266. а) $2z - 15(1 - 2z) = 7z$;

б) $8c - (3 - 7c) = 9c + 2$;

в) $1 - 8(3 - 2y) = 2(1 - y)$;

г) $3z - (z - 5) \cdot 4 = (1 - 5z) \cdot 3$.

267. а) $x^2 - 3x + 1 = x(x + 2)$;

б) $3t - t^2 = t(2 - t)$;

в) $0, 7x + 0, 8 = 2, 6(x - 1, 5)$;

г) $1, 7(a - 3) - a = 2, 3(a + 1)$.

Рівень 5

Перемножте вирази (268—269).



268. а) $3x^2 - 4x + 5$ і $2x^3$;

б) $0, 5t^3 - 1, 2t^2 + t - 0, 2$ і $10t^2$;

в) $5y^3 - 7y^2 + y - 9$ і $5yx$;

г) $\frac{1}{3}z^4 - \frac{2}{5}z^3 - 2z + \frac{3}{5}$ і $-15yz^2$.

269. а) $2ac^3$ і $3a^2 - 4ac + 5c - a$;

б) $-2nx$ і $-3x^3 - 5x^2n + x - 4n^2$;

в) $0, 4a^2c$ і $5a^3 - 10a^2c + 7c^2 - 20$;

г) $-\frac{2}{3}xy^2$ і $6x^4 - 3x^2y - xy^2 - 9xy$.

270. Подайте у вигляді многочлена вираз:

а) $(2ax + 3) \cdot a^2x^3$;

б) $(-0, 7cy^2 - z^2) \cdot 2c^3z$;

в) $0, 3nz \cdot \left(\frac{1}{3}n^2 - \frac{2}{3}z^3\right)$;

г) $-2\frac{1}{3}x^3y \cdot \left(6xy^2 + \frac{3}{7}x^2\right)$.

Спростіть вираз (271—273).

271. а) $3x^2(x^3 - 5x) + 15x^3$; б) $4a^3 - 2a(a - 2a^2 + 1)$;
в) $0,8ac^2 + a^2 - (a - c^2) \cdot a$; г) $x^3 + (x - 5) \cdot (-x^2) + x^2$.

272. а) $(a^2b - 1)a - b(a^3 - 1)$; б) $2c^4 + (c^2 - 3)c^2 - 3c^4$;
в) $-5a^2x - ax^2 + ax(a + x)$; г) $\frac{1}{4}x^2z - \frac{1}{3}z^3 - (x^2 - z^2)z$.

273. а) $2ac + 3a^2c^2 - ac(2 + 3ac) + 7$;
б) $3acx^2 - bcx^2 + a^2 - (3a - b) \cdot cx^2$;
в) $-2 - 3a^2 - a(5a^3 - 3a + 1) + 6a^4$;
г) $3,4ax^3 - 2,5a^3x - 1,5 - ax(x^2 - 2,5a^2)$.

Розв'яжіть рівняння (274—278).

274. а) $3(2x - 5) + 7(3x - 4) = 3x + 77$;
б) $5(4 - 7x) - 3(5x + 1) = x - 85$;
в) $6(2z - 12) - 5(11 - 3z) = 5z + 5$;
г) $4(3y - 13) + 7(15 - 3y) = 9y + 47$.

275. а) $0,8(x - 0,4) + 0,6(x - 0,6) = 1$;
б) $0,4(2x - 3) - 0,5(3x - 0,2) = -2,5$;
в) $-\frac{2}{3}(y - 6) - \frac{3}{4}(2y - 16) = -3\frac{1}{2}$;

г) $4,3 - 2x - 3\left(1,1 + \frac{2}{3}x\right) = x + \frac{2}{3}$.

276. а) $5(8y - 1) - 7(4y + 1) + 8(7 - 4y) = 19$;
б) $7(6z - 1) + 5(7 - 12z) + 3(1 + 2z) = 23$;
в) $6(3y - 4) - 5(y - 3) + 3(2y - 1) = 83$;
г) $9(3x - 4) + 4(x + 2) - 7(2x - 1) = 30$.

277. а) $x(3x - 4) + 5(x - 2) - 3x(x + 1) = 0$;
б) $y^2 - 3(y - 5) + y(4 - y) + 5y = 10y + 7$;
в) $5z(1 - 2z) - 4(z - 3) + 2z(3 + 5z) = 14$;
г) $0,4x - 3,5(2 - 4x) + 0,5x(2x - 1) = x^2 + 132$.

278. а) $\frac{1}{3}(3x - 2) - \frac{1}{3}(9 - 2x) = \frac{1}{2}x$;
б) $\frac{1}{6}(8 - z) - \frac{1}{3}(5 - 4z) = \frac{1}{2}z + 3$;
в) $0,5(9x + 7) - \left(x - \frac{1}{7}x\right) = 36\frac{2}{7}$;

$$г) 2 - \frac{1}{4}y - \frac{1}{2}y + \frac{7}{4} = -\frac{1}{5}(y+17).$$

279. Доведіть, що вираз при будь-яких значеннях змінних набуває одного й того самого значення:


а) $2(a^3 + 6) + 5a(3a - a^2) - 3a^2(5 - a)$;

б) $2x^3(8 - 5x) - 8x(2x^2 + x^3) + 6(3x^4 - 4)$;

в) $6x(2y^2 - (5x + y) \cdot 3y) + 3xy(2y + 30x)$;


г) $3ab + 6((2a + b)a + 5) - 3a(3b + 4a)$.

280. У господарстві було 305 корів і телиць. Після того як кількість корів збільшилась на 15, а телиць — на 90, телиць стало в 4 рази більше, ніж корів. Скільки в господарстві стало корів?


 **281.** Сума двох чисел дорівнює 60. Якщо одне з них помножити на 2, а інше — на 7, то сума добутків дорівнюватиме 70. Знайдіть ці числа.

282. На 315 грн купили кілька зошитів по 6 грн і кілька блокнотів по 13 грн, разом — 35 штук. Скільки купили зошитів і скільки блокнотів?

283. Одна сторона прямокутника в 4 рази більша за іншу. Якщо меншу сторону збільшити на 3 см, то площа прямокутника збільшиться на 24 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника.

 **284.** Одна сторона прямокутника в 3 рази більша за іншу. Якщо більшу сторону зменшити на 5 см, то площа прямокутника зменшиться на 200 см^2 . Знайдіть сторони прямокутника.

285. Одне з двох чисел у 6 разів більше за інше. Якщо менше з них збільшити на 5, то їх добуток збільшиться на 75. Знайдіть ці числа.

 **286.** Три роки тому батько був старший за сина вп'ятеро, а тепер — учетверо. Скільки років кожному?

287. Скільки років учневі, коли відомо, що через 10 років він буде у 5 разів старший, ніж був 10 років тому?

288. В одній бочці — 99 л бензину, а в іншій — 57 л. Із першої щодня беруть по 12 л бензину, а з другої — по 10 л. Через скільки днів у першій бочці бензину стане в 3 рази більше, ніж у другій?

289. Водній посудині — 84 г кислоти, а в іншій — 12 г. Скільки кислоти слід перелити з першої посудини в другу, щоб у першій її стало в два рази більше, ніж у другій?



290. Замість зірочок упишіть такі одночлени, щоб утворилась тотожність:

а) $-4x^2 \cdot (* - *) = 2x^3 + 12x^4$;

б) $5ac \cdot (* + * - *) = 50a^2c - 15ac^2 - ac$;

в) $(-x^2 + *) \cdot (-6x) = * + 42x^5$;

г) $(* + 0,25xy - *) \cdot 4x^2y = 2x^2y^2 + * + 20x^2y^3$;

р) $(2m^3 - 9m) \cdot * = 10m^6 - *$;

д) $(* - xy^3 + 4y^4) = 12x^2y^3 - 4x^3y^4 + *$.

291. Спростіть вираз і знайдіть його значення:

а) $-4x(x^2 - x - 3) + 2x(2x^2 + x - 5)$, якщо $x = -3$;

б) $3a(4a^2 - 3a) - 6(4 + 2a^3) - 5a(2 - 5a)$, якщо $a = \frac{1}{2}$;

в) $(5a(a - 4b) + 12ab) \cdot 2b + 16ab^2$, якщо $a = 3, b = 1,2$;

г) $\frac{1}{2}x(6y(3x + 2y) - 8xy) - 5x^2y$, якщо $x = -\frac{1}{6}, y = 11$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

292. Додатне чи від'ємне значення виразу:

а) $(-5)^7 \cdot (-8)^5$; б) $(-4)^8 \cdot (-13)^{10}$;

в) $(-61)^{12} \cdot (-7)^{17}$; г) $(-9)^3 \cdot 0^{25}$?

293. Який із виразів є одночленом стандартного вигляду:

а) $5a^2 \cdot 3x$; б) $-0,5a^2c$; в) $2a \cdot (-3x)$; г) $(-2y)^3$; р) $2x^2yx$?

294. Із букв, написаних на окремих квадратних картках, складено слово ЦИВІЛІЗАЦІЯ. Потім ці картки перевернуто, перемішано і навмання взято одну. Яка ймовірність того, що на ній написано букву: а) «Ц»; б) «І»; в) «Я»?

295. Перемалюйте в зошит малюнок 17 і заповніть його порожні клітинки так, щоб утворився магічний квадрат.

	3	2	13
5		11	
	6	7	
4			

Мал. 17

§ 9. МНОЖЕННЯ МНОГОЧЛЕНІВ



Помножимо многочлен $a + b - c$ на $x + y$. Якщо позначимо многочлен $x + y$ однією буквою m , то матимемо:

$$\begin{aligned}(a + b - c)(x + y) &= (a + b - c)m = am + bm - cm = \\ &= a(x + y) + b(x + y) - c(x + y) = \\ &= ax + ay + bx + by - cx - cy.\end{aligned}$$

Отже, $(a + b - c)(x + y) = ax + ay + bx + by - cx - cy$.

Якби ми спочатку помножили a на x і y , потім b на x і y , нарешті $-c$ на x і y , тобто кожний член першого многочлена на кожний член другого многочлена, й одержані добутки додали, то мали б той самий результат: $ax + ay + bx + by - cx - cy$.



Щоб помножити многочлен на многочлен, треба кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого многочлена й одержані добутки додати.

Приклад.

$$\begin{aligned}(x^2 - 2x + 3)(a - 5) &= x^2a + x^2(-5) - 2xa - 2x(-5) + 3a + \\ &+ 3(-5) = ax^2 - 5x^2 - 2ax + 10x + 3a - 15.\end{aligned}$$

Множити многочлени можна двома способами, які відповідають таким схемам:

$$(a + b + c + \dots)(x + y + z + \dots) = ax + bx + cx + \dots;$$

$$(a + b + c + \dots)(x + y + z + \dots) = ax + ay + az + \dots$$

Якщо потрібно перемножити більш ніж два многочлени, то спочатку множать перші два з них, потім одержаний результат множать на третій многочлен і т. д. Для прикладу перемножимо многочлени $x - a$, $x + a$ і $x^2 - a^2$.

$$\begin{aligned}(x-a)(x+a) &= x^2 + ax - ax - a^2 = x^2 - a^2, \\ (x^2 - a^2)(x^2 - a^2) &= x^4 - a^2x^2 - a^2x^2 + a^4 = \\ &= x^4 - 2a^2x^2 + a^4.\end{aligned}$$

Отже, $(x-a)(x+a)(x^2-a^2) = x^4 - 2a^2x^2 + a^4$.

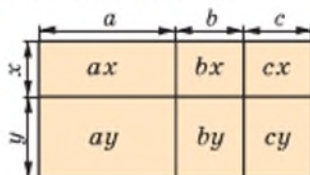


Хочете знати ще більше?

Тотожність $(a+b+c)(x+y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$ для додатних значень змінних відповідає малюнку 18. Адже якщо сторони прямокутника відповідно дорівнюють $a+b+c$ і $x+y$, то його площа становить:

$$(a+b+c)(x+y), \text{ або } ax + bx + cx + ay + by + cy.$$

Отже, ці два вирази тотожно рівні.



Мал. 18

В алгебрі рівність $(a+b+c)(x+y) = ax + bx + cx + ay + by + cy$ вважається правильною за умови, що її букви позначають не тільки додатні числа, а й будь-які числа або вирази.

Зверніть увагу: якщо тричлен помножити на двочлен, то в результаті матимемо шестичлен. Якщо перемножити многочлени, у яких відповідно k і p членів, то одержимо многочлен, що має $k \cdot p$ членів. Тільки після зведення подібних доданків кількість членів добутку може зменшитися. Наприклад,

$$(x^2 + x + 1)(x - 1) = x^3 + x^2 + x - x^2 - x - 1 = x^3 - 1.$$

Перевірте себе

1. Сформулюйте правило множення многочлена на одночлен.
2. Сформулюйте правило множення многочлена на многочлен.
3. Як можна перемножити три многочлени? А чотири?
4. Скільки членів може мати многочлен, що дорівнює добуткові двох двочленів? А двох тричленів?

 **Виконаємо разом!**

1. Перемножте многочлени $2x + 3$ і $a - x$.
 ✓ Розв'язання. $(2x + 3)(a - x) = 2xa + 3a - 2x^2 - 3x$.
2. Спростіть вираз: $4a - 2ax - (2a - 1)(2 - x)$.
 ✓ Розв'язання. $4a - 2ax - (4a - 2 - 2ax + x) = 4a - 2ax - 4a + 2 + 2ax - x = 2 - x$.



 **Виконайте усно**

296. Подайте у вигляді многочлена добуток:
 а) $(1 + y)(1 + x)$; б) $(x + 1)(a + 1)$; в) $(x - 1)(n + 1)$;
 г) $(1 + a)(c + 1)$; р) $(1 - y)(1 + c)$; д) $(2 - a)(c + 1)$.
297. Розкрийте дужки у виразі:
 а) $(x + 1)(x + 1)$; б) $(1 - y)(1 - y)$; в) $(a + c)(a - c)$.

 **Рівень А**

298. Перемножте многочлени:
 а) $a + b$ і $m - n$; б) $x - y$ і $x + y$; в) $2a - 1$ і $a - 2$;
 г) $c + ax$ і $a + x$; р) $1 - c$ і $a + c^2$; д) $-a + 1$ і $2a - 3$.

Подайте у вигляді многочлена (299—302).

-  299. а) $(a - b)(c + d)$; б) $(x - 2)(x - 3)$;
 в) $(2x - 3)(a - b)$; г) $(a^2 - b)(a - b^2)$.
300. а) $(1 - 2xz)(1 + 2xz)$; б) $(0,5 + c^2)(0,5 + c^3)$;
 в) $(a^2 + b)(a^2 + b)$; г) $\left(\frac{1}{2}x + 2\right)\left(\frac{1}{2}x + 2\right)$.
-  301. а) $(2x + 3)(3x - 2)$; б) $(5a - 4)(3a - 2)$;
 в) $(7c - 1)(5 - 6c)$; г) $(-2n + 3)(3n - 2)$.
302. а) $(-a - b)(c + d)$; б) $(-2 + c)(-3 + c)$;
 в) $(x^2 - x + 1)(x + 1)$; г) $(p - 1)(p^2 + p + 1)$;
 р) $(c + z - q)(1 - cq)$; д) $(0,5x - 1,3)(0,5x + 1,3)$.
303. Чи тотожні вирази:
 а) $(a - b)(a + b)$ і $a^2 - b^2$; б) $(x + a)(x + a)$ і $x^2 + 2xa + a^2$;
 в) $(c^2 + c - 1)(c - 1)$ і $c^3 - 1$; г) $c^2 + 1$ і $(c + 1)(c^2 - c + 1)$?
304. Спростіть вираз:
 а) $(x - 1)(x^2 - 2x + 2)$; б) $(1 + a)(a^2 - a + 1)$;

- в) $(m+n)(m^2 - mn + n^2)$; г) $(m-1)(m+1) + 1$;
 р) $(a+2)(a-5) + 3a$; д) $(x-4)(x+5) + 20$;
 е) $(n-2)(n-2) + 4n$; є) $4ab - (a+2b)(a+2b)$.

305. Обчисліть значення виразу:

- а) $(a+b)(a-b) + b^2$, якщо $a = 0,6$ і $b = 0,237$;
 б) $(x+y)(x+y) - x^2 - y^2$, якщо $x = 0,2$ і $y = 5$;
 в) $(a^2 - b)(a^2 + b) - a^4$, якщо $b = 0,2$ і $a = 3,27$;
 г) $-x^2 + y^4 + (x - y^2)(x + y^2)$, якщо $x = 5$ і $y = -7$.

Спростіть вираз (306—307).

- 306.** а) $3x(x-6) + (2x^2 + 14)$; б) $(a-3)c + 3(c-c^2)$;
 в) $(3a+b)(a-b) - (2a^2 - b^2)$; г) $(a-3)(a+3) - 9a^2$.

- 307.** а) $(a-b)(a-3) + 2a(1-a)$; б) $(1-ab)(1+ab) + a^2b^2$;
 в) $(x-y)(x+y) - x(x-3)$; г) $(c^2-1)(c^2+1) - c^4 + 1$.

308. Подайте у вигляді многочлена вираз:

- а) $(a+b)^2$; б) $(x-y)^2$; в) $(2a-x)^2$; г) $(3a+2)^2$.

309. Спростіть вираз:

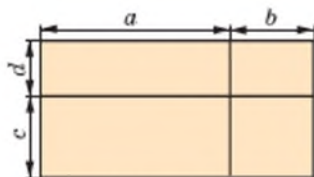
- а) $(b+1)^2 + 2b(3b-1)$; б) $6xy + 3(x-y)^2$.

310. Розв'яжіть рівняння:

- а) $(x-1)(x-3) = x^2$; б) $(y+2)(y-5) = y^2$;
 в) $(2x+1)(x-5) = 2x^2$; г) $3z^2 = (1-z)(1-3z)$.

Рівень Б

- 311.** Користуючись правилом множення многочленів і малюнком 19, доведіть тотожність:
 $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$.
 Яке доведення є більш загальним?



Мал. 19

- 312.** Зобразіть у вигляді прямокутників геометричну модель, яка ілюструвала б множення виразів
 $a + b + c + d$ і $m + n$.


313. Спростіть вираз:

- а) $2a(5-a) - 5(2a+a^2) + 2a^2$;

б) $(x - y)(x + 7) - (y + x)(x + 7) + 7y$;

в) $-(a^2 - 3)(3 + a^2) - (x + 3)^2 + 6x$.

Подайте у вигляді многочлена (314—317).

 314. а) $(a^2 - 2a + 2)(a - 1)$; б) $(0,1x - 1,2y)(0,1x + 1,2y)$;
в) $(2,5c + 7z)(7z - 2,5c)$; г) $(-0,3a - 1,2b)(-0,3a + 1,2b)$.


315. а) $(x^3 + 3x^2 + 2)(x - 5)$; б) $(x + 1)(x^3 - x^2 + x - 1)$;
в) $(4a^2 - 2ab + b^2)(2a + b)$; г) $\left(\frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{3}x + 1\right)\left(\frac{1}{3}x - 1\right)$.

316. а) $(x^3 + 2x^2y - 5xy^2 - 3y^3)(5x - 4y)$;
б) $(a^3 + 3a^2c - 3ac^2 + 4c^3)(2a + 3c)$;
в) $(4a^2 - 3a + 1)(a^2 + 2a + 1)$;
г) $(2x^2 - 5x + 1)(x^2 - 2x - 1)$.

317. а) $\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{3}b + \frac{1}{2}c\right)\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b + \frac{1}{4}c\right)$;
б) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z\right)\left(\frac{1}{3}y - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}z\right)$;
в) $\left(\frac{2}{3}c + \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{4}c - \frac{3}{4}a - \frac{1}{3}\right)$;
г) $\left(1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}y + 1\right)\left(1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{2}y + 1\right)$.

Спростіть вираз (318—320).


318. а) $(a^2 - a + 1)(a + 1) - a^3$; б) $(x^2 + ax + a^2)(x - a) + a^3$;
в) $(c - 5)(c + 2) + 3c + 10$; г) $(x^2 - y)(x - y^2) - y^3 + xy$.

 319. а) $(1 - 2x)(4x^2 + 2x + 1) + 8x^3$;
б) $(9 - 6a + 4a^2)(2a + 3) - 8a^3$;
в) $(2a + 3x)(4a^2 - 6ax + 9x^2) - 27x^3$;
г) $(3 - c^2)(c^4 - 3c^2 + 9) + c^6 - 27$.

320. а) $0,01a^4 - (0,1a^2 + 1)(0,1a^2 - 1)$;
б) $0,008x^3 - (0,2x - 1)(0,04x^2 + 0,2x + 1)$;

$$\text{в) } \frac{4}{9} - \left(\frac{2}{3} - a^3\right) \left(\frac{2}{3} + a^3\right);$$

$$\text{г) } \frac{1}{8}x^3 - \left(\frac{1}{2}x - a^2\right) \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}a^2x + a^4\right).$$

 321. Доведіть тотожність:

$$\text{а) } (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab;$$

$$\text{б) } (x-y)(x+y) = x^2 - y^2.$$

322. Подайте у вигляді многочлена вираз:

$$\text{а) } (2x - 3y)^2; \quad \text{б) } (3ac + b^2)^2; \quad \text{в) } (2a - 1)^3.$$

323. Подайте у вигляді многочлена вираз:

$$\text{а) } (a-1)(a+1)(a^2+1) + 1; \quad \text{б) } (2a-3)^2 + 12a;$$

$$\text{в) } c^4 - (c-1)(c+1)(c^2+1); \quad \text{г) } (a-b)^3 - 3a^2b.$$

324. Доведіть, що значення даного виразу не залежить від значення змінної:


$$\text{а) } (x+5)(x^2 - 2x - 3) - (5x+x^2)(x-2) + 3(x+5);$$

$$\text{б) } (2x^2 - 3x + 6)(x+4) - (x^2 + 4x + 3)(2x-3);$$

$$\text{в) } (2x-4)(3x+2) - (2x-3)(4x+2) + 2x^2;$$

$$\text{г) } (x-3)(x+3)(x^2+9) - (x+1)(x-1)(x^2+1).$$

Розв'яжіть рівняння (325—329).

 325. а) $(x-1)(x+5) = (x-2)(x+3)$;

$$\text{б) } (2x+3)(x-7) = (x+3)(2x+1);$$

$$\text{в) } (3z^2-1)(z-1) = 3z^2(z-1) + 5z + 7;$$


$$\text{г) } (y-2)(y^2+2y+4) = y(y^2-4).$$

326. а) $(0,1-x)(x+0,1) = 2x(0,5-0,5x)$;

$$\text{б) } (y-0,2)(y^2+0,2y+0,04) = y(y^2-8);$$

$$\text{в) } \left(\frac{1}{2}x+2\right) \left(\frac{1}{4}x^2-x+4\right) = \frac{1}{4}x^2 \left(\frac{1}{2}x-2\right);$$

$$\text{г) } -\left(\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\right) \left(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2}\right) + 2\frac{1}{4} = \left(\frac{2}{3}x\right)^2.$$

 327. а) $(2x+1)^2 = 2(x-1)(2x+3)$; б) $(3z-2)^2 = 9(z-2)(z+3)$;

$$\text{в) } (1-2y)^2 = 2(y-2)(2y-3); \quad \text{г) } (x-1)^3 = x^2(x-3) + 5.$$

328. а) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1) = x^4 + x^2 + x$;


б) $(x^3 + x^2 + x + 1)(x - 1) = x^4 + 10x$.

329. а) $0,5c^2 - (0,5c - 1)(c + 2) = 1$;

б) $-(y + 2)(0,3y - 1) = 1 - 0,3y^2$;

в) $\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right) = x^2 - \frac{1}{9}$; г) $\frac{2}{5}x^2 = (x + 1)\left(\frac{2}{5}x + 2\right)$.

330. Дано два добутки: $11 \cdot 44$ і $16 \cdot 32$. На яке число треба збільшити кожний із чотирьох множників, щоб нові добутки дорівнювали один одному?

 331. Дано два добутки: $25 \cdot 51$ і $31 \cdot 40$. На яке число треба зменшити кожний із чотирьох множників, щоб нові добутки дорівнювали один одному?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

332. Знайдіть периметр і площу фігури, зображеної на малюнку 20, якщо $r = 0,8$ м.

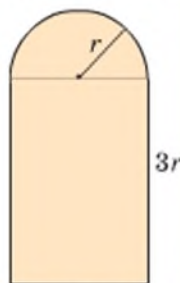
333. Обчисліть:

а) $\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2 - 3^2 - (1 - 3^3) - 1,5^2$;

б) $\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2$;

в) $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} - 3$;

г) $\left(-\frac{3}{7} + \frac{5}{17} + \frac{1}{27}\right) - \left(\frac{3}{7} + \frac{5}{17} + \frac{1}{27}\right)$.



Мал. 20

334. Знайдіть невідомий член пропорції:

а) $2 : x = 7 : 10$; б) $1 : 4 = 3 : (x + 2)$;

в) $6 : 5 = 0,9 : 3x$.

335. Подайте кількома способами одночлен у вигляді добутку двох одночленів стандартного вигляду:

а) $36a^8$; б) $30x^4y^9$; в) $-18a^{10}b^5$;

г) $100x^5y^3$; р) $\frac{6}{16}m^2n^6$; д) $-\frac{1}{3}x^4y^4$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**Варіант I**

1°. Обчисліть значення виразу $3x^2 - x + 2$, якщо $x = -1,3$.

2°. Знайдіть суму, різницю і добуток многочленів $a^2 + a - 3$ і $a^2 - 2$.

3°. Спростіть вираз: $(3 + x)(3 - x) + x^2$.

4°. Розв'яжіть рівняння: $(x - 5)(x + 1) = x^2 - 13$.

Варіант II

1°. Обчисліть значення виразу $a^2 - 3a + 1$, якщо $a = -1,6$.

2°. Знайдіть суму, різницю і добуток многочленів $n^2 - n - 2$ і $n^2 - 1$.

3°. Спростіть вираз: $25 - (5 - c)(5 + c)$.

4°. Розв'яжіть рівняння: $(x - 2)(x + 4) = x^2$.

Варіант III

1°. Обчисліть значення виразу $c^2 - 2c + 3$, якщо $c = -1,2$.

2°. Знайдіть суму, різницю і добуток многочленів $2a^2 - a - 1$ і $a^2 + 2$.

3°. Спростіть вираз: $p^2 - (2 + p)(2 - p)$.

4°. Розв'яжіть рівняння: $x^2 + 3 = (x - 1)(x + 3)$.

Варіант IV

1°. Обчисліть значення виразу $z^2 - 2z + 3$, якщо $z = -2,1$.

2°. Знайдіть суму, різницю і добуток многочленів $c^2 + 2c + 1$ і $c^2 + 3$.

3°. Спростіть вираз: $x^2 - c^2 + (c - x)(c + x)$.

4°. Розв'яжіть рівняння: $x(x - 3) = x^2 - 5x + 4$.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Вирази зі змінними виникли тоді, коли числа почали позначати не тільки цифрами, а й буквами. Зачатки таких позначень трапляються в Діофанта (III ст.), але вони не набули поширення. Не відразу ставали загальнозживаними і знаки дій. Єгиптяни дії додавання і віднімання позначали малюнком, подібним до двох ніг, що йдуть у різних напрямках. Вони писали справа наліво.



Деякі європейські математики XV ст. «плюс» і «мінус» позначали буквами p і m — першими буквами латинських слів *plus* і *minus*. Знаки «+» і «-» увів у 1489 р. Й. Відман, знак множення (\times) — У. Оутред. Знаки множення (\cdot) і ділення ($:$) увів Г. Лейбніц.

Перша книжка з математики, надрукована в Росії, — «Арифметика» Л. Магницького (1703 р.). У ній двочлени, які тепер прийнято писати $2x + 1$ і $3x - 2$, записувались так: $2R + 1$ і $3R - 2$. Квадрат змінної позначався буквою q , коефіцієнт 1 не опускався. Перемножувати такі вирази пропонувалося стовпчиком.

$$\begin{array}{r} 2R + 1 \\ 3R - 2 \\ \hline 6q + 3R \\ \div 4R \div 2 \\ \hline 6q \div 1R \div 2 \end{array}$$

Коли українська математична термінологія ще тільки створювалася (кінець XIX — початок XX ст.), у підручниках з алгебри здебільшого вживалися такі терміни:

вираз — вираження,	доданок — складник,
віднімання — одліч,	дужка — клямра,
додавання — зложення,	коефіцієнт — сучинник і т. д.

Замість сучасних «винести за дужки», «взяти в дужки», «піднести до степеня» говорили «розклямрувати», «заклямрувати», «проступенувати» тощо.

Ще до середини XX ст. для запису виразів використовували не тільки круглі дужки, а й квадратні та фігурні. Писали, наприклад, так:

$$a - 2 \{ b + 3 [a - 4 (a - b)] \}.$$

Сучасні українські математичні термінологія та символіка зручні й добре упорядковані.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Добуток кількох рівних множників називають *степенем*.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ разів}}, n > 1, a^1 = a.$$

Властивості степенів для натуральних m і n :



$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}; \quad a^m : a^n = a^{m-n}; \quad (a^n)^m = a^{nm};$$

$$(ab)^n = a^n b^n; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0.$$

Вирази бувають *числові* та *зі змінними*. Якщо вираз не містить ніяких інших дій, крім додавання, віднімання, множення, піднесення до степеня і ділення, його називають *раціональним виразом*. Раціональний вираз, який не містить дії ділення на вираз зі змінною, називають *цілим виразом*.

Два цілі вирази, відповідні значення яких рівні при будь-яких значеннях змінних, називають *тотожно рівними*, або *тотожними*. Два тотожно рівні вирази, сполучені знаком рівності, утворюють *тотожність*.

Найпростіші вирази — числа, змінні, їх степені або добутки. Їх називають *одночленами*.

Щоб перемножити одночлени, ставлять між ними знак множення й одержаний добуток зводять до одночлена стандартного вигляду. Щоб піднести одночлен до степеня, слід піднести до цього степеня кожний множник одночлена і знайдені степені перемножити.

Суму кількох одночленів називають *многочленом*. Для зручності кожний одночлен також вважають многочленом.

Додаючи многочлени, користуються правилом розкриття дужок.

Щоб помножити многочлен на одночлен, потрібно кожний член многочлена помножити на даний одночлен і результати додати. Щоб помножити многочлен на многочлен, потрібно кожний член першого многочлена помножити на кожний член другого й одержані добутки додати.

Запитання для самоперевірки

1. Наведіть приклади числових виразів і виразів зі змінними.
2. Які вирази називають раціональними?
3. Які вирази називають цілими?
4. Наведіть приклад виразу з модулями.
5. Що таке степінь; основа степеня; показник степеня?
6. Що таке тотожність? Наведіть приклади.
7. Що таке тотожне перетворення виразів?
8. Чи кожна тотожність є рівністю?
9. Чи кожна рівність є тотожністю?
10. Які вирази називають тотожно рівними, або тотожними?
11. Сформулюйте основну властивість степеня.
12. Сформулюйте правило ділення степенів.
13. За яким правилом підносять степінь до степеня?
14. За яким правилом підносять до степеня добутки?
15. Як підносити до степеня дріб?
16. Що таке одночлен?
17. Що таке одночлен стандартного вигляду?
18. Що таке коефіцієнт одночлена?
19. Що називають степенем одночлена?
20. Сформулюйте правило піднесення одночлена до степеня.
21. Що таке многочлен; тричлен; двочлен?
22. Які члени многочлена називають подібними?
23. Як записують многочлени в стандартному вигляді?
24. Як додають многочлени? Як віднімають многочлени?
25. Сформулюйте правило множення многочлена на одночлен.
26. Сформулюйте правило множення многочленів.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 2

1. Який із виразів є многочленом:

а) $(x + y)^2$; б) $x^2 + y^2$; в) $\frac{x^2}{y^2}$; г) $x^2 : y^2$?

2. Запишіть у стандартному вигляді многочлен $3x^2 - 1 - 5x - 4x^2 - 7 + 5x - x^3 + 8$:

а) $x^3 + x^2$; б) $-x^3 + x^2$; в) $-x^3 - x^2$; г) $-x^3$.

3. Знайдіть степінь многочлена

$4,5x^6 + 3x - 2,5x^2 - 6x^8$:

а) 8; б) 1; в) 2; г) 6.

4. Спростіть вираз $(2a + 3b) + (7b - 3a) - (8a - 6b)$:

а) $13a - 4b$; б) $-9a + 16b$; в) $7a - 16b$; г) $-32a + 4b$.

5. Виконайте множення $(x - 1)(x + 1)$:

а) $x^2 - 2x + 1$; б) $x^2 + 1$; в) x^2 ; г) $x^2 - 1$.

6. Обчисліть значення многочлена $0,6x^3 + 0,4x^3$, якщо $x = 0,2$:

а) 0,8; б) 0,08; в) 0,008; г) 0,0008.

7. При якому значенні x різниця многочленів $5x^3 - 9x + 17$ і $5x^3 + 4x + 17$ дорівнює 13:

а) 1; б) -1; в) 2; г) -2?

8. Запишіть у вигляді двочлена число, яке від ділення на число m дає частку 8 і остачу r :

а) $8m + r$; б) $8m - r$; в) $8r - m$; г) $8r + m$.

9. Розв'яжіть рівняння $x(x + 1) - x(x - 2) = 3$:

а) -1; б) 0; в) 1; г) 2.

10. Який многочлен треба додати до многочлена $a^3 - a^2 + 3$, щоб одержати $a^2 + 3$:

а) $a^3 - a^2$; б) $a^2 - a^3$; в) $2a^2 - a^3$; г) $2a^2 - a^2$?

Типові завдання до контрольної роботи № 2

1°. Обчисліть значення виразу $3x^2 - 2x - 6,42$, якщо:

а) $x = 3$; б) $x = -1,2$.

2°. Запишіть у стандартному вигляді многочлен:

$$a^2 + 2a + 2 - a + 5 + 3a^2.$$

3°. Знайдіть суму і різницю многочленів:

а) $n^2 - 2n - 1$ і $n^2 + 3$; б) $3x^2 - 2xy + y^2$ і $5x^2 + 2xy - 2y$.

4°. Знайдіть корені рівняння:

$$y^2 + 3 = y(y + 1).$$

5°. Перемножте вирази:

а) $2x^2$ і $x + y$; б) $a - 2b$ і $a^2 + 2ab + 4b^2$.

6°. Спростіть вираз:

а) $5x^2(x - 3) + 15x^2$;

б) $3a(a^2 - a + 2) + 3a^3 - 6a^2$;

в) $(2x - 1)(1 + 2x) - 4x^2$.

7°. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x - 2)(x + 3) = x^2 - x$;

б) $(3y - 4)(y + 1) = y(3y + 1)$.

8°. Відстань між пристанями A і B човен проходить за течією за 3 год, а проти течії — за 4 год. Знайдіть відстань від A до B , якщо швидкість течії — 3 км/год.

9°. Доведіть, що вираз

$$3ab + 6((2a + b)a + 5) - 3a(3b + 4a)$$

при будь-яких значеннях змінних набуває одного і того самого значення.

10°. Доведіть, що коли a, b, c — цифри, то різниця

$$(\overline{ab} + \overline{ac} + \overline{bc}) - (\overline{ca} + \overline{cb} + \overline{ba})$$

кратна числу 18.

РОЗДІЛ

2

РОЗКЛАДАННЯ МНОГО- ЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

У математиків існує своя мова —
це формули.

С. В. Ковалевська



Розкладання многочленів на множники — операція, обернена до множення многочленів. Як ви вже знаєте, розв'язуючи різні задачі, іноді перемножують два чи більше чисел, а іноді — розкладають дане число на множники. Подібні задачі виникають і в процесі перетворення цілих алгебраїчних виразів.

У цьому розділі ви дізнаєтеся про:

- **винесення спільного множника за дужки;**
- **спосіб групування;**
- **формули скороченого множення;**
- **застосування різних способів розкладання многочленів на множники.**

§10. ВИНЕСЕННЯ СПІЛЬНОГО МНОЖНИКА ЗА ДУЖКИ



Ви вже вмієте розкладати на множники натуральні числа. Наприклад,

$$15 = 3 \cdot 5, 120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5, 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

На множники розкладають і многочлени. *Розкласти многочлен на множники* — це означає замінити його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену. Наприклад, многочлен $x^2 - 1$ розкладається на множники $x + 1$ і $x - 1$, бо тотожність $x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ — правильна.

Один зі способів розкладання многочленів на множники — *винесення спільного множника за дужки*. Розглянемо його.

Кожний член многочлена $ax + ay$ має спільний множник a . На підставі розподільного закону множення $ax + ay = a(x + y)$. Це означає, що даний многочлен $ax + ay$ розкладено на два множники: a і $x + y$.

Інші приклади:

$$4ab - 2ab^2 = 2ab \cdot 2 - 2ab \cdot b = 2ab(2 - b);$$

$$3x + 6x^2 - 9x^3 = 3x \cdot 1 + 3x \cdot 2x - 3x \cdot 3x^2 = 3x(1 + 2x - 3x^2).$$

Щоб переконатися, чи правильно розкладено многочлен на множники, слід помножити одержані множники. Якщо правильно, то в результаті має утворитися даний многочлен.

Іноді доводиться розкласти на множники і такі вирази, які мають спільний многочленний множник. Наприклад, у виразі $a(b-c) + x(b-c)$ спільний множник $b-c$. Його також можна винести за дужки:

$$a(b-c) + x(b-c) = (b-c)(a+x).$$



Хочете знати ще більше?

Один і той самий многочлен можна розкласти на множники по-різному. Наприклад,

$$4x^4 + 2ax^2 = 2(2x^4 + ax^2);$$

$$4x^4 + 2ax^2 = 2x(2x^3 + ax);$$

$$4x^4 + 2ax^2 = 2x^2(2x^2 + a).$$

Як правило, намагаються винести за дужки такий спільний множник, щоб у дужках залишився найпростіший вираз. Тому найчастіше за коефіцієнт спільного множника беруть найбільший спільний дільник (НСД) коефіцієнтів усіх членів даного многочлена або їх модулів. Але не завжди. Усе залежить від того, з якою метою розкладають на множники многочлен.

Нехай, наприклад, треба знайти значення виразу $4x^4 + 2ax^2$ за умови, що $x^2 + \frac{1}{2}a = 0$.


Щоб використати умову, що вправу можна розв'язати так:

$$4x^4 + 2ax^2 = 4x^2 \left(x^2 + \frac{1}{2}a \right) = 4x^2 \cdot 0 = 0.$$

Тут винесено за дужки не $2x^2$, а $4x^2$. Тоді в дужках маємо вираз, значення якого відомо з умови.

Перевірте себе

1. Які вирази називають многочленами?
2. Що означає «розкласти многочлен на множники»?
3. Як можна розкласти на множники многочлен $ax + ay$?
4. Із якого закону дій випливає спосіб розкладання многочлена на множники винесенням за дужки спільного множника?

 **Виконаємо разом!**

1. Розкладіть на множники многочлен $-6a^2 + 24a - 9$.

✓ Розв'язання. $-6a^2 + 24a - 9 = 3(-2a^2 + 8a - 3)$,
або $-6a^2 + 24a - 9 = -3(2a^2 - 8a + 3)$.

2. Розкладіть на множники многочлен

$$15ab^4 + 10a^2b^3 - 5a^3b^2 - 15a^4b.$$

✓ Розв'язання. $15ab^4 + 10a^2b^3 - 5a^3b^2 - 15a^4b =$
 $= 5ab^2 \cdot 3b^2 + 5ab^2 \cdot 2ab - 5ab^2 \cdot a^2 - 5ab^2 \cdot 3a^3 =$
 $= 5ab^2(3b^2 + 2ab - a^2 - 3a^3)$.

3. Доведіть, що число $19^{15} + 19^{14}$ ділиться на 20.

✓ Доведення. $19^{15} + 19^{14} = 19^{14} \cdot (19 + 1) = 19^{14} \cdot 20$.
Останній добуток ділиться на 20, тому на 20 ділиться і дана сума.

4. Розв'яжіть рівняння $5x^4 - x^3 = 0$.

✓ Розв'язання. $5x^4 - x^3 = x^3(5x - 1)$, тому дане рівняння
рівносильне рівнянню $x^3(5x - 1) = 0$.

Добуток двох чисел дорівнює нулю тоді, коли хоч одне з них дорівнює нулю.

Отже, $x^3 = 0$, звідси $x = 0$, або $5x - 1 = 0$, звідси $x = 0,2$.

Відповідь. $x = 0$ і $x = 0,2$.

 **Виконайте уяо**

336. Знайдіть спільний множник многочлена:

а) $cx + cy$;

б) $a^2x - a^2y$;

в) $px + ax$;

г) $2ax + 4ax^2$;

г) $6cy - 9cy^2$;

д) $-ac^2 + c^2$.

337. Розкладіть на множники многочлени з попередньої вправи.

338. Чи правильно розкладено на множники многочлен:

а) $ay - 5y = y(a - 5)$;

б) $cx + x = x(c + x)$;

в) $-9 + 6x = -3(3 + 2x)$;


г) $a^6 - a = a(a^5 - 1)$?


Рівень **A**

339. Розкладіть на прості множники числа: 45, 121, 150, 819.

Винесіть за дужки спільний множник (340—343).

340. а) $xa + xb$; б) $2m + 2p$; в) $cp + tp$;
 г) $ab + 3b^2$; р) $4b^2 - 2ab$; д) $6x^2 - 2x$.


 **341.** а) $2a^2 + 3a$; б) $7n - 14n^2$; в) $5p^3 - 5p$;
 г) $12a + 12b$; р) $13x - 26y$; д) $15ab + 45c$.

 **342.** а) $ax - ay$; б) $m^2x + my$; в) $n^3c - n^2x$;
 г) $3a^2x - 2ax$; р) $4cy^2 - 2c^2y$; д) $10a^2x + 5a^2x^2$.

343. а) $a^3b^3 - 6ab^4$; б) $5y^3z + 20az^3$; в) $-12x - 15x^2$;
 г) $-3a^2b - 6ab^2$; р) $3a^6 + 6a^5 + a^4$; д) $2y - 3y^2 - y^3$;
 е) $6z^2 - 3z^3 + 3z$; є) $x^4 - 4x^3 + 3x^2$.

Розкладіть на множники многочлен (344—346).

344. а) $2ac^2 - 8c^3d + 4acd$; б) $3acx - 6a^2x - 9a^3c^2x$;
 в) $8a^4x + 7a^2x^2 + ax^3$; р) $10n^2c^3 - 15nc^2 - 20nc^3$;
 г) $3x^3 - 6x^2y - 12xy^4$; д) $-2a^2x^3 - a^5cx^4 + 3acx^2$;
 е) $-5c + 12c^2 - c^3$; є) $-6py^2 + 8p^2y - 4p^3z$.

 **345.** а) $0,5x + x^2 - 1,5x^3$; б) $a^2b - 2a^3b^2 + 3ab^3 - ab^2$;
 в) $-m^2x + 4mx^2 + 3m^3$; р) $0,7x^3 - 1,4x^2 + 2,1x - 2,8x^4$.

346. а) $3x(a + b) - 2y(a + b)$; б) $3(2x + 5) + x(5 + 2x)$;
 в) $5a(x - y) + 3(x - y)$; р) $2(m^2 - 2) - x(m^2 - 2)$.

347. Обчисліть значення виразу:

а) $12,3x + 12,3y$, якщо $x = 0,23$, $y = 0,77$;
 б) $2,63x + 2,63y$, якщо $x = 0,16$, $y = 0,84$;
 в) $x^2 - 1,3x$, якщо $x = 11,3$;
 г) $5,24x - x^2$, якщо $x = 4,24$.

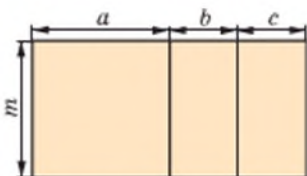
348. Доведіть, що:

а) $16^{17} + 16^{16}$ ділиться на 17;
 б) $5^{12} + 5^{10}$ ділиться на 13;
 в) $49^5 + 7^8$ ділиться на 350.

Рівень Б

349. За малюнком 21 з'ясуйте геометричний зміст тотожності:

$at + bt + ct = (a + b + c)t$ для додатних значень a, b, c і t .



Мал. 21

Розв'яжіть рівняння (350—351).

- 350.** а) $x(x - 3) = 0$; б) $y(5 - y) = 0$; в) $3z(z + 4) = 0$;
 г) $2x(5 - 2x) = 0$; р) $x^2 - 12x = 0$; д) $4x^2 + x = 0$.
- 351.** а) $2x^2 - 2x = 0$; б) $3z^2 - z = 0$; в) $4y^2 = 8y$;
 г) $12x^2 - 6x = 0$; р) $10x^2 + x = 0$; д) $5x^2 - \frac{1}{2}x = 0$;
 е) $1,8x^2 = 3x$; є) $x = x^2$; ж) $1,5x = 5x^2$.

Рівень Б

Розкладіть на множники многочлен (352—359).

- 352.** а) $3a^2b + 2ab - 5a$; б) $7xy^3 + 8x^2y^2 - 9y^4$;
 в) $5ac^2 - ac^3 - 3a^2c$; р) $8az^4 - 7az^3 - 4az^2$.
- 353.** а) $4a^2 - 5ab + a$; б) $3x^2 + 8x^2y - x^2$;
 в) $-7m^2 - m^2z + m^2$; р) $-x^6 - 10x^4y^2 - x^2$.
- 354.** а) $4a^2b^3c^4 - 5ab^3c^2$; б) $9x^3yz^4 + 7x^4y^2z^3$;
 в) $18a^3c^2x - 9ac^2x^3$; р) $15mn^2y + 45m^2n^3$.
- 355.** а) $15a^3mx^4 + 20a^2m^2x^3 - 25a^4mx$;
 б) $32x^4y^3z - 8x^3yz^3 + 16x^2y^3z^4$.
- 356.** а) $a^3 + 3a^2x - 3ax^2 - a^4 + 2a$;
 б) $3x^3 - 2ax^2 + 4a^2x + ax - x^4$.
- 357.** а) $0,8ax^3 + 0,2a^2x^4 + 0,4a^3x^5 + 0,6a^4x^6$;
 б) $1,2a^2b^3c^4 - 0,6a^3b^3c^4 + 1,8a^4b^3c^4$;
 в) $10,5b^2c^4 + 1,5b^3c^2d^2 - 20b^5c^3d$.
- 358.** а) $144x^{20}y^{18} + 36x^{18}y^{10}$; б) $169a^{23}b^{20} - 49a^{20}b^{18}$;
 в) $529a^{15}m^{35} - 46a^{17}b^{30}$; р) $576n^{20}x^{31} + 240n^{17}x^{32}$.

359. а) $3,24a^7c^{19} - 6,48a^{10}c^{15}$; б) $28,9m^{30}x^{15} - 57,8m^{45}x^{13}$;
 в) $\frac{2}{5}a^3x^{10} - \frac{3}{5}a^4x^7$; г) $\frac{6}{7}x^5y^{18} + \frac{5}{7}x^{18}y^5$.

360. Доведіть, що:

а) $25^{25} - 25^{24}$ ділиться на 100;
 б) $81^{31} - 9^{60}$ ділиться на 6480;
 в) $7^{100} + 3 \cdot 7^{99}$ ділиться на 490;
 г) $37^{60} + 63 \cdot 37^{59}$ ділиться на 100.

Розкладіть на множники вираз (361—364).



361. а) $x(a-2) + y(a-2)$; б) $c^2(x+y) - 3(x+y)$;
 в) $a(a^2+1) + 5(a^2+1)$; г) $x^2(a-c) - (a-c)^2$.

362. а) $(x+1)^2 - 2x(x+1)$; б) $8(a^2-3) + (a^2-3)^2$;
 в) $2y(y-6)^3 - 3y(y-6)^2$; г) $5b(a+2c)^5 + 2b^3(a+2c)^3$.

363. а) $x(a-b) + 3y(b-a)$; б) $4(x-y) - 3a(y-x)$;
 в) $3(2x-5) - 2x(5-2x)$; г) $(m-n)^2 - m(n-m)$;
 р) $7(a-4)^2 + (4-a)$; д) $4(b-3)^2 + 5b(3-b)$.



364. а) $(4x-3y)(x+2y) + 2x(x+2y)$;
 б) $5a(3a-b) + (b-3a)(5a+2b)$;
 в) $(a+b)(x-y) + (b-a)(y-x)$;
 г) $(2a+7b)(a-5b) - (8b-3a)(a-5b)$.



365. Винесіть за дужки числовий множник:

а) $(5x+10)^2$; б) $(3-12y)^2$; в) $(4a-4b)^2$;
 г) $(16y+12x)^3$; р) $(15-5y)^3$; д) $(6x-8)^4$.

366. Винесіть за дужки множник:

а) $(ab^2 - a^2)^3$; б) $(2x^3y + 4x^4)^2$; в) $(-6a - 2ab)^3$;
 г) $(-2x^3 + 4x^2)^4$; р) $\left(\frac{1}{2}a^2b + \frac{1}{4}ab^2\right)^2$; д) $(0,5x^3 - 0,3x^5)^2$.

Розв'яжіть рівняння (367—369).

367. а) $0,5z^3 - 1,5z^2 = 0$; б) $3(4x-1)^2 - (1-4x) = 0$.



368. а) $3x^2 + 6(x+2) = 12$; б) $x^2 - 5(x-3) = 15$;
 в) $x^3 - 5(x^2 - 2) = 10$; г) $2z^4 - 7(z^3 - 3) = 21$.

369. а) $6x^3 + 3(x^2 + 7) = 21$; б) $0,7y^2 - 2(y - 1,3) = 2,6$;
 в) $2z^4 - \frac{1}{3}z(6z - 3) = z$; г) $-\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}(2 - x^3) = 1$.

370. Обчисліть:

а) $\frac{3,72 \cdot 2,41 - 2,41 \cdot 2,72}{24,1 \cdot 1,4 + 24,1 \cdot 1,01 - 24,1 \cdot 1,41}$;
 б) $\frac{1,3 \cdot 27 + 1,3 \cdot 63 + 2,3 \cdot 74 + 2,3 \cdot 26}{1,8 \cdot 5,7 + 1,8 \cdot 4,3}$;
 в) $\frac{7,6 \cdot 4,6 - 6,7 \cdot 8,5 + 7,6 \cdot 5,4 - 6,7 \cdot 1,5}{0,4 \cdot 2,3 - 0,4 \cdot 1,3}$;
 г) $-\frac{17,3 \cdot 2,4 - 3,27 \cdot 1,2 - 8,8 \cdot 3,27 - 3,4 \cdot 17,3}{12,5 \cdot 8,7 + 3,2 \cdot 12,5 - 10,9 \cdot 12,5}$.

371. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $6a(x - 2) + 8b(x - 2) + 4c(2 - x)$;
 б) $x^3(2x + 3) + 3(2x^3 + 3x^2) + 3x^3(3 + 2x)$;
 в) $x^3 - 1 + 5a(x^3 - 1) + b(1 - x^3)$;
 г) $(2x - 1)(x^2 + 1) + (x^2 - 1)(2x - 1) + (1 - 2x)(x + 2)$.

372*. Подайте у вигляді добутку:

а) $x^{n+1} + x^n$; б) $a^m - a^{m+2}$; в) $x^{h+1} + x^{h+3}$;
 г) $y^{m+5} - y^m$; г) $4x^{n+6} + 12x^{n+1}$; д) $9a^{h+5} - 3a^{h+2}$;
 е) $8^{2n+1} - 4^{2n+4}$; е) $3^{2n+1} + 9^{n+2}$; ж) $16^{n+5} - (8^{n+2})^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Задачі 373—375 розв'яжіть за допомогою відповідних рівнянь і діаграм.

373. Раніше 3 пиріжки коштували стільки, скільки тепер коштують 2 пиріжки. На скільки відсотків подорожчали пиріжки?

374. На вантажну машину навантажили пшениці в 4 рази більше, ніж на причіп. Скільки центнерів пшениці навантажили на причіп, якщо на ньому було на 12 ц менше, ніж на машині?

375. На вантажну машину навантажили пшениці в 4 рази більше, ніж на причіп. Скільки центнерів пшениці навантажили на машину, якщо на машину разом з причепом навантажили 40 ц?

§11. СПОСІБ ГРУПУВАННЯ



Розкладемо на множники многочлен $ab + ac + xb + xc$. Розіб'ємо його члени на дві групи: $(ab + ac) + (xb + xc)$. Винесемо з першої групи за дужки спільний множник a , із другої — спільний множник x , дістанемо вираз $a(b + c) + x(b + c)$. Доданки цього виразу мають спільний множник $b + c$. Винесемо його за дужки, одержимо $(b + c)(a + x)$.

Указані перетворення можна записати ланцюжком:

$$\begin{aligned} ab + ac + xb + xc &= (ab + ac) + (xb + xc) = \\ &= a(b + c) + x(b + c) = (b + c)(a + x). \end{aligned}$$

Такий спосіб розкладання многочленів на множники називають *способом групування*.

З а у в а ж е н н я. Розкладаючи на множники поданий вище многочлен, можна згрупувати його члени інакше:

$$\begin{aligned} ab + ac + xb + xc &= (ab + xb) + (ac + xc) = \\ &= b(a + x) + c(a + x) = (a + x)(b + c). \end{aligned}$$

Одержали такий самий результат.

Розкладемо на множники многочлен $an + cn + a + c$:

$$an + cn + a + c = n(a + c) + 1(a + c) = (a + c)(n + 1).$$

Записувати суму $a + c$ у вигляді $1(a + c)$ необов'язково, але спочатку, щоб не допускати помилок, можна писати і так.



Хочете знати ще більше?

Щоб скористатися способом групування, іноді доводиться якийсь член даного многочлена подавати у вигляді суми чи різниці одночленів. Щоб розкласти на множники тричлен $x^2 + 5x + 6$, запишемо одночлен $5x$ у вигляді $2x + 3x$:

$$\begin{aligned} x^2 + 5x + 6 &= x^2 + 3x + 2x + 6 = (x^2 + 3x) + (2x + 6) = \\ &= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2). \end{aligned}$$

Подібні перетворення також можна виконувати, використовуючи тотожності, наведені у праві **400**.

Перевірте себе

- Що означає «розкласти многочлен на множники»?
- Які способи розкладання многочленів на множники ви знаєте?
- Розкажіть, як розкладають многочлен на множники способом групування.

✓ Виконаємо разом!

1. Розкладіть на множники многочлен:

а) $3c - x^2 + cx - 3x$; б) $2 - a - x + ac + cx - 2c$.

✓ Розв'язання.

а) $3c - x^2 + cx - 3x = (3c + cx) - (x^2 + 3x) =$
 $= c(3 + x) - x(x + 3) = (3 + x)(c - x);$

б) $2 - a - x + ac + cx - 2c = 2 - a - x - (2c - ac - cx) =$
 $= 2 - a - x - c(2 - a - x) = (2 - a - x)(1 - c).$

Відповідь. а) $(3 + x)(c - x)$; б) $(2 - a - x)(1 - c)$.

2. Розв'яжіть рівняння: $2y^3 - 3y^2 + 10y - 15 = 0$.

✓ Розв'язання.

Розкладемо ліву частину рівняння на множники:

$$2y^3 - 3y^2 + 10y - 15 = 0, y^2(2y - 3) + 5(2y - 3) = 0;$$

$$(2y - 3)(y^2 + 5) = 0, \text{ звідси } 2y - 3 = 0, \text{ або } y^2 + 5 = 0.$$

Коренем першого рівняння є $y = 1,5$, а друге рівняння розв'язків не має, бо $y^2 \neq -5$.

Відповідь. $y = 1,5$.

Виконайте усно

376. Розкладіть на множники вираз:

а) $(a + 1)x + (a + 1)y$; б) $x(2 - c) - y(2 - c)$;

в) $p - n + c(p - n)$; г) $(x + y)^2 + x + y$.

377. Чи правильно виконано перетворення:

$$ax + 7x + a + 7 = (ax + a) + (7x + 7) =$$

$$= a(x + 1) + 7(x + 1) = (x + 1)(a + 7)?$$

378. Розкладаючи на множники многочлен $ax + ay + bx + by + x + y$, учень одержав вираз $(x + y)(a + b)$. Якої помилки він припустився?

Рівень

A

Подайте вираз у вигляді добутку (379—382).

379. а) $x(a + 1) + y(a + 1)$; б) $m(3 - x) - m(3 - x)$;
в) $c + y + a(c + y)$; г) $a(x - y) - x + y$.

380. а) $x + y + a(x + y)$; б) $x(a - b) + a - b$;
в) $2a + c(a - b) - 2b$; г) $5x - z(x + y) + 5y$;
г) $ax - ay - b(y - x)$; д) $n(x + y) - mx - my$;
е) $(x + y)^2 - 4x - 4y$; е) $3x + 6y - (x + 2y)^2$.

381. а) $a(x + y + z) + b(x + y + z)$; б) $a(z - x + 1) + z - x + 1$;
в) $m(a - b - c) + n(a - b - c)$; г) $n(a - b + c) - a + b - c$.



382. а) $a(x + 3) + b(x + 3) + c(x + 3)$;
б) $m(a - z) - n(a - z) + 2(a - z)$;
в) $x(a^2 - 5) + y(a^2 - 5) + a^2 - 5$;
г) $mx - my + n(x - y) + x - y$.

Розкладіть на множники многочлен (383—386).

383. а) $ax - ay + bx - by$; б) $ca - cx + na - nx$;
в) $az - z^2 + ac - cz$; г) $5a - 10 + ac - 2c$.



384. а) $2ax - bx + 10ay - 5by$; б) $10ax - 4ay + 5cx - 2cy$;
в) $3mp + mq - 3np - nq$; г) $ac + bc + a^2 + ab$.

385. а) $x^2 + ax + xy + ay$; б) $3a^3 + 12a^2 - a - 4$;
в) $a^2 - an - 3a + 3n$; г) $y^3 - 3y^5 + 3y^3 - 9$;
г) $4x^2 - 4xz - 5x + 5z$; д) $a^3 + a^2 + a + 1$;
е) $5a^2 - 5ax - 8a + 8x$; е) $x^5 + x^3 - x^2 - 1$.




386. Обчисліть значення виразу:

а) $x^3 - 9x^2 + x - 9$, якщо $x = 19$;
б) $m^2 - mn - 2m + 2n$, якщо $m = 0,35$ і $n = 0,25$.

387. Обчисліть:




а) $20,5 \cdot 17 + 79,5 \cdot 17 + 20,5 \cdot 0,28 + 79,5 \cdot 0,28$;
б) $42,2^2 - 42,2 \cdot 41,2 + 57,8^2 - 57,8 \cdot 56,8$.

Розв'яжіть рівняння (388—389).

-  **388.** а) $x(x - 15) + 3(x - 15) = 0$; б) $y(y - 2) - 7(2 - y) = 0$;
в) $x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0$; г) $x^3 + 4x^2 + 3x + 12 = 0$.
- 389.** а) $2z^3 - 3z^2 + 2z - 3 = 0$; б) $x^3 - 5x^2 + 2x - 10 = 0$;
в) $y^3 + 3y^2 + 5y + 15 = 0$; г) $3x^3 + 9x^2 + x + 3 = 0$.

Рівень 5

Подайте у вигляді добутку вираз (390—396).

-  **390.** а) $4a^2 - 4az - 3a + 3z$; б) $3x^2 - 3xy + 3y^2 - 3xy$;
в) $a + a^2 - a^3 - a^4$; г) $a^3 + a^2b - a^2c - abc$.
- 391.** а) $a^2 - ab - 4a + 4b$; б) $ax + 3 + 3x + a$;
в) $ac + b - bc - a$; г) $3m - bx + mx - 3b$.
-  **392.** а) $ax + ay - az + nx + ny - nz$;
б) $a + b - 2 - ax - bx + 2x$;
в) $2ax + cx - 6ax^2 - 3cx^2 + 2ac + c^2$;
г) $x^2 + 2x - ca - 2c - cx + ax$.
- 393.** а) $az^2 - bz^2 - bz + az - a + b$;
б) $a + b + ax^2 + bx^2 - bx - ax$;
в) $ax^2 + bx^2 + ax - cx^2 + bx - cx$;
г) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx$.
- 394.** а) $2am + 3mx - 7m - 2ac - 3cx + 7c$;
б) $4ax^2 - ax + 5a - 4bx^2 + bx - 5b$;
в) $9c^3x^2 + 2c^3x - c^3 + 9x^2 + 2x - 1$;
г) $4abc^2 - 4ac + 4b + abc^2x - acx + bx$.
-  **395.** а) $x^4 - a^4 + a^3x - ax^3 + c^3x - ac^3$;
б) $a^3 - a^2 + x^3 - x^2 + a^2x + ax^2$;
в) $x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y + x^2z + y^2z$;
г) $a^3 + a + ab^2 - a^2b - b - b^3$.
- 396.** а) $x^3 + x^2y + x^3y - xy^3 - xy^2 - y^3$;
б) $x^2 - x^3 + y - y^3 - xy - x^2y^2$;
в) $0,9ax + 1,2x^2 - 1,2ac - 1,6cx$;
г) $\frac{3}{13}ax^2y - \frac{1}{13}x + \frac{12}{13}a^2xy^2 - \frac{4}{13}ay$.

397. Розкладіть многочлен на множники і виконайте перевірку:

а) $15a^2mx - 20am - 21ax + 28$;

б) $a^2 + 10ab - 20a - 0,1a - b + 2$.



398. Доведіть, що:

а) $2^9 \cdot 3^5 + 2^9 \cdot 3^3 - 2^6 \cdot 3^5 - 2^6 \cdot 3^3$ ділиться на 420;

б) $5^{10} \cdot 7^{10} + 5^{10} \cdot 7^8 - 5^8 \cdot 7^{10} - 5^8 \cdot 7^8$ ділиться на 1200;

в) $2^{11} \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^6 - 2^7 \cdot 3^4 + 2^{11} \cdot 3^4$ ділиться на 150.

399. Доведіть, що:

а) $2^{10} \cdot 3^{12} + 2^8 \cdot 3^{12} + 2^{10} \cdot 3^{10} + 2^8 \cdot 3^{10}$ ділиться на 300;

б) $5^{10} \cdot 3^{15} - 5^8 \cdot 3^{16} + 5^{11} \cdot 3^{12} - 5^9 \cdot 3^{13}$ ділиться на 11;

в) $-7^{10} \cdot 2^{10} + 7^9 \cdot 2^{14} - 7^8 \cdot 2^{10} + 7^7 \cdot 2^{14}$ ділиться на 45.

400. Доведіть тотожність двома способами:

а) $x^2 + (a+b)x + ab = (x+a)(x+b)$;

б) $x^2 - (a+b)x + ab = (x-a)(x-b)$;

в) $x^2 + (a-b)x - ab = (x+a)(x-b)$;

г) $x^2 - (a-b)x - ab = (x-a)(x+b)$.

401*. Користуючись тотожністю із задачі 400, розкладіть на множники:

а) $x^2 + (2+3)x + 2 \cdot 3$; б) $x^2 + 6x + 5$; в) $y^2 + 7y + 12$;

г) $z^2 + 8z + 3 \cdot 5$; г) $x^2 + 3x - 10$; д) $x^2 - x - 6$;

е) $a^2 + 3ab + 2b^2$; е) $2x^2 - 7xy + 3y^2$.

Зробіть перевірку.

Розв'яжіть рівняння (402—403).



402*. а) $x(x+7) - 2(x+7) = 0$; б) $3x(x-1,5) + 6(x-1,5) = 0$;

в) $2x(x^2+4) - 8x^2 - 32 = 0$; г) $y^4 - 3y^3 + y = 3$.

403*. а) $x^3 - 5x^2 + x = 5$; б) $13z - 78 - 2z(z-6) = 0$;

в) $z^5 + z^3 + z - 2z^4 - 2z^2 = 2$;

г) $x^4 + 5x^3 + 6x^2 + x^2 + 5x + 6 = 0$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Обчисліть (404—405).

404. а) $-2\frac{1}{8} + \frac{2}{3}$; б) $3\frac{2}{5} + \left(-\frac{3}{7}\right)$; в) $-4\frac{3}{4} + \left(-5\frac{1}{2}\right)$;

г) $4\frac{1}{2} + \left(-1\frac{1}{3}\right)$; р) $\frac{3}{4} + (-0,5)$; д) $-\frac{3}{5} + 4,2$.

405. а) $-\frac{3}{5} + (-1,8)$; б) $0,7 + \left(-\frac{9}{10}\right)$; в) $\frac{1}{3} + (-2,3)$;

г) $-\frac{2}{3} + (-0,3)$; р) $2,05 + \left(-\frac{1}{8}\right)$; д) $1,5 + \left(-\frac{4}{5}\right)$.

406. Яке із тверджень правильне:

а) якщо $|a| < b$, то $a < b$; б) якщо $a < |b|$, то $a < b$;

в) якщо $|a| < |b|$, то $a < b$?

407. Скільки існує цілих чисел, які задовольняють нерівність $|x| < 5$? Позначте їх на координатній прямій.

§12. КВАДРАТ ДВОЧЛЕНА



Розв'язуючи різні задачі, часто доводиться множити двочлени виду $a + b$ і $a - b$, $a + b$ і $a + b$ та ін. Щоб у таких випадках відразу можна було написати відповіді, корисно запам'ятати певні тотожності, які називають *формулами скороченого множення*. Розглянемо декілька з них.

Помножимо двочлен $a + b$ на $a + b$:

$$(a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2. \text{ Отже,}$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$



Квадрат двочлена дорівнює квадрату першого його члена плюс подвійний добуток першого на другий плюс квадрат другого члена.

Доведена рівність — тотожність, її називають *формулою квадрата двочлена*. Користуючись нею, можна відразу записати:

$$(2x + y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot y + y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2,$$

$$(a - 3c)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot (-3c) + (-3c)^2 = a^2 - 6ac + 9c^2.$$

Проміжні перетворення бажано виконувати усно, тим самим скорочуючи запис:

$$(m + 5a^2b)^2 = m^2 + 10ma^2b + 25a^4b^2.$$

За формулою квадрата двочлена можна підносити до квадрата будь-які двочлени, у тому числі $a - b$, $-a + b$ і $-a - b$:

$$(a - b)^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(-a + b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)b + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

$$(-a - b)^2 = (-a)^2 + 2(-a)(-b) + (-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Запам'ятайте формулу

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Формули квадрата двочлена використовують і в «зворотному напрямі»:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2;$$

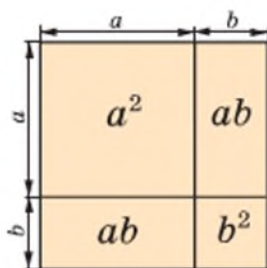
$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$



Хочете знати ще більше?

Формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ часто називають формулою квадрата суми двох виразів, а $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ — формулою квадрата різниці двох виразів.

Для додатних чисел a і b формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ можна довести геометрично, як показано на малюнку 22. Так її доводили ще стародавні греки. Адже площа квадрата зі стороною $a + b$ дорівнює сумі площ квадратів a^2 і b^2 , а також прямокутників ab і ab .



Мал. 22

Існують ще й інші формули скороченого множення:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Перевірте себе

1. Чому дорівнює квадрат двочлена?
2. Чому дорівнює квадрат різниці двох виразів?
3. Чи може бути від'ємним числом квадрат різниці двох чисел? А різниця квадратів двох чисел?

✓ Виконаємо разом!

1. Піднесіть до квадрата двочлен $3x - c$.
 ✓ Розв'язання. $(3x - c)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot c + c^2 = 9x^2 - 6xc + c^2$.
2. Спростіть вираз $(2n + 3)^2 - 4n^2$.
 ✓ Розв'язання. $(2n + 3)^2 - 4n^2 = 4n^2 + 12n + 9 - 4n^2 = 12n + 9$.
3. Подайте у вигляді многочлена вирази:
 а) $(2 + c)^3$; б) $(m^2 + 2n)^3$.
 ✓ Розв'язання. а) $(2 + c)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot c + 3 \cdot 2 \cdot c^2 + c^3 = 8 + 12c + 6c^2 + c^3$;
 б) $(m^2 + 2n)^3 = (m^2)^3 + 3(m^2)^2 \cdot 2n + 3m^2(2n)^2 + (2n)^3 = m^6 + 6m^4n + 12m^2n^2 + 8n^3$.
4. Подайте вираз у вигляді степеня двочлена:
 а) $1 + 8m + 16m^2$; б) $9a^2c^2 - 60ab^2c + 100b^4$;
 в) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$.
 ✓ Розв'язання. а) $1 + 8m + 16m^2 = (1 + 4m)^2$;
 б) $9a^2c^2 - 60ab^2c + 100b^4 = (3ac - 10b^2)^2$;
 в) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3 = (3x)^3 + 3 \cdot (3x)^2 \cdot (2y) + 3 \cdot (3x) \cdot (2y)^2 + (2y)^3 = (3x + 2y)^3$.

Виконайте усно

408. Якому тричлену тотожно дорівнює вираз:
 а) $(a + x)^2$; б) $(x + 1)^2$; в) $(x - 1)^2$?
409. Піднесіть до квадрата двочлен:
 а) $1 + c$; б) $1 - x$; в) $a - n$; г) $x + 2$.


410. Подайте у вигляді степеня:


- а) $1 + 2a + a^2$; б) $x^2 - 4yx + 4y^2$; в) $16 - 8c + c^2$;
 г) $9z^2 + 12z + 4$; р) $25p^2 + 20px + 4x^2$; д) $y^2 - 14y + 49$.

Рівень А

Піднесіть до квадрата двочлен (411—414).


411. а) $a + c$; б) $x + y$; в) $n + 2$;
 г) $m + 3$; р) $1 + ab$; д) $p + 3q$;
 е) $2x + 4$; є) $3a + b$.

-  412. а) $m + 2$; б) $2a + 5x$; в) $3 + a^2$;
 г) $x - 1$; р) $2c - a$; д) $5 - x^2$;
 е) $1 - ab$; є) $cq - 2p$.

-  413. а) $ax + 5$; б) $a + c^2$; в) $n + 2a$;
 г) $3x + 2y$; р) $5a + 3b$; д) $1 + 2abc$;
 е) $4n + 3c$; є) $-2 + 5ac$.

414. а) $3c - 5$; б) $ab - 2c$; в) $3a - 7c$;
 г) $a^2 - x$; р) $3a - c^3$; д) $2a^2 - 3cx^2$.

Подайте у вигляді многочлена вираз (415—418).

-  415. а) $(m + 2)(m + 2)$; б) $(3 + p)(3 + p)$;
 в) $(2a + b)(2a + b)$; г) $(5 + c)(5 + c)$.

416. а) $\left(n + \frac{1}{2}\right)\left(n + \frac{1}{2}\right)$; б) $(p + 0,1)(p + 0,1)$;
 в) $(2a^3 + 1)(2a^3 + 1)$; г) $(1 + xy)(1 + xy)$.

417. а) $(b + c^3)^2$; б) $(b + 4c^2)^2$; в) $(2m - q^5)^2$;
 г) $\left(\frac{1}{2}c + 2a\right)^2$; р) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{2}p\right)^2$; д) $(4q^2 + 5p)^2$.

418. а) $(3a - 5)(3a - 5)$; б) $(4x^2 - 3y)(4x^2 - 3y)$;
 в) $(1,3x^3 - 1)(1,3x^3 - 1)$; г) $(2,5ac - x^3)(2,5ac - x^3)$.

419. Доведіть тотожність:

- а) $(a - b)^2 = (b - a)^2$; б) $(-a - b)^2 = (a + b)^2$;
 в) $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$; г) $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$.

Подайте тричлен у вигляді квадрата двочлена (420—421).

420. а) $9 - 6x + x^2$; б) $4x^2 + 25y^2 - 20xy$;
 в) $a^8 + 4a^4b + 4b^2$; г) $a^2b^2 + 36c^2 + 12abc$;
 р) $16m^6 + 24m^3 - 9$; д) $40a^2b^2 - 4b^2 - 100a^4b^2$.

421. а) $9a^2 + 6ac + c^2$; б) $x^4 - 10x^2 + 25$;
 в) $4m^2 + 4m + 1$; г) $b^4 - 6b^2 + 9$.

Спростіть вираз (422—423).

422. а) $(x - 3)^2 - x(x - 6)$; б) $(m + 5)^2 - (m - 5)$;
 в) $1 - (2a - 1)^2$; г) $z^2 + 1 - (1 + z)^2$.
423. а) $(x - 2)^2 + (x - 5)(x + 7)$; б) $3(a - 1)^2 + 8a$;
 в) $y(y + 2x) - (x + y)^2$; г) $(b + 4)^2 - (b - 3)^2$.

Розв'яжіть рівняння (424—425).

424. а) $(x - 2)^2 = x^2$; б) $(3y + 5)^2 = 9y^2$;
 в) $(c - 7)^2 = c^2 - 7$; г) $(6 - z)^2 = z^2 + 36$;
 р) $3(x - 2)^2 = 3$; д) $(2x - 1)^2 + 2 = 0$.
425. а) $(x + 7)^2 + x^2 = 0$; б) $-3(x - 5)^2 = -3$;
 в) $(x - 4)^2 = 8x + 16$; г) $(5 - y)^2 = 10y + 25$;
 р) $(1 - 2z)^2 + 4z = 0$; д) $(3 - 5x)^2 = 25x^2$.

Рівень Б

Подайте у вигляді многочлена вираз (426—428).

426. а) $(x + 3y)^2$; б) $(m + 5ab)^2$; в) $(7 + a^2)^2$;
 г) $(2x + y^3)^2$; р) $(3c^2 + y)^2$; д) $(5x^2 - y^3)^2$.
427. а) $(0,2c - p^3)^2$; б) $(1,2 + 2q^3)^2$; в) $(4x^2 - 3y^2)^2$;
 г) $(a^2 - 8c^5)^2$; р) $(a^2 - c)^2$; д) $(-x + y^3)^2$.
428. а) $\left(-\frac{1}{2} - 2c^2\right)^2$; б) $\left(-0,3x^3 + \frac{1}{4}c\right)^2$;
 в) $\left(-\frac{1}{5}c - 0,5a^2\right)^2$; г) $\left(\frac{2}{3}m^3 - 1\frac{1}{2}x\right)^2$.

429. Подайте у вигляді степеня:

- а) $x^2 + 12x + 36$; б) $121 - 22y + y^2$;
 в) $9a^2 - 30ab + 25b^2$; г) $16m^2 + 16mn + 4n^2$;

$$\text{г) } 0,25x^2 - x + 1;$$

$$\text{д) } \frac{1}{36}a^2 + ab + 9b^2.$$



430. Замініть зірочки одночленами, щоб утворилась тотожність:

$$\text{а) } (* + b)^2 = c^2 + 2cb + b^2;$$

$$\text{б) } (a + *)^2 = a^2 + 2at + *;$$

$$\text{в) } (3x - *)^2 = 9x^2 - * + 1;$$

$$\text{г) } (* - 3bx)^2 = * - 6abx + *.$$

431. Знайдіть значення виразу:

$$\text{а) } (a - 5)^2 - a(a + 8), \text{ якщо } a = 0,5;$$

$$\text{б) } (3c + 0,5)^2 - (3c - 0,5)^2, \text{ якщо } c = \frac{1}{9};$$

$$\text{в) } (2x - 5)^2 - 4x^2 - 20x, \text{ якщо } x = 0,25.$$

Спростіть вираз (432—433).



432. а) $(a + 5)^2 - (a - 3)(a + 3) + 10a;$

б) $(2c - 1)^2 - (2c + 7)(2c - 7) + 5c;$

в) $(3a - 2b)^2 - (2a - 3b)^2 + 5b^2;$

г) $(4a^2 + c)^2 + (a^2 - 4c)^2 - 17a^4.$

433. а) $3(2x - y)^2 - 2(3x - y)^2 + 6x^2;$

б) $1,5(ac - 2x^2)^2 - 2,5(x^2 - 2ac)^2;$

в) $11c^2 - (x^2 + 3c)^2 - (3x^2 - c)^2;$

г) $10 - \left(\frac{2}{3}az - 3\right)^2 + \left(3az - \frac{2}{3}\right)^2.$



434. Обчисліть значення виразу:

а) $(2a - 5)^2 - (2a - 5)(2a + 5), \text{ якщо } a = 1,5;$

б) $(6x - 2)(6x + 2) - (6x - 2)^2, \text{ якщо } x = 0,5;$

в) $2(x - 1)^2 + 3(5 - x)^2 + 14x, \text{ якщо } x = 2;$

г) $0,5(2c - 3)^2 + 0,75(c + 4)^2, \text{ якщо } c = 2.$

435. Доведіть тотожність:

а) $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2);$

б) $(2a + b)^2 + (a - 2b)^2 = 5(a^2 + b^2);$

в) $(3a + b)^2 + (a - 3b)^2 = 10(a^2 + b^2).$



436. Знайдіть корінь рівняння (436—438).

а) $(x - 6)^2 = x(x - 8);$

б) $2(3 - x)^2 = x(2x + 6);$

в) $(2x + 5)^2 = 4x^2 + 21;$

г) $(1,2x - 1)^2 = 1,44x^2 - 1,4;$

$$\text{г) } (3x + 8)^2 = (3x - 4)^2; \quad \text{д) } (6x - 5)^2 = 9(2x + 1)^2.$$

437. а) $(x - 5)^2 - x(x + 3) = 12$; б) $(3z + 1)^2 - 9z(z + 6) = -1$;
в) $(0,2y + 3)^2 - (0,2y - 3)^2 = 0,8$;

$$\text{г) } \left(\frac{2}{3}x - 1\right)^2 = \left(\frac{1}{3}x + 1\right)\left(\frac{4}{3}x - 1\right).$$

438. а) $x^2 + 10x + 25 = 0$; б) $4x^2 - 12x + 9 = 0$;


в) $1 + 16x^2 - 8x^2 = 0$; г) $\frac{1}{4}x^2 + 1 + x = 0$;

г) $x - 9 - \frac{1}{36}x^2 = 0$; д) $2x + 25 + 0,04x^2 = 0$.

439. Обчисліть, використовуючи формулу квадрата двочлена:

а) 11^2 ; б) 99^2 ; в) 101^2 ; г) 202^2 ;

г) 52^2 ; д) 61^2 ; е) 79^2 ; є) 81^2 .

 440. При яких значеннях a і b рівність $(a - b)^2 = (a + b)^2$ правильна?

441. Покажіть, що при досить малих значеннях a наближена рівність $(1 + a)^2 = 1 + 2a$ правильна. Користуючись нею, усно знайдіть наближені значення виразів:

а) $(1 + 0,001)^2$; б) $1,003^2$; в) $0,99^2$; г) $0,998^2$.

442*. Використовуючи тотожність $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$, доведіть, що:

а) квадрат суми двох додатних чисел більший за суму їх квадратів;

б) квадрат суми двох довільних чисел не менший від їх подвоєного добутку;

в) якщо сума двох чисел ділиться на 2, то ділиться на 2 і сума їх квадратів;

г) якщо суми двох натуральних різних чисел однакові, то сума їх квадратів буде тим більшою, чим меншим є їх добуток.

443. Доведіть, що квадрат непарного числа, зменшений на 1, ділиться на 8.

444. Доведіть, що сума квадратів трьох послідовних цілих чисел не ділиться на 3.

445. Тотожність $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ доведіть двома різними способами і поясніть її геометричний зміст за малюнком 23.



446. Використовуючи тотожність, наведену в попередній задачі, запишіть у вигляді многочлена вираз:

а) $(x - y + 5)^2$; б) $(x + 2y + 3z)^2$;
в) $(x + y^2 + z^3)^2$.

447. Подайте у вигляді многочлена:

а) $(x^n + 1)^2$; б) $(a^{2m} - 1)^2$;
в) $(a^n + a^m)^2$; г) $(x^{n-1} - x)^2$;

р) $\left(\frac{1}{2}(y^m + y^{2m})\right)^2$; д) $\left(\frac{1}{4}(b^n - 2b^2)\right)^2$.

448. *Задача ал-Кархі (XI ст.).* Якщо $a = mn$, то покажіть, що $\left(\frac{m-n}{2}\right)^2 + a$ і $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2 - a$ — завжди квадрати певних виразів.

- 449*. *Задача Ж. Л. Лагранжа (1736—1813).* Перевірте тотожність:

$$\begin{aligned} & (A^2 + B^2 + C^2)(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2) - (A \cdot A_1 + B \cdot B_1 + C \cdot C_1)^2 = \\ & = (A \cdot B_1 - A_1 \cdot B)^2 + (A \cdot C_1 - A_1 \cdot C)^2 + (B \cdot C_1 - B_1 \cdot C)^2. \end{aligned}$$

450. Доведіть формулу куба двочлена:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3.$$

Користуючись нею, піднесіть до куба двочлен:

а) $x + 3$; б) $4a + c$; в) $1 - ax$;
г) $m^2 + 2ac$; р) $x - y$; д) $\frac{1}{3}c - x^2$.

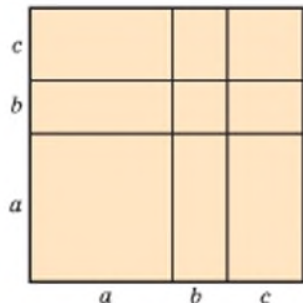


451. Подайте вираз у вигляді многочлена:

а) $(x + 2)^3$; б) $(y - 2)^3$; в) $(2x - 1)^3$;
г) $(3x + 1)^3$; р) $(m - 2n)^3$; д) $(2a + 3)^3$.

452. Подайте многочлен у вигляді степеня:

а) $a^3 - 3a^2 + 3a - 1$; б) $8y^3 - 36y^2 + 54y - 27$;
в) $27x^3 + 108x^2 + 144x + 64$;
г) $a^9 - 15a^6b + 75a^3b^2 - 125b^3$.




Мал. 23

453. Доведіть тотожність:

а) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$;

б) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 + 3ab(a - b)$.

454. Доведіть, що коли сума (різниця) двох натуральних чисел ділиться на 3, то і сума (різниця) їх кубів також ділиться на 3.


 **455*.** Доведіть, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 3.

456. Подайте у вигляді многочлена вираз:

а) $(2a + 3c)^3$; б) $(ab + 0,1c)^3$; в) $(0,2c^3 - 1)^3$;

г) $\left(\frac{1}{2}a^2 + 2c\right)^3$; р) $\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y^2\right)^3$; д) $(-ab^2c^3 - a^2)^3$.

Розв'яжіть рівняння (457—458).

 **457*.** а) $(x - 1)^3 = x^2(x - 3)$;

б) $(x + 1)^3 = x^3 + 3x^2 + 2$.

458*. а) $(x - 2)^3 + 6x^2 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$;

б) $(x + 2)^3 - 6x^2 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

459. Знайдіть суму многочленів (459—460):

а) $3a^2 + 2a + 7$ і $a^3 - 2a^2 + a - 3$;

б) $1,5x - x^2 - x^3$ і $2,5x^4 - 1,5x^3 - 2x + 3$.

460. а) $2ac^2 - 3a^3 - c^2$ і $3a^2c - 3c^3 - a^3 - 2ac^2$;

б) $7,3 + 1,8x - x^3$ і $4x^3 - x^2 - 2,8x - 5,3$.

461. Яка ймовірність того, що при падінні грального кубика випаде: а) парне число очок; б) непарне число очок; в) число очок кратне числу 3; г) число очок кратне числу 5?

462. Автомобіль, швидкість якого дорівнює v км/год, за t год пройшов відстань 300 км. Виразіть формулою залежність v від t . Як змінюватиметься значення v , якщо значення t збільшувати в 2; 3; 4 рази?

§13. РІЗНИЦЯ КВАДРАТІВ



Помножимо суму змінних a і b на їх різницю.

$$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Отже, $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

Ця рівність — тотожність. Словами її читають так:



Добуток суми двох виразів та їх різниці дорівнює різниці квадратів цих виразів.

Користуючись доведеною формулою, можна відразу записати:

$$(2a + 3c)(2a - 3c) = 4a^2 - 9c^2,$$

$$(1 - ax)(1 + ax) = 1 - a^2x^2.$$

Ліву і праву частини доведеної формули можна поміняти місцями. Одержимо *формулу різниці квадратів двох виразів*:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$



Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку їх суми і різниці.

Приклади.

$$\begin{aligned} x^2 - 16 &= x^2 - 4^2 = (x + 4)(x - 4), \\ 25a^2 - c^4 &= (5a)^2 - (c^2)^2 = (5a + c^2)(5a - c^2). \end{aligned}$$

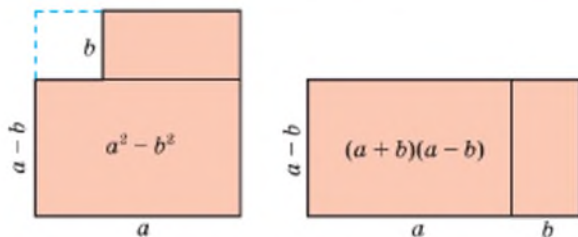
Формула різниці квадратів досить зручна для розкладання многочленів на множники.



Хочете знати ще більше?

Для додатних чисел a і b формулу $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ можна проілюструвати геометрично (мал. 24). Але ця тотожність правильна не тільки для додатних чисел, а й для будь-яких інших чисел і виразів.

Справедливість формули різниці квадратів випливає з правила множення многочленів, а те правило — із законів дій додавання і множення. Отже, закони додавання і множення чисел — це своєрідні аксіоми, наслідками яких є алгебраїчні тотожності.



Мал. 24

Перевірте себе

1. Чому дорівнює добуток суми двох виразів на їх різницю?
2. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
3. Чи можна у формулу різниці квадратів замість змінних підставляти будь-які числа, одночлени чи многочлени?
4. Чи кожену різницю квадратів двох виразів можна розкласти на множники?

✓ Виконаємо разом!

1. Напишіть різницю квадратів і квадрат різниці виразів $2a$ і $x-1$.

✓ Розв'язання. $(2a)^2 - (x-1)^2$ — різниця квадратів;
 $(2a-x+1)^2$ — квадрат різниці даних виразів.

2. Запишіть у вигляді добутку двох двочленів вираз:

а) $a^2 - 4n^2$; б) $9 - 25x^2$; в) $1 - 16a^2c^4$.

✓ Розв'язання. а) $a^2 - 4n^2 = a^2 - (2n)^2 = (a-2n)(a+2n)$;

б) $9 - 25x^2 = 3^2 - (5x)^2 = (3-5x)(3+5x)$;

в) $1 - 16a^2c^4 = 1^2 - (4ac^2)^2 = (1-4ac^2)(1+4ac^2)$.

3. Подайте у вигляді двочлена вираз:

а) $(x+2y)(x-2y)$; б) $(3xy-1)(3xy+1)$;

в) $(2,5a^3+4mn)(2,5a^3-4mn)$.

✓ Розв'язання. а) $(x+2y)(x-2y) = x^2 - (2y)^2 = x^2 - 4y^2$;

б) $(3xy-1)(3xy+1) = (3xy)^2 - 1^2 = 9x^2y^2 - 1$;

в) $(2,5a^3+4mn)(2,5a^3-4mn) = (2,5a^3)^2 - (4mn)^2 = 6,25a^6 - 16m^2n^2$.

Використовуючи формулу різниці квадратів, проміжні обчислення і перетворення можна виконувати усно, а записувати лише кінцевий результат.

Виконайте усно

Подайте у вигляді многочлена вираз (463—464).

463. а) $(x + m)(x - m)$; б) $(x + z)(x - z)$;
 в) $(m + 4)(m - 4)$; г) $(5 + a)(5 - a)$;
 р) $(ab + c)(ab - c)$; д) $(ab - 1)(ab + 1)$.
464. а) $(x - c)(x + c)$; б) $(a + x)(x - a)$;
 в) $(2a - y)(2a + y)$; г) $(z - 3x)(z + 3x)$;
 р) $(4a - 5b)(4a + 5b)$; д) $(7c - xy)(7c + xy)$.
465. На який вираз треба помножити двочлен $6x - p$, щоб дістати $36x^2 - p^2$?
466. На який вираз треба помножити двочлен $1 + 9a^2$, щоб дістати $1 - 81a^4$?
467. Розкладіть на множники двочлен:
 а) $25 - x^2$; б) $a^2 - 1$; в) $m^2 - 4n^2$;
 г) $100a^2 - 9b^2$; р) $1,44x^2 - 0,01y^2$; д) $\frac{25}{36} - \frac{n^2}{4}$.

Рівень А

468. Дано вирази $2a$ і $5x^3$. Запишіть: а) різницю їх квадратів; б) квадрат їх різниці; в) суму їх квадратів; г) квадрат їх суми.



469. Запишіть різницю квадратів і квадрат різниці виразів $2ab$ і $a - b$.

Подайте у вигляді многочлена вираз (470—476).



470. а) $(4a + 1)(4a - 1)$; б) $(2a - c)(2a + c)$;
 в) $(2d + x)(2d - x)$; г) $(a - c^2)(a + c^2)$;
 р) $(8x - y^2)(y^2 + 8x)$; д) $(2a^2 + 3b)(2a^2 - 3b)$.
471. а) $(3p - q)(q + 3p)$; б) $(m - 4c^2)(m + 4c^2)$;
 в) $(x^2 + y^2)(x^2 - y^2)$; г) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2)$;
 р) $(4a - b^3)(4a + b^3)$; д) $(5 + abc)(5 - abc)$.

472. а) $\left(\frac{2}{3}x-1\right)\left(\frac{2}{3}x+1\right)$; б) $\left(\frac{1}{2}c-p\right)\left(\frac{1}{2}c+p\right)$;
 в) $(0,4a-x)(0,4a+x)$; г) $(1,5-m^2)(1,5+m^2)$.
473. а) $2(4x-1)(4x+1)$; б) $k(m^2-2pt)(m^2+2pt)$;
 в) $(2q-c^3n)(2q+c^3n)$; г) $(0,5+2a)(0,5-2a) \cdot 2c^2$.
474. а) $\left(\frac{1}{4}a+4b\right)\left(\frac{1}{4}a-4b\right) \cdot 4a$; б) $\left(\frac{2}{5}m-2n\right)\left(\frac{2}{5}m+2n\right) \cdot 5m$;
 в) $7a^2(1+3a^2b)(1-3a^2b)$; г) $-cq(c+2q)(c-2q)$.
475. а) $(a-2b)(a+2b)+4b^2$; б) $(m^2+3y)(m^2-3y)-m^4$;
 в) $c^2-(c-1)(c+1)$; г) $\left(a-\frac{1}{3}c^2\right)\left(a+\frac{1}{3}c^2\right)+\frac{2}{3}c^4$.
476. а) $(x-3)(x+3)(x^2+9)$; б) $(m+5)(m-5)(m^2+25)$;
 в) $(4a^2+1)(2a+1)(2a-1)$; г) $(9y^2-z^2)(z+3y)(3y-z)$.

477. Перемножте вирази:

- а) $-x-y$ і $-x+y$; б) $-1+3a$ і $-1-3a$;
 в) $-2a+3b$ і $-2a-3b$; г) $-c-7$ і $7-c$;
 р) $-0,5-2x^4$ і $-0,5+2x^4$; д) $3,5-xy$ і $-xy-3,5$.

478. Замініть зірочки одночленом, щоб утворилась тотожність:

- а) $(5m-*)(5m+*)=25m^2-9a^2b^2$;
 б) $(4a-*)(*+3x^2)=16a^2-9x^4$.

479. Подайте у вигляді добутку:

- а) x^2-m^2 ; б) a^2-9 ; в) b^2-c^4 ; г) $1-16z^2$;
 р) $q^2-p^2n^2$; д) $0,04-x^2$; е) $\frac{1}{4}a^2-m^4$; є) $-c^4+9a^2$.

480. Обчисліть:

- а) 35^2-15^2 ; б) 43^2-27^2 ; в) 136^2-64^2 ;
 г) $51,5^2-49,5^2$; р) $21,3^2-1,3^2$; д) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2-\left(1\frac{1}{3}\right)^2$.


481. Обчисліть без калькулятора:

- а) $104 \cdot 96$; б) $1007 \cdot 993$; в) $0,95 \cdot 1,05$.

Рівень **B**

Запишіть у вигляді многочлена (482—484).

482. а) $(2abc - 3a^2)(2abc + 3a^2)$; б) $(5x^3 - 3abc)(5x^3 + 3abc)$;
в) $(4ab^2 + 5ac)(4ab^2 - 5ac)$; г) $(8xz^3 + 3z^2)(3z^2 - 8xz^3)$.

 483. а) $(0,2ax - 1,2ay)(0,2ax + 1,2ay)$;

б) $(-3a + 5x^2y)(3a + 5x^2y)$;

в) $\left(\frac{1}{2}ax - \frac{2}{3}az^2\right)\left(\frac{1}{2}ax + \frac{2}{3}az^2\right)$;

г) $\left(1\frac{1}{2}a - 2\frac{1}{3}c\right)\left(1\frac{1}{2}a + 2\frac{1}{3}c\right)$.

484. а) $(-3x + y^2)(-3x - y^2)$; б) $(-0,5ac + 1,1c^2)(-0,5ac - 1,1c^2)$;

в) $(-2ax^2 - 3a^2x)(-2ax^2 + 3a^2x)$;

г) $\left(-1\frac{1}{2}ac - \frac{1}{3}a^2\right)\left(-1\frac{1}{2}ac + \frac{1}{3}a^2\right)$.


Спростіть вираз (485—487).

485. а) $(0,5a - 0,4b)(0,5a - 0,4b) \cdot 2ab$;

б) $10x^2y(0,2x + 2y)(-0,2x + 2y)$;

в) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot (-9xy)$;

г) $\left(1\frac{1}{2}a^2b + 1\right)\left(1 - 1\frac{1}{2}a^2b\right) \cdot (-4b)$.

 486. а) $(a - 2)(a + 2)(a^2 + 4)$; б) $(ab - c)(ab + c)(a^2b^2 + c^2)$;

в) $(3x^2 + y)(3x^2 - y)(9x^4 + y^2)$;


г) $(16a^4c^2 + 9x^6)(4a^2c - 3x^3)(4a^2c + 3x^3)$.

487. а) $(2x^2 - 1)(2x^2 + 1)(4x^4 + 1) + 1$;

б) $(0,1 - 2c)(0,1 + 2c)(0,01 + 4c^3) + 16c^4$;

в) $16a^4 - (2a - c^2)(2a + c^2)(4a^2 + c^4)$;

г) $\frac{1}{16} - \left(\frac{1}{2} - 3a^2b\right)\left(\frac{1}{2} + 3a^2b\right)\left(\frac{1}{4} + 9a^4b^2\right)$.

 488. На який вираз треба помножити суму $2a^4x^2 + b^3$, щоб дістати різницю $4a^8x^4 - b^6$?

489. На який вираз треба помножити різницю $0,1x^2y - 2xy^2$, щоб дістати різницю $0,01x^4y^2 - 4x^2y^4$?

490. Розкладіть двочлен на множники:

а) $0,04x^6 - 1$; б) $-x^2y^4 + a^6b^8$; в) $a^2b^2c^2 - 121x^6$;
 г) $\frac{4}{81}z^{10} - x^{16}$; р) $-64 + 36m^4n^2$; д) $a^2 - (b + c)^2$.

491. Доведіть, що:

а) $60^2 + 899^2 = 901^2$; б) $65^2 + 2112^2 = 2113^2$.

492. Доведіть, що:

а) $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$;
 б) $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$.



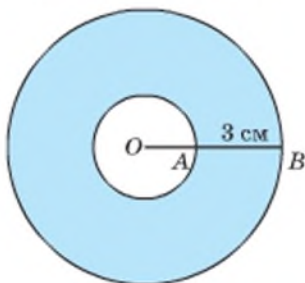
493. Чи правильна рівність

$$36^2 + 37^2 + 38^2 + 39^2 + 40^2 = 41^2 + 42^2 + 43^2?$$

494. Доведіть, що при кожному натуральному значенні n :

- а) число $(n + 5)^2 - n^2$ ділиться на 5;
 б) число $(n + 7)^2 - n^2$ ділиться на 7;
 в) число $(6n + 1)^2 - 1$ ділиться на 12.

495. Площа кільця, зображеного на малюнку 25, дорівнює $18,84 \text{ см}^2$. Знайдіть його зовнішній і внутрішній радіуси, якщо їх різниця дорівнює 3 см.



Мал. 25

Розв'яжіть рівняння (496–497).



496. а) $(x - 2)(x + 2) = x^2 + 8x$; б) $(3 + c)(3 - c) = 3c - c^2$;
 в) $-x^2 + (x + 5)(x - 5) = x$; г) $(y + 4)(y - 4) - y^2 = 18y$.

497. а) $(9 - x)(x + 9) = -x^2 + 3x$; б) $z^2 = 2z - (z + 3)(3 - z)$;
 в) $4x^2 + (3 - 2x)(3 + 2x) = 81x$; г) $9b^2 - (2 - 3b)(2 + 3b) = -4$.



498. Доведіть тотожність Платона (IV ст. до н. е.):

$$(p^2 + 1)^2 - (p^2 - 1)^2 = 4p^2.$$

499. Доведіть тотожність Піфагора (VI ст. до н. е.):

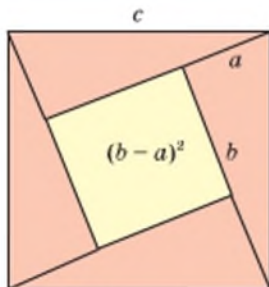
$$(2a^2 + 2a + 1)^2 - (2a^2 + 2a)^2 = (2a + 1)^2.$$

500. Доведіть, що кожне непарне натуральне число, більше за 1, є різницею квадратів двох послідовних натуральних чисел.

501. Доведіть, що сума двох послідовних натуральних чисел дорівнює різниці їх квадратів.

502. Доведіть, що квадрат кожного парного натурального числа дорівнює різниці квадратів двох цілих чисел.

503. Користуючись малюнком 26 і формулою квадрата різниці, доведіть, що в кожному прямокутному трикутнику сума квадратів катетів дорівнює квадрату гіпотенузи (теорема Піфагора).



Мал. 26

504. Користуючись попередньою задачею, знайдіть гіпотенузу прямокутного трикутника, катети якого дорівнюють:
а) 3 см і 4 см; б) 5 м і 12 м; в) 7 дм і 24 дм.

505*. Спростіть вираз:

а) $(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})$;

б) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})$.

Обчисліть (506—507).

506*. $(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)-2^{32}$;

507*. $(3+2)(3^2+2^2)(3^4+2^4)(3^8+2^8)(3^{16}+2^{16})-3^{32}+2^{32}$.

Розв'яжіть рівняння (508—511).

508. а) $(2x-1)(2x+1)=9+4x(x+5)$;

б) $(3z+2)(3z-2)=7z+9(z^2-2)$.

509. $8z^2-(3z+5)(3z-5)=z(5-z)$.

510. $x^2-(1,2x-3)(3+1,2x)=0,2x(1,5-2,2x)$.

511. $(2,5y-2)(2,5y+2)-(1,5y+3)(1,5y-3)=4y(y-5)$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

512. Чи тотожні вирази:

а) $x+2x$ і $3x$; б) $7a^2-a^2$ і $6a^2$; в) $3a+a^2$ і $4a^3$?

513. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них на 40° більший за інший.

514. Знайдіть міри двох суміжних кутів, якщо один із них на 20 % менший, ніж інший.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**Варіант I**

1°. Піднесіть до квадрата двочлен:

а) $x + 3$; б) $a^2 - c$.

2°. Подайте у вигляді многочлена:

а) $(ax + b^2)^2$; б) $(1 + 2c^3)(1 - 2c^3)$.

3°. Спростіть вираз: $12ab - (2a + 3b)^2$.

4°. Розв'яжіть рівняння: $(x - 3)^2 = (x - 5)(x + 4)$.

Варіант II

1°. Піднесіть до квадрата двочлен:

а) $m - 5$; б) $x^2 - z$.

2°. Подайте у вигляді многочлена:

а) $(cx + 2b)^2$; б) $(2 + 3c)(2 - 3c)$.

3°. Спростіть вираз: $30xc - (3x + 5c)^2$.

4°. Розв'яжіть рівняння: $(x - 2)^2 = (x + 3)(x - 4)$.

Варіант III

1°. Піднесіть до квадрата двочлен:

а) $3 - y$; б) $a - x^3$.

2°. Запишіть у вигляді многочлена:

а) $(2x + ab)^2$; б) $(1 + 4a)(1 - 4a)$.

3°. Спростіть вираз: $24ta - (4t + 3a)^2$.

4°. Розв'яжіть рівняння: $(x + 2)^2 = (x - 1)(x + 4)$.

Варіант IV

1°. Піднесіть до квадрата двочлен:

а) $7 - a$; б) $t^2 - a$.

2°. Запишіть у вигляді многочлена:

а) $(3c - xy)^2$; б) $(3 + 5a)(3 - 5a)$.

3°. Спростіть вираз: $9a^2b^2 - (2 - 3ab)^2$.

4°. Розв'яжіть рівняння: $(x - 4)^2 = (x - 5)(x + 2)$.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 3

1. Знайдіть спільний множник членів многочлена $6cx - 9cy$:

- а) $6c$; б) $3x$; в) $3c$; г) $6x$.

2. Який із наведених виразів є різницею квадратів двох виразів:

- а) $x^2 - y^2$; б) $(x - y)^2$; в) $2(x - y)$; г) $x - y$?

3. Який із наведених виразів є кубом суми двох виразів:

- а) $(a + b)^3$; б) $3(a + b)$; в) $a^3 + b^3$; г) $a + b$?

4. Піднесіть до степеня $(a + 2b)^2$:

- а) $a^2 + 4b^2$; б) $a^2 + 4ab + 4b^2$;
в) $a^2 + 4ab + 2b^2$; г) $a^2 + 2ab + 2b^2$.

5. Подайте вираз $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ у вигляді степеня:

- а) $(x + 3)^3$; б) $(x - 3)^3$; в) $(x + 1)^3$; г) $(x - 1)^3$.

6. Подайте як квадрат двочлена вираз $0,25x^2 + y^2 - xy$:

- а) $(y + 0,5x)^2$; б) $(y - 0,5x)^2$;
в) $0,25(2y - x)^2$; г) $0,5^2(2x - y)$.

7. Який числовий множник можна винести за дужки у виразі $60x^2 + 30x + 45$:

- а) 9; б) 10; в) 15; г) 20?

8. Яке число слід поставити замість *, щоб рівність $(6x - 8)^2 = *(3x - 4)^2$ стала тотожністю:

- а) 6; б) 8; в) 4; г) 2?

9. На який вираз треба помножити суму $2a^4 + b^3$, щоб дістати різницю $4a^8 - b^6$:

- а) $2a^4b^3$; б) $2a^4 - b^3$; в) $2a^2b^2$; г) $2a^4 + b^3$?

10. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 16x + 64 = 0$:

- а) $x = 8$; б) $x = -8$; в) $x = 16$; г) $x = -16$.

Типові завдання до контрольної роботи № 3

1°. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $12a^3 - 18a^2$;

б) $60a^4b^5 + 36a^3b^6 - 48a^3b^2$.

2°. Розкладіть на множники вираз:

а) $5a + 5b + ab + b^2$;

б) $x - 3xy - 21y + 7$.

3°. Подайте у вигляді степеня многочлен:

а) $x^2 - 8x + 16$;

б) $9x^2 + 6x + 1$.

4°. Подайте у вигляді добутку многочлен:

а) $2ab + 2ac + xc + xb + 5c + 5b$;

б) $16x^2 - 25$;

в) $(3a + 2)^2 - 36a^2$.

5°. Обчисліть значення виразу:

$2xy - 2x + 4y - x^2$, якщо $y = 2,55$; $x = 5,1$.

6°. Подайте многочлен $27x^3 + 108x^2 + 144x + 64$ у вигляді степеня.

7°. Розв'яжіть рівняння:

а) $9x^2 + 6x + 1 = 0$;

б) $48x^3 + 12x = 0$.

8°. Доведіть, що

$13 \cdot 3^8 + 12 \cdot 3^7 + 45 \cdot 3^6 - 54 \cdot 3^5$ ділиться на 270.

9°. Доведіть, що різниця квадратів двох послідовних непарних чисел завжди ділиться на 8.

10°. Обчисліть:

$(6 + 1)(6^2 + 1)(6^4 + 1)(6^8 + 1)(6^{16} + 1) - 0,2 \cdot 6^{32}$.

§14. ВИКОРИСТАННЯ ФОРМУЛ СКОРОЧЕНОГО МНОЖЕННЯ



За допомогою формул скороченого множення деякі многочлени можна розкласти на множники. Наприклад, двочлен $x^2 - a^2$ можна подати у вигляді добутку за формулою *різниці квадратів*:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a).$$

Приклади.

$$x^4 - 4 = (x^2)^2 - 2^2 = (x^2 + 2)(x^2 - 2);$$

$$4a^2x^6 - 1 = (2ax^3)^2 - 1 = (2ax^3 + 1)(2ax^3 - 1);$$

$$0,04c^2 - \frac{1}{4}n^2 = (0,2c)^2 - \left(\frac{1}{2}n\right)^2 = \left(0,2c + \frac{1}{2}n\right)\left(0,2c - \frac{1}{2}n\right).$$

Тричлени $x^2 + 2xy + y^2$ і $x^2 - 2xy + y^2$ розкладають на множники за формулою *квадрата двочлена*:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = (x + y)(x + y),$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2 = (x - y)(x - y).$$

Приклади.

$$36 + 12x^2 + x^4 = 6^2 + 2 \cdot 6 \cdot x^2 + (x^2)^2 = (6 + x^2)^2;$$

$$a^2c^4 - 2ac^2x + x^2 = (ac^2)^2 - 2ac^2x + x^2 = (ac^2 - x)^2.$$

Одержані вирази є розкладами на множники. Їх можна записати і так: $(6 + x^2)(6 + x^2)$, $(ac^2 - x)(ac^2 - x)$.

Многочлен $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ можна розкласти на множники за формулою *куба двочлена*:

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b);$$

$$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b).$$



Хочете знати ще більше?

Розкладати на множники можна не тільки многочлени, а й деякі інші цілі вирази.

Наприклад, $(x-3)^2 - a^4$, $(a-1)^2 + 2(a-1)x + x^2$ — не многочлени, але їх можна подати у вигляді добутків многочленів:

$$(x-3)^2 - a^4 = (x-3+a^2)(x-3-a^2);$$

$$(a-1)^2 + 2(a-1)x + x^2 = ((a-1)+x)^2 = (a-1+x)^2.$$

Перевірте себе

1. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
2. Чому дорівнює квадрат різниці двох виразів?
3. На які множники розкладається вираз $a^2 + 2ac + c^2$?
4. На які множники розкладається вираз $a^2 - 2ac + c^2$?
5. На які множники розкладається вираз $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$?



Виконаємо разом!

1. Розкладіть на множники многочлен:

а) $3x^2 + 6x + 3$; б) $20c^4 - 45a^2c^2$.

✓ Розв'язання. а) $3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$;

б) $20c^4 - 45a^2c^2 = 5c^2(4c^2 - 9a^2) = 5c^2(2c+3a)(2c-3a)$.

2. Розв'яжіть рівняння $x^2 - 4x + 4 = 0$.

✓ Розв'язання. $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Отже, дане рівняння рівносильне такому:

$$(x-2)^2 = 0.$$

Квадрат числа дорівнює нулю тільки тоді, коли це число дорівнює 0. А $x-2=0$, коли $x=2$.

Відповідь. $x=2$.

3. Розкладіть на множники многочлен:

а) $8x^6 + 60x^4y^2 + 150x^2y^4 + 125y^6$;

б) $1 - 0,6c + 0,12c^2 - 0,008c^3$.

- ✓ Розв'язання. а) $8x^6 + 60x^4y^2 + 150x^2y^4 + 125y^6 =$
 $= (2x^2)^3 + 3 \cdot (2x^2)^2 \cdot 5y^2 + 3 \cdot 2x^2 \cdot (5y^2)^2 + (5y^2)^3 =$
 $= (2x^2 + 5y^2)^3 = (2x^2 + 5y^2)(2x^2 + 5y^2)(2x^2 + 5y^2);$
 б) $1 - 0,6c + 0,12c^2 - 0,008c^3 =$
 $= 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 0,2c + 3 \cdot 1 \cdot (0,2c)^2 - (0,2c)^3 = (1 - 0,2c)^3 =$
 $= (1 - 0,2c)(1 - 0,2c)(1 - 0,2c).$

Виконайте усно

515. Розкладіть на множники многочлени, наведені в таблиці.

	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
1	$a^2 - 1$	$a + 2a + 1$	$1 + 2x + x^2$
2	$x^2 - 4$	$x^2 - 2x + 1$	$1 - 2c + c^2$
3	$4c^2 - 1$	$m^2 - 2m + 1$	$x^2 + y^2 + 2xy$
4	$9x^2 - c^2$	$a^2 - 2am + m^2$	$x^2 + a^2 - 2ax$


Рівень




Розкладіть на множники вираз (516—527).

516. а) $p^2 - q^2$; б) $x^2 - 16$; в) $x^2 - 9y^2$;
 г) $p^2 - x^4$; р) $a^2 - c^2x^2$; д) $9a^2 - 4b^2$.
517. а) $1 - p^4$; б) $25 - c^6$; в) $0,01 - x^2$;
 г) $\frac{1}{4} - \frac{1}{9}c^2$; р) $-c^2 + 16$; д) $-1 + a^2b^4c^6$.
518. а) $9m^2 - 4x^2$; б) $49c^2 - x^4$; в) $x^4 - 4c^4$;
 г) $0,01x^2 - x^6$; р) $a^6 - 0,04c^4$; д) $1 - a^2b^4c^6$.
519. а) $x^2 + 10x + 25$; б) $x^2 - 10x + 25$;
 в) $a^2 - 8ax + 16x^2$; г) $c^2 + 8cx + 16x^2$.
520. а) $a^2 + 2am + m^2$; б) $x^2 + 4x + 4$;
 в) $a^2 + 4ab + 4b^2$; г) $b^2 - 6b + 9$.
521. а) $1 + 6x + 9x^2$; б) $1 + x + \frac{1}{4}x^2$;
 в) $3a^2 - 6ab + 3b^2$; г) $-x^2 + 2x - 1$.

522. а) $-4c^2 - 4c - 1$; б) $a + 2ax + ax^2$;
 в) $4c - c^2 - 4$; г) $\frac{1}{9}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}$.


 523. а) $(2a - 1)^2 - 100$; б) $1 - (a - b)^2$;
 в) $(x + c)^2 - 9x^2c^4$; г) $(1 - x^3)^2 - 4x^2$.

 524. а) $(3x - 5)^2 - 49x^2$; б) $4 - (7y - 5)^2$;
 в) $(0,5 - 3a)^2 - 16a^4$; г) $64n^2 - (1,5 - 2n)^2$.

525. а) $(3x - 2)^2 - 9$; б) $64 - (a - 4)^2$;
 в) $16x^2 - (5x + 1)^2$; г) $36x^2 - (3 - 2x)^2$;
 р) $4(a + 2b)^2 - (a - 2b)^2$; д) $(3x + y)^2 - 9(3x - y)^2$.

526. а) $(5a + 7)^2 - (3a + 6)^2$; б) $(12n - 1)^2 - (3 - 5n)^2$;
 в) $(0,3x^2 - x + 2)^2 - 0,09x^4$; г) $9(4ab^2 - c)^2 - (2ab^2 + c)^2$.


527. а) $(3 + a)^2 + 2(3 + a) + 1$; б) $(5x - 7)^2 - 2(5x - 7) + 1$;
 в) $(x^2 - 4)^2 - 6(x^2 - 4) + 9$; г) $4(a - 2c)^2 - 4(a - 2c) + 1$.

 528. Подайте вираз у вигляді добутку трьох множників:
 а) $81a^4 - 1$; б) $a(a^2 - x^2) + 2(x^2 - a^2)$.

529. Розкладіть на множники вираз:
 а) $3a^2 - 3$; б) $7x^2 - 28$; в) $5x^2 - 20$;
 г) $0,5 - 0,5c^2$; р) $a^2n^2 - n^2$; д) $a^4 - c^4$.

Розв'яжіть рівняння (530—533).

530. а) $x^2 - 9 = 0$; б) $25y^2 - 4 = 0$;
 в) $\frac{1}{4}z^2 - 25 = 0$; г) $\frac{36}{49} - a^2 = 0$.

 531. а) $x^2 - 6x + 9 = 0$; б) $z^2 + 4z + 4 = 0$;
 в) $5(y^2 - 8y + 16) = 0$; г) $\frac{1}{3}(x^2 - x + \frac{1}{4}) = 0$.

532. а) $c^2 + 9 = 6c$; б) $y^2 + 4 = 4y$;
 в) $2x^2 - 2 - 4x = 0$; г) $x - 1 = 0,25x^2$.

533. а) $3x^2 + 2x + \frac{1}{3} = 0$; б) $4x^2 + 9 = 6x$;
 в) $2y^2 + 2y + 0,5 = 0$; г) $4x^2 + 0,25 = 2x$.

Рівень **Б**

Розкладіть на множники (534—535).

534. а) $x^2y^2 - 81$; б) $0,04m^2 - n^4$; в) $\frac{1}{9}p^6 - 16a^2$;
 г) $-a^8y^6 + 0,0001$; р) $0,0144 - x^2y^{10}$; д) $-1 + a^{10}b^8c^4$.
535. а) $1 - (a + b + c)^2$; б) $(2x + y - 3)^2 - 4y^2$;
 в) $(5a^2 - a + 3)^2 - 25a^4$; г) $(x^2 - 3x + 1)^2 - 9x^2$.

Розкладіть на множники вираз (536—537).

536. а) $a^4 - 2a^2n + n^2$; б) $a^2 + 2an^2 + n^4$;
 в) $c^8 - 6c^4y^3 + 9y^6$; г) $9c^8 + 6c^4x^3 + x^6$.
537. а) $(2n + 3)^2 - (n - 1)^2$; б) $(3a + 2p)^2 - (a + p)^2$;
 в) $4(x - y)^2 - (x + y)^2$; г) $9(p + q)^2 - (p - q)^2$;
 р) $(x - 2)^2 + 2(x - 2) + 1$; д) $(3c + 2)^2 - 4(3c + 2) + 4$.

538. Подайте вираз у вигляді добутку чотирьох множників:

- а) $x^5 - x^4 - x + 1$; б) $c(c^4 - 16) - c^4 + 16$.

539. Обчисліть значення виразу:

- а) $(5x + 1)^2 - (5x - 3)^2$, якщо $x = 0,7$;
 б) $(a - b)^2 + 2(a - b)b + b^2$, якщо $a = 0,3$;
 в) $17a^2 - 34ax + 17x^2$, якщо $a = 3,7$ і $x = 2,7$;
 г) $(5x - 3y)^2 + (3x + 5y)^2$, якщо $x = 5,5$ і $y = 4,5$.

540. Обчисліть (540—541).

- а) $7^{50} \cdot 5^{50} - (35^{25} - 1)(35^{25} + 1)$;
 б) $8^{30} \cdot 9^{30} + (1 - 72^{15})(1 + 72^{15})$.

541. а) $5^{30} \cdot 3^{30} - (15^{15} - 1)(15^{15} + 1)$;
 б) $7^{24} \cdot 8^{24} + (1 - 56^{12})(1 + 56^{12})$;
 в) $(32^{32} - 2)(32^{32} + 2) - 8^{64} \cdot 4^{64}$;
 г) $(3 + 54^8)(3 - 54^8) + 6^{16} \cdot 9^{16}$.

542. Порівняйте з нулем значення виразу:


- а) $x^2 - 22x + 121$; б) $-x^2 + 20x - 100$;
 в) $x^2 - 10x + 26$; г) $-x^2 + 6x - 10$.

543. Поставте замість зірочок такі одночлени, щоб утворилася тотожність:

а) $* - 1 = (a^2b^2 - *)(* + 1)$; б) $\frac{1}{9}x^6 - * = \left(\frac{1}{3}x^3 - 4y^4\right)(* + *)$;

в) $* - * = (m^2 - *)(0,5n^5 + *)$; г) $(1 + *)^2 = * + 8xy^2 + *$;

р) $(* - 1,2ab)^2 = 0,04 - * + *$; д) $(* - *)^2 = 36x^4 - 24x^2y^2 + *$.

 **544.** Поставте замість зірочок такі одночлени, щоб утворилася тотожність:

а) $* - 1 = (5c - *)(* + 1)$; б) $4a^4 - * = (2a^2 - 3c)(* + *)$;

в) $m^4 - * + * = (* - 3a)^2$; г) $c^3 + * + * + 8 = (* + 2)^3$.

545. При яких значеннях m даний тричлен можна подати у вигляді квадрата двочлена:

а) $a^2 + 4ac + m$; б) $0,01x^4 - x^2 + m$;

в) $mx^4 + 6x^2 + 1$; г) $4z^2 - m + 81$?

546. Доведіть тотожність:

а) $(a^2 - x^2)^2 + (2ax)^2 = (a^2 + x^2)^2$;

б) $(a^2 - c)^2 + 2(a^2 - c)(a^2 + c) + (a^2 + c)^2 = 4a^4$;


в) $a^8 - x^8 = (a^4 + x^4)(a^2 + x^2)(a + x)(a - x)$;

г) $(a + x - y)^2 - (a - x + y)^2 = 4a(x - y)$.

Подайте вираз у вигляді добутку (547—549).

547. а) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$; б) $a^3 - 3a^2 + 3a + 1$;

в) $a^3 + 6a^2 + 12a + 8$; г) $8y^3 - 12y^2 + 6y - 1$.

 **548.** а) $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$; б) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$;

в) $27a^3 - 27a^2b + 9ab^2 - b^3$; г) $p^3 + 6p^2q + 12pq^2 + 8q^3$.

549*. а) $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$;

б) $8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$;

в) $0,001x^{12} - 0,03x^8 + 0,3x^4 - 1$;

г) $0,125a^3 + 0,75a^2b^2 + 1,5ab^4 + b^6$.

Розв'яжіть рівняння (550—553).

550. а) $x^2 - 10x + 25 = 0$; б) $z^2 + 14z + 49 = 0$;

в) $x^2 - x + 0,25 = 0$; г) $x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} = 0$.



551. а) $4y^2 - 4y + 1 = 0$; б) $9x^2 + 12x + 4 = 0$;
в) $16z^2 + 9 = 24z$; г) $121 + 1,21x^2 = 24,2x$.

552*. а) $(x^2 + x + 2)^2 - (x^2 + x - 2)^2 = 0$;
б) $(2y^2 + 2y + 1)^2 - (2y^2 + 2y - 1)^2 = 0$.

553*. а) $(x - 4)(x^2 - 2x + 1) = 0$; б) $(2z + 1)(z^2 - 6z + 9) = 0$.

554. Для яких x і y справджується рівність:

а) $(x - y)^2 = x^2 - y^2$; б) $(x + y)^2 = x^2 + y^2$?

555. Різниця квадратів двох послідовних непарних натуральних чисел дорівнює 144. Знайдіть ці числа.



556. Сума двох чисел дорівнює 34, а різниця їх квадратів — 408. Знайдіть ці числа.

557. Різниця двох чисел дорівнює 21, а різниця їх квадратів — 1155. Знайдіть ці числа.

558*. Подайте у вигляді добутку:

а) $x^{2n} - 1$; б) $a^{4p} - 4$; в) $9x^{2n+2} - y^{6n}$;
г) $a^{4m-2} - 49b^{2m-4}$; р) $a^{2p} - 2a^p + 1$; д) $x^{2n+6} + 8x^{n+3} + 16$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

559. Знайдіть відношення:

а) піврізниці чисел $\frac{5}{6}$ і $\frac{1}{3}$ до їх суми;

б) суми чисел $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ і $\frac{6}{7}$ до їх добутку.

560. У школі на шість відмінників сьомих класів виділено дві однакові путівки в дитячий табір відпочинку. Скількома способами можна розподілити путівки між цими відмінниками?

561. Доведіть, що значення виразу:

а) $13^9 - 13^8 - 13^7$ кратне числу 5;

б) $23^{11} - 23^{10} - 23^9$ кратне числу 101.

562. Знайдіть суму, різницю, добуток і частку чисел:

а) $4 \cdot 10^8$ і $2 \cdot 10^7$; б) $3,6 \cdot 10^{19}$ і $2 \cdot 10^{19}$.

§15. РІЗНИЦЯ І СУМА КУБІВ



Перемножимо многочлени $a - b$ і $a^2 + ab + b^2$:

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 - a^2b - ab^2 - b^3 = a^3 - b^3.$$

Отже, при будь-яких значеннях a і b :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2).$$

Тричлен $a^2 + ab + b^2$ називають *неповним квадратом суми* виразів a і b (від $a^2 + 2ab + b^2$ він відрізняється тільки коефіцієнтом середнього члена). Тому доведену формулу словами читають так:



різниця кубів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів і неповного квадрата їх суми.

Перемножимо многочлени $a + b$ і $a^2 - ab + b^2$:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Отже, при будь-яких значеннях a і b :

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Тричлен $a^2 - ab + b^2$ називають *неповним квадратом різниці* виразів a і b . Тому одержану формулу читають так:



сума кубів двох виразів дорівнює добутку суми цих виразів і неповного квадрата їх різниці.

За допомогою доведених формул можна розкласти на множники многочлени, що є різницями або сумами кубів.

Приклади.

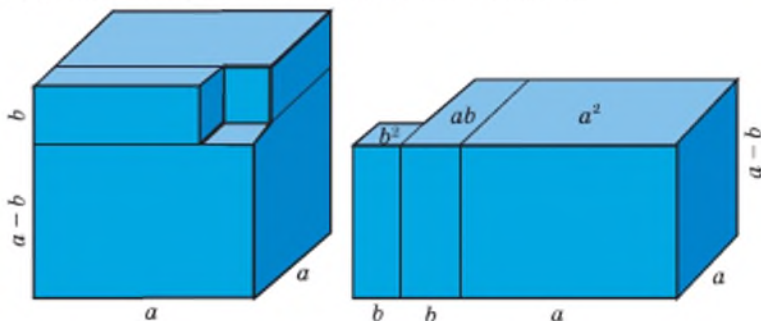
$$x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3 = (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2);$$

$$1 + 0,027a^6 = 1^3 + (0,3a^2)^3 = (1 + 0,3a^2)(1 - 0,3a^2 + 0,09a^4).$$



Хочете знати ще більше?

Формулу «різниця кубів» для додатних значень a і b можна проілюструвати геометрично, як показано на малюнку 27.



Мал. 27

Якщо помножити на $a - b$ вирази

$a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ і $a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4$, то одержимо

формули:

$$a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3),$$

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4).$$


Можна довести, що для кожного натурального значення n правильна формула:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Формули «різниця квадратів» і «різниця кубів» — найпростіші випадки цієї загальної формули.

Перевірте себе

1. Який вираз називають неповним квадратом суми? А неповним квадратом різниці?
2. Чому дорівнює добуток суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці?
3. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів і неповного квадрата їх суми?
4. Чому дорівнює різниця кубів двох виразів? Напишіть відповідну формулу.
5. Чому дорівнює сума кубів двох виразів? Напишіть формулу.

 **Виконаємо разом!**

1. Розкладіть на множники двочлен:

а) $8 - 27x^3y^3$; б) $-a^6 + c^3$.

✓ Розв'язання.

$$\begin{aligned} \text{а) } 8 - 27x^3y^3 &= 2^3 - (3xy)^3 = (2 - 3xy)(2^2 + 2 \cdot 3xy + (3xy)^2) = \\ &= (2 - 3xy)(4 + 6xy + 9x^2y^2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } -a^6 + c^3 &= -(a^6 - c^3) = -(a^2 - c)(a^4 + a^2c + c^2) = \\ &= (c - a^2)(a^4 + a^2c + c^2). \end{aligned}$$

2. Знайдіть добуток многочленів:

$$x^4 - x^2y + y^2 \text{ і } x^2 + y.$$

✓ Розв'язання.

1-й спосіб. За формулою суми кубів:

$$(x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2) = (x^2)^3 + y^3 = x^6 + y^3.$$

2-й спосіб. За правилом множення многочленів:

$$\begin{aligned} (x^2 + y)(x^4 - x^2y + y^2) &= x^6 - x^4y + x^2y^2 + x^4y - x^2y^2 + y^3 = \\ &= x^6 + y^3. \end{aligned}$$

 **Виконайте усно**

563. Чому дорівнює неповний квадрат суми виразів a і c ?

564. Чому дорівнює неповний квадрат різниці виразів a і c ?


565. Як можна спростити вираз:

а) $(1 - x)(x^2 + x + 1)$; б) $(a^2 - a + 1)(a + 1)$?

566. Розкладіть на множники двочлен: а) $n^3 - 1$; б) $c^3 + 8$.

Подайте у вигляді многочлена (567—569).

567. а) $(a - x)(a^2 + ax + x^2)$; б) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4)$.

 568. а) $(1 + x)(1 - x + x^2)$; б) $(a - c^2)(a^2 + ac^2 + c^4)$.

569. а) $(2a - n)(4a^2 + 2an + n^2)$; б) $(1 + c + c^2)(1 - c)$.

Розкладіть на множники двочлен (570—576).

570. а) $a^3 - c^3$; б) $x^3 + 8$; в) $1 - p^3$;
г) $c^3 - 64x^3$; г) $n^6 - 1$; д) $27a^3 + b^3$.

- 571.** а) $125 - z^3$; б) $0,001 - a^6$; в) $27x^6 - a^3y^3$;
 г) $p^3 + q^3$; р) $8 - a^3$; д) $c^3 + 8x^3$.
- 572.** а) $1 + a^6$; б) $a^3 + c^6$; в) $27 + a^3b^3$;
 г) $\frac{1}{27} - x^3$; р) $p^3x^6 + 1$; д) $27m^3 + n^6$.
- 573.** а) $a^3c^3 + 27x^6$; б) $-c^6 + 27x^3$; в) $a^6c^9 - 27x^3$;
 г) $a^3 - \frac{1}{8}b^3c^6$; р) $-z^3 - p^3$; д) $0,008 + y^3z^9$.
- 574.** а) $a^3 + 8$; б) $27 + m^3$; в) $64a^3 + 27$;
 г) $\frac{1}{8} + c^3$; р) $\frac{8}{27}x^3 + 1$; д) $\frac{27}{64} + z^3$.
- 575.** а) $a^3b^3 - 1$; б) $8x^3 - a^3$; в) $64 + a^3c^3$;
 г) $\frac{1}{8}a^3x^3 - c^3$; р) $\frac{1}{64}a^3 - x^3y^3$; д) $\frac{8}{27} - a^3x^3z^3$.
- 576.** а) $x^3 - y^6$; б) $a^3 + z^6$; в) $a^6 - z^9$;
 г) $8a^3 - x^6$; р) $27 - a^3y^6$; д) $-8a^9 - 27c^6$.

Подайте у вигляді многочлена (577—579).

- 577.** а) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$;
 б) $(x + m)(x^2 - xm + m^2)$;
 в) $(x - a^2)(x^2 + a^2x + a^4)$;
 г) $(a^4 + 1)(a^8 - a^4 + 1)$.
- 578.** а) $(a^2 - m)(a^4 + a^2m + m^2)$;
 б) $(2x + 3)(4x^2 - 6x + 9)$;
 в) $(3c - n)(9c^2 + 3cn + n^2)$;
 г) $(5 + y^3)(25 - y^3 + y^6)$.
- 579.** а) $(4 + 2x + x^2)(2 - x)$;
 б) $(25 - 10m + 4m^2)(5 + 2m)$;
 в) $(9x^2 - 15x + 25)(3x + 5)$.
- 580.** Знайдіть значення виразу:
 а) $(x + 1)(x^2 - x + 1) - x^3$, якщо $x = 5,73$;
 б) $(z - 2)(z^2 + 2z + 4) + 8$, якщо $z = 0,02$.

Розв'яжіть рівняння (581—582).

- 581.** а) $(x - 1)(x^2 + x + 1) = x + x^3$;

$$б) (y + 2)(y^2 - 2y + 4) = y^3 + 2y.$$

582. а) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9) + x = x^3$;

б) $(1 + y)(y^2 - y + 1) - y^3 = 2y$.

583. Знайдіть добуток многочленів:

а) $3a - 2$ і $9a^2 + 6a + 4$;

б) $5 + x^2$ і $x^4 - 5x^2 + 25$;

в) $0,5a^2 + b$ і $0,25a^4 - 0,5a^2b + b^2$;


г) $4m - m^2$ і $m^4 + 4m^3 + 16m^2$.

Рівень Б


Подайте у вигляді многочлена (584—588).

584. а) $(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1)$; б) $(m - 1)(m^2 + 2m + 1)$;

в) $(3a - 2b)(9a^2 + 6ab + 4b^2)$; г) $(7x + 3y)(49x^2 - 21xy + 9y^2)$.

 **585.** а) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; б) $(x^3 - 2a)(x^6 + 2x^3a + 4a^2)$;

в) $(3x + y)(9x^2 - 3xy + y^2)$; г) $(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$.

 **586.** а) $(4a^{14} - 2a^7b^4 + b^8)(2a^7 + b^4)$; б) $(16a^2 + 4ab + b^2)(4a + b)$.


587. а) $(a^8 - 2x)(a^{16} + 2a^8x + 4x^2)$; б) $(x^3 + y^2)(x^6 - x^3y^2 + y^4)$;

в) $(2a - xy)(4a^2 + 2axy + x^2y^2)$;

г) $(ac^2 + 3n)(9n^2 - 3ac^2n + a^2c^4)$.

588. а) $(x^3 - 1)^2(x^6 + x^3 + 1)^2$; б) $(x^4 + 1)^3(x^8 - x^4 + 1)^3$.

Перемножте многочлени (589—590).

 **589.** а) $x^2 + c$ і $x^4 - x^2c + c^2$; б) $p - q^2$ і $p^2 + pq^2 + q^4$;

в) $x - 0,2$ і $x^2 + 0,2x + 0,04$.


590. а) $a^3 - b$ і $a^6 + a^3b + b^2$; б) $a^5 + 2b$ і $a^{10} - 2a^5b + 4b^2$;

в) $x^2 + y^2$ і $x^4 + y^4 - x^2y^2$.

Розкладіть на множники вираз (591—592).

591. а) $(a + 2)^3 - 8$; б) $27 - (x + y)^3$; в) $(z - 1)^3 + z^3$;

г) $64a^3 - (a - 1)^3$; р) $\frac{1}{8}a^3 + \left(1 + \frac{1}{2}a\right)^3$; д) $1 - (x + 1)^6$.

 **592.** а) $8 - (a - 2)^3$; б) $(x + y)^3 - y^3$;

в) $x^3 - y^3 - x + y$; г) $a^3 - b^3 - a^2 - ab - b^2$.

Обчисліть значення виразу (593—594).



593. а) $(x+3)(x^2-3x+9)-x^3-x$, якщо $x=2,5$;
 б) $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)+27y^3$, якщо $x=1$ і $y=-3,8$.

594. а) $(1+2x)(4x^2-2x+1)-3x^3$, якщо $x=\frac{1}{5}$;

б) $37x^3-(4x-3)(16x^2+12x+9)$, якщо $x=\frac{1}{3}$;

в) $5x^3+(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)+19y^3$,

якщо $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{2}{3}$;

г) $28y^3+(5x-y)(25x^2+5xy+y^2)-61x^3$,

якщо $x=\frac{3}{4}$, $y=1\frac{2}{3}$.

595. Подайте у вигляді добутку:

а) x^9-y^{3n} ;

б) $a^{3m-3}+b^{21}$;

в) $a^{6n+9}-c^{36-3n}$;

г) $x^{12n-3}+64y^{27+3n}$.

596. Доведіть тотожність:

а) $a^3-b^3-(a-b)(a^2+b^2)=ab(a-b)$;

б) $a^6-b^6=(a^2-b^2)(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)$.

597. Доведіть, що:

а) 327^3-227^3 ділиться на 100;

б) 737^3+263^3 ділиться на 10^3 ;

в) $2 \cdot (1001^3+27)$ ділиться на 2008.

Розв'яжіть рівняння (598—600).



598. а) $(x+1)(x^2-x+1)=5x+x^3$;

б) $(z-4)(16+4z+z^2)=z(z^2-4)$.

599. а) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)=1$;

б) $(x^3+3)(x^6-3x^3+9)-26=0$.

600. а) $(4x^2-2x+1)(2x+1)=2x(4x^2+5)$;

б) $(x^2-4)(x^2-2x+4)=x(x^3+8)$.

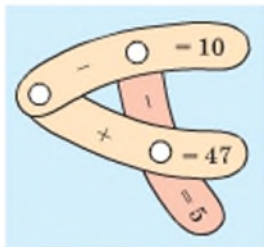
601. Доведіть, що різниця кубів двох послідовних натуральних чисел при діленні на 6 завжди дає в остачі 1.

602. Доведіть, що різниця кубів двох послідовних непарних натуральних чисел при діленні на 24 завжди дає в остачі 2.

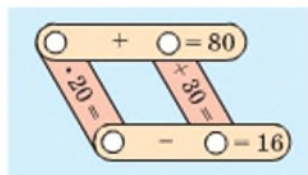
603. Доведіть, що три останні цифри числа $1993^3 + 7^3$ — нулі.
604. Доведіть, що коли сума двох натуральних чисел ділиться на якесь число, то і сума їх кубів ділиться на те саме натуральне число.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

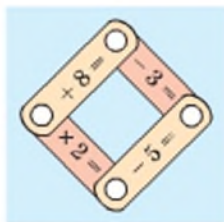
605. Фірма взяла в банку кредит — 500 000 грн терміном на два роки під 20% річних. Визначте, скільки гривень фірма має повернути банку через 2 роки і який прибуток отримає банк.
606. Накресліть на координатній площині чотирикутник з вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(1; 3)$, $C(5; 3)$, $D(5; 0)$. Знайдіть його периметр і площу.
607. Розв'яжіть математичні кросворди, подані на малюнках 28—30.



Мал. 28



Мал. 29



Мал. 30

608. Спростіть вираз:
- а) $(35 - 2^5)^{17}$; б) $(0,875 + 0,5^3)^{10}$; в) $(0,3^3 - 0,017)^6$;
 р) $(3^4 + 19)^5$; р) $(2^7 - 5^3 - 4)^{15}$; д) $(4^4 - 3^5 - 13)^{12}$.

§ 16. ЗАСТОСУВАННЯ РІЗНИХ СПОСОБІВ РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ



Щоб розкласти многочлен на множники, іноді доводиться використовувати кілька способів.

Приклад 1. Розкладіть на множники многочлен

$$4a^3 - ab^2.$$

Розв'язання.

$$4a^3 - ab^2 = a(4a^2 - b^2) = a(2a + b)(2a - b).$$

Спочатку за дужки винесено спільний множник a , потім вираз у дужках розкладено на множники за формулою різниці квадратів.

Приклад 2. Розкладіть на множники вираз

$$x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} x^5 - x^4y + x^2y^3 - xy^4 &= x^4(x - y) + xy^3(x - y) = \\ &= (x - y)(x^4 + xy^3) = (x - y)x(x^3 + y^3) = \\ &= x(x - y)(x + y)(x^2 - xy + y^2). \end{aligned}$$

Тут застосовано спосіб групування, винесення спільного множника за дужки і формулу суми кубів.

Щоб розкласти на множники складніші многочлени, доводиться застосовувати кілька відомих способів або штучні прийоми. У цьому випадку можна використати таке правило-орієнтир.



Щоб розкласти многочлен на множники, треба:

1. Винести спільний множник (якщо він є) за дужку.
2. Перевірити, чи не є вираз у дужках різницею квадратів, різницею або сумою кубів.
3. Якщо це тричлен, то перевірити, чи не є він квадратом двочлена.
4. Якщо многочлен містить більше трьох членів, то треба спробувати згрупувати їх і до кожної групи застосувати п. 1—3.



Хочете знати ще більше?

Іноді вдається розкласти многочлен на множники, якщо додати і відняти від нього один і той самий вираз.

Приклад. Розкладіть на множники двочлен $a^4 + 4$.

Розв'язання. Додамо до даного двочлена вираз $4a^2 - 4a^2$.
 $a^4 + 4 = a^4 + 4a^2 - 4a^2 + 4 = (a^4 + 4a^2 + 4) - 4a^2 = (a^2 + 2)^2 - (2a)^2 = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a) = (a^2 - 2a + 2)(a^2 + 2a + 2)$.

Перевірте себе

1. Що означає «розкласти многочлен на множники»?
2. Які ви знаєте способи розкладання многочленів на множники?
3. За якими формулами можна розкладати многочлени на множники?
4. Наведіть приклади розкладання многочлена на множники з використанням кількох способів.



Виконаємо разом!

1. Розкладіть на множники вираз $ax^4 - ax^2 + 0,25a$.

✓ **Розв'язання.**

$$ax^4 - ax^2 + 0,25a = 0,25a(4x^4 - 4x^2 + 1) = 0,25a(2x^2 - 1)^2.$$

2. Подайте многочлен $n^4 - 5n^2 - 2nx - x^2 + 4$ у вигляді різниці квадратів двох многочленів.

✓ **Розв'язання.** $n^4 - 5n^2 + 2nx - x^2 + 4 =$

$$= (n^4 - 4n^2 + 4) - (n^2 - 2nx + x^2) = (n^2 - 2)^2 - (n - x)^2.$$

3. Доведіть, що число $6^5 - 6^4 + 6^3$ ділиться на 31.

✓ **Доведення.** $6^5 - 6^4 + 6^3 = 6^3(6^2 - 6 + 1) = 6^3 \cdot 31$.

Останній добуток ділиться на 31, тому на 31 ділиться і рівний йому даний числовий вираз.

Виконайте усно

Розкладіть на множники многочлен (609—611).

609. а) $5a - 10c$; б) $4x^2 - 4x$; в) $a^2c^2 - ac$.

610. а) $a^2 - n^2$; б) $1 - c^2x^2$; в) $9 - a^4$.

611. а) $1 - 2n + n^2$; б) $x^2 - 2xy + y^2$; в) $1 + 2c^2 + c^4$.

Рівень **A**

Розкладіть на множники многочлен (612—614).

612. а) $ap^2 - ax^2$; б) $c^3 - cp^2$; в) $2 - 8a^2$;
г) $27x^2 - 75$; р) $18c^2x - 2x$; д) $100a^4 - a^2$.

613. а) $5a - 5a^3$; б) $49m^4 - m^2$; в) $64x^2y - 9x^2y^3$;
г) $m^6 - 27^2$; р) $x^4 - 625$; д) $x^4 - y^6$.

614. а) $xa^2 - xc^2$; б) $a^3 - an^2$; в) $20x^2 - 5$;
г) $100m^2 - 25x^2$; р) $3x^3 - 27x$; д) $45a - 5a^3$.

Розв'яжіть рівняння (615—616).

615. а) $5x^5 - x^4 = 0$; б) $x^4 + 6x^3 = 0$; в) $10x^6 = 3x^5$;
г) $3x^3 - 12x = 0$; р) $4x^4 - 9x^2 = 0$; д) $x^5 = x^3$.

616. а) $x^4 - x^2 = 0$; б) $x^3 - 25x = 0$;
в) $5x^3 - x^4 = 0$; г) $x^3 - 0,04x^2 = 0$.

Розкладіть на множники многочлен (617—622).

617. а) $ax^2 - 2ax + a$; б) $20a^3 - 20a^2 + 5a$;
в) $27a^6 + 3a^2 - 18a^4$; г) $45x^3 + 20x - 60x^2$;
р) $mx^2 + 4mx + 4m$; д) $p^2 + 6xp^2 + 9x^2p^2$.

618. а) $-4m^2 + 4m - 1$; б) $-a^2 - 6a - 9$; в) $5x^2 + 5y^4 - 10xy^2$;
г) $4ax^2 + a - 4ax$; р) $3 - 6a + 3a^2$; д) $7a^2 - 28a^4 + 28a^6$.

619. а) $ax^4 - x^4 + ax^3 - x^3$; б) $x^3 - x^2y + x^2 - xy$;
в) $x^2 - 2ax + a^2 - m^2$; г) $x^2 + 2x + 1 - a^2$.

620. а) $4ab + 12b - 4a - 12$; б) $10 + 0,6xy - 5y - 1,2x$;
в) $m^2 - x^2 - 4x - 4$; г) $x^2 - y^2 - 6x + 9$.

621. а) $x - a + x^2 - a^2$;

б) $a^2 - b^2 + a - b$;

в) $k + p + k^2 - p^2$;

г) $c^2 - c - m^2 - m$.



622. а) $a - b^2 + a^2 - b$;

б) $c^3 - 3d^2 + 3c^2 - cd^2$;

в) $x^3 - a^3 + x - a$;

г) $a + b - a^3 - b^3$.

623. Наведіть приклад двочлена, який є одночасно різницею квадратів і різницею кубів. Розкладіть його на множники.

Рівень 5

Розкладіть на множники многочлен (624—634).

624. а) $0,001a + a^4$;

б) $-1 - a^6$;

в) $-8y^4 - 64y$;

г) $1 + c^6x^3$;

р) $0,008a + a^7$;

д) $27\,000 - y^{27}$.



625. а) $x^3y^2 - xy^4$;

б) $9a^5c - a^3c^3$;

в) $25a^4 - x^2y^4$;

г) $0,25x^2 - x^4y^4$;

р) $0,08a^4 - 0,32a^2$;

д) $-8 + 2x^4$.



626. а) $\frac{1}{8}x - 2x^3$;

б) $\frac{2}{3}a^4 - \frac{3}{8}a^2x^4$;

в) $-2\frac{1}{4}x^6 - x^2y^4$.

627. а) $\frac{1}{2}x - \frac{27}{16}x^4$;

б) $\frac{1}{8}z - \frac{1}{18}z^3$;

в) $\frac{2}{9}a - 1\frac{2}{16}a^3c^2$;

г) $\frac{3}{7}x^2y + \frac{3}{14}x^2$.

628. а) $0,04ax^3 - 0,4ax^2 + ax$;

б) $4a^2x - 2ax^2 + 0,25x^3$;

в) $1,21nc^4 + 2,2nc^3 + nc^2$;

г) $0,5a^2x^2 + 0,5a^2 - a^2x$.

629. а) $\frac{1}{4}ac^2 - ac + a$;

б) $mx^4 - mx^2 + \frac{1}{4}m$;

в) $a^2 + a^3 - a^4 - a^5$;

г) $x^2 - x^3 + x^4 - x^5$.



630. а) $ac^2 + bc - bc^2 - ac$;

б) $a^2b + 3a + 3ab + a^2$;

в) $ax - a^2 + ax^2 - a^3$;

г) $a^3 - ab^2 - a^2 - ab$.

631. а) $2ax - axy + 2ay - ay^2$;

б) $nx + cx + c^3x + c^2nx$;

в) $x^2 - 2xy + y^2 + x - y$;

г) $9a^2 + 6a + 1 + 3a + 1$.



632. а) $ac + bc - 2c - acx - bcx + 2cx$;

б) $x^3 + 2x^2 - acx - 2cx - cx^2 + ax^2$.

633. а) $a^2x^2 + a^2y^2 - 2ax^2 - 2ay^2 + x^2 + y^2$;

б) $a^2x^2 + a^2y^2 + ax^2 + ay^2 + x^2 + y^2$.

634. а) $a^2 - 2ac + c^2 - x^2 - 2x - 1$; б) $a^4 - 2a^2 + 1 - a^2 + 2ac - c^2$.



635. Подайте многочлен у вигляді суми квадратів двох виразів:

а) $a^2 + b^2 + 2a + 2b + 2$;

б) $x^4 + y^4 + 4x^2 + 4y^2 + 8$;

в) $2x^2 + 4x + 2$;

г) $2x^2 + 2x + 1$.

636. Подайте вираз у вигляді різниці квадратів двох многочленів:

а) $a^2b^2 - 2ab - 6c - c^2 - 8$;

б) $(a - b)(a + b) + 4(a - b)$;

в) $a^2 + 3x^2 - 4ax + 2cx - c^2$;

г) $a^4 - 5a^2 - 2ax - x^2 + 4$.

637. Подайте вираз у вигляді квадрата двочлена:

а) $(8x + 3)^2 + (6x + 4)^2 + 4x$; б) $(3c^2 + 4)^2 + (4c^2 + 3)^2 + 2c^2$.

638. Доведіть, що при кожному значенні x вираз набуває тільки додатного значення:

а) $(x + 2)^2 + 1$;

б) $x^2 + (x - 3)^2$;

в) $(x - 1)^2 + (x + 2)^2$;

г) $x^2 - 4x + 5$;

р) $x^2 - x + 1$;

д) $9x^2 - 6x + 2$.

639. Доведіть, що при кожному значенні x вираз набуває тільки від'ємного значення:

а) $6x - x^2 - 10$;

б) $x - x^2 - 1$;

в) $2x - x^2 - 2$.

640. При яких значеннях x вираз має найменше значення:

а) $x^2 + 5$;

б) $(x - 2)^2$;

в) $(x - 3)^2 + 5$;

г) $x^2 - 6x + 9$;

р) $x^2 + 4x + 6$;

д) $4x^2 - 4x + 3$?



641. Обчисліть значення виразу:

а) $x(x + 3)^2 + (5 + x)^3$, якщо $x = -4$;

б) $(a - 3)^4 - (4 + a)^4$, якщо $a = -0,5$;

в) $(c + 3)^2 - 2(c + 3)(c - 2) + (c - 2)^2$, якщо $c = 2,53$;

г) $(2z + 1)^2 - 4z(2z + 1) + 4z^2$, якщо $z = 3,75$.

642. Доведіть тотожність:

$$7x^3 + 5x^2 - 6x + 3 = ((7x + 5)x - 6)x + 3.$$

643. Користуючись калькулятором, обчисліть значення виразу $37y^3 - 12y^2 + 49y - 135$, якщо:

а) $y = 19$; б) $y = 2,7$; в) $y = 3,34$.

У якій формі зручно подавати такі вирази, обчислюючи їх значення на калькуляторі?



644. Доведіть, що:

а) число $5^5 - 5^4 + 5^3$ ділиться на 21;

б) число $957^2 - 43^2$ ділиться на 1000.

645. Доведіть, що при кожному натуральному значенні n :

а) $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$ ділиться на 4;

б) $(3n + 2)^2 - (3n - 2)^2$ ділиться на 24;

в) $(5n + 3)^2 - (5n - 3)^2$ ділиться на 60.

Доведіть твердження (646—649).



646. Різниця квадратів двох непарних чисел ділиться на 4.

647. Різниця квадратів двох послідовних непарних чисел ділиться на 8.

648. Різниця квадратів двох послідовних парних чисел на 8 не ділиться.

649. Квадрат непарного числа при діленні на 8 дає в остачі 1.

Доведіть тотожність (650—654).



650. $a^2 + 3a + 2 = (a + 1)(a + 2)$.

651. $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

652. $c^2 - 7c + 12 = (c - 3)(c - 4)$.

653. $(a^4 + 1)(a^2 + 1)(a + 1)(a - 1) + 1 = a^8$.

654. $(a + 1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1$.

Розв'яжіть рівняння (655—658).

655. а) $x + x^3 = 0$; б) $2z^2 - 9z + 18 = z^3$;

в) $y^3 - 2y^2 - y + 2 = 0$; г) $x^3 + x = 3x^2 + 3$.



656. а) $x^3 + 2x^2 - x = 2$; б) $y^3 - 3y^2 + 4y = 12$;

в) $2x^3 - 3x^2 + 4x = 6$; г) $0,5z^5 + z^4 + z + 2 = 0$.

657. а) $x^2(x-3) + 2x(x-3) + x-3 = 0$;
 б) $x^2(2x+1) - 4x(2x+1) + 8x+4 = 0$.

658. а) $x^2(x^2-4x+4) - 9(x^2-4x+4) = 0$;
 б) $x^3(x^2-6x+9) - 4x(x^2-6x+9) = 0$.



659. При яких значеннях a значення виразу $8a^3 - 4a^2 + 2a - 1$:
 а) дорівнює 0; б) дорівнює значенню виразу $4a^2 + 1$?

660. При яких значеннях x сума квадратів виразів $x + 1$ і $x - 1$:

- а) на 6 більша за квадрат їх півсуми;
 б) на 84 більша за їх добуток?

661. При яких значеннях a :

- а) значення виразу $a^3 + 3a^2 - a$ дорівнює 3;
 б) значення виразів $a^3 - a^2$ і $4a - 4$ дорівнюють одне одному?

Знайдіть корені рівняння (662—663).

662. а) $x^2(x^2 + 4x + 4) = (5x)^2 + 100x + 100$;
 б) $4x^4 - 12x^3 + 9x^2 = 36x^2 - 108x + 81$.



663. а) $x^2(9x^2 - 6x + 1) = (6x)^2 - 24x + 4$;
 б) $4x^4 + 56x^3 + 196x^2 = x^2 + 14x + 49$.

664*. Розкладіть на множники вираз:

- а) $a^4 + 4b^4$; б) $x^4 + x^2 + 1$;
 в) $x^5 + x + 1$; г) $x^{10} + x^5 + 1$.

665*. Доведіть тотожність:

- а) $(a-b)^3 + (b-c)^3 - (a-c)^3 = -3(a-b)(b-c)(a-c)$;
 б) $(x+y+z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 3(x+y)(x+z)(y+z)$;
 в) $a^3(b+c) - b^3(a+c) - c^3(a-b) =$
 $= (a-b)(a+c)(b+c)(a+b-c)$.



666*. Розв'яжіть рівняння Р. Декарта (1596—1650):

- а) $y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0$;
 б) $x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120 = 0$.

667*. Розв'яжіть рівняння Бхаскари (1114—1185):

$$x^4 - 2x^2 - 400x = 9999.$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

668. Сторона одного квадрата більша за сторону іншого на 1 см, а площа — на 32 см^2 . Знайдіть сторону меншого квадрата.
669. Різниця периметрів двох квадратів дорівнює 12 см, а різниця їх площ — 33 см^2 . Знайдіть площі квадратів.
- Обчисліть (670—671).
670. а) $(2^5 - 33)^{15}$; б) $(66 - 2^6)^6$.
671. а) $(3^2 - 2^3 - 1)^{40}$; б) $(3^5 - 2^8 + 13)^{50}$.
672. На новорічний бал чотири подружки пішли зі своїми братами: Андрієм, Борисом, Віктором і Геннадієм. Перший танець кожна танцювала не зі своїм братом: Катя — з Андрієм, Ліда — із братом Марії, Ніна — із братом Ліди, Борис — із сестрою Віктора, а Віктор — із сестрою Андрія. Хто чий брат?



ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ

Варіант I

1°. Розкладіть на множники многочлен:

- а) $x^2 - 9c^2$; б) $27 + a^3$;
 в) $x^3 - 2x^2y + xy^2$; г) $(2x + 1)^2 - 49$.

2°. Доведіть, що число $7^{10} - 7^9 + 7^8$ ділиться на 43.

3°. Розв'яжіть рівняння: $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) = x^3 - 3x$.

Варіант II

1°. Розкладіть на множники многочлен:

- а) $a^2 - 16c^2$; б) $8c^3 - 1$;
 в) $a^4 - 2a^3c + a^2c^2$; г) $64 - (3x - 2)^2$.

2°. Доведіть, що число $7^9 + 7^8 + 7^7$ ділиться на 57.

3°. Розв'яжіть рівняння: $(x + 3)^2 - (x - 4)(x - 2) = 5$.

Варіант III

1°. Розкладіть на множники многочлен:

- а) $m^2 - 25x^2$; б) $27n^3 + a^3$;
 в) $m^2n^2 - 2mn^2 + n^2$; г) $49 - (2 - 5x)^2$.

2°. Доведіть, що число $8^9 + 8^8 + 8^7$ ділиться на 73.

3°. Розв'яжіть рівняння: $(x - 2)(x^2 + 2x + 4) = x^3 + 2x$.

Варіант IV

1°. Розкладіть на множники многочлен:

- а) $64a^2 - x^2$; б) $1 - 64z^3$;
 в) $x^5 - 2x^4 + x^3$; г) $36x^2 - (1 - x)^2$.

2°. Доведіть, що число $8^8 + 8^7 - 8^6$ ділиться на 71.

3°. Розв'яжіть рівняння: $(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 - 2x$.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Найбільший внесок у розвиток алгебраїчної символіки зробив відомий французький математик Ф. Вієт, якого називали «батьком алгебри». Він часто використовував буквені позначення. Замість x , x^2 , x^3 писав відповідно N , Q , C — перші букви латинських слів *Numerus* (число), *Quadratus* (квадрат), *Cubus* (куб). Рівняння $x^3 + 5x^2 - 4x = 20$ Ф. Вієт записував так:

$$1C + 5Q - 4N \text{ aequ. } 20.$$

Степені чисел тривалий час не мали спеціальних позначень, четвертий степінь числа a записували у вигляді добутку $aaaa$. Пізніше такий добуток почали записувати $a4$, a^{IV} . Записи a^3 , a^4 , a^5 запропонував Р. Декарт.

Формули скороченого множення стародавнім китайським і грецьким математикам були відомі за багато віків до початку нашої ери. Записували їх тоді не за допомогою букв, а словами і доводили геометрично (тільки для додатних чисел). Користуючись малюнком, пояснювали, що для будь-яких чисел a і b площа квадрата зі стороною $a + b$ дорівнює сумі площ двох квадратів зі сторонами a і b та двох прямокутників зі сторонами a і b . Отже, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Подібним способом обґрунтували й інші рівності, які тепер ми називаємо *формулами скороченого множення*.

У підручнику розглянуто найпростіші формули скороченого множення.

Формули квадрата і куба двочлена — найпростіші випадки загальної формули *бінома Ньютона*:

$$(a + b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + nab^{n-1} + b^n.$$



Франсуа Вієт
(1540—1603)

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Розкласти многочлен на множники — означає замінити його добутком кількох многочленів, тотожним даному многочлену.

Найпростіші способи розкладання многочленів на множники:

- винесення спільного множника за дужки;
- спосіб групування;
- використання формул скороченого множення.

Приклади.

$$6a^3x - 9abx = 3ax(2a^2 - 3b);$$

$$ax + bx - ay - by = x(a + b) - y(a + b) = (a + b)(x - y);$$

$$9m^2 - 4 = (3m - 2)(3m + 2).$$

Формули скороченого множення



$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ — квадрат двочлена,

$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ — куб двочлена,

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — різниця квадратів,

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ — різниця кубів,

$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ — сума кубів.

Розкладання многочленів на множники — це перетворення, обернене до множення многочленів. Схематично ці дві операції можна зобразити, наприклад, так:

множення многочленів



$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$



розкладання многочлена на множники.

Запитання для самоперевірки

1. Що означає «розкласти многочлен на множники»?
2. Назвіть найважливіші способи розкладання многочленів на множники.
3. Поясніть на прикладі суть способу винесення спільного множника за дужки.
4. Із якого закону дій випливає алгоритм розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки?
5. Поясніть на прикладі, як розкласти многочлен на множники способом групування.
6. Чому дорівнює квадрат суми двох виразів?
7. Чому дорівнює квадрат різниці двох виразів?
8. Чи може бути від'ємним числом квадрат різниці двох чисел?
9. Чи може бути від'ємним числом різниця квадратів двох чисел?
10. Чому дорівнює добуток суми двох виразів на їх різницю?
11. Чому дорівнює різниця квадратів двох виразів?
12. Чому дорівнює куб суми двох виразів?
13. Чому дорівнює куб різниці двох виразів?
14. Який вираз називають неповним квадратом суми двох виразів?
15. Який вираз називають неповним квадратом різниці двох виразів?
16. Чому дорівнює добуток різниці двох виразів і неповного квадрата їх суми?
17. Чому дорівнює добуток суми двох виразів і неповного квадрата їх різниці?
18. Чому дорівнює різниця кубів двох виразів?
19. Чому дорівнює сума кубів двох виразів?
20. За якими формулами можна розкласти многочлен на множники?
21. Наведіть приклади розкладання многочлена на множники кількома способами.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 4

1. Знайдіть неповний квадрат суми виразів 4 і y^2 :

а) $16 - y^2$; б) $16 + y^2$; в) $(16 + y)^2$; г) $16 + 4y^2 + y^4$.

2. При якому значенні x вираз $x^2 + 4x + 4$ набуває найменшого значення:

а) 2 ; б) -4 ; в) -2 ; г) 6 ?

3. Обчисліть $5^{50} \cdot 3^{50} - (15^{25} - 1)(15^{25} + 1)$:

а) 1 ; б) -1 ; в) 15^{25} ; г) 15^{50} .

4. Чому дорівнює неповний квадрат різниці виразів a і $5c$:

а) a^2 ; б) $a^2 - 5ac + 25c^2$; в) $(a - 5c)^3$; г) $(-5c)^2$?

5. Розкладіть на множники двочлен $x^3 - 27$:

а) $(x - 3)(x^2 - 3x + 9)$; б) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$;

в) $(x - 3)(x - 3)$; г) $(x - 3)^3$.

6. Знайдіть значення виразу $\left(\frac{z}{2} - 3\right)\left(\frac{z}{4} + \frac{3z}{2} + 9\right)$,

якщо $z = 4$:

а) -19 ; б) 19 ; в) $-\frac{19}{2}$; г) $\frac{19}{2}$.

7. Яке число не є коренем рівняння $4x^3 - 16x = 0$:

а) 0 ; б) -2 ; в) 2 ; г) -3 ?

8. Сумою скількох одночленів є многочлен $x^5 - x^4 - x + 1$:

а) 2 ; б) 4 ; в) 3 ; г) 5 ?

9. Спростіть вираз $(16 - 4y^2 + y^4)(y^2 + 4)$:

а) $16 - y^2$; б) $64 + y^6$; в) $(4 + y)^2$; г) $(16 - y^2)^2$.

10. Вираз $a^3 - a$ при кожному натуральному a ділиться на:

а) 5 ; б) 6 ; в) 7 ; г) 9 .

Типові завдання до контрольної роботи № 4

1°. Розкладіть на множники многочлен:

а) $x^2 - 16$; б) $a^3 + c^3$.

2°. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^2 - 25 = 0$; б) $a^2 - 6a + 9 = 0$.

3°. Подайте у вигляді многочлена:

а) $(a - 2)(a^2 + 2a + 4)$; б) $(3x + 1)(9x^2 - 3x + 1)$.

4°. Доведіть тотожність:

$$(a - x)^2 + 4ax = (a + x)^2.$$

5°. Подайте двочлен у вигляді добутку:

а) $\frac{x^3}{27} + 0,008y^3$; б) $-1000a^9 - b^3c^6$.

6°. Знайдіть значення виразу, якщо $p = 0,897$:

$$27p^3 - (3p - 1)(9p^2 + 3p + 1) + p + 2.$$

7°. Розкладіть многочлен на множники:

а) $3a^5b^3 - 24a^2c^6$;
б) $25x^2 - 10xy + y^2 - 36$;
в) $8a^3 + 4a^2b - 2ab^2 - b^3$.

8°. Розв'яжіть рівняння:

а) $x^5 - 4x^3 = 0$;
б) $x^5 + 3x^4 + 3x^3 + x^2 = 0$;
в) $x^4 - 10x^3 + 250x - 625 = 0$.

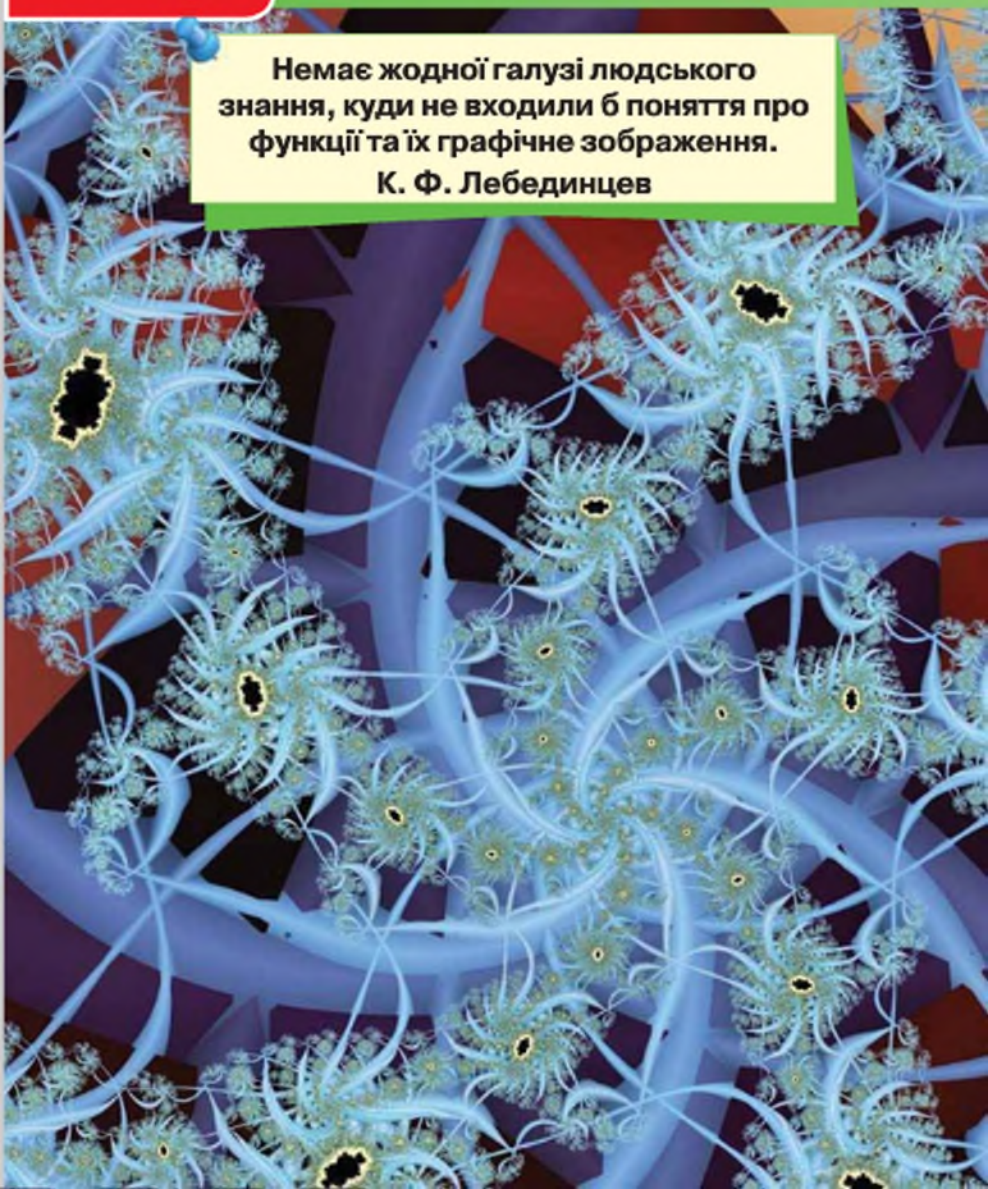
9°. Доведіть, що $97^3 + 78^3 + 97^2 - 78^2$ ділиться на 175.

10°. Розкладіть на множники вираз:

а) $a^4 + 9b^4$; б) $y^5 + y + 1$.

Немає жодної галузі людського знання, куди не входили б поняття про функції та їх графічне зображення.

К. Ф. Лебединцев



Функція — одне з найважливіших понять математики, вона дає можливість досліджувати і моделювати не тільки стани, а й процеси. Дослідження процесів і явищ за допомогою функцій — один з основних методів сучасної науки. Ви вивчатимете функції в усіх наступних класах й у вищих навчальних закладах.

У цьому розділі ви дізнаєтеся про:

- функціональну відповідність;
- способи задання функції;
- графік функції;
- лінійну функцію;
- пряму пропорційність.

§17. ЩО ТАКЕ ФУНКЦІЯ?



Площа квадрата залежить від довжини його сторони. Кожному значенню довжини сторони квадрата відповідає єдине значення його площі (мал. 31).

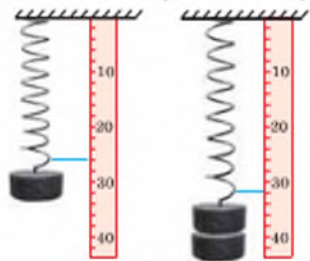


Мал. 31

Маса куска крейди залежить від його об'єму. Кожному значенню об'єму V куска крейди відповідає єдине значення його маси m .

Кожному значенню маси важка, підвішеного до пружини, відповідає певна довжина пружини (мал. 32).

Кожному значенню температури повітря t відповідає єдине значення висоти h стовпчика рідини в термометрі.



Мал. 32

Кожному значенню змінної x відповідає єдине значення виразу $2x - 1$.

Прикладів залежностей і відповідностей між змінними можна навести чимало. Для науки і практики важливо вміти досліджувати такі відповідності. Їх називають *функціональними відповідностями*, або *функціями*.

У розглянутих прикладах ідеться про зв'язок між двома змінними. Одну з них, значення якої вибирають довільно, називають *незалежною змінною*, або *аргументом*. Іншу змінну, яка залежить від аргументу, називають *залежною змінною*, або *функцією*.

Незалежними змінними (аргументами) у наведених вище прикладах є: довжина сторони квадрата, об'єм куска крейди, маса важка, температура повітря. Їх значення можна обирати довільно. Залежними змінними будуть: площа квадрата, маса крейди, довжина пружини, висота стовпчика рідини в термометрі.



Якщо кожному значенню змінної x з деякої множини D відповідає єдине значення змінної y , то змінну y називають функцією від x .

За таких умов змінну x називають аргументом функції y , множину D — областю визначення функції, а відповідність між x і y — функціональною відповідністю, або функцією.

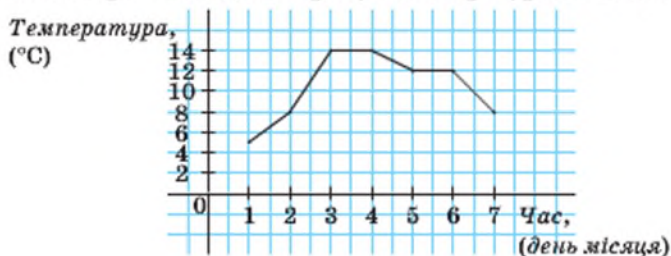
Усі значення, які може набувати аргумент функції, утворюють *область визначення функції (D)*. А всі відповідні значення функції — *область значень функції (E)*.

Наприклад, площа S квадрата — функція від довжини його сторони a . Тут S — функція, a — аргумент. Область визначення цієї функції — множина всіх додатних чисел.

Висота h стовпчика рідини в термометрі — функція від температури t . Тут h — функція, t — аргумент. Нехай, наприклад, протягом доби температура повітря підвищувалась від -5° до 7° , а висота стовпчика рідини в термометрі — від 20 см до 32 см. Цій зміні відповідає деяка функція, областю визначення якої є проміжок від -5° до 7° , а областю значень — проміжок від 20 см до 32 см.

Функція — одне з найважливіших понять математики. З її допомогою моделюють і досліджують різноманітні процеси, що відбуваються навколо нас. Для цього реальну ситуацію перекладають зі звичайної мови на алгебраїчну, тобто складають *математичну модель* даної відповідності. Розглянемо два приклади. На малюнку 33 зображено прогноз зміни погоди на

перший тиждень листопада. У таблиці задано відповідність між днями тижня і температурою, що була в ці дні. Зображені графік і таблиця — моделі функціональних відповідностей між конкретними днями року і температурою в ці дні.



Мал. 33

01.11	02.11	03.11	04.11	05.11	06.11	07.11
+5°	+7°	+13°	+13°	+10°	+12°	+8°

Задавати функціональні відповідності можна різними способами. Часто їх задають *формулами*. Наприклад, відповідність між довжиною a сторони квадрата і його площею S можна задати формулою $S = a^2$.

Відповідність між радіусом r кола і довжиною C кола можна задати формулою $C = 2\pi r$.

Відповідність між значеннями змінної x і змінної y виразу $2x - 1$ можна задати формулою $y = 2x - 1$.

Задання функції формулою зручне тим, що дає можливість знаходити значення функції для довільного значення аргументу. Таке задання функції досить економне: здебільшого формула займає один рядок.

Якщо функцію задають формулою і нічого не говорять про область її визначення, то вважають, що ця область — множина всіх значень змінної, при яких формула має зміст. Наприклад, область визначення функції $y = 2x - 1$ — множина всіх чисел, а функції $y = \frac{3}{x-1}$ — множина всіх чисел, крім

числа 1, оскільки на 0 ділити не можна.

Зверніть увагу!



Областю визначення функції, яка задається многочленом з однією змінною, є множина всіх чисел.

Задавати функції можна й у вигляді *таблиці*. Наприклад, функцію $y = 2x - 1$ для перших десяти натуральних значень x можна задати у вигляді такої таблиці.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Тут:

- область визначення: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;
- область значень: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19.

Табличний спосіб задання функції зручний тим, що для певних значень аргументу до таблиці вже занесено відповідні значення функції, тому не треба робити будь-яких обчислень. Незручний він тим, що таблиця займає більше місця. До того ж, як правило, містить значення функції не для всіх значень аргументу, а тільки для деяких.

Функцію можна задавати і *словесно*. Наприклад, якщо кожному цілому числу поставити у відповідність його квадрат, то одержимо функцію, областю визначення якої є множина цілих чисел, а областю значень — множина квадратів натуральних чисел і число 0.



Хочете знати ще більше?

Слово *функція* має й інше значення: діяльність, виконання. Наприклад, говорять про функції старости класу, функції печінки в організмі людини. І слово *аргумент* нерідко використовують в іншому значенні. У логіці під словом *аргумент* розуміють доказ, підставу, на основі якої встановлюють істинність або хибність того чи іншого судження.

Зверніть увагу на співвідношення понять «функціональна залежність» і «функціональна відповідність» (мал. 34). З малюнка видно, що існують відповідності, які не є залежностями. Наприклад, формули $y = 5 + 0 \cdot x$, $y = 1^x$ задають функції, але в них змінні y не залежать від x .

На координатній прямій, крім точок з раціональними координатами, існує безліч таких точок, координати яких — числа не раціональні. Їх називають *іраціональними*.

Раціональні числа разом з іраціональними утворюють **множину дійсних чисел** (R). Докладно з дійсними числами та їх властивостями-



Мал. 34

ми ви ознайомитесь у 8 класі. А доти, маючи на увазі множину дійсних чисел, будемо використовувати словосполучення «усі числа».

Перевірте себе

1. Сформулюйте означення функції.
2. Наведіть приклади функції.
3. Що таке аргумент функції?
4. Що таке область визначення функції?
5. Що таке область значень функції?
6. Як можна задавати функції?

✓ Виконаємо разом!

1. Знайдіть значення функції, заданої формулою $y = 2x + 7$, які відповідають таким значенням аргументу: 0; 4; 0,8.

✓ Розв'язання.

$$\text{Якщо } x=0, \text{ то } y = 2 \cdot 0 + 7 = 7;$$

$$\text{якщо } x=4, \text{ то } y = 2 \cdot 4 + 7 = 15;$$

$$\text{якщо } x=0,8, \text{ то } 2 \cdot 0,8 + 7 = 8,6.$$

2. Знайдіть область визначення функції:

$$\text{а) } y = 1 - 5x + 3x^2 + x^3; \quad \text{б) } y = \frac{5}{x^2 - 9}.$$

✓ Розв'язання.

а) Формула, за допомогою якої задається функція, — многочлен, а тому її область визначення — множина усіх чисел;

б) змінна x може набувати будь-яких значень, крім тих, при яких знаменник дроби $\frac{5}{x^2 - 9}$ дорівнює нулю. Щоб їх знайти, розв'яжемо рівняння $x^2 - 9 = 0$.

$$(x - 3)(x + 3) = 0, \text{ звідси } x = 3, x = -3.$$

Отже, область визначення функції — множина усіх чисел, крім $x = 3$ і $x = -3$.

Виконайте усно

673. Чи залежить периметр квадрата від довжини його сторони? Чи є периметр квадрата функцією від довжини сторони квадрата?

674. Об'єм куба знаходять за формулою $V = a^3$, де a — довжина ребра куба. Чи задає ця формула функцію? Який її аргумент?
675. Площу круга знаходять за формулою $S = \pi r^2$, де r — радіус круга. Чи задає ця формула функцію? Яка її область визначення?
676. Густина міді — $8,6 \text{ г/см}^3$. Виразіть формулою відповідність між об'ємом V куску міді та його масою m . Чи є m функцією від V ? Який її аргумент? Яка область визначення?
677. Швидкість автобуса — 55 км/год . Як залежить пройдений автобусом шлях s від часу t ? Чи є змінна s функцією від t ?
678. Площа прямокутника зі сторонами 5 см і $x \text{ см}$ дорівнює $S \text{ см}^2$. Чи є змінна S функцією від x ? Який її аргумент?

Рівень



679. Виразіть формулою відповідність між довжиною a сторони рівностороннього трикутника і його периметром P . Чи є змінна P функцією від a ?



680. Чи залежить діаметр кола d від його радіуса r ? Виразіть цю залежність формулою.



681. Міри суміжних кутів — α і β . Задайте формулою залежність α від β . Чи є α функцією від β ? Який її аргумент?

682. A і B — міри гострих кутів прямокутного трикутника ABC . Задайте формулами залежності A від B і B від A . Чи є ці залежності функціями? Які їх області визначення?

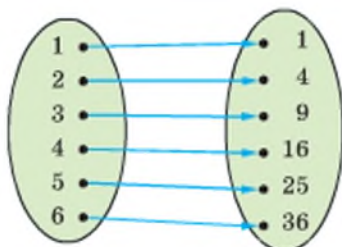
683. Функцію задано формулою $y = 2x + 5$. Знайдіть значення функції, якщо x дорівнює: 1 ; 0 ; -3 ; 7 ; 1000 .



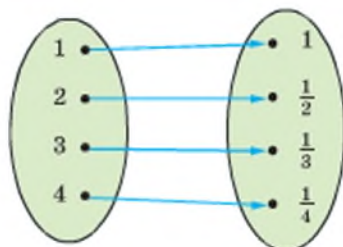
684. Функцію задано формулою $y = \frac{6}{x}$. Заповніть таблицю.

x	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y													

685. Складіть таблицю значень функції $m = 42 - 3n$ для перших десяти натуральних значень змінної n .




Мал. 35



Мал. 36


686. Відповідність між шістьма першими натуральними числами та їх квадратами зображено на малюнку 35. Чи є ця відповідність функцією? Яка її область визначення? А область значень?

 **687.** На малюнку 36 зображено відповідність між числами 1, 2, 3, 4 та оберненими до них числами. Чи є ця відповідність функцією? Яка її область визначення? А область значень?

688. Функцію задано формулою $y = \frac{2}{3}x$. При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 20?

689. Функцію задано формулою $y = 0,3x$. Заповніть таблицю.

x	-10	-3					
y			-0,3	0	1,2	1,5	15


 **690.** Функцію задано формулою $y = x^2 + 3$. Складіть таблицю її значень для перших десяти натуральних значень її аргументу.

691. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

а) $y = 3x - 7$; б) $y = \frac{x}{x+5}$; в) $y = 5x^2 - x + 3$.

692. Учень мав 5 грн. Він купив x наклейок по 60 к., після чого в нього залишилось y к. Задайте формулою функцію, яка виражає залежність y від x . Яка її область визначення?

693. Ціна 1 кг товару — 2,5 грн. Як залежить вартість z цього товару від його маси m ? Яка вартість товару, маса якого дорівнює 18 кг? Товар якої маси коштує 125 грн?

 **694.** Нафта проходить трубою зі швидкістю 12 т/год. Скільки нафти проходить такою трубою за 3 год; за t год? Напишіть відповідну формулу.

695. Скільки хвилин у t год? Виразіть цю відповідність формулою. Складіть таблицю для 10 значень аргументу.

696. Запишіть формулу функції, якщо:

- а) значення функції протилежні подвоєним значенням аргументу;
 б) значення функції в 5 разів більші від значень аргументу;



697. Знайдіть значення функції, заданої формулою:

а) $y = 8x - 5$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -2 ; 0 ; $1,5$; 12 ; 25 ;

б) $y = -\frac{x}{2} + 1$, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює -8 ; -1 ; 0 ; 1 ; 20 .

698. Знайдіть значення аргументу, при якому:

а) значення функції $y = 3x + 2$ дорівнює 8 ; 2 ;

б) значення функції $y = \frac{4}{x-3}$ дорівнює -2 ; 2 .

Рівень Б

699. Напишіть формулу, яка виражає залежність кута α при основі рівнобедреного трикутника від кута β при його вершині. Чи задає ця формула функцію? Яка її область визначення?



700. Швидкість автомобіля — 70 км/год. Виразіть формулою залежність шляху s , пройденого цим автомобілем, від часу t . Заповніть таблицю.

t , год	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
s , км										


701. Турист перебуває на відстані 5 км від міста і наближається до нього зі швидкістю 4 км/год. На якій відстані від міста буде турист через 10 ; 20 ; 30 хв? Чи є ця відстань функцією від часу? Задайте її формулою. Яка її область визначення?




702. На складі було 600 т вугілля. Щодня на склад привозили по 40 т вугілля. Виразіть формулою залежність кількості вугілля m на складі від часу t . Чи є ця залежність функцією?

703. Складіть таблицю значень функції $y = \frac{60}{x+1}$ для цілих значень аргументу x , якщо $-5 \leq x \leq 5$.

704. В одному дюймі — 2,54 см. Виразіть формулами відповідності, які дають змогу перевести довжини в дюймах у сантиметри і в сантиметрах — у дюйми. Складіть відповідні таблиці.

 **705.** Периметр квадрата $P = 4a$, де a — довжина його сторони. Виразіть a через P .


706. Довжина кола $C = 2\pi r$, де r — його радіус. Виразіть r через C .

 **707.** Знайдіть область визначення і область значень функції, заданої формулою:

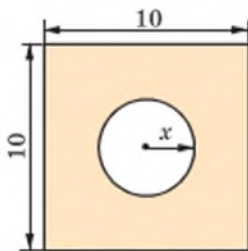
а) $y = \frac{3}{4}x$; б) $y = \frac{3}{4x}$; в) $y = \frac{3}{4+x}$; г) $y = \frac{1}{x(x-3)}$; ґ) $y = x^2$.

708. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

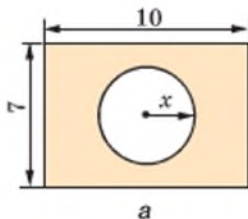
а) $y = x(x+5)$; б) $y = (x^2+6)(x+8)$; в) $y = \frac{16}{x+5}$;
 г) $y = \frac{10}{8x-1}$; ґ) $y = \frac{x}{x^2-36}$; д) $y = \frac{2x}{1-25x^2}$.

 **709.** Із квадрата, сторона якого дорівнює 10 см, вирізали круг радіуса x см (мал. 37). Як залежить площа утвореної фігури від x ? Знайдіть область визначення цієї функції.

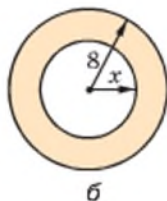
710. Запишіть формулу, за допомогою якої знаходять площі зафарбованих фігур, зображених на малюнку 38, а, б. Знайдіть область визначення одержаних функцій.




Мал. 37



Мал. 38



 **711*.** Складіть таблицю значень функції для цілих значень аргументу x , якщо $-3 \leq x \leq 3$:

а) $y = \begin{cases} 2x+5, & \text{якщо } x \leq 0, \\ -2x+5, & \text{якщо } x > 0; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} x^2+3, & \text{якщо } x \leq 0, \\ \frac{x}{2}+3, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$

712*. Складіть таблицю значень функції для цілих значень аргументу x , якщо $-3 \leq x \leq 3$:

$$\text{а) } y = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x \leq -1, \\ \frac{1}{x}, & \text{якщо } x > -1; \end{cases} \quad \text{б) } y = \begin{cases} -(x+1)^2, & \text{якщо } x \leq 0, \\ x^2 + 2, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

713*. У торбині є n однакових цукерок. З них у червоних обгортках на 6 цукерок більше, ніж у зелених. Яка ймовірність того, що взята навмання цукерка виявиться в червоній обгортці? Складіть таблицю для випадків, коли n дорівнює 10, 20, ..., 80.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

714. Спростіть вираз:

а) $(0,5a - 0,4b)(0,5a + 0,4b) \cdot 2ab$;

б) $10x^2y(0,2x + 2y)(-0,2x + 2y)$;

в) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y\right) \cdot (-9xy)$.

715. Позначте на координатній площині точки $A(5; 2)$, $B(3; 2)$, $C(0; 2)$, $M(-1; 2)$, $H(-3; 2)$, $P(2; 2)$. Чи всі вони лежать на одній прямій? Які координати мають точки, що є серединами відрізків AB , AC , AM , AH і AP ?

716. Розв'яжіть рівняння: а) $4(x - 3) + 2(5 - x) = 8$;

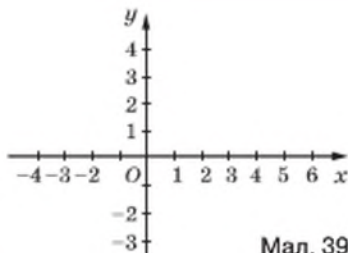
б) $7(5 - y) + 8(y - 3) = 18$.

717. На входних дверях будинку встановлений домофон із цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Для кожної квартири надається кодовий ключ із двох цифр, що дозволяє за певних умов відкривати входні двері до будинку. Скільки кодових ключів є вільними, якщо в будинку — 96 квартир?

§18. ГРАФІК ФУНКЦІЇ



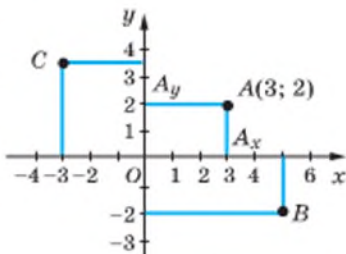
Проведемо на площині дві перпендикулярні координатні прямі x і y , які перетинаються в початку відріку — точці O (мал. 39).



Мал. 39

Площину, на якій задано такі координатні прямі, називають координатною площиною, пряму x — віссю абсцис, пряму y — віссю ординат, точку O — початком координат.

Кожній точці координатної площини відповідає пара чисел. Наприклад, точці A відповідає пара $(3; 2)$, бо пряма AA_x , перпендикулярна до осі x , перетинає її в точці з координатою 3, а пряма AA_y , перпендикулярна до осі y , перетинає її в точці з координатою 2 (мал. 40). Говорять, що точка A має координати 3 і 2.



Мал. 40

Записують: $A(3; 2)$. Тут 3 — абсциса, 2 — ордината точки A . Першою завжди пишуть абсцису. Початок координат — $O(0; 0)$.

Кожній парі чисел на координатній площині відповідає єдина точка. На малюнку 40 показано, як позначити, наприклад, точки $B(5; -2)$ і $C\left(-3; 3\frac{1}{2}\right)$.

Нехай маємо функцію $y = 2x - 3$, де $-1 \leq x \leq 5$. Складемо таблицю значень цієї функції для цілих значень аргументу.

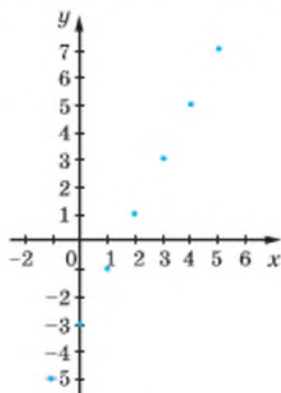
x	-1	0	1	2	3	4	5
y	-5	-3	-1	1	3	5	7

Нанесемо на координатну площину точки, координати яких подано в цій таблиці. Абсциси точок дорівнюють значенням аргументу x даної функції, а ординати — відповідним значенням функції y , тобто $A(-1; -5)$, $B(0; -3)$ і т. д. Дістанемо 7 точок (мал. 41, a), усі вони належать одній прямій.

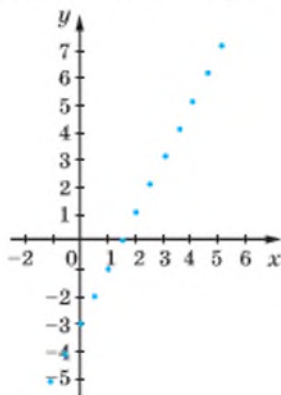
Надамо аргументу x ще кілька дробових значень й обчислимо відповідні їм значення функції:

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$
y	-4	-2	0	2	4	6

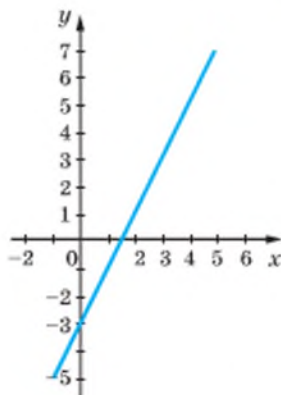
Доповнимо малюнок 41, а точками, координати яких подано в цій таблиці (мал. 41, б). Вони також розміщені на тій самій прямій. Якщо надавати аргументу x інших значень (таких, що $-1 \leq x \leq 5$) і позначати на координатній площині відповідні точки, то ці точки утворять відрізок (мал. 41, в). Цей відрізок — графік функції $y = 2x - 3$, область визначення якої — проміжок $-1 \leq x \leq 5$, а область значень $-5 \leq y \leq 7$.



Мал. 41, а



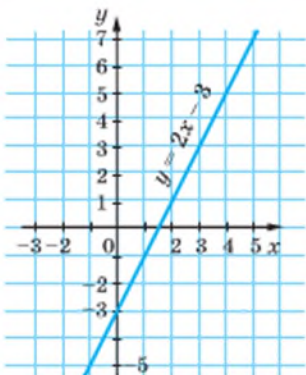
Мал. 41, б



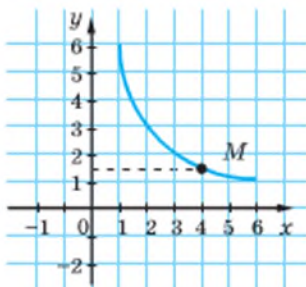
Мал. 41, в

Якщо побудований відрізок продовжити уявно в обидва боки, то одержимо пряму. Ця пряма — графік функції, заданої тією самою формулою ($y = 2x - 3$), але на множині всіх чисел (мал. 42).

Графіком функції називається множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, ординати — відповідним значенням функції.



Мал. 42



Мал. 43

Якщо описаним способом побудувати графік функції $y = \frac{6}{x}$ за умови, що $1 \leq x \leq 6$, то дістанемо криву лінію, зображену на малюнку 43.

Маючи графік функції, можна для будь-якого значення аргументу (з області визначення) вказати відповідне значення функції. Для прикладу знайдемо значення функції $y = \frac{6}{x}$,

якщо $x = 4$, користуючись побудованим графіком. Шукаємо на осі x точку з абсцисою 4, на графіку знаходимо точку M з абсцисою 4, а на осі ординат — ординату точки M ; вона дорівнює 1,5. Отже, користуючись графіком функції, можна скласти таблицю її значень, тобто графік задає функцію. *Графічний спосіб* задання функції зручний своєю наочністю. Дивлячись на графік, одразу можна з'ясувати властивості функції, яку він задає. Зокрема, можна встановити такі її характеристики:

- область визначення і область значень функції;
- при яких значеннях аргументу значення функції додатні, при яких — від'ємні, при яких дорівнюють нулю;
- на яких проміжках функція *зростає*, а на яких — *спадає*.

♦ Функцію називають *зростаючою*, якщо більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції.

Функцію називають *спадною*, якщо більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції.



Хочете знати ще більше?

У сучасній математиці функції відіграють важливу роль. Їх часто використовують для створення математичних моделей різних процесів, явищ. Коли росте дитина, змінюються її зріст, об'єм, маса; коли злітає літак, змінюються його швидкість, відстань від поверхні землі, маса пального в баках; коли будують висотний будинок, змінюються його висота, маса, вартість тощо. Усі такі процеси (а їх — мільярди) зручно моделювати за допомогою функцій. Функція — математична модель реальних процесів. Докладніше про це ви дізнаєтеся в старших класах.

Існують прилади, які самі викреслюють графіки функцій: барографи, термографи, кардіографи тощо. Наприклад, кардіограф креслить графік-кардіограму (мал. 44), який характеризує роботу серця. Прилад термограф відмічає зміну температури за добу, тиждень, місяць. Фахівцям треба вміти читати такі графіки.



Мал. 44

Перевірте себе

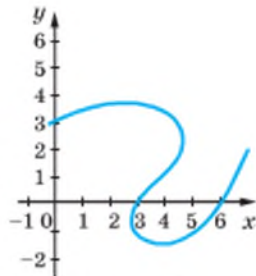
1. Зобразіть координатну площину.
2. Що таке координатні осі, початок координат?
3. Що таке абсциса, ордината, координати точки?
4. Що таке графік функції?

✓ Виконаємо разом!

1. Чи є графіком функції лінія, зображена на малюнку 45?

✓ Розв'язання. На даній лінії є три різні точки з абсцисами 4. Якби така функція y від аргументу x існувала, то одному значенню $x = 4$ відповідали б три різні значення функції. За означенням функції такого не може бути.

Відповідь. Дана лінія не є графіком функції.



Мал. 45

2. Визначте, чи належать графіку функції $y = \frac{4}{x} - 3$ точки $A(-4; -4)$; $B(-2; -1)$; $C\left(\frac{1}{2}; 5\right)$; $D\left(8; -2\frac{1}{2}\right)$.

✓ Розв'язання. Якщо точка належить графіку функції, то її координати мають задовольняти рівність, що задає дану функцію. Перевіримо це для кожної з точок A , B , C і D цього графіка.

Підставимо координати точки $A(-4; -4)$ в рівність $y = \frac{4}{x} - 3$. Маємо: $-4 = \frac{4}{-4} - 3$; $-4 = -1 - 3$; $-4 = -4$. Отже, точка A належить графіку функції $y = \frac{4}{x} - 3$.

Для точки $B(-2; -1)$: $-1 = \frac{4}{-2} - 3$; $-1 = -2 - 3$; $-1 \neq -5$. Отже, точка B не належить графіку функції $y = \frac{4}{x} - 3$.

Для точки $C\left(\frac{1}{2}; 5\right)$ маємо: $5 = \frac{4}{\frac{1}{2}} - 3$; $5 = 8 - 3$; $5 = 5$. Отже, точка C належить графіку.

Для точки $D\left(8; -2\frac{1}{2}\right)$: $-2\frac{1}{2} = \frac{4}{8} - 3$; $-2\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 3$; $-2\frac{1}{2} = -2\frac{1}{2}$.
Отже, точка D належить графіку.

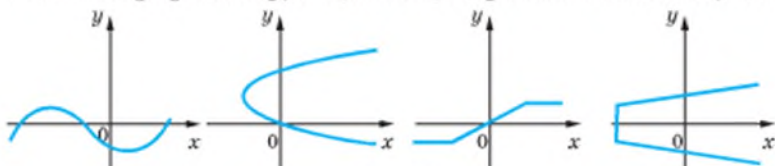
Відповідь. Точки A , C і D належать графіку функції $y = \frac{4}{x} - 3$, а точка B не належить цьому графіку.

Виконайте усно

718. Провідмінійте слово:

- а) аргумент; б) функція; в) графік.

719. Чи є графіками функцій лінії, зображені на малюнку 46?

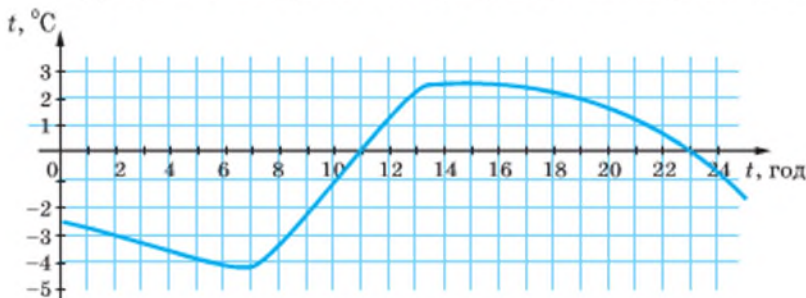


Мал. 46

720. На малюнку 47 зображено графік зміни температури повітря (в градусах Цельсія) за добу (по годинах).

Установіть:

- проміжок часу, впродовж якого температура була додатною; від'ємною;
- о котрій годині температура дорівнювала -3° ; -1° ; 0° ; 2° ;
- яка температура була о 7 год ранку; о 14 год; о 21 год;
- із якого і по який час температура знижувалася; підвищувалася;
- упродовж якого часу температура була сталою; якого значення при цьому досягла;
- проміжок часу, коли температура була нижча, ніж -3° .



Мал. 47

721. Доведіть, що графік функції $y = x^2 + 1$ не перетинає осі абсцис.

722. Чи перетинає вісь абсцис графік функції $y = x^2 - 9$?

723. Графік якої з даних функцій проходить через початок координат:

- | | | |
|---------------------|-----------------------|---------------------|
| а) $y = 0,5x - 1$; | б) $y = -25x^2$; | в) $y = 3x$; |
| г) $y = px + 2$; | д) $y = 3 \cdot 3x$; | е) $y = x - 3x^2$? |

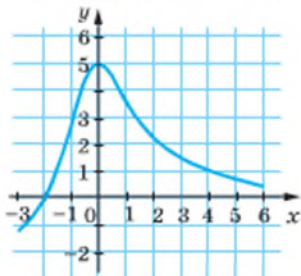
Рівень А

724. Позначте на координатній площині точки $A(5; 4)$, $B(3; 3)$, $C(1; 0)$, $D(7; 3)$, $E(-2; 5)$, $F(-2; -2)$. Побудуйте прямі AC , BD , EF . Знайдіть координати точок, у яких ці прямі попарно перетинаються.

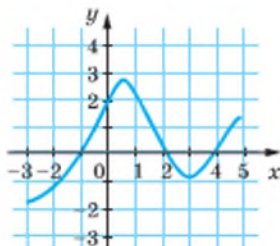
725. На малюнку 48 зображено графік деякої функції. Знайдіть:

а) значення цієї функції, які відповідають таким значенням аргументу: -1 ; 0 ; 3 ; 5 ;


б) значення аргументу, які відповідають таким значенням функції: -1 ; 0 ; 3 ; 4 .



Мал. 48



Мал. 49

 **726.** За графіком функції (мал. 49) заповніть таблицю.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y									

727. За графіком функції (див. мал. 42) заповніть таблицю.

x	-1	-0,5			1,5			3	3,5
y			-3	-1		1	2		

728. За малюнком 50 знайдіть:

а) значення y , для яких $x = -3$;

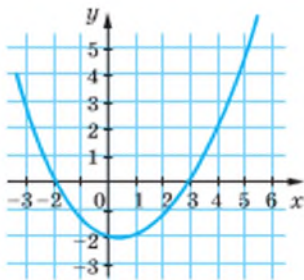
-1 ; 0 ; 1 ; 4 ;

б) значення x , для яких


$y = -1,5$; -1 ; 0 ; 1 ; $2,5$;

в) значення x , для яких значення y додатні;

г) значення x , для яких значення y від'ємні.



Мал. 50

 **729.** Визначте, чи належать графіку функції $y = 2x - 1$ точки:

а) $A(5; 1)$;

б) $B(-1; 3)$;

в) $C(-1; -3)$;

г) $D(3; 5)$.

730. Які з точок $A(5; -4)$, $B(3; 3)$, $C(1; 0)$, $D(1; 7)$, $E(-2; 5)$ належать графіку функції:


а) $y = 5x + 2$; б) $y = -x + 1$; в) $y = x^2 + 1$; г) $y = 10x - 3$?

731. Функцію задано формулою $y = \frac{1}{2}x$, якщо $1 \leq x \leq 12$. За-


повніть таблицю і побудуйте графік даної функції.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y												


Побудуйте графік функції (732—733).

 **732.** а) $y = 2x - 1$, якщо $0 \leq x \leq 7$; б) $y = 0,5x + 3$, якщо $-6 \leq x \leq 6$.

733. а) $y = \frac{2}{3}x + 1$, якщо $-3 \leq x \leq 6$; б) $y = -x$, якщо $-5 \leq x \leq 4$.

 **734.** Функцію $y = 0,5x + 3$ задано на множині натуральних чисел, не більших від числа 8. Побудуйте її графік.

735. Функція $y = 5 - x$ задана на множині цілих чисел, що задовольняють умову $-7 \leq x \leq 7$. Побудуйте графік цієї функції.

 **736.** Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 1 - 0,8x$. Користуючись цим графіком, знайдіть:

а) значення y , для яких $x = 0; 1; -1; 2; -2; 5$;

б) значення x , для яких $y = -7; -5; -3; 1; 0; 2; 5$;

в) значення x , для яких значення y додатні;

г) значення x , для яких значення y від'ємні.

737. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = \frac{x-4}{2}$.

За допомогою графіка знайдіть:

а) значення x , для яких $y = -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3$;

б) значення y , для яких $x = -2; 0; 2; 4; 6; 8$;

в) значення x , для яких значення y додатні;

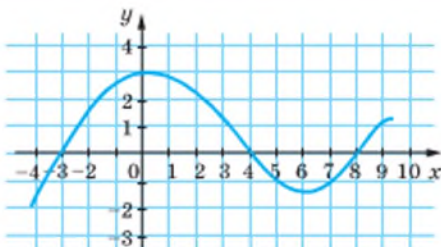
г) значення x , для яких значення y від'ємні.

Рівень **Б**

738. На малюнку 51 зображено графік деякої функції.

1. Знайдіть: а) область визначення функції; б) значення функції, яке відповідає значенню аргументу, що дорівнює $-4; -3; 0; 2; 3; 4; 6$.

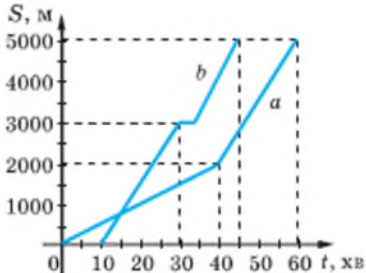
2. При яких значеннях аргументу: а) значення функції дорівнює $-1; 0; 2; 4$; б) функція набуває додатних значень; в) функція зростає; г) функція спадає?



Мал. 51

739. На малюнку 52 зображено графіки руху пішохода (лінія *a*) і велосипедиста (лінія *b*). Користуючись графіком, визначте:

- а) чи одночасно вони почали рухатись;
 б) чи сталою була швидкість кожного.



Мал. 52

740. Графік якої функції проходить через точку $A(3; -2)$:

- а) $y = 3x - 8$; б) $y = 2(x - 4)$; в) $y = 7(1 - 5x)$;
 г) $y = 3x - 2$; р) $y = 2\frac{1}{3}x - 9$; д) $y = \frac{1}{7}(1 - 5x)$?

Визначте, чи належать графіку функції дані точки (**741—742**).



741. а) $y = 0,5x + 4$; $A(4; 6)$, $B(-8; 0)$, $C(2; 5)$;

б) $y = -12x + 17$; $A(1; 5)$, $B(-\frac{1}{3}; 11)$, $C(0,5; 11)$;

в) $y = 4 - \frac{8}{x}$; $A(1; -4)$, $B(\frac{1}{2}; 0)$, $C(4; -2)$.

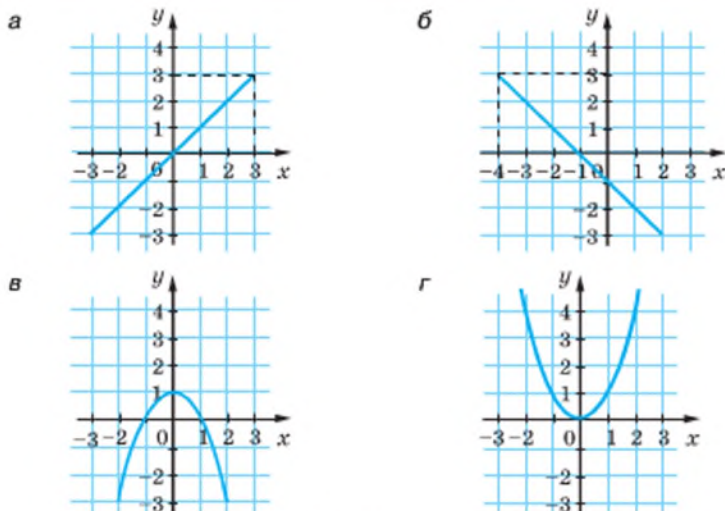
742. а) $y = \frac{1}{x-6}$; $A(7; 1)$, $B(6; 0)$, $C(3; \frac{1}{3})$;

б) $y = x(x - 5)$; $A(0; -5)$, $B(5; 0)$, $C(0; 0)$;

в) $y = (6 - x)^2$; $A(7; -1)$, $B(8; 4)$, $C(4; 4)$.



743. Функцію задано графічно (мал. 53). Для кожного з випадків a — z складіть таблицю деяких її значень. Задайте функції a і z формулами.



Мал. 53

Побудуйте графік функції та опишіть її властивості (744—745).

744. а) $y = 1,3x + 2$, якщо $-3 \leq x < 4$; б) $y = 4 - 2t$, якщо $-2 \leq t \leq 5$.

745. а) $y = \frac{x+6}{2}$, якщо $-8 \leq x \leq 4$; б) $y = -\frac{1}{5}x$, якщо $-5 \leq x \leq 5$.

Побудуйте графік функції та з'ясуйте, які з даних функцій зростаючі, які — спадні (746—747).

746. а) $y = 2x - 5$; б) $y = 3 - 2x$; в) $y = 0,1x$.

747. а) $y = -\frac{1}{5} + 2x$; б) $y = \frac{3x-1}{5}$; в) $y = \frac{17-x}{5}$.

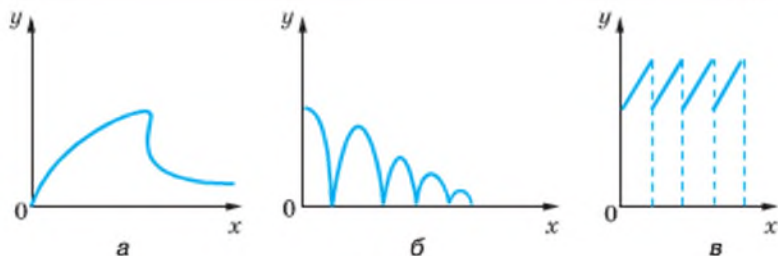
748. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 2(1 - x)$. Знайдіть значення аргументу, при яких значення функції більші за -3 і менші за 7 .

749. Графік функції $y = 2x + m$ проходить через точку $A(-2; 5)$. Знайдіть значення m .

750. Графік функції $y = kx + 2$ проходить через точку $B(3; 8)$. Знайдіть значення k .

751. Функцію задано формулою $y = x^2 - m$. При якому значенні m графік цієї функції проходить через початок координат?

752. Установіть, який із графіків (мал. 54) відповідає кожній з описаних ситуацій:



Мал. 54

- 1) на газоні росте трава, яку регулярно викошують (x — час, y — висота трави);
- 2) груша росте, потім її зривають і висушують (x — час, y — маса груші);
- 3) м'яч падає з деякої висоти на підлогу (x — час, y — висота м'яча над підлогою).

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

753. Розкладіть на множники многочлен:

- а) $ab + bc + ca + c^2$; б) $2x - yx + 2y - y^2$;
 в) $3 - 6a + z - 2az$; г) $10ax - 5bx + 2ay - by$.

754. Доведіть тотожність $(n^2 + 1)^2 - (n^2 - 1)^2 = 4n^2$. Користуючись нею, доведіть, що квадрат кожного парного числа дорівнює різниці квадратів двох деяких цілих чисел.

755. Підприємець купує у фермера картоплю зі знижкою 10% її оптової ціни, а продає картоплю в роздріб за ціною, що перевищує оптову на 10%. Який відсоток прибутку має підприємець?

756. Розв'яжіть рівняння:

- а) $(x + 3)^2 = x^2 + 9x$; б) $(y - 5)^2 = y(y + 2)$;
 в) $(1 - z)^2 = 3 + z^2$; г) $(7 - x)^2 - x^2 = 35$.

§19. ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ



Багато функцій, які доводиться досліджувати, можна задати формулою $y = kx + b$, де k і b — дані числа. Наприклад, якщо маса порожньої бочки дорівнює 30 кг, а густина бензину —

$0,8 \text{ кг/дм}^3$, то залежність між масою m бочки з бензином і об'ємом V л бензину в ній можна виразити формулою $m = 0,8V + 30$.

Якщо маса 1 м дроту дорівнює 50 г, а котушки без дроту — 200 г, то залежність між масою m котушки з дротом і довжиною l м намотаного на ній дроту можна виразити формулою $m = 50l + 200$ (мал. 55). Такі функції називають лінійними.



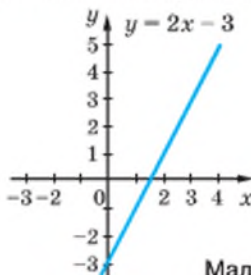
Мал. 55

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x — аргумент, k і b — дані числа.

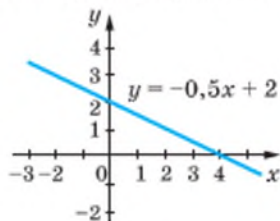
Розглянемо дві лінійні функції, задані формулами

$$y = 2x - 3 \text{ і } y = -0,5x + 2$$

на множині всіх чисел (R). Описаним у попередньому параграфі способом побудуємо графіки даних функцій (мал. 56 і 57).



Мал. 56



Мал. 57

Бачимо, що графік кожної з наведених функцій — пряма. Можна узагальнити приклади та довести таке твердження.

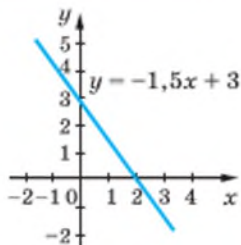


Графік кожної лінійної функції — пряма. І кожна пряма на координатній площині, не перпендикулярна до осі абсцис, — графік деякої лінійної функції.

Для побудови прямої, якою є графік кожної лінійної функції, достатньо знати координати двох точок. Щоб побудувати графік функції $y = -1,5x + 3$, треба скласти таблицю для двох будь-яких значень аргументу. Наприклад:

x	0	2
y	3	0

Позначимо на координатній площині точки з координатами 0 і 3, 2 і 0 та проведемо через них пряму (мал. 58). Це і є графік функції $y = -1,5x + 3$.



Мал. 58

Властивості лінійної функції $y = kx + b$ для різних значень k можна визначити за графіками, представленими, наприклад, на малюнках 56 і 57. Подаємо їх у вигляді таблиці.

Властивості функції	Вид функції ($k \neq 0$)	
	$y = kx + b, k > 0$	$y = kx + b, k < 0$
Область визначення	Усі числа (R)	Усі числа (R)
Область значень	Усі числа (R)	Усі числа (R)
Додатні значення	$x > -\frac{b}{k}$	$x < -\frac{b}{k}$
Від'ємні значення	$x < -\frac{b}{k}$	$x > -\frac{b}{k}$
Проміжки спадання	—	Усі числа (R)
Проміжки зростання	Усі числа (R)	—

Властивості функції $y = kx + b$ за умови, що $k = 0$, пропонуємо сформулювати самостійно.



Хочете знати ще більше?

Розглянемо окремі випадки лінійних функцій.

Якщо $k = 0$, то функція

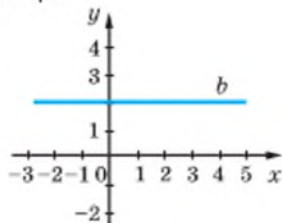
$$y = kx + b$$

має вигляд $y = b$. Графік такої функції — пряма, паралельна осі x (мал. 59).

Якщо $b = 0, k \neq 0$, то лінійна функція має вигляд

$$y = kx.$$

Цю функцію називають *прямою пропорційністю*, оскільки будь-які (відмінні



Мал. 59

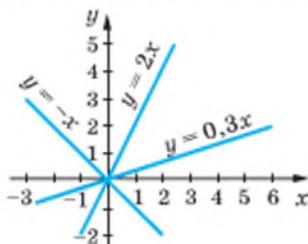
від нуля) значення такої функції пропорційні відповідним значенням аргументу. Для прикладу складемо таблицю значень функції $y = 3x$.

x	-2	-1	1	2	3	4	5
y	-6	-3	3	6	9	12	15

Тут числа 12 і 15 пропорційні числам 4 і 5, адже $12 : 15 = 4 : 5$; числа -6 і 9 пропорційні числам -2 і 3, адже $-6 : 9 = -2 : 3$ і т. д.

Графік прямої пропорційності — пряма, що проходить через початок координат.

На малюнку 60 зображено графіки функцій $y = 2x$, $y = -x$, $y = 0,3x$.



Мал. 60

Перевірте себе

1. Що таке функція?
2. Сформулюйте означення лінійної функції.
3. Що є графіком лінійної функції?
4. Чи правильно, що кожна пряма на координатній площині — графік деякої лінійної функції?
5. Як побудувати графік лінійної функції?
6. Наведіть приклади зростаючої лінійної функції.

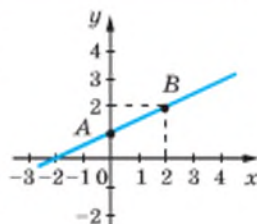
Виконайте усно

1. Побудуйте графік функції, заданої формулою $y = 0,5x + 1$.

✓ **Розв'язання.** Дана функція лінійна, її графік — пряма. Визначимо координати двох точок цієї прямої, склавши таблицю.

x	0	2
y	1	2

Нанесемо на координатну площину точки $A(0;1)$ і $B(2;2)$ і проведемо через них пряму (мал. 61). Це і є графік даної функції.



Мал. 61

Існують функції, які на всій області визначення не є лінійними, але на окремих проміжках області визначення мають властивості лінійних. Їх графіки — ламані лінії. Розглянемо одну з таких функцій.

2. Побудуйте графік функції $y = |x - 1|$.

✓ **Розв'язання.** За означенням модуля можемо записати:

якщо $x - 1 \geq 0$, то $|x - 1| = x - 1$;

якщо $x - 1 < 0$, то $|x - 1| = -(x - 1) = -x + 1$.

Отже, $y = |x - 1| = \begin{cases} x - 1, & \text{якщо } x \geq 1, \\ -x + 1, & \text{якщо } x < 1. \end{cases}$

Це функція, яка на двох різних проміжках задається різними формулами лінійних функцій:

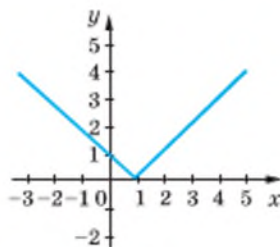
якщо $x \geq 1$, то $y = x - 1$;

якщо $x < 1$, то $y = -x + 1$.

Складемо такі таблиці їх значень.

x	1	3
y	0	2

x	-2	0
y	3	1



Мал. 62

Побудуємо графік функції (мал. 62).

Виконайте усно

757. Чи є лінійною функція, задана формулою:

а) $y = 5x + 0,2$; б) $y = -3,5x + 2$; в) $y = 3 - 2x$;

г) $y = x + 5$; р) $y = \frac{2x - 5}{3}$; д) $y = \frac{1 - 2x}{2}$?

758. Чи є прямою пропорційністю функція, задана формулою:

а) $y = 0,7x$; б) $y = \frac{x}{3}$; в) $y = \frac{2x-1}{3}$;

г) $z = 5 - 2t$; р) $z = 7t^2$; д) $z = -3t$?

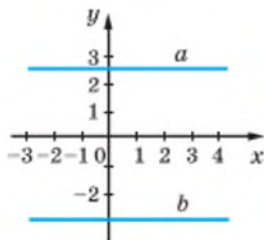
759. Лінійну функцію задано формулою $y = 0,5x + 3$. Яке значення цієї функції відповідає значенню $x = -2$? При якому значенні аргументу значення функції дорівнює 3?

760. Задайте формулами функції, графіки яких зображено на малюнку 63.

Рівень А

761. Побудуйте графік функції:

а) $y = 3x - 2$; б) $y = -0,6x$;
 в) $y = 1 - 0,3x$; г) $y = \frac{2}{3}x + 1$;
 р) $y = \frac{x+3}{2}$; д) $y = \frac{1-3x}{3}$.



Мал. 63

762. Побудуйте графік функції:

а) $y = 0,5x$; б) $y = 2(x + 1)$; в) $y = 3 - 2x$; г) $y = \frac{x-5}{2}$.

Побудуйте графік функції (763—764).

763. а) $y = 2x - 3$, якщо $-1 \leq x \leq 4$;

б) $m = 2t + 3$, якщо $-3 \leq t \leq 2$;

в) $y = \frac{1}{3}x + 1$, якщо $-3 \leq x \leq 6$.

764. а) $y = 5x + 3$, якщо $-4 \leq x \leq 2$;

б) $y = 2 - x$, якщо $-2 \leq x \leq 4$;

в) $p = 0,8a + 2$, якщо $2 \leq a \leq 5$.

765. Дано функцію $y = \frac{2}{3}x - 1$, де $-3 \leq x \leq 6$. Чи належать

графіку цієї функції точки $A(0; -1)$, $B(3; 1)$, $C(9; 5)$?

766. Чи проходить графік функції $y = 2x - 1$ через точку:

а) $A(3; 5)$; б) $B(-10; -5)$; в) $C(100; 199)$?

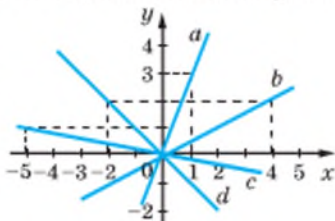
767. Побудуйте графік функції: а) $y = 0x + 3$; б) $y = 0x - 2$.

768. Яка з функцій зростаюча, а яка — спадна:

а) $y = x$; б) $y = -\frac{x}{3}$; в) $y = -x$; г) $y = 2x$?


769. На фарбування 1 м^2 підлоги затрачують 180 г фарби. Виразить формулою залежність маси m фарби від площі S підлоги, яку фарбуватимуть. Чи є ця залежність прямо пропорційною?

770. На малюнку 64 зображено графіки функцій виду $y = kx$ ($k \neq 0$). Для кожного графіка визначте знак коефіцієнта k . Складіть формули, що відповідають графікам цих функцій.



Мал. 64

771. Побудуйте графік функції $y = -3x + 2$. Знайдіть координати точок перетину графіка з осями координат. При яких значеннях x значення функції додатні, а при яких — від'ємні? Зростаюча чи спадна ця функція?

 **772.** Не виконуючи побудов, знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

а) $y = 4x + 8$; б) $y = -x + 3$; в) $y = 0,5 - 2x$.

Рівень Б

773. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2x + 1$; б) $y = x - 4$; в) $y = \frac{1}{2}x - 5$; г) $y = 3 - \frac{1}{3}x$;


р) $y = \frac{3 - 2x}{3}$; д) $y = \frac{4x - 6}{8}$; е) $y = \frac{1}{2}(7x - 4)$; є) $y = 3(2 - x)$.

Знайдіть координати точок перетину побудованих графіків з осями координат. Для кожної функції вкажіть, при яких значеннях x значення функції додатні, при яких — від'ємні. Які з даних функцій зростаючі, а які — спадні?

774. Знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка функції:

а) $y = 1,7x - 3,4$; б) $y = 0,5(x - 4)$; в) $y = 3,5x$;

г) $y = -2,5x + 1$; р) $y = \frac{x - 1}{4}$; д) $y = \frac{3 - 2x}{2}$.

 **775.** В одній системі координат побудуйте графіки функцій і вкажіть координати точки їх перетину:

а) $y = \frac{x}{2} + 1$ і $y = -x + 4$; б) $y = x - 5$ і $y = 5 - x$;

в) $y = 3x - 1$ і $y = -x - 1$; г) $y = x + 3$ і $y = 2x + 6$.

776. Побудуйте в одній системі координат графіки функцій, заданих формулою:

а) $y = 2x + b$, якщо $b = -3; 0; 1$;

б) $y = kx + 3$, якщо $k = -1; \frac{1}{2}; 1; 2$.

Як розташовані побудовані графіки в кожному з випадків a, b ?



777. Функцію задано формулою $y = kx - 2$. При якому значенні k графік функції:

а) проходить через точку $M(-3; 4)$;

б) паралельний графіку функції, заданої формулою $y = -3x + 1,5$?



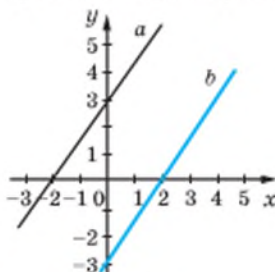
778. За якої умови графіки функцій $y = kx - 1$ і $y = px + 5$ перетинаються в точці $P(4; 3)$?



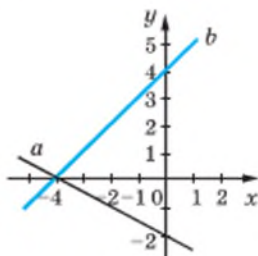
779. Побудуйте графік функції:

а) $y = 2$; б) $y = -4$; в) $y = 3,5$.

780. За якої умови графіки функцій $y = px + 3$ і $y = kx - 3$ — паралельні прямі (мал. 65)?



Мал. 65



Мал. 66

781. Напишіть формули функцій, графіки яких зображені на малюнку 66.

782. Напишіть формулу функції виду $y = kx + p$, якщо її графік проходить через точки:

а) $A(0; 1)$ і $B(2; 2)$;

б) $K(1; -1)$ і $P(0; 5)$.

783*. Побудуйте графік функції, заданої формулою:


а) $y = x + 4$; б) $y = 1 - 2x$; в) $y = 3x$; г) $y = -\frac{x}{3}$.

Для кожного графіка побудуйте графік, симетричний відносно осі ординат. Задайте формулою відповідну функцію.

Побудуйте графік функції (784—785).

784*. а) $y = \begin{cases} 2x+3, & -4 \leq x \leq 0, \\ -2x+3, & 0 \leq x \leq 4; \end{cases}$ б) $y = \begin{cases} -3x+3, & -2 < x \leq 1, \\ x-1, & 1 \leq x < 4. \end{cases}$

785*. а) $y = |x|$; б) $y = |x + 3|$; в) $y = |x| + 3$; г) $y = 2|x| - 1$.

 786*. Витрати виробництва на 200 одиниць продукції становлять 100 грн, а на 2000 одиниць — 800 грн. Знайдіть графічно витрати на виробництво 400, 1000, 1200 одиниць продукції, вважаючи, що функція витрат — лінійна.

787*. Витрати при перевезенні вантажу двома видами транспорту обчислюються за формулами:

$$y_1 = 100 + 30x, \quad y_2 = 150 + 20x,$$

де x — відстань перевезень у сотнях кілометрів, y_1 і y_2 — транспортні витрати при перевезенні вантажу першим і другим видами транспорту в сотнях гривень. Визначте, на які відстані й яким видом транспорту краще перевозити вантаж.

788*. Фірма платить продавцю за x одиниць проданого товару $(2x + 50)$ грн, якщо продано товару менш ніж 40 одиниць, і доплачує йому 20 % комісійних, якщо товару продано 40 одиниць і більше. Опишіть залежність між кількістю проданого товару та заробітною платою продавця і побудуйте графік цієї залежності.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

Розв'яжіть рівняння (789—790).

789. а) $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 3$; б) $(5 - 3y)^2 - 9y^2 = 55$;

в) $(4z + 2)^2 = 2(8z^2 + 13)$; г) $(4 - 5x)^2 = (3 + 5x)^2$.

790. а) $(2x + 3)^2 - 4(x^2 + 7) = 71$; б) $(5z - 1)^2 - 5z(4 + 5z) = 31$;

в) $(0,2y - 2)^2 + 0,1y(2 - 0,4y) = -2$;

г) $\left(\frac{1}{2}x - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}x - 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)$.

791. Велосипедист їде з одного села в інше зі швидкістю 10 км/год. Якби він їхав зі швидкістю 12 км/год, то приїхав би на годину раніше. Яка відстань між селами?

792. Мотоцикліст проїжджає відстань від Жашкова до Умані за 1 год, а велосипедист від Умані до Жашкова — за 5 год. Через скільки годин вони зустрінуться, якщо виїдуть одночасно?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**Варіант I**

1°. Задайте формулою функцію, значення якої на 4 більші за відповідні значення аргументу.

2°. Побудуйте графік функції $y = 5 - x$ на множині натуральних чисел, менших від числа 7.

3°. Побудуйте графік функції $y = 2x - 1$.

4°. Знайдіть область визначення функції:

$$\text{а) } y = x^2 - 3x + 2; \quad \text{б) } y = \frac{2}{x + 3}.$$

Варіант II

1°. Задайте формулою функцію, значення якої на 9 менші від відповідних значень аргументу.

2°. Побудуйте графік функції $y = 1 - x$ на множині натуральних чисел, менших від числа 5.

3°. Побудуйте графік функції $y = 3x - 1$.

4°. Знайдіть область визначення функції:

$$\text{а) } y = x^3 - x + 3; \quad \text{б) } y = \frac{3}{x - 2}.$$

Варіант III

1°. Задайте формулою функцію, значення якої втричі більші за відповідні значення аргументу.

2°. Побудуйте графік функції $y = 2 + x$ на множині натуральних чисел, менших від числа 5.

3°. Побудуйте графік функції $y = 4x + 3$.

4°. Знайдіть область визначення функції:

$$\text{а) } y = 1 - x^2; \quad \text{б) } y = \frac{1}{x - 9}.$$

Варіант IV

1°. Задайте формулою функцію, значення якої протилежні відповідним значенням аргументу.

2°. Побудуйте графік функції $y = -3 + x$ на множині натуральних чисел, менших від числа 8.

3°. Побудуйте графік функції $y = -2x + 3$.

4°. Знайдіть область визначення функції:

$$\text{а) } y = x^3 + 1; \quad \text{б) } y = \frac{1}{x + 9}.$$

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Деякі приклади відповідностей між змінними, які тепер називають *функціями*, вченим були відомі дуже давно. У Вавилоні ще понад 3000 років тому складено таблиці квадратів і кубів натуральних чисел, що нині можна вважати табличним заданням функцій $y = x^2$ і $y = x^3$.

Загальне поняття функції було введено тільки в XVII ст. Спочатку Р. Декарт увів поняття змінної величини і систему координат, почав розглядати залежність ординат точок графіка від їх абсцис. Слово «функція» (з латинського — *дія, виконання*) уперше ввів німецький математик Г. Лейбніц.

Функціями він називав абсциси, ординати та деякі відрізки, пов'язані з точкою, яка в процесі руху описує певну лінію.

Г. Лейбніц — видатний німецький учений. За освітою — юрист. Працював бібліотекарем, історіографом, організував Берлінську академію наук. Досліджував проблеми математики, філософії, мовознавства, хімії, геології, конструював обчислювальні машини.



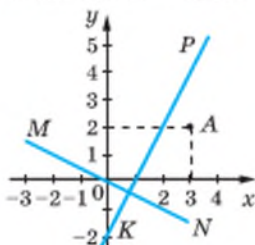
Готфрід Вільгельм
Лейбніц
(1646—1716)

Зусиллями багатьох математиків (Й. Бернуллі, Л. Ейлера, М. Лобачевського, Б. Больцано та ін.) поняття функції уточнювалося, розширювалося і наповнювалося новим змістом. Найзагальніше сучасне означення функції запропонувала в XX ст. група математиків, яка виступала під псевдонімом Н. Бурбакі: «Функція — це відношення, при якому кожному елементу області відправлення відповідає рівно один елемент області прибуття». Під відношенням вони розуміють відповідність, під областю відправлення (областю визначення функції) і областю прибуття (областю її значень) — будь-які множини, а не тільки числові. І з таким загальним поняттям функції ви ознайомитеся в старших класах.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Якщо кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y , то змінну y називають *функцією* від x , змінну x називають *незалежною змінною*, або *аргументом* функції. Наприклад, площа S квадрата — функція від довжини його сторони a .

Функції можна задавати за допомогою формул, таблиць, графіків тощо. Графіки функцій найчастіше будують у *декартовій системі координат*, яка складається з двох взаємно перпендикулярних координатних осей — горизонтальної осі *абсцис*, або осі x , і вертикальної осі *ординат*, або осі y (мал. 88). Площину із системою координат називають *координатною площиною*. Кожній її точці відповідає єдина пара чисел. Наприклад, на малюнку 67 точці A відповідає пара чисел $(3; 2)$, її координати записують так: $A(3; 2)$. Тобто 3 — абсциса точки A , а 2 — ордината точки A .



Мал. 67

Графіком функції називають множину всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати — відповідним значенням функції.

Усі значення, яких може набувати аргумент функції, утворюють її *область визначення*, а всі відповідні значення функції — *область значень функції*.

Лінійною називають функцію, яку можна задати формулою $y = kx + b$, де x — аргумент, а k і b — дані числа. Якщо $b=0$, то лінійну функцію називають *прямою пропорційністю*.

Графік кожної лінійної функції — пряма. Графік прямої пропорційності — пряма, яка проходить через початок координат. На мал. 88 пряма KP — графік лінійної функції $y = 2x - 2$, пряма MN — графік прямої пропорційності $y = -0,5x$.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення функції.
2. Наведіть приклади функції.
3. Що таке аргумент функції?
4. Що таке область визначення функції?
5. Що таке область значень функції?
6. Як можна задавати функції?
7. Що таке координатна площина?
8. Що таке вісь абсцис?
9. Що таке вісь ординат?
10. Що таке початок координат?
11. Що означає вислів «точка A має координати a і b »?
12. Що означає запис « $M(x; y)$ »?
13. Що таке абсциса точки?
14. Що таке ордината точки?
15. Яку функцію називають зростаючою?
16. Яку функцію називають спадною?
17. Що таке графік функції?
18. У чому полягає суть графічного способу задання функції?
19. Чи кожна лінія на координатній площині задає функцію?
20. Сформулюйте означення лінійної функції.
21. Що є графіком лінійної функції?
22. Чи правильним є твердження, що кожна пряма в декартовій системі координат — графік деякої лінійної функції?
23. Як побудувати графік лінійної функції?
24. Сформулюйте властивості лінійної функції $y = kx + b$, якщо $k > 0$; $k < 0$; $k = 0$.
25. Яку функцію називають прямою пропорційністю?
26. Що є графіком прямої пропорційності?
27. Як побудувати графік прямої пропорційності?
28. Сформулюйте властивості прямої пропорційності.

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 5

1. Через яку з точок проходить графік функції $y = 3x + 2$:
а) $A(3; 5)$; б) $B(8; 13)$; в) $C(2; 7)$; г) $D(4; 14)$?
2. Графік функції $y = 2x + 10$ перетинає вісь Ox у точці з координатами:
а) $(0; 0)$; б) $(-5; 0)$; в) $(0; 10)$; г) $(-5; 10)$.
3. Графік функції $y = -x + 5$ перетинає вісь Oy у точці з координатами:
а) $(1; 1)$; б) $(0; 0)$; в) $(5; 0)$; г) $(0; 5)$.
4. Яка з даних функцій є лінійною:
а) $y = \frac{x}{2} + 3$; б) $y = \frac{2}{x} - 2$;
в) $y = \frac{x^2}{4} + 2$; г) $y = -\frac{2}{x^2} + 4$?
5. Яка з функцій є прямою пропорційністю:
а) $y = 2x + 3$; б) $y = 3$; в) $y = x^2$; г) $y = 3x$?
6. Графік якої з функцій проходить через точку $A(-1; 2)$:
а) $y = 2x + 4$; б) $y = 3x - 2$; в) $y = 5x + 3$; г) $y = 2x$?
7. При якому значенні k графік функції $y = kx + 7$ проходить через точку $C(2; -1)$:
а) -4 ; б) 4 ; в) -3 ; г) 3 ?
8. Які значення x не входять до області визначення функції $y = \frac{3}{x(x-2)}$:
а) 0 і 3 ; б) -2 ; в) 0 і 2 ; г) 2 і 3 ?
9. Який із графіків функцій не перетинає вісь Ox :
а) $y = x$; б) $y = 2x + 3$; в) $y = -x$; г) $y = -3$?
10. Знайдіть значення функції $y = -\frac{1}{4x+1}$ при $x = -0,2$:
а) 5 ; б) $0,5$; в) -5 ; г) $-0,5$.

Типові завдання до контрольної роботи № 5

1°. Функцію задано формулою $y = 0,5x - 3$. Визначте:
а) значення функції, якщо значення аргументу дорівнює 4;

б) значення аргументу, при якому значення функції дорівнює 5.

2°. Не виконуючи побудови графіка функції $y = 7x - 3$, укажіть, через які точки проходить графік: $A(1; 4)$, $B(2; 10)$, $C(3,5; 0,06)$; $D(0; -3)$.

3°. Побудуйте графік функції $y = -2x + 3$. Сформулюйте її властивості.

4°. Знайдіть точки перетину графіка функції $y = -3x + 5$ з осями координат.

5°. Одна сторона прямокутника дорівнює x см, а інша — удвічі більша. Виразіть формулою залежність площі S прямокутника від x . Складіть таблицю значень утвореної функції для перших п'яти натуральних значень аргументу.

6°. Задайте формулою лінійну функцію, графік якої проходить через початок координат і точку $A(-4; -6)$.

7°. Знайдіть область визначення функції $y = \frac{6}{x^2 + 5x}$.

8°. Вартість обладнання ремонтної майстерні становить 72 000 грн, а річна амортизація — 3000 грн. Виразіть залежність вартості обладнання від часу, якщо з року в рік амортизаційні відрахування залишаються сталими.

9°. Побудуйте графік функції

$$y = \begin{cases} x - 2, & x \geq 0, \\ -2x - 2, & x < 0. \end{cases}$$

10°. При якому значенні m графіки функцій $y = 2|x| + 1$ і $y = m$ мають одну спільну точку?

РОЗДІЛ

4

ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ ТА ЇХ СИСТЕМИ

Система — сукупність
визначених елементів, між якими існує
закономірний зв'язок чи взаємодія.

Із філософського словника

Рівняння — одне з найважливіших понять не тільки математики, а й багатьох прикладних наук. Це найзручніша математична модель, найкращий засіб для розв'язування найважчих задач. Образно кажучи, рівняння та їх системи — це ключ, яким можна відчиняти тисячі дверей у невідоме.

У цьому розділі ви дізнаєтеся про:

- лінійні рівняння з однією та двома змінними;
- системи лінійних рівнянь та способи їх розв'язування;
- розв'язування задач за допомогою рівнянь.

§20. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО РІВНЯННЯ



Алгебра багато століть розвивалась як наука про рівняння¹.

✦ **Рівняння** — це рівність, яка містить невідомі числа, позначені буквами.

Невідомі числа в рівнянні називають *змінними*. Змінні найчастіше позначають буквами x , y , z (ікс, ігрек, зет), хоч їх можна позначити й іншими буквами.

Приклади рівнянь: $x + 5 = 0$; $2y - 3 = 7y$; $x^2 = 9$; $y^2(z - 1) = 0$. Кожне рівняння має ліву і праву частини. Наприклад:

$$\underbrace{5x - 27}_{\text{ліва частина}} = \underbrace{3x + 15}_{\text{права частина}}$$


ліва частина права частина

$$\underbrace{5x, -27, 3x, 15}_{\text{члени рівняння}}$$

члени рівняння

Розглянемо рівняння $13x - 30 = 7x$. Якщо в ньому замість змінної x написати число 5, матимемо правильну числову рівність $13 \cdot 5 - 30 = 7 \cdot 5$. Говорять, що «число 5 задовольняє дане рівняння».

¹ Історичні відомості про рівняння — на с. 179 і 244.

 Число, яке задовольняє рівняння, називають його коренем, або розв'язком.

Рівняння $13x - 30 = 7x$ має тільки один корінь: $x = 5$.


Рівняння $x(x - 2)(x + 3) = 0$ має три корені: $x = 0$, $x = 2$, $x = -3$.

Рівняння $x + 7 = x$ не має жодного кореня, бо при кожному значенні змінної x число $x + 7$ на 7 більше за x .

Рівняння $2x + 3 = 1 + 2(x + 1)$ має безліч коренів.

 Розв'язати рівняння — означає знайти всі його розв'язки або показати, що їх не існує.

Розглянемо два рівняння: $x - 3 = 2$ і $x + 7 = 12$. Кожне з них має один і той самий розв'язок: $x = 5$.

 Два рівняння називають рівносильними, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й інше. Рівносильними вважають і такі рівняння, які не мають розв'язків.

Наприклад,

$$x + 5 = x \text{ і } 2 - x = 3 - x.$$

Щоб розв'язувати складніші рівняння, слід уміти замінювати їх простішими і рівносильними даним. Для цього використовують такі основні властивості рівнянь.



1. У будь-якій частині рівняння можна звести подібні доданки або розкрити дужки, якщо вони є.
2. Будь-який член рівняння можна перенести з однієї частини рівняння до іншої, змінивши його знак на протилежний.
3. Обидві частини рівняння можна помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля.

У результаті таких перетворень завжди дістаємо рівняння, рівносильне даному. Для прикладу розв'яжемо рівняння

$$\frac{3x - 2}{3} = 2 + \frac{2x + 1}{3}.$$

✓ Розв'язання.

Помножимо обидві частини рівняння на 3. Маємо:

$3x - 2 = 6 + 2x + 1$, або $3x - 2x = 7 + 2$, звідси $x = 9$.

Відповідь. $x = 9$.

Рівняння бувають різних видів, зокрема такі, що містять невідому змінну в квадраті, у кубі, під знаком модуля тощо. Розв'яжемо, наприклад, рівняння:

$$(x+5)^2 = (x-2)(x+2).$$

Розв'язання. Розкриємо дужки в обох частинах рівняння:

$$x^2 + 10x + 25 = x^2 - 4, \text{ звідси } 10x = -29, x = -2,9.$$

Відповідь. $x = -2,9$.



Хочете знати ще більше?

Звідки походить назва науки — алгебра? Від назви книжки про рівняння узбецького математика IX ст. Мухаммеда аль-Хорезмі (Мухаммед з Хорезма). У ті далекі часи від'ємні числа не вважалися справжніми. Тому коли в результаті перенесення від'ємного члена рівняння з однієї його частини в іншу цей член ставав додатним, вважалось, що він відновлювався, переходив із несправжнього в справжній. Таке перетворення рівнянь Мухаммед аль-Хорезмі назвав *відновленням* (аль-джебр). Властивість про знищення однакових членів рівняння в обох частинах він назвав *протиставленням* (аль-мукабала). Книжка про ці перетворення мала назву «Кітаб мухтасар аль-джебр ва-л-мукабала» («Книжка про відновлення і протиставлення»). Згодом її переклали латинською мовою, узявши для назви тільки одне слово, яке стали писати *Algebr*. Звідси і пішла назва науки — алгебра. Перетворення «аль-джебр» стало важливим кроком у розвитку алгебри, бо спростило розв'язування рівнянь.



Мухаммед
аль-Хорезмі
(787—бл. 850 рр.)

Перевірте себе

1. Що таке рівняння?
2. Що таке корінь (розв'язок) рівняння?
3. Що означає — розв'язати рівняння?
4. Які рівняння називають рівносильними?
5. Сформулюйте основні властивості рівнянь.
6. Яку властивість рівнянь раніше називали словом «аль-джебр»?
7. Від чого походить назва науки «алгебра»?

✓ Виконаємо разом!

1. Розв'яжіть рівняння $3(1 - 3x) = 75$.

✓ Розв'язання.

Перший спосіб

$$\begin{aligned} 3 - 9x &= 75, \\ -9x &= 72, \\ x &= 72 : (-9), \\ x &= -8. \end{aligned}$$

Другий спосіб

$$\begin{aligned} 1 - 3x &= 75 : 3, \\ 1 - 3x &= 25, \\ -3x &= 24, \\ x &= -8. \end{aligned}$$

2. При якому значенні a рівняння $(a + 5) \cdot x = 12$ матиме корінь $x = 3$?

✓ Розв'язання.

Перший спосіб. Знайдемо невідомий множник x як частку від ділення добутку 12 і відомого множника $a + 5$:

$$x = 12 : (a + 5).$$

За умовою $x = 3$, тому $12 : (a + 5) = 3$, звідси $a + 5 = 12 : 3$, $a = -1$.

Другий спосіб. Підставимо в рівняння $(a + 5) \cdot x = 12$ замість змінної x число 3:

$$(a + 5) \cdot 3 = 12.$$

Розв'яжемо утворене рівняння відносно змінної a . Маємо:

$$a + 5 = 12 : 3, \text{ звідси } a = -1.$$

Відповідь. Якщо $a = -1$, то рівняння $(a + 5) \cdot x = 12$ має корінь $x = 3$.

3. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) = 27$;

б) $(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = 9(x - 1) \cdot (x + 1)$.

✓ Розв'язання.

а) $(x^2 + 3)(x^4 - 3x^2 + 9) = 27$; $(x^3)^3 + 3^3 = 27$, $x^6 = 0$, звідси $x = 0$;

б) $(x + 2)^3 - (x - 1)^3 = 9(x - 1) \cdot (x + 1)$,

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 9(x^2 - 1),$$

$$x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x^3 + 3x^2 - 3x + 1 - 9x^2 + 9 = 0,$$

$$9x + 18 = 0, 9x = -18, x = -2.$$

Відповідь. а) $x = 0$; б) $x = -2$.

Виконайте усно

793. Розв'яжіть рівняння:

а) $x + 10 = 23$;

б) $x - 10 = 15$;

в) $x + 7 = 13$;

г) $2x + 10 = 30$;

р) $3x - 5 = 40$;

д) $4x - 8 = 0$;

- е) $10y = 70$; е) $10y = -3$; ж) $-y = 15$;
 з) $x(x-3) = 0$; и) $(x+5)x = 0$; і) $-3,5x^2 = 0$.

794. Чи рівносильні рівняння:

- а) $4x + 5x = 18$ і $9x = 18$;
 б) $7x - x = 24$ і $6x = 24$;
 в) $2(x+3) = 16$ і $2x + 6 = 16$;
 г) $0,4 \cdot (y-2) = 1$ і $0,4y - 0,8 = 1$?

795. Поясніть, чому не має розв'язків рівняння:

- а) $x^2 + 1 = 0$; б) $x^2 + 8 = 7$; в) $2x^2 + 3 = -7$; г) $(x+2)^2 = -4$.

796. Чи задовольняє число 12 рівняння:

- а) $x - 5 = 7$; б) $x^2 = 144$; в) $3x + 4 = 40$; г) $0,5x + 5 = 11$?

797. Розв'яжіть рівняння:


- а) $x^2 = 16$; б) $x^3 = 8$; в) $x^2 = 0,01$; г) $2x^2 = 18$.

Рівень А

Розв'яжіть рівняння (798—800).

- 798.** а) $25 + x = 37$; б) $x - 12 = 23$; в) $24 - x = 18$;


- г) $3,7 - x = 1,9$; р) $1 = \frac{2}{3} + x$; д) $13 = 74 - x$.

-  **799.** а) $6x = 30$; б) $5y = 0$; в) $4z = -8$;
 г) $2x + 3 = 19$; р) $3y - 4 = 1$; д) $1 - 3x = 25$.

- 800.** а) $\frac{2}{3}x = 5$; б) $-\frac{5}{7}y = 1$; в) $1 - \frac{3}{4}x = \frac{5}{8}$.

801. Покажіть, що рівняння:

- а) $x - 2 = 3x$ має розв'язок $x = -1$;
 б) $8z - 5 = 5z$ має розв'язок $z = \frac{5}{3}$.

 **802.** Покажіть, що рівняння:

- а) $x(x-3) = 0$ має розв'язки $x = 0$ і $x = 3$;
 б) $z(z-2)(z+3) = 0$ має розв'язки $z = 0$, $z = 2$ і $z = -3$.

803. Які з чисел -2 , -1 , 0 , 1 , 2 задовольняють рівняння:

- а) $x(3x-1) = 0$; б) $(2n+2)n = 0$?

804. Розв'яжіть рівняння і зробіть перевірку:

- а) $x - (3 - 2x) = 9$; б) $8 - (3x - 2) = 13$; в) $3(x - 2) = 27$.

Розв'яжіть рівняння (805—810).

805. а) $2(x - 3) = 36$; б) $4(5 - x) = 12$; в) $0,1(x + 1) = 1$.

806. а) $3(x + 5) = 27$; б) $5(x - 3) = 15$; в) $8(3 - x) = 40$.

807. а) $4(x + 1) + 11 = 31$; б) $16 + 3(z - 2) = 1$;

в) $5(y - 3) - 12 = 73$; г) $47 + 2(x + 4) = 7$.

808. а) $5(2x - 3) = 50$; б) $37(8x - 23) = 37$;

в) $52(17 - 8x) = 52$; г) $84(37 - 17z) = 168$.

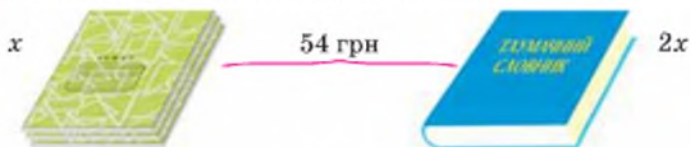
809. а) $3x + (7 - x) = 10$; б) $2x - (3 - x) = 18$;

в) $8z - (5 - 3z) = 17$; г) $12y + (5 - 2y) = -15$.

810. а) $2x - (x - 3) = 20$; б) $5 - (4y - y) = 10$;

в) $4z - (7 + 3z) = 2$; г) $17y + (8 - 15y) = 4$.

811. Складіть і розв'яжіть задачу за малюнком 68.



Мал. 68

812. Розв'яжіть рівняння:

а) $16 - x^2 = 0$;

б) $4x^2 - 1 = 0$;

в) $0,09x^2 = 36$;

г) $36x^2 = 1,44$.

813. Знайдіть корінь рівняння:

а) $x^2 - 16x + 64 = 0$;

б) $0,25x^2 + 3x + 9 = 0$;

в) $x^2 + 81 = 18x$;

г) $\frac{1}{16}x^2 + 4 = x$.

Рівень Б

Розв'яжіть рівняння (814—821).

814. а) $\frac{2}{3}(6 - 9x) = 15$; б) $\frac{3}{4}(12 - x) = \frac{3}{2}$; в) $\frac{2}{5}(8 - 5x) = \frac{1}{5}$.

815. а) $(3x - 2) : 2 = 18$; б) $(5x - 3) : 3 = 9$; в) $(41 - x) : 9 = 4$.

816. а) $2(3x - 2) + 4 = 30$; б) $3(2 - x) + 25 = 28$;

в) $\frac{2}{3}(x - 4) + \frac{1}{3} = 5$; г) $\frac{3}{7}(1 - 2x) + \frac{1}{7} = -2$.

817. а) $5(0,6m - 2) = 2(m - 3,6)$; б) $3(1,2n + 8) = 4(5 - 0,1n)$;
 в) $2(11 - 6x) - 3(7 - 4x) = 1$; г) $7(y + 6) = 4(3y - 5) - 3$;
 р) $\frac{1}{3}(6 + x) = \frac{2}{3}(2x - 15)$; д) $\frac{1}{2}(7 - 2x) = \frac{3}{4}\left(8x + 4\frac{2}{3}\right)$.

818. а) $\frac{3}{5}(x - 2) = \frac{2}{5}(5x - 24)$; б) $\frac{5}{6}(x + 2) = \frac{1}{6}(7x + 12)$;
 в) $0,4(6x - 1) = 0,1(12x + 5)$; г) $0,5(7x + 8) = 1,5(7x + 8)$;
 р) $5x - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(3x + 4)$; д) $y - \frac{3}{4}(2y - 5) = 1\frac{1}{4} - 2y$.

819. а) $2,5(y + 6) = y + 1,5(y - 10)$;
 б) $0,75(4 - x) - 0,5x = 5(0,05x + 3)$.

820. а) $\frac{3x + 7}{4} - \frac{x - 3}{2} = \frac{5x + 2}{8}$; б) $\frac{5x - 4}{3} = \frac{7 - x}{2} + \frac{3x + 1}{6}$.

821. а) $\frac{8 - 3y}{5} - \frac{1 - 2y}{2} = \frac{6y + 17}{10}$; б) $\frac{2 - 4x}{5} = \frac{1 - 2x}{3} - \frac{x + 3}{4}$.

822. Яке число треба відняти від чисел 135 і 83, щоб перша різниця була в 3 рази більша за другу?

823. Стародавня єгипетська задача. Пастуха, який вів 70 биків, запитали: «Яку частину биків своєї череди ти ведеш?». Він відповів: «Я веду дві третини від третини худоби». Скільки биків мав пастух? Розв'яжіть задачу кількома способами, зокрема скориставшись малюнком 69.



Мал. 69

Користуючись властивістю пропорції, розв'яжіть рівняння (824—826).

824. а) $6x : 8 = 3 : 2$; б) $5 : (2x) = 3 : 18$; в) $1 : (3x) = 4 : 12$.

825. а) $(x - 5) : 2 = 3 : 4$; б) $5 : (c - 3) = 2 : 3$; в) $7 : 4 = 5x : 3$.

826. а) $2 : m = m : 8$; б) $x : 10 = 0,1 : x$; в) $2n : 9 = 2 : n$.

827. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x + 4)(x - 4) = x^2 - 5x + 9$;

б) $(6 - y)(y + 6) = y^2 - 2y(y - 3)$;

в) $8 + 9x(x + 4) = (3x - 2)(3x + 2)$;

г) $2x(2x - 4) - 17 = (5 + 2x)(2x - 5)$.

828. Знайдіть корені рівняння:

а) $(x + 1)^2 - 9 = 0$;

б) $4 - (x - 3)^2 = 0$;

в) $(3x - 2)^2 = 121$;

г) $(5x + 4)^2 = 196$;

р) $(x - 1)^2 - (3 - x)^2 = 0$;

д) $(4x - 10)^2 = (3x - 4)^2$.

829. Розв'яжіть рівняння:

а) $(x^2 + x + 1)(x - 1) = x(x^2 + 1)$;

б) $(2x + 1)(4x^2 - 2x + 1) = 4x(2x^2 - 5)$;

в) $(9x^2 + 4) \cdot 3x = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4)$;

г) $2x(4x^2 - 5) = (4x^2 - 10x + 25)(2x + 5)$.



830*. При якому значенні a рівняння:

а) $3ax + 96 = 0$ матиме корінь $x = -8$;

б) $1 - \frac{a}{4}x = -\frac{1}{2}$ матиме корінь $x = 2$;

в) $4(a - 3)x = 72$ матиме корінь $x = 6$?

831*. При яких значеннях a рівносильними є рівняння:

а) $2(x - 1) = 4 - x$ і $ax = x + a$; б) $(1 - a)x = x$ і $x^2 = 0$?

832*. При якому значенні m рівняння матимуть спільний корінь:

а) $2(x + 3) = 36$ і $x : 3 + 2m = 19$;

б) $(8 - x) \cdot 7 = 28$ і $5(2x - 3m) = 0$;

в) $(x : 3 + 8) \cdot 2m = 48$ і $(3x - 2) : 2 = 17$?

833*. При якому значенні k рівняння не матиме коренів:

а) $x^2 = k$;

б) $|x| + k = 0$;

в) $k + 2x = 2(x - 3)$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

834. Запишіть у клітинках квадрата (мал. 70) числа -9 ; 8 ; -7 ; 6 ; -5 ; 4 ; -3 ; 2 ; -1 так, щоб їх добутки в кожному рядку, у кожному стовпці й у кожній діагоналі були від'ємними.

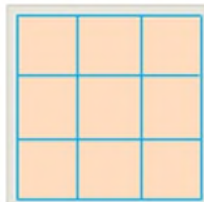
835. Розкладіть на множники число:

а) 80 ; б) 1024 ; в) 1001 .

836. Обчисліть:

$$\left(4,3 \cdot \frac{3}{43} + 11 \frac{3}{5} \cdot 2,25 \right) : 2,75.$$

837. На скільки відсотків число 40 більше за число 32 ? На скільки відсотків число 32 менше від числа 40 ?



Мал. 70

§ 21. ЛІНІЙНІ РІВНЯННЯ



♦ Рівняння виду $ax = b$, де a і b — дані числа, називають лінійним рівнянням із змінною x .

Числа a і b — коефіцієнти рівняння $ax = b$, a — коефіцієнт при змінній x , b — вільний член рівняння.

Якщо $a \neq 0$, то рівняння $ax = b$ називають рівнянням першого степеня з однією змінною. Його корінь $x = \frac{b}{a}$.

Кожне рівняння першого степеня з однією змінною має один корінь. Лінійне рівняння може не мати коренів або мати один корінь чи безліч.

Лінійне рівняння $ax = b$:



- має один корінь, якщо $a \neq 0$;
- має безліч коренів, якщо $a = 0$ і $b = 0$;
- не має коренів, якщо $a = 0$ і $b \neq 0$.

Наприклад, рівняння $0x = 5$ не має жодного кореня, бо не існує числа, яке при множенні на 0 у добуток дало б число 5.

Рівняння $0x = 0$ має безліч коренів. Його задовольняє довільне значення змінної x .

Розв'язуючи рівняння, його спочатку намагаються спростити, звести до лінійного. Роблять це здебільшого в такій послідовності.

1. Позбуваються знаменників (якщо вони є).
2. Розкривають дужки (якщо вони є).
3. Переносять члени зі змінними в ліву частину рівняння, а інші — в праву.
4. Зводять подібні доданки.

У результаті таких перетворень отримують рівняння, рівносильне даному; його корінь є також коренями даного рівняння.

Приклад. Розв'яжіть рівняння:

$$\frac{2x+5}{4} + \frac{x}{12} = \frac{x}{3} - 1\frac{1}{2}.$$

Розв'язання. Помножимо обидві частини рівняння на 12 — найменше спільне кратне знаменників 2, 3, 4 і 12:

$$3(2x+5) + x = 4x - 18;$$

$$6x + 15 + x = 4x - 18;$$

$$6x + x - 4x = -18 - 15;$$

$$3x = -33; x = -11.$$

Відповідь. -11.



Хочете знати ще більше?

Рівняння першого степеня — це окремий вид лінійних рівнянь. Співвідношення між цими двома видами рівнянь наочно ілюструє малюнок 71.

Далі наведемо приклади лінійних рівнянь, які не є рівняннями першого степеня.



Мал. 71

$$\left(0,25 - \frac{1}{4}\right)x = 0 \text{ або } \left(0,25 - \frac{1}{4}\right)x = 2,5.$$


Рівняння $2x + 3 = 27 - x$, $\frac{x-3}{5} = 0,8$, $|x-4| = 0$ не є лінійними, але такі, що зводяться до лінійних.

До сукупності лінійних рівнянь зводиться розв'язування рівнянь виду $|x| = a$. Якщо модуль числа x дорівнює a , то це число дорівнює a або $-a$. Використовуючи знак рівносильності (\Leftrightarrow), це записують так:

$$|x| = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, \\ x = -a. \end{cases}$$

Перевірте себе

1. Які рівняння називають лінійними?
2. Які рівняння називають рівняннями першого степеня?
3. Скільки коренів може мати лінійне рівняння?
4. Скільки коренів може мати рівняння першого степеня?
5. За якої умови рівняння $ax = b$ не має розв'язків? А за якої умови має безліч розв'язків?

 **Виконаємо разом!**

1. Розв'яжіть рівняння:

а) $3(x - 5) + x = 4x - 18$; б) $5(2 + 3x) - 7(2x + 3) = x - 11$.

✓ Розв'язання. а) $3x - 15 + x = 4x - 18$,
 $3x + x - 4x = 15 - 18$,

$0x = -3$ — рівняння розв'язків не має.

б) $10 + 15x - 14x - 21 = x - 11$,
 $15x - 14x - x = 21 - 10 - 11$,

$0x = 0$ — будь-яке число задовольняє рівняння.

Відповідь. а) Рівняння розв'язків не має;

б) x — будь-яке число.

2. Знайдіть два числа, сума яких удвічі більша за їх різницю, що дорівнює 35.

✓ Розв'язання. Якщо різниця чисел дорівнює 35, то різниця буде удвічі більшою, а саме 70.

Позначимо менше число буквою x , тоді більше дорівнюватиме $70 + x$.

За умовою задачі $(x + 70 + x) : 2 = 2 \cdot 35$, або $x + 35 = 70$, звідси $x = 35$ — менше число, $70 + 35 = 105$ — більше число.

Відповідь. 35 і 105.

3. Розв'яжіть рівняння $|x - 2| = 5$.

✓ Розв'язання. Якщо модуль числа $x - 2$ дорівнює 5, то це число дорівнює 5 або -5 .

Маємо:

$x - 2 = 5$, звідси $x = 7$; $x - 2 = -5$, звідси $x = -3$.

Отже, рівняння $|x - 2| = 5$ має два корені: $x = 7$ і $x = -3$.

 **Виконайте усно**

838. Яке з рівнянь лінійне:

а) $-x = 5$; б) $\frac{1}{x} = 2$; в) $3 - 2x = 0$; г) $4x = 5 - x^2$

839. Яке з рівнянь є рівнянням першого степеня:

а) $0,5x = 7$; б) $-\frac{1}{3}x = 3$; в) $3x^2 = 0$; г) $0x = 0$

840. Поясніть, чому не має розв'язків рівняння:

а) $x + 15 = x$; б) $3x - 7 = 3x$; в) $17 - x = 5 - x$.

841. Поясніть, чому має безліч розв'язків рівняння:

а) $3x = 2x + x$; б) $6y = 7y - y$; в) $8z + 2 = 3z + 2 + 5z$.

842. Чи правильна схема, зображена на малюнку 72?



Мал. 72

Рівень **A**

843. Зведіть рівняння до лінійного:

а) $2 - 3x = 5 - 7x$; б) $0 = 7x - 5$; в) $\frac{1}{3}x = 6 - \frac{1}{2}x$; г) $\frac{x-4}{2} = 1$.

844. Зведіть рівняння до лінійного:

а) $2x + x - 7x + 3 = 8$; б) $y - 5y = 8 - y$;
 в) $3x + 2(x + 7) = 2x$; г) $4(2 + x) - x = 3x + 9$;
 р) $-c + 31(2 - c) = 32c$; д) $0,7 = 2(x + 3,5) - 2x$.

845. Скільки розв'язків має рівняння:

а) $2x - 3 = x + 7$; б) $3x + 7 = 3x - 9$; в) $2(3x - 1) = 3(2x + 1)$?

Розв'яжіть рівняння (846–852).



846. а) $32x = -16$; б) $-15z = 0,5$; в) $x + 4x = 5x$;
 г) $-0,5y = -0,5$; р) $6x = 8 + 6x$; д) $x - 4x = 5x$.

847. а) $0x = 35$; б) $0y = 13 - 13$; в) $2x = 3 + 2x$.



848. а) $0,5z = 6 + \frac{1}{3}z$; б) $0,2x + 5 = \frac{1}{5}x$; в) $\frac{2}{3}x + 7 = 0,6x$.



849. а) $4 - 3x = 8(1 - x)$; б) $2 - 5y = 5(1 - 2y)$;
 в) $x = 3(x + 1) - 2x$; г) $2(5 - 8x) = -4(4x + 3)$.

850. а) $8(9 - 2x) = 5(2 - 3x)$; б) $5(z + 3) = 8(10 - z)$;
 в) $2(x - 3) = 3(2x - 1)$; г) $4(5 - x) = -5x + 2$.

851. а) $y - 1,08 = 0,2(5 + y)$; б) $0,3(1 - c) = c + 0,04$;
 в) $3 - 5x = 0,3(2x + 1)$; г) $1 - 3(x - 5) = 7(3 - 2x)$.

852. а) $-\frac{1}{2}x - \frac{1}{3} = \frac{3}{4}x$; б) $\frac{2}{3}t - \frac{1}{5} = 0,6t$; в) $-0,8z + 1 = \frac{4}{5}z$.


853. Яке число більше від своєї третьої частини на $\frac{1}{3}$?

Рівень **Б**

Розв'яжіть рівняння (854—858).

854. а) $3(x+4)+6(11-x)=9$; б) $8(1-x)+5(x-2)=2$;
в) $7(x-5)-3(2x-6)=10$; г) $5(3-2x)-(12+7x)=0$.

855. а) $7(4-t)+3(t-5)=9t$; б) $3(x+1,5)+2(3+x)=-5$;
в) $4z-1,2(2-5z)=1-5z$; г) $2,5x-1,7(5-2x)=3x$.


 856. а) $8+3(x-5)+x=2(3+2x)$; б) $z+2(4+z)=3z+8$;
в) $\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}(x-2)=x$; г) $\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{3}n+1\right)=3n$.

857. а) $\frac{1}{2}(4x-5)+\frac{3}{2}(2x+1)=x+3$;
б) $\frac{2}{3}(5-3x)+\frac{1}{3}(2+9x)=2x-1$;

в) $\frac{3}{5}(6+7x)-2x=\frac{2}{5}(4+3x)+3$;

г) $2+\frac{1}{4}(8x+1)=5x+\frac{3}{4}(4x-1)$.


858. а) $3(2x+3)-5(7-4x)-2(5x+4)=-2$;
б) $8(4-3x)+7(x-3)+3(9+7x)=10$;
в) $6(x+2)+3(3x+7)=4(5+4x)-7$;
г) $5(12-x)-11(4x-5)=9(9-5x)-26$.

 859. Одне число більше за інше на 6. Якщо перше помножити на 5, а друге — на 4, то перший добуток буде більший за другий на 40. Знайдіть ці числа.

860. Одне число більше за інше в 6 разів. Якщо від більшого з них відняти 37, а до меншого додати 73, то результати будуть рівні. Знайдіть ці числа.

Розв'яжіть рівняння і зробіть перевірку (861—863).

861. а) $|x|+5=12$; б) $|x|-8=-3$; в) $2|x|+3=25$.

 862. а) $|x+4|=0$; б) $|x-2|=12$; в) $|x-1|+7=3$.

863. а) $|2x-3|=5$; б) $|2x|-3=5$; в) $|2|x-3|=5$.

864. Розв'яжіть рівняння:

а) $5x^2+40x+80=0$; б) $0,1x^2-4x+40=0$;

в) $0,8x^2+4x+5=0$; г) $1\frac{1}{3}x^2-4x+3=0$.

865. Знайдіть корені рівняння:

а) $(x^2 - 2)^2 - x^4 = 0$; б) $(x^2 - 4)^2 - x^4 = 8$;
в) $(x + 2)^2 - (2x + 1)^2 = 0$; г) $(x^2 + 3)^2 - (x^2 - 3)^2 = 12$.

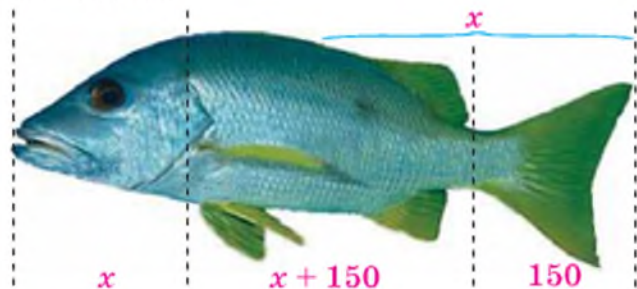
866. Розв'яжіть рівняння:

а) $(2,6x - 3)(2,6x + 3) - (2,4x - 5)(2,4x + 5) = 2x(0,5x + 4)$;
б) $(3,7x - 2)(3,7x + 2) - (1,3x - 1)(1,3x + 1) = 6x(2x - 1)$.

867. Знайдіть корінь рівняння:

а) $(4x + 3)(16x^2 - 12x + 9) = 9(7x^3 + 3)$;
б) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 7(x^3 - 4)$;
в) $(3x + 5)(9x^2 - 15x + 125) = 4(7x^3 + 31)$;
г) $(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) = x(3x - 2)(3x + 2) - x^3$.

868. *Задача з болгарського фольклору.* На запитання, скільки важить його риба, рибалка відповів: «Хвіст важить 150 г, голова — стільки, скільки хвіст і половина тулуба, а тулуб — скільки голова і хвіст разом» (мал. 73). Скільки важить риба?



Мал. 73

869*. Доведіть, що при будь-яких значеннях a рівняння має єдиний корінь:

а) $(a^2 + 3)x = 5$; б) $(a^2 + 1)x = a$; в) $a^2x = -2x$; г) $4 - 5x = a^2x$.

870*. Для кожного з пунктів а—г визначте, при яких значеннях коефіцієнта k рівняння: 1) має єдиний корінь; 2) не має коренів; 3) має безліч коренів.

а) $kx = 8$; б) $(k + 3)x = 5$; в) $kx = k$; г) $(2 - k)x = (2 - k)$.



871*. Для кожного з пунктів а—в допишіть після знака рівності замість крапок такий вираз, щоб утворилось рівняння, яке: 1) має один корінь; 2) має безліч коренів; 3) не має коренів.

а) $5x - 4 + 2x = \dots$; б) $2(1,5x - 7) - 3x = \dots$; в) $\frac{3x + 2}{5} = \dots$

872*. Вираз $\frac{3(x+a)}{2} + 0,5x + 3$ дорівнює 4, якщо $x = -1$. Чому дорівнює вираз, якщо $x = 5$?

873*. Вираз $9x - \frac{m-4}{5}x + 2$ дорівнює 16, якщо $x = 1\frac{2}{3}$. Чому дорівнює вираз, якщо $x = -\frac{1}{6}$?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

874. Перебуваючи за кордоном ви маєте можливість користуватися послугами одного з двох мобільних операторів. Перший пропонує сплачувати 10 грн за першу хвилину і 2 грн за кожну наступну хвилину розмов, а другий — 7 грн і 3 грн відповідно. Побудуйте графік залежності вартості розмови від часу, що не перевищує 6 хв, для кожного оператора. Який висновок можна зробити?

875. Знайдіть значення виразу:

- а) $5a^3$, якщо $a = 0,2$; б) $2x^2 - x^4 - 5$, якщо $x = -2$;
 в) $a^3 + 3a^2$, якщо $a = 0,2$; г) $3a^4 - a^2$, якщо $a = -1,2$;
 р) $1 - (x - y)^3$, якщо $x = 2,5$ і $y = 3$.

876. Знайдіть суму всіх двоцифрових натуральних чисел.

877. Знайдіть:

- а) 20 % від 350; б) 30 % від 56 000;
 в) 12 % від 0,75; г) 125 % від 1,4;
 р) 15 % від 124 грн; д) 48 % від 3,5 м.

§ 22. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ ЗА ДОПОМОГОЮ РІВНЯНЬ



Щоб розв'язати задачу за допомогою рівняння, спочатку слід скласти відповідне до цієї задачі рівняння. Власне кажучи, треба перекласти задачу зі звичайної мови на алгебраїчну, тобто скласти *математичну модель* даної задачі. Як це можна зробити, покажемо на кількох прикладах.

Задача 1. На двох токах 1000 т зерна. Скільки зерна на кожному току, якщо на першому його на 200 т менше, ніж на другому?

Розв'язання. Нехай на першому току x т зерна. Тоді на другому — $(x + 200)$ т, а на обох — $(x + x + 200)$ т. Маємо рівняння:

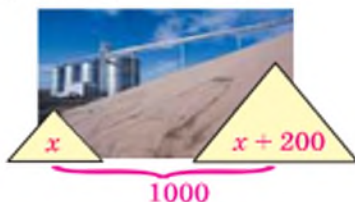
$$x + x + 200 = 1000,$$

звідси $2x = 800$, $x = 400$, $x + 200 = 600$.

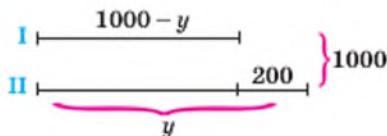
Відповідь. 400 т і 600 т.

Рівняння $x + x + 200 = 1000$, складене за умовою задачі, — це математична модель даної задачі.

Часто у складанні рівняння допомагає малюнок або схема (мал. 74).



Мал. 74



Мал. 75

Дану задачу можна розв'язати й іншими способами.

Якщо на другому току є y т зерна, то на першому $(1000 - y)$ т (мал. 75). Оскільки на другому току зерна на 200 т більше, то $1000 - y + 200 = y$, звідси $y = 600$, $1000 - y = 400$.

Відповідь. 400 т і 600 т.

Малюнок 74, малюнок 75, рівняння $1000 - y + 200 = y$ — це три різні математичні моделі прикладної задачі I. У математиці *прикладними* називають задачі, умови яких містять нематематичні поняття.

Модель завжди подібна до оригіналу. У ній відображаються ті чи інші важливі властивості досліджуваного об'єкта. Такими є зменшені моделі автомобіля, літака, будинка. Глобус — модель Землі, лялька — модель людини. Якщо модель побудовано на основі рівнянь, формул чи інших математичних понять, її називають *математичною моделлю*.

Для розв'язування задач на рух також використовують різні моделі. Бажано пам'ятати, що при рівномірному русі пройдена тілом відстань дорівнює добутку швидкості на час ($s = vt$). При цьому всі значення величин слід виражати у відповідних одиницях вимірювання. Наприклад, якщо час дано в годинах, а відстань — у кілометрах, то швидкість треба виражати в кілометрах за годину. Якщо тіло рухається при

наявності течії, то його швидкість руху за течією (проти течії) дорівнює сумі (різниці) його власної швидкості та швидкості течії. За допомогою схем багато задач на рух можна розв'язати усно (див. № 882). Деякі складні задачі вимагають для розв'язування побудови кількох моделей.

Розглянемо задачу, скласти рівняння до якої допомагає таблиця — ще один вид математичних моделей.

Задача 2. Катер мав пройти відстань між містами зі швидкістю 15 км/год, а насправді йшов зі швидкістю 12 км/год і тому запізнівся на 3 год. Знайдіть відстань між містами.

Розв'язання. Побудуємо таблицю і заповнимо її відповідно до умови задачі.

Умова	Відстань, км	Швидкість, км/год	Час, год
Мав пройти	x	15	$\frac{x}{15}$
Пройшов	x	12	$\frac{x}{12}$

Катер ішов на 3 год довше, ніж мав іти. Цій умові відповідає рівняння:

$$\frac{x}{12} - \frac{x}{15} = 3.$$

Розв'яжемо рівняння:

$$\frac{5x - 4x}{60} = 3, \frac{x}{60} = 3, x = 180.$$

Відповідь. 180 км.

Розв'язавши задачу за допомогою рівняння, треба завжди аналізувати одержане значення невідомого. Може статися, що знайдений розв'язок рівняння не відповідає умові задачі.

Задача 3. Периметр трикутника дорівнює 17 см. Знайдіть його сторони, якщо перша з них коротша від другої на 2 см, а від третьої — на 6 см.

Розв'язання. Нехай довжина найкоротшої сторони трикутника дорівнює x см. Тоді довжини інших сторін відповідно становитимуть $(x + 2)$ см і $(x + 6)$ см. Маємо рівняння:

$$x + x + 2 + x + 6 = 17, \text{ або } 3x + 8 = 17.$$

Розв'яжемо його: $3x = 9, x = 3$.

Якщо перша сторона завдовжки 3 см, то друга і третя відповідно становитимуть 5 см і 9 см.

Чи існує трикутник з такими сторонами? Ні, тому що кожна сторона трикутника коротша від суми двох інших, а $9 > 3 + 5$.

Відповідь. Задача не має розв'язку.

Розв'язування прикладних задач методом математичного моделювання здійснюється в три етапи:



- 1) створення математичної моделі даної задачі;
- 2) розв'язування відповідної математичної задачі;
- 3) аналіз відповіді.



Хочете знати ще більше?

Іноді за допомогою рівняння розв'язують не всю задачу, а тільки її частину.

Покажемо, наприклад, як можна заповнювати порожні клітинки *магічного квадрата* — таблиці чисел з однаковою кількістю рядків і стовпчиків, з однаковою сумою чисел у всіх рядках, стовпчиках і по діагоналях.

Задача. Перемалюйте в зошит малюнок 76 і в його порожніх клітинках напишіть такі числа, щоб утворився магічний квадрат.

Розв'язання. Позначимо буквою x число у правій верхній клітинці. Тоді сума всіх чисел першого рядка дорівнюватиме $5 + 6 + x$, або $11 + x$. Такими мають бути суми і в кожній діагоналі, і в середньому стовпчику, тому в нижньому рядку слід написати $4, x - 2, x - 1$ (мал. 13). Оскільки сума чисел має дорівнювати $11 + x$, то складаємо рівняння:

$$4 + (x - 2) + (x - 1) = 11 + x, \text{ звідси } 2x + 1 = 11 + x, x = 10.$$

Підставимо замість x його значення 10, після чого порожні клітинки малюнка 78 заповнити неважко.

5	6	
	7	

Мал. 76

5	6	x
	7	
4	$x - 2$	$x - 1$

Мал. 77

5	6	10
	7	
4	8	9

Мал. 78

У даному випадку рівняння $4 + (x - 2) + (x - 1) = 11 + x$ — модель частини сформульованої задачі, що дає змогу обчислити тільки значення x .

Перевірте себе

1. Наведіть приклад задачі та її математичної моделі.
2. Які бувають математичні моделі?
3. З яких етапів складається розв'язування задачі методом математичного моделювання?

✓ Виконаємо разом!

1. Катер пройшов відстань між пристанями за течією річки за 2 год, а назад — за 2,5 год. Знайдіть власну швидкість катера, якщо швидкість течії становить 2 км/год.

✓ Розв'язання. Нехай власна швидкість катера дорівнює x км/год. Тоді:

$(x + 2)$ км/год — швидкість катера за течією;

$(x - 2)$ км/год — швидкість катера проти течії;

$(x + 2) \cdot 2$ км — відстань, яку катер пройшов за течією;

$(x - 2) \cdot 2,5$ км — відстань, яку катер пройшов проти течії.

Відстані $(x - 2) \cdot 2,5$ і $(x + 2) \cdot 2$ рівні. Отже, маємо рівняння

$$2,5(x - 2) = 2(x + 2), \text{ звідси}$$

$$2,5x - 5 = 2x + 4, \quad 0,5x = 9, \quad x = 18.$$

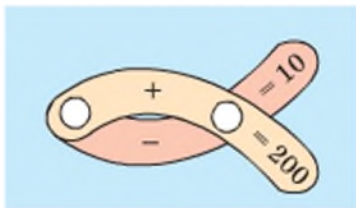
Відповідь. 18 км/год.

2. Розв'яжіть математичний кросворд (мал. 79).

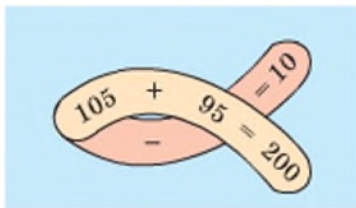
✓ Розв'язання. В кружки слід вписати два числа, щоб їх сума дорівнювала 200, а різниця — 10. Якщо друге число позначимо буквою x , то перше дорівнюватиме $200 - x$. Їх різниця становить 10, отже, $200 - x - x = 10$, звідси

$$2x = 190, \quad x = 95, \quad 200 - x = 105.$$

Відповідь. На малюнку 80.



Мал. 79



Мал. 80

Виконайте усно

878. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 3, а різниця 1.
879. Знайдіть два числа, якщо одне з них у 4 рази більше за іншого, а їх сума дорівнює 10.
880. Знайдіть числа x і y , якщо $x + y = 25$ і $x = y$.
881. Учень задумав число. Якщо від нього відняти 7 і результат поділити на 3, то одержимо 5. Яке число задумав учень?
882. Знайдіть відстань між містами А і В, якщо:
- Червоний і білий автомобілі, що виїхали з них одночасно назустріч один одному, зустрілися через 2 год (мал. 81);
 - «Мерседес» і «Богдан», що виїхали з них одночасно в одному напрямку, зустрілися через 3 год (мал. 82).



Мал. 81



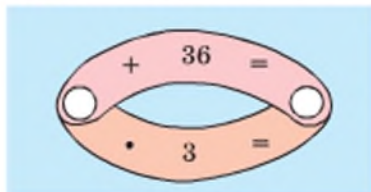
Мал. 82

Рівень А

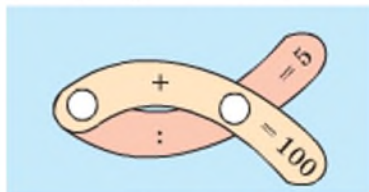
883. Сума двох чисел дорівнює 13,6, а різниця становить 1,6. Знайдіть ці числа.






884. Розв'яжіть математичні кросворди (мал. 83 і 84).

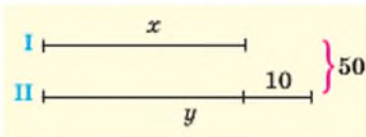


Мал. 83



Мал. 84

- 885.** Сума двох чисел дорівнює 105, а їх відношення становить $1 : 2$. Знайдіть ці числа.
- 886.** Знайдіть число, половина якого більша за його третю частину на $0,5$. Зробіть перевірку.
- 887.** Батько в 5 разів старший за сина, а син на 32 роки молодший від батька. Скільки років кожному з них?
-  **888.** Поле площею 430 га поділено на дві частини так, що одна з них на 130 га більша за іншу. Знайдіть площу кожної частини.
-  **889.** Мотузку завдовжки 84 м розрізали на дві частини, одна з яких утричі довша за іншу. Знайдіть довжину кожної частини.
- 890.** Мотузку завдовжки 25 м розрізали на дві частини, одна з яких на 50% довша за іншу. Знайдіть довжини цих частин мотузки. Зробіть перевірку.
- 891.** Підприємство мало скласти комп'ютери для шкільних кабінетів інформатики за 5 днів, а виконало роботу за 4 дні, бо складало щодня на 12 комп'ютерів більше. Скільки комп'ютерів склало підприємство?
- 892.** Периметр прямокутника дорівнює 118 см, одна його сторона на 12 см довша за іншу. Знайдіть довжини сторін прямокутника.
- 893.** Три трактористи зорали разом 72 га. Перший зорав на 6 га більше за другого, а другий на 9 га більше за третього. Скільки гектарів зорав кожний тракторист?
- 894.** У трьох класах 79 учнів. У другому — на 3 учні більше, ніж у першому, а в третьому — на 2 учні менше, ніж у першому. Скільки учнів у кожному класі?
-  **895.** У трьох кошиках 56 кг яблук. У першому кошику на 12 кг менше, ніж у другому, а в третьому — удвічі більше, ніж у першому. Скільки кілограмів яблук у кожному кошику?
- 896.** Складіть і розв'яжіть задачу за малюнком 85.



Мал. 85

- 897.** Поле площею 860 га поділено на 3 ділянки так, що сума площ двох перших ділянок дорівнює площі третьої,

а площа другої ділянки в 1,5 раза більша за площу першої. Знайдіть площі ділянок.



898. *Стародавня індійська задача.* З букета квіток лотоса принесено в жертву: Шіві — третю частину, Вішну — п'яту, Сонцю — шосту. Одну чверть одержав Бхавані, а решту, 6 лотосів, дано шанованому вчителеві. Скільки було квіток у букеті?

899. *Стародавня грецька задача.* На запитання, скільки учнів навчається в школі, Піфагор відповів: «Половина всіх учнів вивчають математику, чверть — музику, сьома частина — мовчать і, крім того, є ще три жінки». Скільки тоді було учнів у Піфагора?



900. Батькові 40 років, а сину — 10. Через скільки років батько буде втричі старший за сина?

901. Скільки років тій Сороці, що за Галку старша вдвічі, а в позаминулім році старшою була утричі?

902. Катер у стоячій воді йде зі швидкістю 20 км/год. Швидкість течії річки становить 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо рейс туди й назад катер здійснює за 5 год.



903. Катер у стоячій воді проходить 15 км за 1 год, швидкість течії річки дорівнює 2 км/год. Знайдіть відстань між двома пристанями, якщо в один бік катер проходить її на півгодини швидше, ніж в інший.



904. Відстань між двома станціями поїзд може проїхати зі швидкістю 70 км/год на півгодини швидше, ніж зі швидкістю 60 км/год. Знайдіть цю відстань.

905. Пасажирський поїзд протягом 3 год проходить на 10 км більше, ніж товарний — за 4 год. Швидкість товарного поїзда на 20 км/год менша від швидкості пасажирського. Знайдіть ці швидкості.

906. Велосипедист їхав 2 год ґрунтовою дорогою, 1 год — асфальтованою і проїхав 28 км. Знайдіть його швидкість на



Піфагор
(бл. 570 – бл. 500 рр.
до н. е.)


кожній ділянці шляху, якщо асфальтованою дорогою він їхав зі швидкістю на 4 км/год більшою, ніж ґрунтовою.

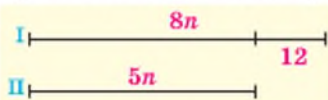
- 907.** Від станції до турбази туристи йшли зі швидкістю 4 км/год, а назад — зі швидкістю 5 км/год, тому на той самий шлях затратили на 1 год менше. Знайдіть відстань від станції до турбази.

Рівень **Б**

- 908.** До якого числа слід додати 4 і 19, щоб утворені суми відносились, як 8 : 11?


- 909.** Сума двох чисел дорівнює 100. Якщо більше з них поділити на менше, то в частці буде 4 і в остачі — 5. Знайдіть ці числа.

-  **910.** Кількість поверхів одного будинку відноситься до кількості поверхів іншого будинку, як 8 : 5. Скільки поверхів у кожному будинку, якщо в першому їх на 12 більше, ніж у другому? Скористайтесь діаграмою (мал. 86).




Мал. 86

- 911.** Кількість уболівальників команди А відноситься до кількості уболівальників команди В, як 3 : 2. Якщо 8 уболівальників перейдуть з команди А до команди В, то попереднє відношення зміниться на таке: 5 : 6. Скільки уболівальників буде в кожній команді?

-  **912.** Матері 38 років, а доньці — 12. Коли донька була чи буде втричі молодшою від матері? А вдвічі?





- 913.** Мати на 20 років старша за сина, а їх роки відносяться, як 7 : 2. Скільки років матері?


- 914.** Скільки років матері й доньці, якщо в позаминулому році донька була молодшою від матері в 5 разів, а в наступному буде молодшою в 4 рази?

-  **915.** Сума цифр даного двоцифрового числа дорівнює 8. Якщо цифри поміняти місцями, то вийде число на 18 більше, ніж дане. Знайдіть дане число.

- 916.** Якщо до даного числа дописати справа цифру 9 і до утвореного числа додати подвоєне дане число, то сума дорівнюватиме 633. Знайдіть дане число.

- 917.** Якщо до трицифрового числа зліва дописати цифру 8 і до утвореного чотирицифрового числа додати 619, то сума буде в 40 разів більша, ніж дане трицифрове число. Знайдіть це число. Зробіть перевірку.

-  **918.** Якщо до двоцифрового числа дописати справа і зліва цифру 4, то утворене число буде в 54 рази більше за дане двоцифрове. Знайдіть це двоцифрове число.
- 919.** У двох ящиках 112 кг яблук. Якщо з першого ящика перекласти в другий 30 % яблук, то у другому стане в 3 рази більше яблук, ніж у першому. Скільки кілограмів яблук було в кожному ящику спочатку? Зробіть перевірку.
-  **920.** Власник магазину підняв ціну на музичні диски на 25 %, але через таку високу ціну попит на товар знизився. Це змусило власника зменшити нову ціну на 25 %, після чого вартість диска становила 24 грн. Якою була початкова ціна музичних дисків?
-  **921.** Швидкість катера в стоячій воді відноситься до швидкості течії річки, як 25 : 2. За течією катер ішов 3 год 50 хв. Скільки часу потрібно йому, щоб повернутися назад?
- 922.** Поїзд проходить відстань від A до B за 3 год. Якби він їхав зі швидкістю на 10 км/год більшою, то в дорозі був би на півгодини менше. Знайдіть відстань між A і B .
- 923.** Теплохід вийшов з порту K у порт P зі швидкістю 32 км/год. На відстані 216 км від порту K він потрапив у шторм і мав зменшити швидкість на 5 км/год, тому прибув у порт P із запізненням на 25 хв. Знайдіть відстань між портами K і P .
- 924.** Із двох міст, відстань між якими 450 км, одночасно виїхали назустріч один одному два автомобілі й зустрілися через 3 год. По скільки кілометрів проїхали вони до зустрічі, якщо один їхав зі швидкістю, на 10 км/год більшою, ніж інший? Зробіть перевірку.
-  **925.** Із міст A і B , відстань між якими 210 км, одночасно виїхали назустріч один одному два автомобілі й зустрілися через півтори години. Знайдіть швидкості автомобілів, якщо до зустрічі перший автомобіль проїхав на 30 км більше, ніж другий.
- 926.** Із двох сіл, відстань між якими 36 км, назустріч один одному повинні виїхати два велосипедисти. Якщо вони виїдуть одночасно, то зустрінуться через півтори години. Якщо ж другий виїде на півгодини пізніше, ніж перший, то вони зустрінуться після того через 1,25 год. Знайдіть швидкості велосипедистів.

- 927.** О 5 год 30 хв з міста A в місто B вилетів вертоліт зі швидкістю 250 км/год, зробив у місті B посадку на 30 хв і зі швидкістю 200 км/год повернувся в місто A о 12 год 45 хв. Знайдіть відстань між містами A і B .
- 928.** З Києва до Одеси виїхав автобус, а через 20 хв слідом за ним — легковий автомобіль, який через 1 год наздогнав автобус. З якою швидкістю їхав автобус, якщо швидкість автомобіля дорівнювала 80 км/год?
- 929*.** Торговельна організація придбала дві партії товарів за 25 000 грн і після їх продажу отримала 40% прибутку. Скільки заплатила організація за кожну партію, якщо перша принесла 25% прибутку, а друга — 50%?
-  **930*.** Зливков міді зі сріблом загальною масою 15 кг містить 45% міді. Скільки чистого срібла потрібно додати до нього, щоб утворений сплав містив 30% міді?
- 931*.** З 1 т руди, яка містила деяку кількість заліза, вилучили 400 кг домішок. Хоча в цих домішках було 12% заліза, у решті руди вміст заліза підвищився на 20%. Яка кількість заліза залишилася в руді?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

932. Обчисліть значення виразу:

а) $|-2,7| + 2,4$;

б) $-2,4 + |-2,3|$;

в) $|-10,5| : 7 - 3,2$;

г) $4,8 - |3,2| : |-0,8|$;

р) $\left| -\frac{3}{2} \right| : \frac{1}{2} - 1,2^2$;

д) $|2,5| : |-0,5|^2 - 200$.

933. Ви забули першу цифру номера телефону свого знайомого. Яка ймовірність того, що відразу, коли наберете навмання першу цифру, ви зателефонуєте саме до нього?

Розкрийте дужки і спростіть вираз (934—935).

934. а) $2(a - 3) + 6$;

б) $-3(x - 5) + 6x$;

в) $x - 3(2 + x) + 7$;

г) $-(a + 5) + 2a - 4$.

935. а) $(2c - 1) - (3c - 2)$;

б) $-(1 - 2a) + 3(1 - a)$;

в) $x^2 - 2(8 + x) + 16$;

г) $x^2 - 2x + 2(2 - x)$.

936. Знайдіть число, якщо:

а) 20% його становлять 344;

б) 125% його становлять 4800;

в) 2,5% його становлять 640.

§23. РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ



Досі ми розглядали рівняння з однією змінною. Проте є задачі, розв'язування яких приводить до рівнянь із двома змінними.

Задача. На 22 грн купили кілька ручок по 5 грн і кілька кольорових олівців — по 3 грн. Скільки купили ручок і олівців?

Розв'язання. Нехай купили x ручок і y олівців. За ручки заплатили $5x$ грн, а за олівці — $3y$ грн. Усього заплатили 22 грн, отже, $5x + 3y = 22$.

Це рівняння з двома змінними. Наведемо й інші приклади таких рівнянь із двома змінними:

$$xy = 8, \quad 2x = 3y, \quad x^2 + y = 7.$$

♦ Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — дані числа, називають лінійним рівнянням із двома змінними x і y . Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, його називають рівнянням першого степеня з двома змінними.

Приклади лінійних рівнянь:

$5x + 3y = 22$, $x - 2,7y = 0$, $0x + 2y = 4$; два перші з них — рівняння першого степеня з двома змінними.

Пара чисел $x = -1$ і $y = 9$ задовольняє рівняння $5x + 3y = 22$, бо $5 \cdot (-1) + 3 \cdot 9 = 22$. А пара чисел $x = 1$ і $y = 2$ це рівняння не задовольняє, оскільки $5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \neq 22$.

♦ Кожна пара чисел, яка задовольняє рівняння з двома змінними, тобто перетворює це рівняння в правильну рівність, називають розв'язком цього рівняння.

Зверніть увагу: один розв'язок складається з двох чисел, на першому місці записують значення x , на другому — y . Коренями їх не називають.



Щоб знайти розв'язки рівняння з двома змінними, слід підставити в рівняння довільне значення однієї змінної і, розв'язавши утворене рівняння, знайти відповідне значення іншої змінної.

Для прикладу знайдемо кілька розв'язків рівняння

$$3x - y = 5.$$

Якщо $x = 1$, то $3 \cdot 1 - y = 5$, звідси $y = -2$. Пара чисел $x = 1$ і $y = -2$ — розв'язок даного рівняння. Його записують ще й так: $(1; -2)$. Надаючи змінній x значення $2, 3, 4, \dots$, так само можна знайти скільки завгодно розв'язків рівняння: $(2; 1)$, $(3; 4)$, $(4; 7)$, $(5; 10)$, \dots . Кожне рівняння першого степеня з двома змінними має безліч розв'язків.

Рівняння $5x + 3y = 22$ також має безліч розв'язків, але сформульовану вище задачу задовольняє тільки один із них: $(2; 4)$.



Два рівняння з двома змінними називають рівносильними, якщо кожне з них має ті самі розв'язки, що й інше. Рівняння, які не мають розв'язків, вважають рівносильними так само.

Для рівняння з двома змінними залишаються правильними властивості, сформульовані для рівнянь із однією змінною.

Обидві частини рівняння з двома змінними можна помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число. Будь-який член такого рівняння можна перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний. У результаті одержимо рівняння, рівносильне даному.

Наприклад, рівняння $8x = 7 + 3 \cdot (1 - 2y)$ можна перетворити так: $8x + 6y = 10$, $4x + 3y = 5$. Кожне з цих рівнянь рівносильне одне одному.



Хочете знати ще більше?

Іноді виникає потреба розв'язати рівняння з двома змінними в множині цілих чисел, тобто визначити тільки такі розв'язки, які є парами цілих чисел. Способи розв'язування таких рівнянь опрацював давньогрецький математик Діофант (III ст.), тому їх називають *діофантовими рівняннями*. Наприклад, задача про книжки і карти зводиться до рівняння $5x + 3y = 22$, де x і y можуть бути тільки цілими (навіть тільки натуральними) числами.

Змінну y із цього рівняння виразимо через x :

$$y = \frac{22 - 5x}{3}.$$

Підставлятимемо в рівність замість x перші натуральні числа доти, поки не одержимо ціле значення змінної y . Це можна робити усно. Якщо $x = 2$, то $y = 4$. Інших натуральних розв'язків рівняння не має. Тому задача має єдиний розв'язок: 2 книжки і 4 карти.

Перевірте себе

1. Яке рівняння називають лінійним рівнянням із двома змінними? Наведіть приклади таких рівнянь.
2. Що називають розв'язком рівняння з двома змінними?
3. Які рівняння з двома змінними називають рівносильними?
4. Сформулюйте основні властивості рівнянь. Чи правильні вони для рівнянь із двома змінними?



Виконаємо разом!

1. Розв'яжіть рівняння:

$$\text{а) } x^2 + 6y^2 = -7; \quad \text{б) } (x - 3)^2 + y^2 = 0.$$

✓ Розв'язання. а) Ні за яких значень x і y значення виразу $x^2 + 6y^2$ не може бути від'ємним числом. Тому рівняння розв'язків не має.

б) Значення виразу $(x - 3)^2 + y^2$ дорівнює нулю тільки за умови, коли $x - 3 = 0$ і $y = 0$. Отже, рівняння має тільки один розв'язок: $x = 3$, $y = 0$.

2. Складіть рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел $(1; -5)$.

✓ Розв'язання. Пишемо будь-який двочлен із змінними x і y , наприклад $3x - 5y$. Якщо $x = 1$, а $y = -5$, то значення даного двочлена дорівнює 28. Отже, рівняння $3x - 5y = 28$ відповідає умові задачі.

Є безліч інших лінійних рівнянь із двома змінними, які мають такий самий розв'язок $(1; -5)$.

Виконайте усно

937. Назвіть рівняння з двома змінними:

- а) $3x - y = 5$; б) $x^3 + 4z = 9$;
 в) $xy - 28 = 3$; г) $2y - xz = 0$;
 р) $0,72 = 8t + 5$; д) $x - 2(3 - y) = 5$.

Які з цих рівнянь лінійні, які — першого степеня?

938. Знайдіть кілька розв'язків рівняння:

- а) $x + y = 5$; б) $x - y = 2$; в) $xy = 30$.


939. Чи має розв'язки рівняння:

- а) $x^2 + y^2 = -3$; б) $|x| + |y| = -2$; в) $x^4 + |y| = -8$?

940. Розв'яжіть рівняння:


- а) $|x| + |y| = 0$; б) $|x - 2| + |y| = 0$; в) $|x + 1| + |2y| = 0$.

Рівень А

 941. Чи задовольняють значення $x = 5$ і $y = -2$ рівняння $5x - 2y = 10$?

942. Які з пар $(3; 2)$, $(4; -3)$, $(-1; 4)$ є розв'язками рівняння:


- а) $2x + 7y = 20$; б) $-2t + 3z = 0$;
 в) $x - 4y = 16$; г) $5x - y = 23$?

 943. Знайдіть два будь-які розв'язки рівняння:

- а) $2x + y = 7$; б) $2x - 3z = 10$; в) $4m + 5n = 21$.

944. Знайдіть три будь-які розв'язки рівняння:

- а) $x - y = 16$; б) $2x + y = 3,5$; в) $4a + 5b = 20$;
 г) $5m - 2n = -8$; р) $\frac{1}{5}x - \frac{3}{4}y = 1$; д) $\frac{5}{6}a + \frac{1}{4}b = 1$.


 945. Замініть зірочки числами так, щоб пари $(1; *)$, $(2; *)$, $(3; *)$, $(*; 2)$, $(*; 0)$, $(*; -5)$ задовольняли рівняння $x + 3y = 10$.

946. Складіть рівняння з двома змінними, розв'язком якого є пара чисел:


- а) $(3; 2)$; б) $(-2; 5)$; в) $(-4; -1)$; г) $\left(\frac{1}{2}; \frac{2}{5}\right)$.

947. З лінійного рівняння виразіть: 1) y через x ; 2) x через y :


- а) $3x + 4y = 12$; б) $5x - y = 15$; в) $x - 2y = 6$;
 г) $2x - 5y = 1$; р) $10x - 15y = 0$; д) $\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}y = 0$.

-  **948.** Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 = -5$ не має розв'язків.
- 949.** Чи має розв'язки рівняння з двома змінними:
 а) $x^2 + y^4 = -1$; б) $x^2 - y^2 = -3$; в) $x^2 + 3y^2 = 0$?
- 950.** Скільки розв'язків має рівняння:
 а) $x^2 + y^2 = 0$; б) $x^2 + (y - 2)^2 = 0$;
 в) $x(x^2 + y^2) = 0$; г) $x^2 + y^2 = -2$?

Розв'яжіть рівняння (951—952).

-  **951.** а) $x^2 + (y - 1)^2 = 0$; б) $(x + 3)^2 + y^2 = 0$.
- 952.** а) $(x - 3)^2 + (y + 1)^4 = 0$; б) $|x| + y^2 = 0$;
 в) $(2x + 3)^4 + y^2 = 0$; г) $4x^2 + |y - 1| = 0$.
- 953.** Знайдіть значення коефіцієнта a в рівнянні $ax + 5y = 1$, якщо відомо, що пара $x = 3$, $y = -4$ є розв'язком цього рівняння.

Рівень Б

- 954.** Складіть таке рівняння із змінними x і y , щоб його задовольняли дві пари чисел:
 а) $(2; 1)$ і $(1; -1)$; б) $(-3; 2)$ і $(0; -4)$;
 в) $(5; 0)$ і $(-1; -3)$; г) $(-2; 6)$ і $(0; 0)$.
- 955.** Доведіть, що рівняння не має розв'язків:
 а) $x^2 + (y - 1)^2 = -3$; б) $x^2 + y^2 + 2 = 2y$;
 в) $|x| + y^2 + 1 = 0$; г) $|x - 1| + |x| + y^2 = 0$.
-  **956.** Знайдіть таке число c , щоб пара $(c; -c)$ задовольняла рівняння:
 а) $2x + 3y = 20$; б) $5x - y = 12$;
 в) $x + 8y = 9$; г) $7x - 3y = 20$.
- 957.** Знайдіть таке число n , щоб пара $(n; -n)$ задовольняла рівняння:
 а) $5x + 4y = 3$; б) $9x - y = 70$; в) $x^2 + 4y = 0$; г) $x + |y| = 4$.
- 958.** При яких значеннях n рівняння має тільки один розв'язок:
 а) $x^2 + y^2 = n$; б) $x^2 + |y| = n - 1$;
 в) $|x| + |y| = n + 2$; г) $(x - 3)^4 + y^4 = n^4$?
- Розв'яжіть рівняння (959—961).
- 959.** а) $4x^2 + |y| = x^2$; б) $|x - 2| - y^4 = |3x - 6|$;
 в) $10x - |y| = x^2 + 25$; г) $|y + 4| + |3x + 2| = 0$.

- 960.** а) $x^2 + y^2 + 1 = 2x$; б) $x^2 + y^2 + 9 = 6x$;
в) $x^2 + 4y^2 + 1 = 4y$; г) $x^2 + 2x + y^2 + 5 = 4y$.
- 961.** а) $x^2 + y^2 + 4 = -4x$; б) $x^2 + y^2 + 9 = 6y$;
в) $4x^2 + y^2 + 2 = 2(2x - y)$; г) $x^2 + y^2 + 8 = 4(y - x)$.
- 962.** Знайдіть натуральні значення x і y , які задовольняють рівняння:
а) $x + 4y = 13$; б) $5x + y = 14$; в) $3x + y = 16$;
г) $x + 12y = 37$; р) $3x + 2y = 22$; д) $4x + 5y = 29$.
- 963.** Знайдіть цілі невід'ємні розв'язки рівняння:
а) $x^2 + y^2 = 2$; б) $2x^2 + y^2 = 9$.
- 964.** Чи має цілі розв'язки рівняння:
а) $x^2 + y^2 = 3$; б) $x^2 + 3y^2 = 32$?
- 965.** Знайдіть таке значення a , щоб рівняння $3x - 2y^2 = 6$ мало розв'язок:
а) $(a; 3)$; б) $(2; a)$; в) $(a; 0)$; г) $(8; a)$.
- 966.** Знайдіть значення коефіцієнта a в рівнянні $5x - ay = 2$, якщо його задовольняє пара чисел:
а) $(2; 1)$; б) $(1; 2)$; в) $(4; 3)$; г) $(-5; 9)$.
- Складіть рівняння з двома змінними і розв'яжіть його способом випробувань (**967—974**).
- 967.** Знайдіть двоцифрове число, яке у 2 рази більше за суму його цифр.
- 968.** Знайдіть двоцифрове число, яке більше за суму його цифр у: а) 3 рази; б) 5 разів; в) 6 разів; г) 8 разів.
- 969.** Знайдіть двоцифрове число, яке у 2,5 раза більше за добуток його цифр.
- 970.** Знайдіть двоцифрове число, яке в 4 рази більше за суму його цифр і в 2 рази більше за добуток його цифр. Розв'яжіть задачу, не використовуючи першої частини її умови.
- 971.** Якщо деяке двоцифрове число помножити на суму його цифр, то вийде 370. Знайдіть це число.
- 972.** Є труби завдовжки 7 і 8 м. Скільки треба взяти таких труб, щоб прокласти трубопровід завдовжки 67 м?
- 973.** Хлопчик має монети вартістю 2 к. і 5 к. Як він може без задачі заплатити 37 к.?
- 974.** Цукерки розфасовано в коробки по 200 г і 300 г. Скільки треба взяти таких коробок, щоб було 3 кг цукерок?

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

975. Побудуйте графік функції $y = -1,5x + 2$.

976. Доведіть тотожність двома способами:

а) $4a^4 + 1 = (2a^2 - 2a + 1)(2a^2 + 2a + 1)$;

б) $a^4 + a^2 + 1 = (a^2 - a + 1)(a^2 + a + 1)$.

977. За якої умови рівняння $(a - 1)x = 3a - 3$ має безліч розв'язків?

978. Чи існують такі значення a , при яких рівняння $3x + 4 = a$ не має розв'язків?

§ 24. ГРАФІК ЛІНІЙНОГО РІВНЯННЯ З ДВОМА ЗМІННИМИ




Розглянемо рівняння $3x - 2y = 6$. Надавши змінній x значень $-2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$, знайдемо відповідні значення змінної y . Матимемо розв'язки даного рівняння: $(-2; -6)$, $(-1; -4,5)$, $(0; -3)$, $(1; -1,5)$, $(2; 0)$, $(3; 1,5)$, \dots

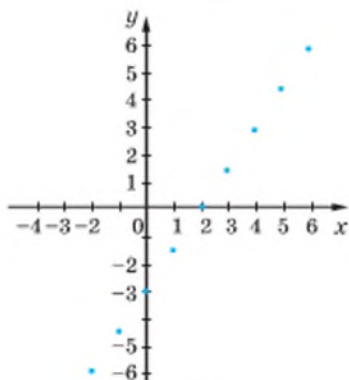
Якщо на координатній площині позначити відповідні цим парам точки, то виявиться, що всі вони розміщені на одній прямій (мал. 87). Цю пряму (мал. 88) називають *графіком* даного рівняння.

Визначимо з рівняння $3x - 2y = 6$ його змінну y через x :

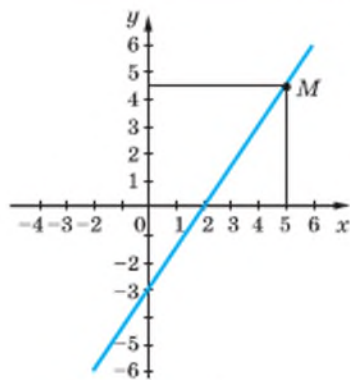
$$2y = 3x - 6, \text{ звідси } y = \frac{3}{2}x - 3.$$

Це функція, графік якої зображено на малюнку 88. Узагалі, якщо $b \neq 0$, то з рівняння $ax + by = c$ змінну y можна виразити через x . Одержимо рівність $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, яка є формулою лінійної функції. А її графік — пряма.

 **Графік кожного рівняння першого степеня з двома змінними — пряма. І кожна пряма координатної площини — графік деякого лінійного рівняння з двома змінними.**



Мал. 87



Мал. 88

Кожна точка графіка рівняння має координати, що задовольняють дане рівняння. Наприклад, точка M графіка рівняння $3x - 2y = 6$ має абсцису 5 і ординату 4,5 (див. мал. 88). Ці значення x і y задовольняють дане рівняння: $3 \cdot 5 - 2 \cdot 4,5 = 6$.

Графік лінійної функції є водночас графіком деякого лінійного рівняння з двома змінними. Наприклад, рівняння $3x + 2y = 6$ і $y = -1,5x + 3$ рівносильні, а рівносильні рівняння мають однакові графіки.



Щоб побудувати графік рівняння першого степеня з двома змінними, досить знайти два його розв'язки, позначити на координатній площині відповідні їм точки і провести через них пряму.

- Якщо в рівнянні $ax + by = c$ один із коефіцієнтів (a чи b) дорівнює нулю, його графік — також пряма.

- Якщо $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, то одержимо рівняння $by = c$, або $y = \frac{c}{b}$. Графіком такого рівняння є пряма, паралельна осі Ox .

- Якщо $b = 0$, $a \neq 0$, $c \neq 0$, то матимемо рівняння $ax = c$, або $x = \frac{c}{a}$. Графіком такого рівняння також є пряма, паралельна осі Oy .

- Якщо $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, то матимемо рівняння $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$.

Таке рівняння задовольняє будь-яка пара чисел. Його графіком є вся координатна площина.

- Якщо $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$, то матимемо рівняння

$$0 \cdot x + 0 \cdot y = c.$$

Таке рівняння не має жодного розв'язку.



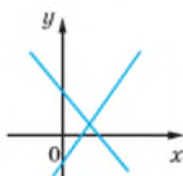
Хочете знати ще більше?

Відомо, що дві прямі на площині можуть перетинатися, бути паралельними або збігатися. Так само можуть розташовуватися на координатній площині й графіки двох рівнянь першого степеня з двома змінними (мал. 89).

Взаємне розташування графіків рівнянь

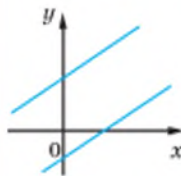
$$a_1x + b_1y = c_1 \text{ і } a_2x + b_2y = c_2$$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$



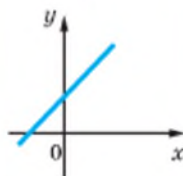
Прямі
перетинаються

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$



Прямі
паралельні

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$



Прямі
збігаються

Мал. 89

Перевірте себе

1. Наведіть приклад рівняння першого степеня з двома змінними.
2. Що є графіком рівняння першого степеня з двома змінними? Як його побудувати?
3. Наведіть приклад лінійного рівняння з двома змінними.
4. Яким може бути графік лінійного рівняння з двома змінними?

✓ Виконаємо разом!

1. Побудуйте графік рівняння:

а) $0x + 2y = 8$; б) $3x + 0y = 6$;

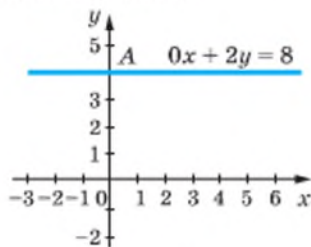
в) $0x + 0y = 0$; г) $0x + 0y = 7$.

✓ Розв'язання. Рівняння а) задовольняє кожна пара чисел $(c; 4)$, де c — довільне число. Графік цього рівняння — пряма, паралельна осі x , яка проходить через точку $A(0; 4)$ (мал. 90).

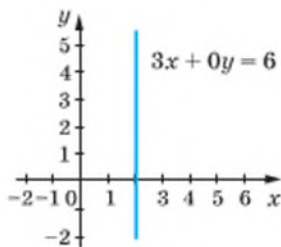
Множина розв'язків рівняння б) — безліч пар $(2; p)$, де p — довільне число. Графік цього рівняння — пряма, паралельна осі y (мал. 91).

Рівняння в) задовольняє кожна пара чисел; графік цього рівняння — уся координатна площина.

Рівняння г) не має жодного розв'язку; його графік — порожня множина.



Мал. 90



Мал. 91

Виконайте усю

979. Скільки розв'язків має рівняння:

а) $0x + 0y = 20$; б) $0x + 0y = 0$; в) $0x + 2y = 0$;

г) $9x + 0y = 18$; г) $x + y = 0$; д) $x - y = 1$?

980. Графіком якої функції є графік рівняння $2x + 5y = 8$?

981. Чи відрізняється графік функції $y = 0,5x - 2$ від графіка рівняння $x - 2y = 4$?

982. Чи проходить через початок координат графік рівняння:






а) $3x - 2y = 0$; б) $2x - 3y = 7$; в) $3(x - 4) = 4(y - 3)$?

983. Знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:


а) $x - 5y = 10$; б) $3x + 4y = 24$; в) $6x + y = 0$; г) $2x - 4y = -1$.

Рівень

A


- 984.** Чи належить точка $A(-3; 2)$ графіку рівняння:
а) $5x + 12y = 9$; б) $2x + 3y = x$; в) $5(x + 3) = 4(y - 2)$?
- 985.** Знайдіть п'ять розв'язків рівняння $3x + 4y = 8$ і позначте відповідні їм точки на координатній площині. Як розміщені ці точки?
-  **986.** Побудуйте графік рівняння:
а) $x + y = 4$; б) $2x + y = 6$; в) $3x + 2y = 0$.
- 987.** Побудуйте графік рівняння:
а) $2x + y = 5$; б) $3x - 2y = 3$; в) $x + 3y = 0$;
г) $x - \frac{1}{2}y = 1$; г) $x - y = 0$; д) $1,5x + 2y = 0$.
-  **988.** Точка з абсцисою $2,5$ належить графіку рівняння $7x - 2y = 12,5$. Знайдіть ординату цієї точки.
- 989.** Точка з ординатою $1,5$ належить графіку рівняння $5x + 4y = 16$. Знайдіть абсцису цієї точки.
- 990.** На графіку рівняння $0,6x + y = 2,2$ взято точку. Яка ордината цієї точки, якщо її абсциса дорівнює:
а) -8 ; б) -3 ; в) 2 ; г) 7 ?
-  **991.** Знайдіть абсцису точки, взятої на прямій, що є графіком рівняння $11x - 4y = 80$, якщо її ордината дорівнює:
а) -31 ; б) -20 ; в) $-3,5$; г) 2 .
-  **992.** Чому дорівнює значення c , коли відомо, що графік рівняння $2x + 5y = c$ проходить через точку:
а) $A(3; 1)$; б) $B(-5; 2)$; в) $C(-3; 4)$; г) $D(-2; -1)$?
- 993.** Яким має бути коефіцієнт a рівняння $ax - 4y = 12$, щоб графік цього рівняння проходив через точку:
а) $M(10; 2)$; б) $N(-1; -1)$; в) $P(2; -3)$; г) $Q(6; 6)$?
- 994.** При якому значенні b графік рівняння $6x + by = 0$ проходить через точку:
а) $N(2; 3)$; б) $O(0; 0)$; в) $P(-4; 8)$; г) $R(-3; -2)$?
-  **995.** За якої умови графік функції $y = 1,5x + c$ є графіком рівняння $3x - 2y = 4$?
- 996.** Знайдіть координати точок перетину з осями координат графіка рівняння:
а) $3x + 2y = 6$; б) $x + 5y = 10$;
в) $3x - 2y = 6$; г) $-x - 5y = 10$.

997. Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $x - y = 3$ і $3x + y = 1$. Знайдіть координати точки перетину графіків.

 **998.** Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $2x + 3y = 5$ і $2x + 3y = 10$.

999. Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $5x - y = 7$ і $10x - 2y = 14$.

Рівень Б


 **1000.** Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь та знайдіть координати точки їх перетину:

- а) $x + y = 5$ і $x - y = -1$;
- б) $2x - y = 6$ і $4x - 3y = 12$;
- в) $2x + 3y = -9$ і $x + 3y = -6$;
- г) $4x - 5y = 0$ і $2x - 5y = -10$.

1001. Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь:


- а) $4x + 5y = 20$ і $-4x + 5y = 20$;
- б) $2x + 3y = 6$ і $2x - 3y = 6$;
- в) $5x - 2y = 10$ і $10x - 4y = 20$;
- г) $-3x + 2y = 6$ і $-3x + 2y = -6$.

1002. Доведіть, що графік рівняння $5x + 6y = 13$ не проходить через початок координат.

 **1003.** Доведіть, що ордината кожної точки графіка рівняння $0x + 3y = 2$ невід'ємна.

1004. Побудуйте графік рівняння:

- а) $0x + 5y = 10$; б) $3x + 0y = 9$; в) $x - y = 0$.

 **1005.** Що є графіком рівняння:

- а) $2x + 0y = 0$; б) $0x + 0y = 0$; в) $0x + 0y = 13$?

1006. Побудуйте графік рівняння:

- а) $x + 0y = 4$; б) $0 \cdot x + 3y = 6$; в) $2x = 6$; г) $0 \cdot x - y = 3$;
- р) $2x + 0 \cdot y = 4$; д) $-y = 1$; е) $x = 0$; є) $y = 0$.

1007. Для кожного з випадків а—г складіть три різні рівняння, графіки яких проходять через одну й ту саму точку А:

- а) $A(4; 3)$; б) $A(-2; 4)$; в) $A(0; -3)$; г) $A(1; 0)$.



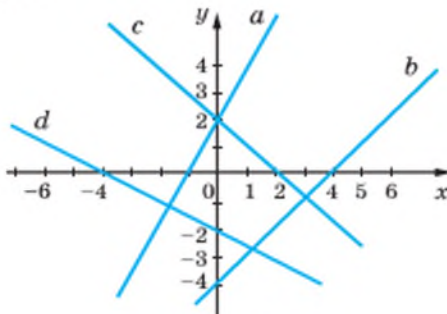
1008. Складіть рівняння, графік якого проходить через початок координат і точку:

а) $X(2; 2)$; б) $Y(-5; 2)$; в) $Z(-4; -6)$; г) $T(3; -1)$.

1009. Складіть рівняння, графік якого перетинає осі координат у точках: а) $A(-3; 0)$ і $B(0; 1)$; б) $M(4; 0)$ і $N(0; 5)$;

в) $P(0; -3)$ і $Q(3; 0)$; г) $C(0; -4)$ і $D(-2; 0)$.

1010*. Напишіть рівняння, графіки яких зображені на малюнку 92:



Мал. 92

1011. Складіть рівняння, графік якого проходить паралельно графіку рівняння $2x - y = 0$ через точку:

а) $K(4; 2)$; б) $L(0; 5)$; в) $M(-3; 0)$; г) $N(2; -1)$.



1012*. Побудуйте графік рівняння:

а) $|x| - y = 0$; б) $|x| + y = 0$; в) $x - |y| = 0$; г) $x + |y| = 0$.

1013*. Чи правильно, що графіком рівняння $|x - 2| + |y - 3| = 0$ є одна точка $K(2; 3)$? А рівняння $|x - 2| = |y - 3|$?

Побудуйте графік рівняння (1014—1015).

1014*. а) $|y| = 2 - x$; б) $|y| = 3x - 4$; в) $|y| + |2 - x| = 0$.

1015*. а) $x^2 - 9y^2 = 0$; б) $4x^2 - y^2 = 0$; в) $(y - 2)^2 = (x + 1)^2$.

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1016. Є білий хліб, чорний хліб, сир, ковбаса і масло. Скільки видів бутербродів можна приготувати? Розгляньте всі можливі варіанти.

1017. На скільки відсотків число 3,2 більше за число 2,5?

1018. Розв'яжіть рівняння: а) $x^2 = 64$; б) $(x - 2)^2 = 25$.

§ 25. СИСТЕМИ РІВНЯНЬ



Задача. 4 кг моркви і 3 кг буряків коштують 26 грн, а 6 кг моркви і 2 кг буряків — 34 грн. Скільки коштує 1 кг моркви і 1 кг буряків?

Цю задачу можна розв'язати, склавши рівняння з однією змінною (зробіть це!). А можна скористатися іншим способом.

Нехай 1 кг моркви коштує x грн, а 1 кг буряків — y грн. Тоді

$$4x + 3y = 26 \quad \text{і} \quad 6x + 2y = 34.$$

Маємо два рівняння з двома змінними. Треба знайти такі значення змінних x і y , які водночас задовольняли б і перше, і друге рівняння, тобто перетворювали кожне з рівнянь у правильну рівність. Інакше: треба знайти *спільний розв'язок* обох рівнянь, або розв'язати *систему* даних рівнянь.

Якщо вимагається знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, говорять, що ці рівняння утворюють систему. Записують систему рівнянь, об'єднуючи їх фігурною дужкою:

$$\begin{cases} 4x + 3y = 26, \\ 6x + 2y = 34. \end{cases}$$

Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь.

Наприклад, пара чисел $(3; 2)$ є розв'язком системи

$$\begin{cases} x + 3y = 9, \\ 2x - y = 4, \end{cases} \quad (*)$$

адже $3 + 3 \cdot 2 = 9$ і $2 \cdot 3 - 2 = 4$.

Розв'язати систему рівнянь — означає знайти множину всіх її розв'язків.

Розв'язувати системи рівнянь можна графічним способом. Розв'яжемо, наприклад, систему (*). Для цього побудуємо на одній координатній площині графіки обох її рівнянь (мал. 93). Координати кожної точки графіка рівняння $x + 3y = 9$ задовольняють це рівняння. Координати кожної точки графіка рівняння $2x - y = 4$ задовольняють це рівняння.

Побудовані графіки перетинаються в точці $A(3; 2)$. Тому пара чисел $(3; 2)$ — єдиний розв'язок даної системи рівнянь.

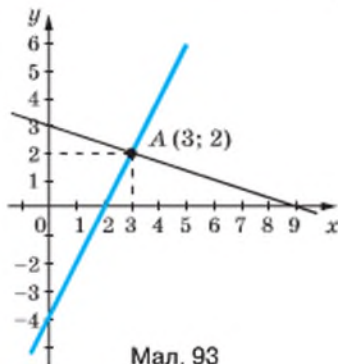
Графічним способом зазвичай знаходять наближені розв'язки. Але, підставивши значення $x = 3$ і $y = 2$ в дану систему рівнянь, переконуємося, що $(3; 2)$ — точний розв'язок.

Чи кожна система двох рівнянь має тільки один розв'язок? Ні. Наприклад, система рівнянь

$$\begin{cases} 3x - 2y = 6, \\ 6x - 4y = 12 \end{cases}$$

має безліч розв'язків. Адже графіки обох цих рівнянь — одна й та сама пряма (переконайтесь у цьому самостійно). Отже, координати кожної точки цієї прямої, наприклад $(-2; -6)$, $(-1; -4,5)$, $(0; -3)$, $(1; -1,5)$, $(2; 0)$, ... — розв'язок даної системи рівнянь.

Є системи рівнянь, які не мають жодного розв'язку. Графіки таких рівнянь — паралельні прямі (див. мал. 89).



Мал. 93

Хочете знати ще більше?

Ви вже знаєте, що рівняння і функції — зручні математичні моделі багатьох задач. Системи рівнянь також використовують як математичні моделі. При цьому за умовою задачі систему рівнянь із двома змінними буває легше скласти, ніж одне рівняння. І розв'язувати систему рівнянь із двома змінними буває легше, ніж рівняння з однією змінною, що відповідає умові тієї самої задачі.

Існують системи рівнянь із трьома і більшою кількістю змінних.

Перевірте себе

1. Наведіть приклад системи рівнянь.
2. Що таке розв'язок системи рівнянь із двома змінними?
3. Що означає — розв'язати систему двох рівнянь?
4. Як розв'язати систему рівнянь графічним способом?
5. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?

✓ Виконаємо разом!

1. Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 7y = 5, \\ 7x - 2y = 5? \end{cases}$$

✓ Розв'язання. Оскільки $2 : 7 \neq (-7) : (-2)$, то система має єдиний розв'язок (див. мал. 89). Перевірте графічно.

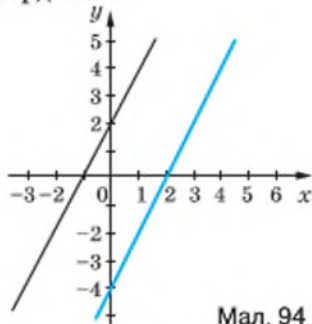
2. Розв'яжіть графічно систему рівнянь

$$\begin{cases} x - 0,5y = 2, \\ 2x - y = -2. \end{cases}$$

✓ Розв'язання. Знайдемо координати точок перетину графіків рівнянь системи з осями координат.

x	0	2
y	-4	0

x	0	-1
y	2	0



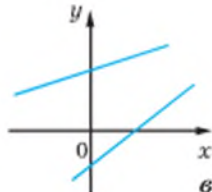
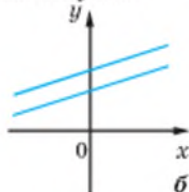
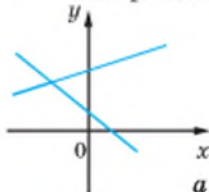
Мал. 94

Побудуємо графіки даних рівнянь (мал. 94). Ці графіки — паралельні прямі; вони не мають спільних точок.

Відповідь. Система рівнянь розв'язків не має.

Виконайте усно

1019. Скільки розв'язків має система рівнянь, графіки яких зображено на малюнку 95?




Мал. 95


1020. Скільки розв'язків має система рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x + 4y = 2, \\ 9x + 12y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x - y = 5, \\ 4x + 2y = 10; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x - 5y = 4, \\ -2x + 10y = -8? \end{cases}$$

Рівень **A**

 1021. Чи є пара чисел $(2; -1)$ розв'язком системи:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 1, \\ x - 2y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 1, \\ 4x - 3y = 11; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x - y = 3, \\ 2x + y = 3? \end{cases}$$

 1022. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $x + 2y = 0$ і $x - y = -6$. Покажіть, що координати цієї точки є розв'язком системи даних рівнянь.

1023. Чи є пара чисел $(-1; 3)$ розв'язком системи рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} x + y = 2, \\ 3x - y = -6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + y = 0, \\ x + 2y = 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x - 2y = -9, \\ 3x + 2y = -3; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x - y = -4, \\ x - 2y = -7? \end{cases}$$

1024. Складіть систему рівнянь, що має розв'язок:

$$\text{а) } (3; 4); \quad \text{б) } (2; -5); \quad \text{в) } (0; 3); \quad \text{г) } (-2; 0).$$


Розв'яжіть графічно систему лінійних рівнянь (1025—1029).

$$1025. \quad \text{а) } \begin{cases} x + y = 6, \\ x - y = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x - y = -2, \\ x + 3y = -10; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} 2x + y = 4, \\ 3x - y = 1. \end{cases}$$

 1026. а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 3x - y = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 0, \\ 4x - y = 6. \end{cases}$

$$1027. \quad \text{а) } \begin{cases} 2x - y = 2, \\ 3x - y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

 1028. а) $\begin{cases} 4x - y = 5, \\ 3x + 2y = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$

1029. а) $\begin{cases} 2x + \frac{1}{2}y = 6, \\ 4x + y = 12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = -2, \\ 3x - 3y = 6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 5x - 2y = -3, \\ 2x - 3y = 1; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -3x + 5y = 1, \\ 4x - y = 10. \end{cases}$


1030. Скільки розв'язків має система рівнянь:

а) $\begin{cases} x + 3y = 5, \\ 8x + 9y = 10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - 4y = 1, \\ 2x - 8y = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = 8, \\ y = 15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} -x + 5y = 7, \\ 2x - 10y = -14? \end{cases}$

1031. Не будуючи графіків, доведіть, що система рівнянь не має розв'язків:

а) $\begin{cases} 8x + 2y = 15, \\ 8x + 2y = 35; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x - y = 8, \\ 3x - y = 16. \end{cases}$

 1032. Скільки розв'язків має система рівнянь:

$$\begin{cases} 6x + 10y = 36, \\ 3x + 5y = 18? \end{cases}$$


Знайдіть три будь-які її розв'язки.

Рівень **Б**

1033. Розв'яжіть графічно систему:

а) $\begin{cases} 0,5x + y = 2, \\ -0,4x + y = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1,5x - y = 3, \\ 0,3x + y = -1,2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0,2x + 0,6y = 1,8, \\ x - 0,5y = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 1,1x + y = 0,1, \\ 1,2x - y = 2,2. \end{cases}$

 1034. Із даних рівнянь утворіть та розв'яжіть усі можливі системи:

$$3x - 2y = -6; \quad x + 2y = -2; \quad 5x + 2y = 22.$$

1035. Розв'яжіть систему графічно та перевірте, чи є одержаний розв'язок точним:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 4y = 1, \\ 12x + 22y = 33; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x + 2y = 7, \\ 11x - 20y = 55. \end{cases}$$

Чи задовольняє систему рівнянь а) пара чисел

$$\left(\frac{77}{79}; \frac{153}{158}\right)?$$

Чи задовольняє систему рівнянь б) пара чисел

$$\left(3\frac{2}{41}; -1\frac{3}{41}\right)?$$

1036. Для кожного з випадків а—г складіть рівняння з двома змінними, яке в системі з даним: 1) має безліч розв'язків; 2) не має жодного розв'язку; 3) має один розв'язок.
а) $3x - y = 5$; б) $3x - 2y = 2$; в) $5x + 4y = 1$; г) $x + 3y = -4$.



1037. При якому значенні a система має: 1) один розв'язок; 2) безліч розв'язків? Визначте це для кожної із систем а) і б).

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - y = 3, \\ x - ay = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 7x + 2y = 11, \\ ax + 4y = 22. \end{cases}$$

1038. Для кожного з випадків а) і б) визначте, при якому значенні b система: 1) не має розв'язків; 2) має єдиний розв'язок.

$$\text{а) } \begin{cases} bx + 2y = 7, \\ 3x - y = 5; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 4x + 8y = 5, \\ 2x + by = -1. \end{cases}$$

1039. Чи має розв'язок система:

$$\text{а) } \begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 3, \\ 2x = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + y = 3, \\ 4y = 8; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} 2x + 7y = 39, \\ 3x - y = 1, \\ 11x - 4y = 1? \end{cases}$$

1040*. При якому значенні k система рівнянь має розв'язок:

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 2y = -1, \\ 5x - 3y = 2, \\ 2x + ky = 25; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} k(x + y) + 5x = 2, \\ 9x + 11y = 7, \\ 4x - 3y = 11? \end{cases}$$

1041*. Розв'яжіть графічно систему:

$$\text{а) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ 2x - y = 6; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 9, \\ 2x + y = 5. \end{cases}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1042. Обчисліть значення виразу:

а) $3x^3 - 2x^2 - x(3x^2 + 2x - 5)$, якщо $x = 5$;

б) $(8 - a^3)a + (a^2 - 8a + 5)a^2$, якщо $a = 0,2$.

1043. Перемножте двочлени:

а) $x + 3$ і $x - 2$; б) $a - 5$ і $a + 4$;

в) $m + n$ і $m - n$; г) $3 - z$ і $5 + z$.

1044. Запишіть у вигляді многочлена число, яке має a сотень, b десятків і c одиниць.

1045. Яке число від множення на 7 збільшується на 30?

1046. Яке число від ділення на 6 зменшується на 12?

1047. Щоб одержати бронзу, беруть 17 частин міді, 2 частини цинку й одну частину олова. Скільки кілограмів міді, цинку й олова слід узяти, щоб виготовити 200 кг бронзи?

§ 26. СПОСІБ ПІДСТАНОВКИ



Графічний спосіб розв'язування систем рівнянь громіздкий і дає, як правило, наближені розв'язки. Тому частіше системи розв'язують іншими способами, зокрема *способом підстановки*.

Нехай, наприклад, треба розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x - y = 4, \\ x + 3y = 9. \end{cases}$$

Виразимо з другого її рівняння змінну x через y :

$$x = 9 - 3y.$$

Оскільки перше рівняння системи мають задовольняти ті самі значення змінних, що й друге, підставимо знайдений ви-

раз $9 - 3y$ замість x у перше рівняння. Одержимо рівняння з однією змінною:

$$2(9 - 3y) - y = 4,$$

звідси $18 - 6y - y = 4$, $y = 2$.

Підставимо значення $y = 2$ у рівняння $x = 9 - 3y$ і знайдемо відповідне значення змінної x :

$$x = 9 - 3 \cdot 2 = 3.$$

Отже, розв'язком системи є пара чисел $(3; 2)$.



Щоб розв'язати систему рівнянь способом підстановки, треба:

- 1) виразити з якого-небудь її рівняння одну змінну через іншу;
- 2) підставити в інше рівняння системи замість цієї змінної здобутий вираз;
- 3) розв'язати утворене рівняння з однією змінною;
- 4) знайти відповідне значення іншої змінної.

Цим способом можна розв'язувати будь-яку систему лінійних рівнянь із двома змінними. Найзручніше, коли коефіцієнт при будь-якій змінній у рівнянні дорівнює 1.

Приклад. Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x = 2(y + 6), \\ 6x + 3y = 1 + x. \end{cases}$$

Розв'язання. Замінімо дані рівняння лінійними, дістанемо систему:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 5x + 3y = 1; \end{cases}$$

$$3x = 2y + 12, \quad x = \frac{2}{3}y + 4, \quad 5\left(\frac{2}{3}y + 4\right) + 3y = 1,$$

$$\frac{10}{3}y + 20 + 3y = 1, \quad \frac{19}{3}y = -19, \quad y = -3, \quad x = \frac{2}{3}(-3) + 4 = 2.$$

Відповідь. $(2; -3)$.



Хочете знати ще більше?

Іноді можна підставляти з одного рівняння системи в інше не значення окремої змінної, а значення цілого виразу. Наприклад, розв'язуючи систему рівнянь

$$\begin{cases} 3 \cdot (2x - 4y) - y = 44, \\ 2x - 4y = 14, \end{cases}$$

можна значення виразу $2x - 4y$ з другого рівняння підставити в перше:

$$3 \cdot 14 - y = 44, \quad y = 42 - 44, \quad y = -2.$$

Тоді

$$2x - 4 \cdot (-2) = 14, \quad 2x = 14 - 8, \quad x = 3.$$

Перевірка. $3 \cdot (6 + 8) + 2 = 42 + 2 = 44,$

$$2 \cdot 3 - 4(-2) = 6 + 8 = 14.$$

Знайдена пара чисел $(3; -2)$ задовольняє дану систему рівнянь.

Відповідь. $x = 3, y = -2.$

Перевірте себе

1. Наведіть приклади систем рівнянь із двома змінними.
2. Що таке розв'язок системи рівнянь із двома змінними?
3. Які ви знаєте способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
4. Як розв'язують систему двох рівнянь із двома змінними способом підстановки?

✓ Виконаємо разом!

1. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2. \end{cases}$$

✓ **Розв'язання.** Виразимо з другого рівняння значення дробу $\frac{y}{3}$ через x і підставимо його в перше рівняння.

$$\frac{y}{3} = \frac{x}{2} - 2, \quad \frac{x}{2} + \frac{x}{2} - 2 = 6, \quad x - 2 = 6, \quad x = 8.$$

Тоді $\frac{y}{3} = \frac{8}{2} - 2, \quad \frac{y}{3} = 2, \quad y = 6.$

Відповідь. $(8; 6).$

Виконайте усно

1048. Виразіть змінну y через x із рівняння:

а) $2x - y = 3$; б) $5x + y = 0$; в) $x - 2y = 0$.

1049. Виразіть змінну x через y із рівняння:

а) $x - y = 2$; б) $x + 3y = 5$; в) $2x + 5y = 0$.

Рівень А

1050. Виразіть змінну y через x із рівняння:

а) $3x - y = 8$; б) $5x + 2y = 7$;

в) $0,5x - 0,3y = 1,5$; г) $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 5$.

1051. Виразіть змінну x через y із рівняння:

а) $2x + 4y = -7$; б) $12x - 5y = 11$;

в) $2,5x + y = 1,5$; г) $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2}y = \frac{2}{5}$.

Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь (1052—1065).

1052. а)
$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 26; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 55, \\ 7x - y = 56. \end{cases}$$



1053. а)
$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ 3x + 8y = 19; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 27, \\ x + 5y = 35. \end{cases}$$

1054. а)
$$\begin{cases} 3x + 4z = 85, \\ 5x + 4z = 107; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 5x + 7z = 101, \\ 7x - z = 55. \end{cases}$$

1055. а)
$$\begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 3x + 8t = 59, \\ 6x + 5t = 107. \end{cases}$$



1056. а)
$$\begin{cases} y - 2z = 6, \\ y + 2z = 10; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 2z + 3y = 216, \\ z + y = 82. \end{cases}$$

1057. а)
$$\begin{cases} 2p + q = 11, \\ 5p - 2q = 41; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 6a - 3b = 4, \\ 2a - b = 5. \end{cases}$$



1058. а)
$$\begin{cases} 9x + 2y - 4 = 0, \\ 8x + y - 2 = 0; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 5u + 7v + 3 = 0, \\ 10u - v + 6 = 0. \end{cases}$$

$$1059. \text{ а) } \begin{cases} 4x - 3y = 8, \\ 8x - 6y = 9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 0,5x - y = 0,5, \\ x - 2y = 1. \end{cases}$$

$$\text{1060. а) } \begin{cases} 14u - 9v = 24, \\ 7u - 2v = 17; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$$

$$1061. \text{ а) } \begin{cases} 3a - 5b = 13, \\ 2a + 7b = 81; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2a - 7b = 8, \\ 4a - 9b = 19. \end{cases}$$

$$1062. \text{ а) } \begin{cases} 6x - 4y = 5, \\ 8x - 3y = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 12y + 15x = 8, \\ 16y + 9x = 7. \end{cases}$$

$$\text{1063. а) } \begin{cases} 4(x + 2y) = 5x + 6, \\ 3(2x - y) = 24y + 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5(x - 3y) = 2x + 7, \\ 3(x + 6y) = 9y + 15. \end{cases}$$

$$1064. \text{ а) } \begin{cases} 5x - 2 = 4(x + 2y) - 8, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 3 = 5(x - y), \\ 2(3x - 1) = 4y - 5. \end{cases}$$

$$1065. \text{ а) } \begin{cases} 4(x - 3z) + 33z = 50, \\ 5(x + 2z) - 3x = 18; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x + 7 = 5(x - t), \\ 3(x + 6t) - 9t = 15. \end{cases}$$

Рівень 5

Знайдіть розв'язок системи (1066—1068).

$$\text{1066. а) } \begin{cases} 3,5x + 0,5y = 0,5, \\ x + 0,25y = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 0,2x + y = 7, \\ 1,5x + y = 13,5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 0,6x + 0,8y = 1, \\ x + 4y = 45; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 0,5x - y = 1,5, \\ 0,3x - 0,4y = 1. \end{cases}$$

$$1067. \text{ а) } \begin{cases} 19x - 21y = 17, \\ 5x + 14y = 24; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 8x - 33y = 19, \\ 12x + 55y = 19; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x + 1 = 5(3 - 2y), \\ 4(x - 1) = 2(8,5 - 5y); \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 6(x - 2y) = 7 - 9y, \\ 8x + 3y = 5(2x + 1). \end{cases}$$

$$1068. \text{ а) } \begin{cases} \frac{7+x}{2} = \frac{y+13}{3}, \\ 5x-3y=8; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{5x-3y}{4} = \frac{x-5y}{3}, \\ 7x+y=12; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{2x-5}{5} = \frac{y-2}{4}, \\ x-2y=2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{4x-1}{3} = \frac{2y+7}{5}, \\ 4x-y=-9. \end{cases}$$

Розв'яжіть систему рівнянь (1069–1072).

$$1069. \text{ а) } \begin{cases} u + \frac{1}{3}(u+v-3) = 14, \\ \frac{1}{3}v - \frac{1}{6}(u+v) = \frac{5}{6}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 7(2x+y) - 5(3x+y) = 6, \\ 3(x+2y) - 2(x+3y) = -6. \end{cases}$$

$$\text{1070. а) } \begin{cases} \frac{1}{3}(x+y) - \frac{1}{4}(x-y) = 5, \\ \frac{1}{12}(x+y) + \frac{1}{3}(x-y) = 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{1}{4}(y-1) - \frac{1}{3}(x+1) = 2, \\ \frac{1}{4}(x+3) - \frac{1}{3}(y+1) = -4. \end{cases}$$

$$1071. \text{ а) } \begin{cases} \frac{x+y}{4} - \frac{x-y}{3} = 10, \\ \frac{x+y}{8} + \frac{x-y}{6} = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x+2y}{4} = 3 + \frac{3x-5y}{2}, \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}y = 7 - \frac{1}{4}(x-2y). \end{cases}$$

$$\text{1072. а) } \begin{cases} 0,2a + 4b = -5 - 0,8a, \\ 2,5a + 0,5b = 1 - \frac{1}{2}b; \end{cases}$$


$$\text{б) } \begin{cases} 0,3x - 2,8y = 0,7(3-y), \\ 1,2x + 1,1y = 3 - 17,5y. \end{cases}$$

1073. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь, не виконуючи побудов:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } x + y = 37 \text{ і } x - y = 5; & \text{б) } 2x - 3y = 16 \text{ і } x + 2y = 1; \\ \text{в) } x + 2y = 8 \text{ і } x - 2y = 2,5; & \text{г) } 4x - 7y = 4 \text{ і } 20x + 3y = 1. \end{array}$$

1074*. Задача з французького підручника XVI ст. Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z = 14, \\ y + \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}z = 8, \\ z + \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y = 8. \end{cases}$$

 **1075***. *Задача Е. Безу (1730–1783)*. Розв'яжіть систему:

$$\begin{cases} 5x + 3y = 65, \\ 2y - z = 11, \\ 3x + 4z = 57. \end{cases}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1076. Який многочлен треба додати до $3y^4 - 2y^2 + 5$, щоб одержати многочлен $5y^4 + y^3 - 2y^2 + 8$?

1077. Який многочлен треба відняти від $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, щоб дістати многочлен $3x + 1$?

Знайдіть добуток многочленів (**1078—1080**).

1078. а) $(2a - n)(4a^2 + 2an + n^2)$; б) $(1 + c + c^2)(1 - c)$.

1079. а) $(a^3 - 1)(a^6 + a^3 + 1)$; б) $(m - 1)(m^2 + 2m + 1)$.

1080. а) $(a^2 + 1)(a^4 - a^2 + 1)$; б) $(x^3 - 2a)(x^6 + 2x^3a + 4a^2)$.

1081. Обчисліть значення виразу:

а) $2^{13} \cdot 0,5^{13}$; б) $0,5^{18} \cdot 2^{18}$; в) $25^7 \cdot 0,04^7$; г) $5^{33} \cdot 0,2^{33}$.

§ 27. СПОСІБ ДОДАВАННЯ



Дано систему рівнянь:

$$\begin{cases} 8x - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31. \end{cases}$$

Спочатку розв'яжемо її способом підстановки. Виразимо з першого рівняння змінну y через x і підставимо одержаний вираз замість y в друге рівняння:

$$y = \frac{1}{3}(8x - 34), \quad 5x + 3 \cdot \frac{1}{3}(8x - 34) = 31,$$

$$5x + 8x = 34 + 31.$$

Далі вже нескладно закінчити розв'язування системи.

А чи можна рівняння $5x + 8x = 34 + 31$ одержати іншим способом? Так, для цього достатньо додати ліві й праві частини рівнянь системи. Оскільки коефіцієнти при y — протилежні числа, то члени зі змінною y знищуються. Тому, розв'язуючи

будь-яку іншу подібну систему, замість підстановки можемо виконувати почленне додавання рівнянь. Оформляти розв'язання будемо, наприклад, так:

$$\begin{cases} 8x - 3y = 34, & 8 \cdot 5 - 3y = 34, \\ 5x + 3y = 31. & 40 - 3y = 34, \\ 13x = 65, & 3y = 6, \\ x = 5. & y = 2. \end{cases}$$

В і д п о в і д ь. (5; 2).

У такий спосіб розв'язують системи, у яких коефіцієнти при якій-небудь змінній — протилежні числа. А до такого вигляду можна звести будь-яку систему лінійних рівнянь із двома змінними. Нехай, наприклад, дано систему

$$\begin{cases} 3x + 7y = 31, \\ 2x + 9y = 12. \end{cases}$$

Помножимо обидві частини її першого рівняння на 2, а другого — на -3 ; дістанемо систему, у якій коефіцієнти при змінній x — протилежні числа. Рівняння одержаної системи рівносильні рівнянням даної, отже, вона має такі самі розв'язки, як і дана.

Оформляти розв'язання можна таким чином:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 31, & | & 2 & & \begin{cases} 6x + 14y = 62, \\ -6x - 27y = -36. \end{cases} \\ 2x + 9y = 12; & | & -3 & & \\ & & & & -13y = 26, \\ & & & & y = -2, \end{cases}$$

$$2x + 9 \cdot (-2) = 12, \quad 2x = 30; \quad x = 15.$$

В і д п о в і д ь. (15; -2).

Перевірте себе

1. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?
2. Які ви знаєте способи розв'язування системи двох лінійних рівнянь із двома змінними?
3. Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання?



Хочете знати ще більше?

Способом додавання можна розв'язувати не тільки системи лінійних рівнянь, а й багатьох нелінійних.

Приклад.

Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - y^2 = 5, \\ 2x + y^2 = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо ліві та праві частини даних рівнянь, одержимо:

$$4x = 12, \text{ або } x = 3.$$

Тоді, $2 \cdot 3 - y^2 = 5$, $y^2 = 1$, звідси $y_1 = 1$, $y_2 = -1$.

Перевірка показує, що знайдені пари чисел $(3; 1)$ і $(3; -1)$ задовольняють дану систему рівнянь.

Відповідь. Система рівнянь має два розв'язки: $(3; 1)$ і $(3; -1)$.



Виконаємо разом!

Розв'яжіть систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + \frac{5(x-y)}{3} = 13, \\ -\frac{7x-3y}{5} + 6x = 19. \end{cases}$$

✓ Розв'язання. Помножимо всі члени першого рівняння на 3, а другого — на 5. Спростимо одержані рівняння:

$$\begin{cases} 6x + 5x - 5y = 39, & \begin{cases} 11x - 5y = 39, \\ 23x + 3y = 95. \end{cases} \\ -7x + 3y + 30x = 95; \end{cases}$$

Щоб скористатися способом додавання, ще раз помножимо всі члени першого рівняння на 3, а другого — на 5 та почленно додамо їх:

$$\begin{cases} 11x - 5y = 39, & | \cdot 3 \\ 23x + 3y = 95; & | \cdot 5 \end{cases} \quad \begin{cases} 33x - 15y = 117, \\ 115x + 15y = 475; \end{cases}$$

$148x = 592$, $x = 4$, тоді $44 - 5y = 39$, $5y = 5$, $y = 1$.

Відповідь. $(4; 1)$.

Виконайте усно

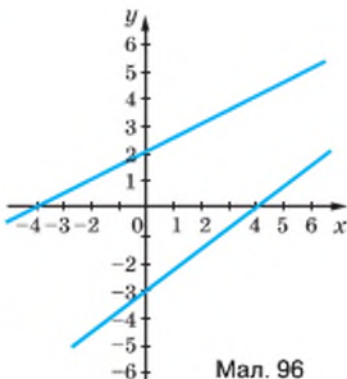
1082. Додайте почленно ліві й праві частини рівнянь:
а) $3x + 2y = 7$ і $5x - y = 12$; б) $x - 8y = 15$ і $4x - 3y = 2$.

1083. Розв'яжіть систему рівнянь:

а)
$$\begin{cases} x + y = 5, \\ 2x - y = 1; \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} x - 2y = 2, \\ 3x + 2y = 6; \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} a - c = 3, \\ 2a + c = 6. \end{cases}$$



Мал. 96

1084. Скільки розв'язків має система рівнянь, графіки яких — на малюнку 96?

1085. Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 6, \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 2. \end{cases}$$

Рівень А

Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь (1086—1095).

1086. а)
$$\begin{cases} x + y = 7, \\ x - y = 3; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} x + 2y = 18, \\ -x + 3y = 2. \end{cases}$$

1087. а)
$$\begin{cases} 3x + 2y = 15, \\ 7x - 2y = 5; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 4x - 3y = 2, \\ 3x + 3y = 5. \end{cases}$$

1088. а)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 17, \\ 2x - 4y = 3; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 3u - v = 26, \\ 13u + 3v = 66. \end{cases}$$

1089. а)
$$\begin{cases} x - 2y = 5, \\ 3x + 5y = 26; \end{cases}$$
 б)
$$\begin{cases} 3x + 4y = 55, \\ 7x - y = 56. \end{cases}$$

$$\text{1090. а) } \begin{cases} 3x - y = 1, \\ 3x + 8y = 19; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + 2y = 27, \\ x + 5y = 35. \end{cases}$$

$$\text{1091. а) } \begin{cases} 3x + 4z = 85, \\ 5x + 4z = 107; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x + 7z = 101, \\ 7x - z = 55. \end{cases}$$

$$\text{1092. а) } \begin{cases} 15y - 8z = 29, \\ 3y + 2z = 13; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x + 8t = 59, \\ 6x + 5t = 107. \end{cases}$$

$$\text{1093. а) } \begin{cases} 14u - 9v = 24, \\ 7u - 2v = 17; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x + 4y = 13, \\ 3x + 5y = 13. \end{cases}$$

$$\text{1094. а) } \begin{cases} 3a - 5b = 13, \\ 2a + 7b = 81; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2a - 7b = 8, \\ 4a - 9b = 19. \end{cases}$$

$$\text{1095. а) } \begin{cases} 6x - 4y = 5, \\ 8x - 3y = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 12y + 15x = 8, \\ 16y + 9x = 7. \end{cases}$$

Розв'яжіть відносно змінних x і y систему (1096—1097).

$$\text{1096. а) } \begin{cases} 3x - 8y = a, \\ 4x + 8y = 20a; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -5x + y = 10c, \\ 5x - 2y = 10c. \end{cases}$$

$$\text{1097. а) } \begin{cases} 3x + 7y = m, \\ 8x + 7y = n; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x - 4y = k, \\ 5x - 4y = p. \end{cases}$$

1098. Розв'яжіть усіма відомими вам способами систему рівнянь:

$$\text{а) } \begin{cases} 8z + 3t = 7, \\ -4z - 5t = 7; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3m - 2n = 2, \\ 5m + 8n = 26; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x - y = 11, \\ 5x + 6y = 26; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 4x + 3y = 22, \\ -x + 7y = 10. \end{cases}$$

1099. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь:
 а) $x - 2y = 1$ і $2x + y = 7$; б) $5x + 2y = 1$ і $4x - 7y = 18$.
 Зробіть перевірку.

Рівень **B**

Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь (1100—1112).

$$1100. \text{ а) } \begin{cases} 19x - 21y = 17, \\ 5x + 14y = 24; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 8x - 33y = 19, \\ 12x + 55y = 19. \end{cases}$$

$$1101. \text{ а) } \begin{cases} 5x - 2 = 4(x + 2y) - 8, \\ 3(2x - y) + 6 = 24y + 12; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x - 3 = 5(x - y), \\ 2(3x - 1) = 4y - 5. \end{cases}$$

$$1102. \text{ а) } \begin{cases} 10u + 7v = 51, \\ u - \frac{1}{5}v = 2\frac{2}{5}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{1}{4}x - \frac{1}{5}y = 0, \\ \frac{3}{4}x + \frac{2}{5}y = 10; \end{cases}$$

$$1103. \text{ а) } \begin{cases} 0,1p + 0,2q = 0,3, \\ 0,4p + 0,5q = 0,9; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 1,2x - 3,4y = 12, \\ 2,5x + 1,4y = 25. \end{cases}$$

$$1104. \text{ а) } \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 5, \\ a - \frac{b}{2} = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{m}{3} - \frac{n}{3} = 0, \\ m - \frac{7n}{2} = 2. \end{cases}$$

$$1105. \text{ а) } \begin{cases} \frac{1-3x}{4} - \frac{4-2y}{3} = 0, \\ 0,7 = 0,4y - 0,3x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{2x-1}{6} - \frac{9-5y}{8} = 0, \\ 2x = 1,5y + 2,5. \end{cases}$$

$$1106. \text{ а) } \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1, \\ \frac{2x-1}{2} = \frac{3y-1}{3} + \frac{5}{6}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 8, \\ \frac{x+y}{3} + \frac{x-y}{4} = 11. \end{cases}$$

$$1107. \text{ а) } \begin{cases} 6(x-1) - \frac{5y-2x}{2} = 0, \\ \frac{14x}{5} - y = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x + \frac{7(x-y)}{2} = 5, \\ 5(x-1) + \frac{3x-7y}{2} = 0. \end{cases}$$

$$1108. \text{ а) } \begin{cases} \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{3} = 2, \\ x+y - \frac{x-y}{6} = 7; \end{cases}$$

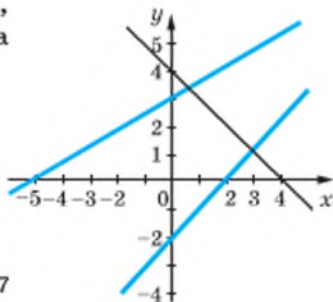
$$\text{б) } \begin{cases} \frac{5x-3}{7} + y = 10, \\ \frac{x+y}{4} - \frac{x-5}{9} = 2. \end{cases}$$

1109. а) $\begin{cases} 1,5x - 2,2y = 0,1, \\ 4,2x - 2,5y = 7,6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2,5u - 0,2(u - v) = 2,3, \\ 3,7u - 1,5(v - u) = 5,2. \end{cases}$
1110. а) $\begin{cases} 2,7x - 3(x + y) = 2,1, \\ 3,2x - 2(y - x) = 17,6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3,5y - 0,2(2y - z) = 31,2, \\ 5,2z + 0,7(y - 2z) = 10,8. \end{cases}$
1111. а) $\begin{cases} \frac{1}{2}x - 3\left(\frac{2}{3}y - x\right) = 12, \\ \frac{2}{3}x - 2\left(\frac{1}{2}x - y\right) = \frac{2}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{3}{4}y = y - 8, \\ \frac{1}{3}(x - 3y) = 3x - 10. \end{cases}$
1112. а) $\begin{cases} 4(3x - 2) + 2(7 - 4x) = 20 + 2(y - 3), \\ 5(2y + 3) + 2(6x - y) = 3(5x - 3) + 31; \end{cases}$
 б) $\begin{cases} 5(x - 2y) + 33 = 2(4x - 3) - 2(3y - 5), \\ 2(3x - 5y) - 3(x - 5) = 56 - 4(6 + 2y). \end{cases}$

Знайдіть розв'язок системи рівнянь (1113—1114).

1113. а) $\begin{cases} (x+3)^2 - 2y = x^2 + 13, \\ 6x + (y-1)^2 = y(y-5); \end{cases}$
 б) $\begin{cases} -10x + (y+4)^2 = y^2 + 18, \\ (2x-1)^2 + 7y = 2x(2x+3). \end{cases}$
1114. а) $\begin{cases} x(x+3) + 9 = (x-y)(x+y) + y(y-3), \\ 26 + 3(2x-y) = 9x - 5(3x+2y); \end{cases}$
 б) $\begin{cases} (x+3)^2 - 5 + y(y-2) = x(x+3) + (y+1)^2, \\ 7(2x+3) - 6x = 9 - 4(2y-7). \end{cases}$

1115. Напишіть рівняння прямих, графіки яких зображено на малюнку 97.



Мал. 97

Розв'яжіть систему рівнянь (1116—1118).



1116*.

$$\text{а) } \begin{cases} x+y=3, \\ x+z=4, \\ y+z=5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x+y=5, \\ x-z=2, \\ y-z=1. \end{cases}$$

1117*.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x+3y=11, \\ 3x+2z=13, \\ 3y+4z=29; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x+y-z=11, \\ x-y+z=1, \\ y+z-x=5. \end{cases}$$

1118*.

$$\text{а) } \begin{cases} 7x+6y+7z=100, \\ x-2y+z=0, \\ 3x+y-2z=0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x-2z-3t=1, \\ x+4z+2t=7, \\ 3x-z+t=0. \end{cases}$$

1119*. Задача з трактату XV ст. Розв'яжіть у цілих додатних числах систему:

$$\text{а) } \begin{cases} x+y+z=12, \\ 2x+y+\frac{1}{2}z=12; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x+y+z=12, \\ 8x+5y+3z=60; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x+y+z=12, \\ 4x+3y+2z=36. \end{cases}$$

1120*. Задача В. А. Лебега. Розв'яжіть у цілих додатних числах систему:

$$\begin{cases} 2x+3y+7z=131, \\ 2x+3y+8z=140. \end{cases}$$

ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

1121. Обчисліть значення многочлена:

а) $x^2 - 12,8x + 7,9$, якщо $x = 12,8$;

б) $2y^2 + 8,6y - 6,5$, якщо $y = -4,3$;

в) $19,7a + 19,7c + 10$, якщо $a = 3,8$ і $c = 6,2$;

г) $28,4x - 28,4y + 1,6$, якщо $x = 2,37$ і $y = 1,37$.

1122. Доведіть, що сума п'яти послідовних натуральних чисел ділиться на 5. Чи може сума чотирьох послідовних натуральних чисел ділитись на 4?

1123. Функцію задано формулою $y = -\frac{6}{x}$. При яких значеннях аргументу її значення дорівнює: а) 12; б) -12?

§ 28. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ СКЛАДАННЯМ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ



Багато задач, особливо таких, у яких треба знайти значення двох величин, зручно розв'язувати за допомогою систем рівнянь.

Задача 1. За 5 блокнотів і 6 зошитів заплатили 69 грн. Скільки коштує один блокнот і один зошит, якщо 4 блокноти дорожчі за 3 зошити на 24 грн?

Розв'язання. Припустимо, що блокнот коштує x грн, а зошит — y грн. За 5 блокнотів заплатили $5x$ грн, а за 6 зошитів — $6y$ грн. Разом за них заплатили 69 грн, отже,

$$5x + 6y = 69.$$

Оскільки 4 блокноти дорожчі за 3 зошити на 24 грн, маємо ще одне рівняння:

$$4x - 3y = 24.$$

Змінні x і y в обох рівняннях позначають ті самі ціни. Отже, треба розв'язати систему цих двох рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 6y = 69, \\ 4x - 3y = 24; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 6y = 69, \\ 8x - 6y = 48; \end{cases}$$

$$13x = 117;$$

$$x = 9;$$

$$4 \cdot 9 - 3y = 24; \quad 3y = 12; \quad y = 4.$$

Відповідь. Блокнот коштує 9 грн, зошит — 4 грн.

Цю задачу можна розв'язати також складанням рівняння з однією змінною. Будь-яку задачу, що розв'язується складанням системи лінійних рівнянь, можна розв'язати і за допомогою рівняння з однією змінною. Тільки систему рівнянь здебільшого скласти легше, ніж рівняння з однією змінною.

Є чимало задач, які зручно розв'язувати за допомогою системи трьох рівнянь із трьома змінними. Розв'яжемо одну з них.

Задача 2. Капітал в 10 000 грн поділіть на три частини так, щоб перша була на 2000 грн більша за другу і на 3000 грн — за третю.

Розв'язання. Позначимо шукані частини капіталу буквами x , y і z . За умовою задачі

$$x + y + z = 10\,000, \quad x - y = 2\,000, \quad x - z = 3\,000.$$

Шукані значення змінних мають задовольняти систему трьох рівнянь із трьома змінними:

$$\begin{cases} x + y + z = 10\,000, \\ x - y = 2\,000, \\ x - z = 3\,000. \end{cases}$$

Додамо почленно ліві й праві частини цих рівнянь, матимемо $3x = 15\,000$, звідси $x = 5\,000$. Тоді з другого рівняння одержимо:

$$5\,000 - y = 2\,000, \quad y = 3\,000,$$

а з третього обчислимо:

$$5\,000 - z = 3\,000, \quad z = 2\,000.$$

Відповідь. 5000 грн, 3000 грн і 2000 грн.



Хочете знати ще більше?

Узагальнимо задачу 1 цього параграфа.

Задача. За 5 блокнотів і 6 зошитів заплатили m грн. Скільки коштує один блокнот і один зошит, якщо 4 блокноти дорожчі за 3 зошити на n грн?

Тут m і n — параметри, тобто букви, які в умовах задачі вважаються даними, незмінними. Задачі з параметрами так само можна розв'язувати за допомогою рівнянь чи системи рівнянь, тільки відповідями до них будуть не конкретні числа, а вирази, що містять параметри.

Розв'яжемо сформульовану задачу.

Розв'язання.

$$\begin{cases} 5x + 6y = m, \\ 4x - 3y = n; \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 6y = m, \\ 8x - 6y = 2n; \end{cases}$$

$$13x = m + 2n; \quad x = \frac{1}{13}(m + 2n).$$

$$\text{Тоді } 3y = 4x - n; \quad 3y = \frac{4}{13}(m + 2n) - n; \quad 3y = \frac{1}{13}(4m - 5n).$$

$$\text{Отже, } y = \frac{1}{39}(4m - 5n).$$

Відповідь. Один блокнот і один зошит коштують відповідно $\frac{1}{13}(m + 2n)$ грн і $\frac{1}{39}(4m - 5n)$ грн.

Перевірте себе

1. Наведіть приклад лінійного рівняння з двома змінними.
2. Що таке розв'язок рівняння з двома змінними?
3. Скільки розв'язків може мати система двох лінійних рівнянь із двома змінними?
4. Скільки розв'язків може мати система двох рівнянь першого степеня з двома змінними?
5. Складіть кілька різних моделей задачі: знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 3, а різниця — 2.

✓ Виконаємо разом!

1. Поділіть капітал 8100 грн на дві частини так, щоб менша частина становила 80% від більшої.

✓ **Розв'язання.** Нехай більша частина дорівнює x грн, тоді менша — 80% від x , тобто $0,8x$. Маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} x + y = 8100, \\ y = 0,8x, \end{cases}$$

звідси $x + 0,8x = 8100$, $1,8x = 8100$, $x = 8100 : 1,8$, $x = 4500$.

Тоді $y = 0,8 \cdot 4500 = 3600$.

Відповідь. 4500 грн і 3600 грн.

2. Знайдіть два числа, якщо їх сума дорівнює 15, а різниця їх квадратів — на 60 більша.

✓ **Розв'язання.** Якщо шукані числа дорівнюють x і y , то

$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x^2 - y^2 = 75. \end{cases}$$

Оскільки $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$ і $x + y = 15$, то $15(x - y) = 75$, а $x - y = 5$. Маємо систему рівнянь:

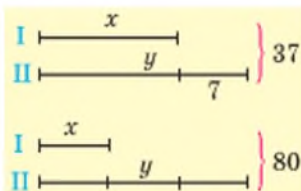
$$\begin{cases} x + y = 15, \\ x - y = 5. \end{cases}$$

Її розв'язок $x = 10$, $y = 5$ є розв'язком і даної задачі.

Відповідь. 10 і 5.

Виконайте усно

1124. Знайдіть два числа, якщо:
 а) їх сума дорівнює 40, а відношення — 3;
 б) їх сума дорівнює 40, а різниця — 20;
 в) їх різниця дорівнює 10, а відношення — 3.
1125. Якій системі рівнянь відповідає діаграма, зображена на малюнку 98?







Мал. 98

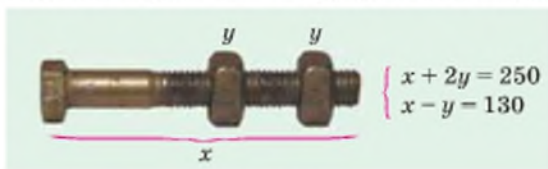
Рівень А

Розв'яжіть задачі складанням системи рівнянь.

1126. Купили 9 м тканини двох сортів ціною по 40 грн і 30 грн за 1 м. За всю покупку заплатили 330 грн. Скільки купили тканини кожного сорту?
1127. На будівництві працювали 50 мулярів і теслярів. Згодом кількість мулярів збільшилась у 2 рази, а теслярів — у 3 рази, і всіх стало 130. Скільки мулярів і теслярів було на будівництві спочатку?
1128. Швидкість моторного човна за течією — 23 км/год, а проти течії — 17 км/год. Знайдіть власну швидкість човна і швидкість течії.
1129. Туристи проїхали 640 км. 7 год вони їхали поїздом і 4 год — автобусом. Знайдіть швидкість поїзда, якщо вона на 5 км/год більша за швидкість автобуса.
1130. Два туристи вийшли одночасно з двох міст, відстань між якими — 38 км, і зустрілися через 4 год. З якою швидкістю йшов кожний, якщо перший до зустрічі пройшов на 2 км більше, ніж другий?
1131. Знайдіть два числа, сума яких дорівнює 35,5, а різниця — 12,5.
1132. Знайдіть два числа, півсума яких дорівнює 37,9, а піврізниця — 7,5.
1133. а) Півсума двох чисел більша від меншого з них на 5, а від піврізниці — на 1. Знайдіть ці числа.
 б) Піврізниця двох чисел менша від більшого з них на 13, а від їх різниці — на 12. Знайдіть ці числа.

- 1134.** Три «дорослі» тополі і 5 «дорослих» лип з травня по вересень поглинають 212 кг вуглекислого газу. Такі самі 5 тополі і 3 липи поглинають 268 кг вуглекислого газу. Скільки вуглекислого газу поглинає за цей час кожне дерево?
- 1135.** Мати старша за доньку на 24 роки, а донька молодша від матері втричі. Скільки років матері й скільки доньці?
-  **1136.** На двох полицях разом — 65 книжок. На першій — на 7 книжок більше, ніж на другій. Скільки книжок на кожній полиці?
- 1137.** У двох сьомих класах — 72 учні. Якби із 7-А класу 2 учні перейшли в 7-Б, то в обох класах учнів стало б порівну. Скільки учнів у кожному класі?
-  **1138.** На годівлю 10 коней і 16 корів щодня відпускали 160 кг сіна, причому 5 коней одержували на 5 кг сіна більше, ніж 7 корів. Скільки кілограмів сіна давали щодня коневі й корові?
- 1139.** Дріт завдовжки 35 м розрізали на дві частини так, що одна з них на 50 % довша за іншу. Знайдіть довжину кожної частини.
- 1140.** Мотузку завдовжки 35 м розрізали на дві частини так, що одна з них на $33\frac{1}{3}$ % коротша від іншої. Знайдіть довжини цих частин.
-  **1141.** Периметр прямокутника дорівнює 168 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них на 8 см довша.
- 1142.** Периметр прямокутника дорівнює 126 см. Знайдіть довжини його сторін, якщо одна з них: а) на 10 % довша за другу; б) на 10 % коротша від другої.
- 1143.** Знайдіть довжини сторін рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 82 см, а основа більша за бічну сторону на 10 см.
-  **1144.** Знайдіть довжини сторін рівнобедреного трикутника, якщо його периметр дорівнює 62 см, а основа більша за бічну сторону на 10 %.
- 1145.** а) Різниця двох чисел дорівнює 4, а різниця їх квадратів — 44. Знайдіть ці числа.
б) Знайдіть два числа, якщо відомо, що їх сума дорівнює 12, а різниця квадратів — 60.

- 1146.** Сформулюйте задачу, що відповідає малюнку та системі рівнянь (мал. 99—100), і розв'яжіть задачу.



Мал. 99



Мал. 100

Рівень **Б**

- 1147.** Два велосипедисти виїхали одночасно з двох сіл, відстань між якими становить 9 км, і зустрілися через 0,5 год. Визначте швидкість руху кожного, якщо швидкість першого велосипедиста на 1,6 км/год більша.



- 1148.** Відстань 320 км моторний човен проходить за течією річки за 8 год, а проти течії — за 10 год. Знайдіть швидкість течії річки і власну швидкість моторного човна.

- 1149.** Якщо з одного пункту одночасно і в одному напрямку виїдуть велосипедист і мотоцикліст, то через 2 год відстань між ними буде дорівнювати 14 км. Якщо ж вони виїдуть одночасно в протилежних напрямках, то через 3 год відстань між ними становитиме 174 км. Знайдіть швидкість кожного з них.


- 1150.** Якби велосипедист збільшив швидкість на 3 км/год, то відстань між пунктами А і В проїхав би на 1 год швидше. А якби їхав зі швидкістю на 2 км/год меншою, то їхав би на 1 год довше. Знайдіть швидкість велосипедиста і відстань між пунктами А і В.




- 1151.** Протягом року в режимі очікування електроплита, мікрохвильова піч, ПК з монітором та автовідповідач споживають 100 кВт електроенергії. Плити споживають однакову кількість енергії, а ПК на 20 кВт більше, ніж

автовідповідач. Скільки енергії в режимі очікування споживає кожен із приладів? Дізнайся у батьків вартість 1 кВт електроенергії та повідом їх, скільки грошей родина може зекономити, якщо вчасно відключати кожен із цих приладів.


- 1152.** Найбільшими забруднювачами вод України є електроенергетика, комунальне господарство і сільське господарство — 79 % від усього обсягу зливу в річки. Відомо, що відсоток зливів електроенергетики перевищує сукупні зливи сільського і комунального господарства на 7 %, а зливи одного сільського господарства — на 26,5 %. Який відсоток обсягу всіх зливів припадає на: а) комунальне господарство; б) електроенергетику?

-  **1153.** Різниця квадратів двох чисел і квадрат їх різниці дорівнюють відповідно 275 і 121. Знайдіть ці числа.

-  **1154.** Якщо розсадити дітей по двоє за стіл, то не вистачить трьох столів. Якщо розсадити їх по троє, то один стіл виявиться зайвим. Скільки дітей і скільки столів?


- 1155.** Метушливі горобці хочуть сісти на стовпці. По одному якщо сісти, двом не вистачило б місця, а як вмостяться по парі, буде вільна стовпців пара. Скільки ж там було стовпців і літало горобців?



-  **1156.** Скільки літ Антону й Насті, якщо разом їм — сімнадцять, і тепер їй удвічі більше, ніж було Антону вісім років тому?

- 1157.** *Стародавня грецька задача.* Навантажені осел і мул ідуть повільно. Осел скаржиться на важку ношу, мул йому відповідає: «Чого ти скаржишся? Коли я взяв би один твій мішок, то моя ноша стала б удвічі важчою від твоєї. А коли ти взяв би один мій мішок, то твоя ноша дорівнювала б моїй». По скільки мішків несли осел і мул?

- 1158.** *Стародавня китайська задача.* 5 волів і 2 барани коштують 11 таєлів, а 2 воли і 8 баранів — 8 таєлів. Скільки баранів можна купити за гроші, одержані від продажу 5 волів?

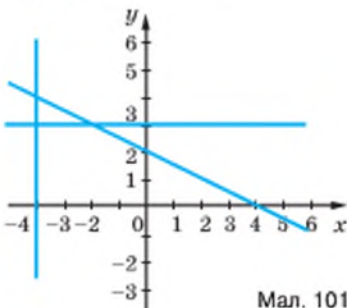
-  **1159.** *Стародавня китайська задача.* Скільки в клітці фазанів і кролів, якщо разом у ній 35 голів і 94 ноги?

- 1160.** По колу, довжина якого 120 м, рухаються два тіла. Вони зустрічаються кожні 10 с, рухаючись в одному напрямку, і кожні 4 с, рухаючись у протилежних напрямках. З якою швидкістю рухаються ці тіла?
- 1161.** По колу, довжина якого 90 м, рухаються два тіла в одному напрямку й зустрічаються через 6 с. Знайдіть швидкість цих тіл, якщо швидкість одного в 4 рази більша за швидкість іншого.
- 1162.** Знайдіть число, яке при діленні на 4, 7 і 11 дає відповідно остачі 2, 1 і 6, причому сума часток на 2 менша від половини шуканого числа.
- 1163.** Складіть рівняння прямої виду $y = kx + p$, яка проходить через точки:
- а) $A(1; 3)$ і $B(3; 7)$; б) $K(3; 2)$ і $P(-1; -2)$;
 в) $C(2; 4)$ і $D(5; -2)$; г) $E(1; 2)$ і $F(3; 6)$.



1164. Складіть рівняння прямих, зображених на малюнку 101.

- 1165.** а) Поле площею 100 га розбили на дві ділянки, одна з яких на n га більша. Знайдіть площі утворених ділянок.
 б) Поле площею a га розбили на дві ділянки, одна з яких на 5 га більша. Знайдіть площі утворених ділянок.



Мал. 101

- 1166.** а) Поділіть число a на частини, пропорційні числам 2, 3 і 5.
 б) Поділіть число 1000 на частини, пропорційні числам k , p і t .



1167. У цеху підприємства виготовляють дві моделі жіночого одягу. На виготовлення першої моделі витрачають 2 м тканини, на виготовлення другої — 3 м. Затрати робочого часу на виробництво цих моделей становлять відповідно 4 та 5 год. Відомо, що тижневий запас тканини становить a м, а робочий час обмежено t год. Складіть такий план тижневого виготовлення цих моделей одягу, щоб повністю використати ресурси (тканину, робочий час).

1168. За перший тиждень шахта перевиконала норму на $p\%$, за другий — на $k\%$, добувши за ці два тижні понад норму m тонн вугілля. Скільки вугілля за тиждень шахта мала добувати за планом?

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ**Варіант I**

1°. Розв'яжіть систему рівнянь: а) графічно; б) будь-яким способом.

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y = 4, \\ x - y = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3,1x + 0,7y = 5,2, \\ 5,2x + 0,6y = 7. \end{cases}$$

2°. Поле площею 80 га розділили на дві частини так, що площа однієї стала на 2 га більшою за половину площі іншої. Знайдіть площу кожної частини.

Варіант II

1°. Розв'яжіть систему рівнянь: а) графічно; б) будь-яким способом.

$$\text{а) } \begin{cases} 4x - 2y = 6, \\ x + y = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2,2x + 0,5y = 3,2, \\ 1,2x + 0,8y = 2,8. \end{cases}$$

2°. Поле площею 100 га розділили на дві частини так, що площа однієї стала на 5 га меншою від половини площі іншої. Знайдіть площу кожної частини.

Варіант III

1°. Розв'яжіть систему рівнянь: а) графічно; б) будь-яким способом.

$$\text{а) } \begin{cases} x - 2y = 3, \\ x + y = -3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 1,5x + 0,3y = 4,5, \\ 2x - 1,7y = 6. \end{cases}$$

2°. Дріт завдовжки 40 м розрізали на дві частини так, що одна з них виявилась на 4 м довшою за половину іншої. Знайдіть довжину кожної частини.

Варіант IV

1°. Розв'яжіть систему рівнянь: а) графічно; б) будь-яким способом.

$$\text{а) } \begin{cases} 3x - 2y = 7, \\ x + y = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 1,7x + y = 4,4, \\ 3,5x - 0,8y = 6,2. \end{cases}$$

2°. Дріт завдовжки 50 м розрізали на дві частини так, що одна з них виявилась на 1 м коротшою за половину іншої. Знайдіть довжину кожної частини.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Рівняння першого степеня з однією змінною люди навчилися розв'язувати дуже давно. Єгипетські вчені майже чотири тисячі років тому шукане невідоме число називали «аха» (у перекладі — «купа») і позначали спеціальним знаком.



У папірусі, який дійшов до нас, є така задача: «Купа та її сьома частина становлять 19. Знайдіть купу». Тепер ми сформулювали б її так: «Сума невідомого числа і його сьомої частини дорівнює 19. Знайдіть невідоме число».

Задача зводиться до рівняння $x + \frac{1}{7}x = 19$.

Подібні задачі вміли розв'язувати вчені Стародавньої Греції, давніх Індії, Китаю. Давньогрецький математик Діофант (III ст.) розв'язував і складніші рівняння, зокрема такі, які у сучасних символах мають вигляд $630x^2 + 73 = 6$. У Діофанта рівняння $x^2 = 4x - 4$ записувалося у такий спосіб:

δο'ναμις ἀρα ἄ ἐτη ρε' δ' λειφεῖ μ' δ'

Аль-Хорезмі і багато його наступників усі рівняння записували словами, не використовуючи математичних знаків.

Від прізвища аль-Хорезмі, походить ще один важливий для сучасної науки термін — *алгоритм*. Так називають сукупність правил, користуючись якими, можна розв'язати будь-яку задачу з певного класу задач. Наприклад, відомий вам спосіб множення чисел «стовпчиком», спосіб знаходження найбільшого спільного дільника двох чи кількох чисел — це алгоритми. У сучасній науці поняття «алгоритму» відіграє значну роль, існує навіть спеціальна галузь математики — *теорія алгоритмів*. Докладніше з алгоритмами ви ознайомитеся в старших класах.

До XIX ст. алгеброю називали науку, яка вивчає різні способи розв'язування рівнянь. Згодом вона значно розширилась, збагатилася новими ідеями. Тепер рівняння — тільки одна зі складових алгебри.

ІСТОРИЧНІ ВІДОМОСТІ

Задачі, що зводяться до системи рівнянь з двома змінними, учені Вавилону вміли розв'язувати ще понад 4 тисяч років тому.

Китайські математики понад 2 тисячі років тому розробили загальний метод розв'язування систем лінійних рівнянь із трьома і більшою кількістю невідомих й описали його у трактаті «Математика в дев'яти книгах».

Давньогрецький математик Діофант (III ст.) знаходив натуральні розв'язки і таких, наприклад, задач: «Знайдіть два числа з даною різницею і таких, щоб різниця їх квадратів була більшою за їх різницю на задане число». Якщо шукані числа позначити x і y , а дані — a і b , то задачі відповідає така система рівнянь:

$$\begin{cases} x - y = a, \\ x^2 - y^2 - (x - y) = b. \end{cases}$$

Графічний спосіб розв'язування рівнянь одним із перших запропонував видатний французький філософ, математик, фізик, фізіолог Р. Декарт. Він увів поняття змінної величини і запровадив зручну математичну символіку.

У 1637 р. Р. Декарт опублікував працю «Міркування про метод», у якій описав метод координат, що пов'язує алгебру з геометрією. Користуючись цим методом, геометричні задачі можна розв'язувати алгебраїчними методами, а алгебраїчні — геометричним.



Рене Декарт
(1596—1650)

Він числа і фігури об'єднав,
А лінії й рівняння ототожнив,
І людству метод надпотужний дав —
Такий, що знає його нині кожний.

ГОЛОВНЕ В РОЗДІЛІ

Рівняння виду $ax + by = c$, де a, b, c — дані числа, називають *лінійним рівнянням з двома змінними* x і y . Якщо $a \neq 0$ і $b \neq 0$, його називають *рівнянням першого степеня з двома змінними*.

Пару чисел, яка задовольняє рівняння з двома змінними, називають *розв'язком* цього рівняння. Наприклад, пара чисел $(3; -2)$ — розв'язок рівняння $5x + 3y = 9$. Рівняння першого степеня з двома змінними має безліч розв'язків. У декартовій системі координат кожному рівнянню першого степеня з двома змінними відповідає пряма — графік цього рівняння. І навпаки, кожна пряма координатної площини — графік деякого лінійного рівняння з двома змінними.

Два рівняння з двома змінними називають *рівносильними*, якщо вони мають одні й ті самі розв'язки. Рівносильні рівняння з двома змінними мають однакові графіки.

Якщо потрібно знайти спільні розв'язки двох чи кількох рівнянь, говорять, що ці рівняння утворюють *систему рівнянь*.

Розв'язком системи рівнянь називають спільний розв'язок усіх її рівнянь. Приклад системи двох лінійних рівнянь із змінними x і y :

$$\begin{cases} 3x - y = 3, \\ x - 2y = -4. \end{cases}$$

Кожне рівняння цієї системи має безліч розв'язків, і тільки один із них — спільний для обох рівнянь: пара $(2; 3)$.

Системі двох рівнянь першого степеня з двома змінними в декартовій системі координат відповідає пара прямих. Оскільки дві прямі на площині можуть перетинатися, збігатися або бути паралельними, то й відповідна їм система рівнянь може мати один розв'язок, безліч або не мати жодного розв'язку.

Розв'язувати системи рівнянь із двома змінними можна різними способами — підстановки, додавання або графічним способом.

Запитання для самоперевірки

1. Сформулюйте означення лінійного рівняння з однією та з двома змінними.
2. Наведіть приклади лінійного рівняння з однією та з двома змінними.
3. Що називають розв'язком рівняння з однією та з двома змінними?
4. Скільки розв'язків може мати лінійне рівняння з однією та з двома змінними?
5. Які рівняння називають рівносильними?
6. Чи правильні основні властивості рівнянь для рівнянь з двома змінними? Сформулюйте їх.
7. Сформулюйте означення рівняння першого степеня з двома змінними.
8. Наведіть приклади рівняння першого степеня з однією та з двома змінними.
9. Що є графіком рівняння першого степеня з однією та з двома змінними?
10. Як побудувати графік рівняння першого степеня з двома змінними?
11. Скільки розв'язків може мати рівняння першого степеня з двома змінними?
12. Наведіть приклад системи рівнянь.
13. Що таке розв'язок системи рівнянь із двома змінними?
14. Що означає — розв'язати систему рівнянь із двома змінними?
15. Як розв'язати систему рівнянь графічним способом?
16. Скільки розв'язків може мати система рівнянь із двома змінними?
17. Які ви знаєте способи розв'язування систем двох лінійних рівнянь із двома змінними?
18. Як розв'язують систему двох рівнянь із двома змінними способом підстановки?
19. Як розв'язують систему двох лінійних рівнянь із двома змінними способом додавання?

ГОТУЄМОСЯ ДО ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ

Тестові завдання № 6

1. Яке з рівнянь є рівнянням першого степеня з однією змінною:

а) $0x = 13$; б) $x + y = 0$; в) $-2x = 0$; г) $x = y$?

2. Яке рівняння не задовольняє число 5:

а) $2x = 10$; б) $x - 5 = 0$; в) $100 : x = 5$; г) $0x = 0$?

3. Яке рівняння не має коренів:

а) $2x + x = 10$; б) $x : 5 = 0$; в) $5 = x$; г) $0 : x = 10$?

4. Яке з чисел є коренем рівняння $3x + 5 = 1$:

а) $\frac{3}{5}$; б) $-\frac{4}{3}$; в) $-\frac{5}{3}$; г) $-\frac{1}{5}$?

5. Яке рівняння має тільки один корінь:

а) $x = x + 5$; б) $|x| = 4$; в) $x^2 = 0$; г) $x(x - 1) = 0$?

6. Розв'яжіть рівняння $5x + 13 = 3x + 2$:

а) $-5,5$; б) $5,5$; в) $4,5$; г) $-4,5$?

7. Рівняння $2(2 - x) = x - 2$ має розв'язків:

а) безліч; б) жодного; в) один; г) два?

8. Яке з рівнянь рівносильне рівнянню $5x = -10$:

а) $5x - 10 = 0$; б) $10x = -5$;
в) $-10 : 5 = x$; г) $5(x + 10) = 0$?

9. При якому значенні a рівняння $|x| = a$ має єдиний корінь:

а) 1; б) -1; в) 0; г) 2?

10. При якому значенні a рівняння $(a - 1)x = 1 - a$ має безліч коренів:

а) 1; б) -1; в) 0; г) 2?

Тестові завдання № 7

1. На графіку рівняння $3x - 5y = 6,2$ взято точку з абсцисою 0,4. Яка ордината цієї точки:
а) 1; б) -1; в) 0; г) 0,4?
2. Розв'язком якого рівняння є пара чисел (2; 3):
а) $2x + y = 7$; б) $2y + 4x = 15$;
в) $5x + y = 17$; г) $0,5x + 3y = 1$?
3. Яке з рівнянь не має розв'язків:
а) $x^4 + y^4 = -5$; б) $x^2 - y^2 = -4$;
в) $x^4 + 5y^2 = 0$; г) $x^2 + y^2 = 4$?
4. Який із графіків рівнянь не є графіком функції:
а) $y = x^2$; б) $y = 2$; в) $x = y$; г) $x = 2$?
5. При якому значенні a графік рівняння $2x + ay = 4$ проходить через точку (1; 2):
а) -1; б) 0; в) 1; г) 2?
6. Знайдіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x + y = 14, \\ x - y = 8: \end{cases}$
а) (11; 3); б) (3; 11); в) (-11; 3); г) (-3; 11)?
7. Знайдіть розв'язок системи рівнянь $\begin{cases} x = y, \\ x + y = 10: \end{cases}$
а) (-1; -1); б) (5; 5); в) (1; 1); г) (-5; -5).
8. Знайдіть координати точки перетину графіків рівнянь $2x - 3y = 16$ і $x + 2y = 1$:
а) (2; 5); б) (-2; 5); в) (2; -5); г) (-2; -5).
9. Скільки спільних точок мають графіки рівнянь $2x + 3y = 7$ і $2x - 3y = 7$:
а) одну; б) дві; в) жодної; г) безліч?
10. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} 3x + ay = 15, \\ 12x - 8y = 60 \end{cases}$ має безліч розв'язків:
а) -2; б) -32; в) 2; г) 32?

Типові завдання до контрольної роботи № 7

1. Розв'яжіть рівняння:

$$a^{\circ}) 10y + 42 = 7y - 3(y - 2);$$

$$6^{\circ}) (x^2 - 5x + 25)(x + 5) - x(x - 5)(x + 5) = 75.$$

Розв'яжіть систему рівнянь графічно.

$$2^{\circ}) \begin{cases} 8x - 3y = 20, \\ x + 2y = 12; \end{cases} \quad 3^{\circ}) \begin{cases} y = 1, \\ |x| + y = 2. \end{cases}$$

Розв'яжіть способом підстановки систему рівнянь.

$$4^{\circ}) \begin{cases} 5x - 3y = -9, \\ 2x - y = -2. \end{cases} \quad 5^{\circ}) \begin{cases} \frac{3x - 2y}{5} + \frac{5x - 3y}{3} - x = 1, \\ \frac{2x - 3y}{3} - \frac{4x - 3y}{2} - y = 1. \end{cases}$$

Розв'яжіть способом додавання систему рівнянь.

$$6^{\circ}) \begin{cases} 3a - 7b = 8, \\ 6a - 5b = -2. \end{cases} \quad 7^{\circ}) \begin{cases} 2x + y = 7, \\ 3x - z = 6, \\ z - y = 2. \end{cases}$$

8*. У сараї є гуси та кролі. У них 50 голів і 160 ніг. Скільки гусей і скільки кролів у сараї?

9*. На складі було 1500 м^3 березових і соснових дров. За перший місяць використали 15 % соснових і 20 % березових дров, а разом — 270 м^3 . Скільки соснових і березових дров окремо було на складі?

10*. Знайдіть значення коефіцієнтів a і b рівняння $ax + by = 13$, якщо його графік проходить через точки $M(5; -3)$ і $N(8; 3)$.

ЗАДАЧІ І ВПРАВИ ДЛЯ ПОВТОРЕННЯ

ЦІЛІ ВИРАЗИ

Знайдіть значення виразу (1169–1171).

1169. а) $\left(2\frac{3}{4} - 2\frac{3}{8} - 0,3\right) : 6$;

б) $\left(5\frac{9}{25} - 2,36\right) : \left(3\frac{4}{5} + 0,2\right)$.

1170. а) $\left(3\frac{3}{4} : 1\frac{1}{4} - 0,75\right) : 1\frac{1}{2} + 0,75$;

б) $12,5 \cdot 2\frac{1}{4} - \left(4,128 - 3\frac{3}{4}\right) : \frac{2}{5}$.

1171. а) $9x^4 - 4x^2$, якщо $x = \frac{1}{3}$;

б) $10a^2 + 125a^3$, якщо $a = -0,2$.

Перемножте одночлени (1172–1173).

1172. а) $5a^2b$; $\frac{3}{5}ab^3$ і $3ac^4$;

б) $-8xy$; $(-2,5)b^2$ і $0,1ax$.

1173. а) $4pq^2$; $0,15pz^2$ і $5pqz$;

б) $-1\frac{5}{7}ax^2$; $-\frac{1}{3}ax^2y$ і $-2\frac{5}{8}xy$.

1174. Піднесіть до степеня одночлен:

а) $(2x^3)^5$; б) $(-xy)^7$; в) $(-3a)^4$; г) $(0,5m^2)^3$.

1175. Спростіть вираз:

а) $3x^n \cdot 4x^2y^m$; б) $\frac{2}{3}a^{n+1} \cdot 6a^{n-2}$.

1176. Додайте многочлени:

а) $n^3 + m^2n$ і $m^2n - n^3 - 4$;

б) $0,7z - 2,6z^2 + z^3$ і $2,3z^3 + 0,3z - 2$;

в) $-\frac{2}{3}mx - \frac{3}{5}m^2x$ і $2\frac{1}{3}mx - \frac{3}{5}m^2x^2 - 1\frac{1}{2}x^2$.

1177. Знайдіть різницю многочленів:

а) $6x^3 - 2x^5 + x$ і $8x^3 + 3x^5 - 4x^2$;

б) $3a^2 + 2ab - b^2$ і $2b^2 - 2a^2$;

в) $m^2 + 5m - 12$ і $3m^4 + m^2 - 12$;

г) $-x^2y^2 + 4x - 3x^2y - 8$ і $2 - 3xy^2 - x^2y^2 + y$.

1178. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

а) $-12x^2 - (-3x^6 + 8 - 10x^2)$;

б) $9m^3 - 5m + (m - 6m^3 - 2m^4)$;

в) $(-4xy + 7y^2) - (-8x^2) + (6xy - 10x^2 - 5)$;

г) $-(3b^2 + 4b^2c) + (6b^2 - c^2b + b^2c) - (2b^2 + 5b^2c)$.

1179. Виконайте множення:

а) $3x(2x^4 - 5x + 1)$; б) $-5a^2(3a^2 + 4a - 2)$;

в) $(-ab + 2a^2 - 3b^2) \cdot (-a^2b)$; г) $(4x^2y - 3xy^2 + 5) \cdot 2xy$;

г) $-0,25(2m^2 - 4m + 6)$; д) $(-10n^5 - 6n^3 + 2)(-1,5m)$.

1180. Перемножте вирази:

а) $-12x^3$ і $\frac{1}{6}x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{3}{4}$;

б) $10xy$ і $-0,7x^3 + 3,2y^2 - x^2y^2$;

в) $-\frac{3}{5}ax^2$ і $5ax^2 - \frac{5}{6}a^2x + \frac{1}{2}a$;

г) $0,5y^6$ і $-0,8xy + 1,2x^3 + 7x^2y$.

1181. Перетворіть вираз у многочлен стандартного вигляду:

а) $5x(x + 4) - x(6 - 2x^2)$; б) $-y^2(2y - 6) + 4y(y^2 - y)$;

в) $6a^2b^3 - b^2(5a^2b + b^2 - 1)$; г) $3xy(2 - 4x^2y + xy^2) - 7xy$.

1182. Доведіть тотожність:

а) $x(y - z) + y(z - x) = z(y - x)$;

б) $x(y + z - yz) - y(x + z - xz) = z(x - y)$;

в) $ab(a + b + c) - b^2(a - c) = bc(a + b + c) - b(c^2 - a^2)$;

г) $ab(b + c) - bc(a + b) + ac(a + c) = a(b^2 + c^2) + c(a^2 - b^2)$.

1183. Знайдіть добуток:

а) $-2a - b$ і $-2a + b$; б) $-x^2 + y^3$ і $-x^2 - y^3$;

в) $-abc + 1$ і $abc + 1$; г) $-0,2x^4 - x$ і $x - 0,2x^4$;

г) $a + b + c$ і $a - b - c$; д) $x + y - z$ і $x - y + z$.

1184. Подайте добуток у вигляді многочлена:

- а) $(4-x)(4+x)(16+x^2)$;
 б) $(a^2-5b)(a^2+5b)(a^4+25b^2)$;
 в) $(0,09x^6+x^2y^4)(0,3x^3-xy^2)(0,3x^3+xy^2)$;
 г) $\left(a^4b^4 + \frac{1}{4}c^2\right)\left(\frac{1}{2}c+a^2b^2\right)\left(\frac{1}{2}c-a^2b^2\right)$.

1185. Спростіть вираз:

- а) $(2x-3)(2x+3)(4x^2+9)+81$;
 б) $(5+x^5)(5-x^5)(x^{10}+25)+x^{20}$;
 в) $256a^4-(4a-b^3)(4a+b^3)(16a^2+b^6)$;
 г) $(0,1y^2)^4+(-x-0,1y^2)(0,1y^2-x)(0,01y^4+x^2)$.

1186. Подайте двочлен у вигляді добутку:

- а) p^2-q^2 ; б) $25-0,25m^2$; в) $9x^2-a^4$;
 г) $0,04x^6-1$; г) $-x^2y^4+a^6b^8$; д) $a^2b^2c^2-121x^6$;
 е) $\frac{4}{81}z^{10}-x^{16}$; е) $-64+36m^4n^2$; ж) $a^2-(b+c)^2$.

1187. Обчисліть:

- а) 24^2-14^2 ; б) 62^2-38^2 ; в) 98^2-97^2 ;
 г) $52,5^2-48,5^2$; г) $14,3^2-4,3^2$; д) $5,9^2-5,2^2$;
 е) $\left(17\frac{3}{4}\right)^2-\left(16\frac{3}{4}\right)^2$; е) $\left(7\frac{2}{3}\right)^2-\left(2\frac{1}{3}\right)^2$.

Подайте вираз у вигляді многочлена (1188—1189).

1188. а) $(0,4a^2-5ab)^2$; б) $(6,5xy+8y^2)^2$;
 в) $(x^2y^2-1)^2$; г) $(2+a^6b^4)^2$.

1189. а) $(-x+y^2)^2$; б) $(-2a^2+3y^3)^2$; в) $\left(-\frac{1}{3}-3x^5\right)^2$;

г) $\left(-\frac{1}{2}m^3-0,2n\right)^2$; г) $(-0,1xy+5)^2$; д) $(-6x^2y-0,5y)^2$.

1190. Спростіть вираз:

- а) $(3x-5y)^2-3x(3x-10y)$;
 б) $8a(b-2a)+(4a+b)^2$;
 в) $(4x+y)(3x+4y)-(2y+3x)^2$;
 г) $(3a+6b)^2-(2a+9b)(3a+4b)$.

Доведіть, що значення виразу не залежить від x (1191—1192).

1191. а) $(2x-5y)^2+4x(5y-x)$;
 б) $3x(12x-4y)-(6x-y)^2$.

1192. а) $(4x + 5y)^2 - 8(2x - y)(x + 3y)$;
 б) $4(x - 6y)(x - 3y) - (2x - 9y)^2$.
1193. Подайте вираз у вигляді многочлена:
 а) $(x + 3)^3$; б) $(y - 2)^3$; в) $(2x - 1)^3$;
 г) $(3x + 1)^3$; р) $(m - 2n)^3$; д) $(2a + 3)^3$.

РОЗКЛАДАННЯ МНОГОЧЛЕНІВ НА МНОЖНИКИ

Розкладіть на множники многочлен (1194—1195).

1194. а) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy$; б) $a^3c^2 - a^2c^2 + a^3 - a^2$;
 в) $4xy + 12x^2y - 4x - 12x^2$; г) $6a^2b - 18a^2 - 3ab + 9a$;
 р) $xyz - 4xz - 5xy + 20x$; д) $4ab + 3ac - abc - 12a$.
1195. а) $a^2 - b^2 - a + b$; б) $x + y + x^2 - y^2$;
 в) $4a^2 - 9 - 2a - 3$; г) $5 - 3x + 25 - 9x^2$.
1196. Подайте у вигляді добутку:
 а) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$; б) $a^2 + 2a + 1 - b^2$;
 в) $x^2 - y^2 + 8y - 16$; г) $a^2 - b^2 - 14b - 49$.
1197. Подайте у вигляді добутку трьох множників:
 а) $ab^2 - 4a - b^3 + 4b$; б) $x^3 + x^2y - 9x - 9y$;
 в) $x^2a + 3a^2 - a^3 - 3x^2$; г) $x^3 - 5b^2 + 5x^2 - xb^2$.

Розкладіть на множники (1198—1199).

1198. а) $a^2x^2 - 2abx^2 + 2ab + b^2x^2 - a^2 - b^2$;
 б) $a^2x^2 - 4b^2x + 4b^2 + 4a^2 - 4a^2x + b^2x^2$.
1199. а) $a^2 - b^2 + x^2 - y^2 + 2ax + 2by$;
 б) $x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 2x^2y^2 - 2xy$.
1200. Доведіть, що:
 а) $145^2 - 144^2 = 17^2$; б) $221^2 - 220^2 = 21^2$;
 в) $313^2 - 312^2 = 24^2 + 7^2$; г) $841^2 - 840^2 = 40^2 + 9^2$.

Обчисліть (1201—1202).

1201. а) $\frac{47^t - 41^t}{28^t - 16^t}$; б) $\frac{57^t - 42^t}{29^t - 26^t}$; в) $\frac{51^t - 12^t}{90^t - 9^t}$; г) $\frac{61^t - 11^t}{36^t - 24^t}$.
1202. а) $6^{32} \cdot 4^{32} - (24^{16} - 5)(24^{16} + 5)$;
 б) $(56^{10} - 7)(56^{10} + 7) - 7^{20} \cdot 8^{20}$;
 в) $4^{18} \cdot 9^{18} + (4 - 36^9)(36^9 + 4)$.

Розв'яжіть рівняння (1203—1204).

1203. а) $5x^5 - x^4 = 0$; б) $3x^3 - 12x = 0$; в) $10x^6 = 3x^5$.

1204. а) $x^3 + 4x^2 - x = 4$; б) $x^3 - 3x^2 + 2x = 6$;
в) $2x^3 + x^2 - 8x = 4$; г) $12x^3 - 8x^2 - 3x = -2$.

ФУНКЦІЇ

1205. Задайте формулою функцію, значення якої:

- а) на 4 більші за значення аргументу;
б) на 9 менші від значень аргументу;
в) втричі більші за значення аргументу;
г) протилежні значенням аргументу;
ґ) обернені до значень аргументу.

1206. Прямокутний паралелепіпед зі сторонами основи a см і b см і висотою 6 см має об'єм, що дорівнює 72 см³. Виразіть формулою залежність b від a .

1207. У трикутнику один з кутів дорівнює α , а другий — удвічі більший. Запишіть формулу для знаходження третього кута.

1208. Щоб пошити одну сорочку, потрібно 2,5 м тканини. Запишіть формулу для обчислення залишку тканини після пошиття x сорочок, якщо в сувої 200 м тканини. Яких значень може набувати x ?

1209. Знайдіть область визначення функції, заданої формулою:

а) $y = x(x - 5)$; б) $y = x^2 + 6x + 8$; в) $y = \frac{16 - x^2}{x + 5}$;

г) $y = \frac{x^2 + 9}{3x - 1}$; г) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x - 2}$; д) $y = \frac{3}{x(x + 1)}$.

1210. Функцію задано формулою $y = 0,25x - 1$. Складіть таблицю значень функції для перших десяти натуральних значень аргументу.

1211. Складіть таблицю значень функції $y = \frac{24}{2 - x}$ для цілих значень аргументу x , якщо $-6 \leq x \leq 6$.

1212. Знайдіть значення аргументу, при якому значення функції:

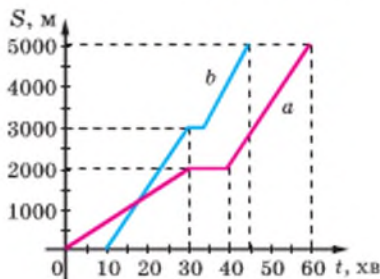
- а) $y = -3x + 2$ дорівнює -7 ; 0; 5;
б) $y = x(x - 3)$ дорівнює -2 ; 0; 10.

1213. Задайте формулою одну з функцій, значення якої для деяких значень аргументу подано в таблиці:

x	-4	-1	0	2	3	5
y	-12	-3	0	6	9	15

1214. На малюнку 104 зображено графіки руху пішохода (лінія a) і велосипедиста (лінія b). Використовуючи графік, визначте:

- чи одночасно вони почали рухатися;
- чи сталою була швидкість кожного;
- які швидкості пішохода і велосипедиста на кожній ділянці шляху;
- хто з них зупинився і на який час;
- на якій віддалі один від одного вони перебували через півгодини після початку руху пішохода.



Мал. 104

Побудуйте графік функції, заданої формулою (1215—1216).

1215. а) $y = 5x$; б) $y = 5x - 1$; в) $y = -5x$; г) $y = -5x + 3$.

1216. а) $y = x + 4$; б) $y = 1 - 2x$; в) $y = 3x$; г) $y = -\frac{x}{3}$.

Для кожного графіка побудуйте графік, симетричний відносно осі ординат. Задайте формулою відповідну функцію.

1217. Графік лінійної функції проходить через точки A і B . Складіть формулу функції, якщо:

- $A(3; 2)$ і $B(-5; 4)$;
- $A(-1; -6)$ і $B(1; 6)$;
- $A(-2; 1)$ і $B(1; -2)$;
- $A(-1; 5)$ і $B(3; -3)$.

РІВНЯННЯ І СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Розв'яжіть рівняння (1218—1223).

1218. а) $7x + 15 + 15x + 8 - 10 = 9x$;

б) $25 + 5y - 17 + 7y = 150 - 130y$.

1219. а) $7x - 39 = 2(x + 3) + 6 - 2x + 5$;

б) $3(x - 5) = 5(x - 3) - 4(2 - 3x)$.

1220. а) $\frac{1}{2}(2x - 4) + \frac{1}{2}(4x - 2) = x + 5$;

б) $\frac{2}{3}(3x + 1) + \frac{1}{3}(6x - 2) = x + 6$.

1221. а) $5(x - 3) + 7(3x + 6) = 2(x - 2) + 103$;

б) $8(y - 2) + 5(3y - 2) = 3(y - 5) + 69$.

1222. а) $7(6x - 1) + 3(2x + 1) - 5(12x - 7) = 23$;

б) $5(8z - 1) + 8(7 - 4z) - 7(4z + 1) = 19$.

1223. а) $\frac{1}{4}(x - 3) + \frac{1}{8}(x - 4) = \frac{1}{2}(x - 5) + \frac{1}{8}(x - 1)$;

б) $\frac{1}{6}(8 - x) - \frac{1}{3}(5 - 4x) = \frac{1}{2}(x + 6)$.

1224. Покажіть, що при будь-якому значенні a рівняння $(a + 2)x - (a + 3)x = 5$ має один розв'язок. Знайдіть цей розв'язок.

1225. Чи може рівняння $(a^2 + 1)x = 7$ при якому-небудь значенні a мати безліч коренів? Чому?

1226. За якої умови рівняння $ax = 12$ не має розв'язків?

1227. За якої умови рівняння $(a - 2)x = x + 1$ не має розв'язків?

1228. Побудуйте графік рівняння:

а) $x + y = 4$; б) $2x + y = 6$; в) $-3x + 2y = 5$; г) $-x - 7y = 7$.

1229. Яким має бути коефіцієнт b рівняння $4x + by = 0$, щоб графік цього рівняння проходив через точку $B(10; 8)$?

1230. Чому дорівнює значення c , коли відомо, що графік рівняння $2x + 3y = c$ проходить через точку $A(6; -1)$?

1231. Побудуйте в одній координатній площині графіки рівнянь $3x - 2y = 12$ і $5x + 3y = 1$, знайдіть координати точки їх перетину. Переконайтеся, що знайдена пара чисел є розв'язком кожного з даних рівнянь.

Розв'яжіть систему рівнянь (1232—1237).

$$1232. \text{ а) } \begin{cases} 2x + y = 12, \\ 3x - 5y = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x - 4y = 11, \\ 3x + 2y = 5; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 6x - 4z = 5, \\ 4x - 1,5z = 1; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 2x - 3y = -3, \\ x + 3y = 21. \end{cases}$$

$$1233. \text{ а) } \begin{cases} 2x - 3(x - y) = 7, \\ 5y - 2(x - 2y) = 23; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4y - 5(y - x) = 8, \\ 2(3x - y) + 7y = -14; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 0,5x + 0,3y = 8, \\ 1,2x - 0,5y = 7; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} 1,4x - 2,5y = 39, \\ 0,8x - 1,3y = 21. \end{cases}$$

$$1234. \text{ а) } \begin{cases} \frac{4}{5}x - y = 7, \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y = 11; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{3}{7}x - z = 15, \\ \frac{2}{5}x + \frac{3}{7}z = 14; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \frac{x+y}{3} + x = 15, \\ y - \frac{y-x}{5} = 6; \end{cases}$$

$$\text{г) } \begin{cases} \frac{x-y}{2} + y = 4, \\ x - \frac{y-x}{3} = 9. \end{cases}$$

$$1235. \text{ а) } \begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} = 3y-5, \\ \frac{5y-7}{6} + \frac{4x-3}{2} = 20-5x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x^2 - y^2 = 80, \\ x + y = 10. \end{cases}$$

$$1236. \text{ а) } \begin{cases} x + 4(2y - (x - 5)) = 36, \\ 7\left(\frac{3}{3}(y + 2x) - \frac{1}{5}y\right) = 4x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} |x - y| = 5, \\ x + y = 8. \end{cases}$$

1237.

$$\text{а) } \begin{cases} \frac{5+y}{3} - \frac{3x+4y}{4} = 3x+1, \\ \frac{7x+2}{3} + \frac{4x-3}{2} + \frac{11}{6} = 1-3x; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \frac{7+x}{5} - \frac{2x-y}{4} - 3y = -5, \\ \frac{5y-7}{2} - \frac{3-4x}{6} - 18 = -5x. \end{cases}$$

1238. *Стародавня китайська задача.* Кілька чоловік разом купують барана. Якщо кожен внесе по 5 монет, то не вистачить до вартості барана 45. Якщо кожний внесе по 7, то не вистачить 3 монет. Скільки коштує баран? Скільки було купців?

- 1239.** *Из напису на могилі Діофанта.* Діофант провів шосту частину свого життя в дитинстві, дванадцятю — в юності. Коли після того пройшла ще сьома частина його життя і 5 років, у нього народився син. Син прожив удвічі менше років, ніж батько. Після смерті сина Діофант прожив ще 4 роки. Скільки років жив Діофант?
- 1240.** *Стародавня індійська задача.* П'ята частина бджолиного рою сидить на квітці кадамба, третя — на квітах сицилійського кутая. А різниця цих двох кількостей, помножена на 3, — на квітах кутая. І тільки одна бджілка насолоджується пахощами жасмину і пандануса. Скажи мені, красуне, скільки всього бджіл?
- 1241.** *Стародавня арабська задача.* Поділіть число 10 на дві частини, різниця яких дорівнювала б 5.
- 1242.** *Стародавня німецька задача.* Число 10 поділіть на дві такі частини, щоб після множення першої на 5 і ділення одержаного результату на другу частину дістати $\frac{10}{3}$.
- 1243.** *Задача з німецького трактату XVI ст.* Один погодився працювати на умовах, що в кінці року він одержить одяг і 10 флоринів. Але попрацював він тільки 7 місяців, тому одержав одяг і 2 флорини. У скільки флоринів оцінили той одяг?
- 1244.** *Задача з російського фольклору.* Батько запитав учителя свого сина, скількох учнів він має. Учитель відповів: «Коли було б ще стільки учнів, скільки є, та ще половина і чверть їх, а також твій другий син, то було б рівно 100». Скільки учнів мав учитель?
- 1245.** *Задача з болгарського фольклору.* Селянин хвалився сусідові: «Скільки маю овець, стільки й ягняток вони народять. Потім куплю ще одну молоду вівцю і ще три рази куплю по стільки, скільки стане овець і ягнят, і матиму їх 100». Скільки овець мав той селянин?
- 1246.** *Задача для студентів Києво-Могилянської академії (1707 р.).* Батько трьох синів каже, що середній з них на 2 роки старший за молодшого, а найстаршому стільки років, скільки двом іншим разом і ще понад того 6. Сума усіх їхніх років дорівнює 58. Скільки років кожному синові?

ЗАДАЧІ ПІДВИЩЕНОЇ СКЛАДНОСТІ

1247. З кошика взяли половину всіх яєць, потім — половину остачі, потім — половину нової остачі, нарешті — половину нової остачі. Після цього в кошику залишилося 10 яєць. Скільки яєць було в кошику спочатку?
1248. Скільки метрів стрічок купила бабуся для своїх онучок, якщо старшій вона дала без півметра половину всіх стрічок, середній — половину остачі та ще півметра, а найменшій — решту: половину нової остачі й ще метр?
1249. Різниця двох чисел дорівнює 35. Від ділення більшого на менше виходить у частці 4 і в остачі 2. Знайдіть ці числа.
1250. Два учні хотіли купити книжку, вартість якої перевищувала кількість грошей одного учня на 35 к., другого — на 40 к. Коли вони віддали всі свої гроші, то одержали здачу, що дорівнювала 0,4 вартості книжки. Скільки коштувала книжка?
1251. Декілька чоловік, витративши 4000 грн., вирішили сплатити їх порівну. Якби їх було на 3 менше, то кожному довелося би сплатити у 2,5 рази більше. Скільки було чоловік? А якби вони витратили a грн?
1252. З пункту A зв'язківець доставив донесення в пункт B за 35 хв. На зворотному шляху він збільшив швидкість на 0,6 км/год, тому затратив на дорогу 30 хв. Знайдіть відстань між A і B .
1253. О 8 год ранку із села до міста вирушив велосипедист. Пробувши в місті 4,8 год, він виїхав назад й о 15 год повернувся в село. Знайдіть відстань між містом і селом, якщо в місто він їхав зі швидкістю 12 км/год, а повертався зі швидкістю 10 км/год.
1254. У шестицифровому числі перша цифра така, як і четверта, друга — як п'ята, третя — як шоста. Доведіть, що це число ділиться на 7, 11 і 13.
1255. Доведіть, що коли y є середнім арифметичним x і 2, то $x^2 + z^2 + 4y^2 + 2xz = 4xy + 4yz$.
1256. Знайдіть два натуральні числа, якщо їх сума становить 522, а найбільший спільний дільник дорівнює 87.

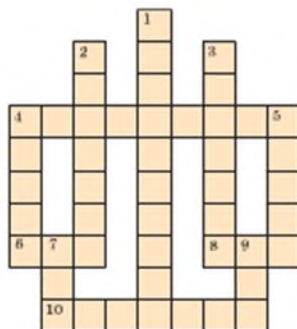
1257. Кількість хлопців, які розв'язали олімпіадну задачу, виявилася такою самою, як і кількість дівчат, які її не розв'язали. Кого було більше: усіх дівчат чи всіх тих, хто розв'язав задачу?
1258. Із плота, який плыв за течією річки, зіскочив юнак і a хвилин плыв проти течії. Потім, плывучи з такою самою власною швидкістю, він через b хвилин наздогнав пліт. Що більше, a чи b ?
1259. У трьох посудинах є вода. Половину води з першої посудини перелили в другу, потім $\frac{1}{3}$ води з другої посудини перелили в третю, а після того як $\frac{1}{4}$ води з третьої посудини перелили в першу, у кожній посудині стало по 6 л води. Скільки літрів води було в кожній посудині спочатку?
1260. Антикварний магазин купив дві картини за 3600 грн і продав їх, одержавши 25 % прибутку. За скільки гривень було продано кожну картину, якщо націнка на першу становила 50 %, а на другу — 12,5 %?
1261. Два велосипедисти виїхали одночасно з пунктів A і B назустріч один одному. Прибувши в кінцевий пункт, кожний з них повернув назад і продовжив рух у зворотному напрямку. Перший раз вони зустрілися на відстані 10 км від пункту B , а другий раз — на відстані 5 км від пункту A . Знайдіть відстань від A до B .
1262. Один сплав складається з двох металів, маси яких відносяться, як 1 : 2, а другий містить ті самі метали, але маси їх відносяться, як 3 : 4. Скільки частин кожного сплаву треба взяти, щоб утворити третій сплав, у якому маси тих самих металів відносились би, як 15 : 22?
1263. *Задача з фольклору США.* Мері 24 роки. Це у 2 рази більше, ніж було Анні, коли Мері було стільки років, скільки тепер Анні. Скільки років Анні?
1264. *Задача з австралійського фольклору.* Батько пропонував синам Альфреду, Джону і Чарльзу отару своїх овець розподілити так: Альфред одержить на 20 % більше за Джона і на 25 % більше за Чарльза. Джон одержить 3600 овець. Скільки овець одержить Чарльз?

- 1265.** *Задача з фольклору Франції.* Заплативши за вечерю в ресторані, Метив'є виявив, що в нього залишилась п'ята частина грошей, які були із собою. Причому сантимів залишилося стільки, скільки спочатку було франків (1 франк = 100 сантимів), а франків залишилося в 5 разів менше, ніж спочатку було сантимів. Скільки заплатив Метив'є за вечерю?
- 1266.** *Задача з турецького фольклору.* Старий Ісхан мав дітей, онуків, правнуків і праправнуків. Усього їх разом з Ісханом було 2801. Праправнуки були ще маленькі, тож не мали дітей, а всі інші мали по однаковій кількості дітей, і всі діти були живі й здорові. Скільки дітей мав старий Ісхан?
- 1267.** *Задача з болгарського фольклору.* Пастух пасе череду зі 100 голів, за що одержує 100 левів. Скільки в череді волів, корів і телят, якщо за одного вола він одержує 10 левів, за корову — 5 левів, а за теля — 0,5 лева?
- 1268.** Скільки разів треба взяти доданком число a , щоб дістати a^{20} ?
- 1269.** Розгадайте математичний ребус:

$$\text{система} = \text{са}^{\text{н}}.$$
- 1270.** Розгадайте кросворд.

По горизонталі: **4.** Цілий алгебраїчний вираз. **6.** Початок літочислення. **8.** Перше просте число. **10.** Компонент дії ділення.

По вертикалі: **1.** Рівність двох виразів. **2.** Доводжуване твердження. **3.** Число 10^9 . **4.** Назва знака $<$. **5.** Словесне найменування чого-небудь. **7.** Послідовність або сума її членів. **9.** Одиниця часу.



ВІДОМОСТІ З КУРСУ МАТЕМАТИКИ 5—6 КЛАСІВ

НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., які використовують для лічби, називають *натуральними числами*. Найменше натуральне число 1, найбільшого не існує.

Порівняти два числа — означає з'ясувати, яке з них більше, яке менше, або показати, що вони рівні. Знаки $>$ (більше), $<$ (менше), \leq (не більше), \geq (не менше) називають *знаками нерівності*.

Будь-які натуральні числа можна *додавати*, у результаті дістають їх суму:

доданок доданок сума

$$a + b = c.$$

Віднімання — дія, обернена до додавання. Відняти від першого числа друге — означає знайти таке третє число, яке в сумі з другим дає перше число.

Тобто якщо $a - b = x$, то $x + b = a$:

зменшуване від'ємник різниця

$$a - b = x.$$

Помножити число a на натуральне число n — означає взяти число a доданком n разів. Наприклад,

$$a \cdot 5 = a + a + a + a + a.$$

Які б не були натуральні числа a і b , їх можна перемножити, у результаті дістають *добуток*:

множник множник добуток

$$a \cdot b = c$$

Ділення — дія, обернена до множення. Поділити число a на b — означає знайти таке число x , що $x \cdot b = a$:

ділене дільник частка

$$a : b = x.$$

Завжди правильні рівності:

$$a + 0 = a, a - 0 = a, a \cdot 1 = a, a : 1 = a, a \cdot 0 = 0.$$

На 0 ділити не можна!

Іноді ділення виконується з остачею. Наприклад,
 $60 : 7 = 8$ (ост. 4).

Тут 60 — *ділене*, 7 — *дільник*, 8 — *неповна частка*, 4 — *остача*. Остача завжди менша від дільника. Якщо остачу не беруть до уваги, то неповну частку називають *наближеною часткою*. Наприклад, $60 : 7 = 8$. Тут 8 — *наближена частка* чисел 60 і 7, а = — *знак наближеної рівності*.

ПОДІЛЬНІСТЬ НАТУРАЛЬНИХ ЧИСЕЛ

Коли говорять, що одне число *ділиться* на друге, то мають на увазі ділення без остачі.

Цифри 0, 2, 4, 6, 8 називають *парними*, а всі інші — *непарними*.

На 2 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються парними цифрами. Числа, які діляться на 2, називаються *парними*, інші — *непарними*.

На 5 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються цифрою 5 або 0.

На 10 діляться ті і тільки ті числа, які закінчуються цифрою 0.

На 3 діляться ті і тільки ті числа, сума цифр яких ділиться на 3.

На 9 діляться ті і тільки ті числа, сума цифр яких ділиться на 9.

П р и м і т к а. Говорячи «сума цифр», мають на увазі суму одноцифрових чисел, записаних відповідними цифрами.

Якщо число a ділиться на m без остачі, то число a називають *кратним* числа m , а m — *дільником* числа a . Наприклад, 5 — *дільник* числа 35, а 35 — *кратне* числа 5.

Число 35 має чотири дільники: 1, 5, 7 і 35.

Число 5 має безліч кратних: 5, 10, 15, 20, 25, ...

Число, яке має тільки два дільники — одиницю і саме себе, називають *простим*. Найменше просте число 2, найбільшого не існує. Послідовність простих чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... нескінченна.

Натуральне число, яке має більше двох дільників, називається *складеним*. Складених чисел безліч: 4, 6, 8, 9, 10, 12, Число 1 — ні просте, ні складене.

Кожне складене число можна розкласти на прості множники. Наприклад,

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3, 81 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3, 1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13.$$

Числа 18 і 81 мають три спільні дільники: 1, 3 і 9. Числа 81 і 1001 мають тільки один спільний дільник: 1.

Найбільшим спільним дільником (НСД) кількох чисел називають таке найбільше число, на яке ділиться кожне з даних чисел. Щоб знайти НСД кількох чисел, треба кожне з них розкласти на прості множники і перемножити ті з простих множників, які входять до кожного розкладу. При цьому множники брати з найменшим показником, з яким вони входять до даних чисел.

Найменшим спільним кратним (НСК) кількох чисел називають найменше число, яке ділиться на кожне з даних чисел. Щоб знайти НСК кількох чисел, треба розкласти їх на прості множники і до розкладу одного з них дописати ті множники, яких у ньому не вистачає. При цьому множники брати з найбільшим показником, з яким вони входять до даних чисел. Знайдемо, наприклад, НСД і НСК чисел 20, 60 і 90.

20	2	60	2	90	2
10	2	30	2	45	3
5	5	15	3	15	3
1		5	5	5	5
		1		1	

$$\text{НСД}(20; 60; 90) = 2 \cdot 5 = 10,$$

$$\text{НСК}(20; 60; 90) = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 = 180.$$

Якщо НСД двох або кількох чисел дорівнює 1, то ці числа називають *взаємно простими*. Взаємно простими є, наприклад, числа 8 і 9, або 4, 7 і 25.

П р и м і т к а. Досі, говорячи про числа, мали на увазі тільки натуральні числа.

ДЕСЯТКОВІ ДРОБИ

Дробові числа найчастіше записують за допомогою *десяткових дробів*.

Кожний десятковий дріб має *цілу й дробову частини*, відокремлені комою. Наприклад, у числі 37,45 ціла частина —

37, а дробова — 45 сотих; у числі 0,02 ціла частина — 0, а дробова — 2 сотих.

Із двох десяткових дробів *більший* той, що має більшу цілу частину. Якщо їх цілі частини рівні, то більший той, у якого більше десятих і т. д. Наприклад, $4,3 > 4,198$.

Додають і віднімають десяткові дробі порозрядно, записуючи їх один під другим так, щоб кома була під комою. Наприклад,

$$\begin{array}{r} 3,27 \\ + 12,8 \\ \hline 16,07 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36,28 \\ - 7,235 \\ \hline 29,045 \end{array}$$

Щоб перемножити два десяткові дробі, можна перемножити їх, не звертаючи уваги на коми, а в добутку відокремити комою справа стільки цифр, скільки їх є після ком в обох множниках разом. Наприклад,

$$0,02 \cdot 8,03 = 0,1606.$$

Щоб помножити десятковий дріб на 10, 100, 1000, досить у цьому дробі кому перенести вправо відповідно на одну, дві чи три цифри. Щоб помножити десятковий дріб на 0,1, 0,01, 0,001, досить у цьому дробі перенести кому вліво відповідно на одну, дві чи три цифри. Наприклад,

$$8,0375 \cdot 100 = 803,75; 34,8 \cdot 0,01 = 0,348.$$

Ділення десяткових дробів ґрунтується на основній властивості частки.

Основна властивість частки. Значення частки не зміниться, якщо ділене і дільник помножити або поділити на одне й те саме число (крім нуля).

Користуючись цією властивістю, ділення десяткових дробів можна звести до ділення на натуральне число. Щоб поділити число на десятковий дріб, треба в діленому і дільнику кому перенести вправо на стільки цифр, скільки їх є після коми в дільнику, а потім виконати ділення на натуральне число. Наприклад,

$$2,8 : 0,07 = 280 : 7 = 40.$$

Правило округлення чисел. Якщо перша з відкинутих цифр 0, 1, 2, 3 або 4, то останню цифру, що залишається, не змінюють. Якщо перша з відкинутих цифр 5, 6, 7, 8 або 9, то останню цифру, що залишається, збільшують на 1. Наприклад,

$$6,237 = 6,2; 0,8459 = 0,85.$$

ЗВИЧАЙНІ ДРОБИ

Частку від ділення натуральних чисел a і b можна записати у вигляді звичайного дробу $\frac{a}{b}$, дробова риска замінює знак ділення. Чисельник a і знаменник b разом називають членами дробу. Говорячи «дріб», розуміють звичайний дріб.

Дріб називають *правильним*, якщо його чисельник менший від знаменника. Якщо чисельник дробу більший за знаменник або дорівнює знаменнику, то його називають *неправильним*. Значення неправильного дробу не менше від 1, а правильного — менше від 1. З неправильного дробу можна виділити цілу частину і записати його у вигляді мішаного дробу. Наприклад,

$$\frac{13}{5} = 2\frac{3}{5}.$$

Основна властивість дробу. Значення дробу не зміниться, якщо його чисельник і знаменник помножити або поділити на те саме натуральне число.

Користуючись цією властивістю, дроби можна скорочувати або зводити до спільного знаменника. Наприклад,

$$\frac{8}{12} = \frac{2}{3}; \quad \frac{25}{15} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}.$$

Дріб називається *нескоротним*, якщо його чисельник і знаменник — числа взаємно прості.

Зведемо до найменшого спільного знаменника дроби $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{12}$ і $\frac{1}{18}$.

НСК (4; 12; 18) = 36. Додаткові множники: $36 : 4 = 9$, $36 : 12 = 3$, $36 : 18 = 2$. Тому

$$\frac{3}{4} = \frac{3 \cdot 9}{4 \cdot 9} = \frac{27}{36}; \quad \frac{5}{12} = \frac{5 \cdot 3}{12 \cdot 3} = \frac{15}{36}; \quad \frac{1}{18} = \frac{1 \cdot 2}{18 \cdot 2} = \frac{2}{36}.$$

Дроби з рівними знаменниками додають і віднімають, користуючись формулами:

$$\frac{a}{m} + \frac{b}{m} = \frac{a+b}{m}; \quad \frac{a}{m} - \frac{b}{m} = \frac{a-b}{m}.$$

Щоб знайти *суму* або *різницю* звичайних дробів з різними знаменниками, їх спочатку зводять до спільного знаменника.

Наприклад,

$$\frac{5}{6} + \frac{2}{3} = \frac{5}{6} + \frac{4}{6} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}; \quad \frac{5}{6} - \frac{2}{3} = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}.$$

Як виконують додавання і віднімання мішаних дробів, показано на прикладах:

$$\begin{aligned} 3\frac{1}{2} + 1\frac{4}{5} &= 3\frac{5}{10} + 1\frac{8}{10} = 4\frac{13}{10} = 5\frac{3}{10}; \\ 3\frac{1}{2} - 1\frac{4}{5} &= 3\frac{5}{10} - 1\frac{8}{10} = 2\frac{15}{10} - 1\frac{8}{10} = 1\frac{7}{10}; \\ 7 - 2\frac{1}{3} + 3\frac{1}{5} &= 6\frac{15}{15} - 2\frac{5}{15} + 3\frac{3}{15} = 7\frac{13}{15}. \end{aligned}$$

Щоб помножити дріб на дріб, треба окремо перемножити їхні чисельники, їхні знаменники і перший результат записати чисельником, а другий — знаменником добутку. Наприклад,

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3 \cdot 2}{5 \cdot 7} = \frac{6}{35}.$$

Два дроби називають *взаємно оберненими*, якщо їх добуток дорівнює 1. Дріб $\frac{a}{c}$ обернений до дроби $\frac{c}{a}$, і навпаки.

Щоб поділити один дріб на інший, треба перший дріб помножити на дріб, обернений до другого:

$$\frac{a}{c} : \frac{m}{n} = \frac{a}{c} \cdot \frac{n}{m} = \frac{an}{cm}.$$

Як виконують дії другого і третього ступенів над мішаними дробами, показано на прикладах:

$$\begin{aligned} 4\frac{1}{3} \cdot 2 &= 8\frac{2}{3}, \quad 9\frac{6}{7} : 3 = 3\frac{2}{7}; \\ 3\frac{1}{2} \cdot 1\frac{3}{7} &= \frac{7}{2} \cdot \frac{10}{7} = 5; \\ 2\frac{2}{5} : \frac{4}{15} &= \frac{12}{5} \cdot \frac{15}{4} = 9; \\ \left(2\frac{1}{3}\right)^2 &= \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{49}{9} = 5\frac{4}{9}. \end{aligned}$$

Середнім арифметичним кількох чисел називають частку від ділення суми цих чисел на їх кількість.

Середнє арифметичне чисел a , b і c дорівнює $\frac{a+b+c}{3}$.

РАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Числа, які відрізняються тільки знаками, називаються *протилежними*. Наприклад, число -7 протилежне числу 7 , і навпаки. Числа, протилежні натуральним, називають *цілими від'ємними*. Числа натуральні, цілі від'ємні та нуль разом називають *цілими числами*. Натуральні числа називають також *цілими додатними* числами. Від'ємними бувають не тільки цілі числа, а й дробові, наприклад,

$$-2,5, -\frac{7}{8}, -3\frac{2}{5}.$$

Цілі та дробові числа (додатні й від'ємні) разом називають *раціональними числами*. На координатній прямій кожному раціональному числу відповідає єдина точка.

Множина натуральних чисел є частиною (підмножиною) множини цілих чисел, а множина цілих чисел — частиною (підмножиною) множини раціональних чисел. Співвідношення між найважливішими видами чисел показано на схемі.



Додатні числа (цілі й дробові) та нуль разом називають *невід'ємними числами*.

Модуль невід'ємного числа дорівнює самому числу; модуль від'ємного числа дорівнює протилежному числу. Наприклад,

$$|3,7| = 3,7; \quad |-12| = 12; \quad |0| = 0; \quad \left| -\frac{2}{15} \right| = \frac{2}{15}.$$

Із двох раціональних чисел *меншим* вважається те, якому на координатній прямій відповідає точка, розміщена лівіше. Тому кожне від'ємне число менше від кожного невід'ємного. Із двох від'ємних чисел меншим вважається те, модуль якого більший. Наприклад,

$$-12 < 0; \quad -12 < 7; \quad -12 < -9.$$

Записи $a > 0$, $x < 0$ означають, що число a додатне, а x — від'ємне. Якби не були два раціональні числа, то правильним

є одне з трьох співвідношень: або вони рівні, або перше менше від другого, або перше більше за друге.

Щоб *додати* два від'ємні числа, досить додати їх модулі і перед результатом поставити знак «мінус». Наприклад, $-5 + (-8) = -13$.

Щоб *додати* додатне і від'ємне числа, треба знайти різницю їх модулів і перед нею поставити знак числа, модуль якого більший. Наприклад,

$$-7 + 12 = 5; \quad \frac{3}{5} + \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{1}{5}.$$

Щоб знайти *різницю* двох раціональних чисел, треба до зменшуваного додати число, протилежне від'ємнику. Наприклад,

$$-9 - (-2) = -9 + 2 = -7; \quad \frac{1}{8} - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{7}{8}.$$

Добуток двох раціональних чисел з однаковими знаками дорівнює добутку їх модулів. Добуток двох чисел із різними знаками дорівнює добутку їх модулів, узятому зі знаком «мінус». Наприклад,

$$-2 \cdot (-6) = 12; \quad 3 \cdot (-5) = -15; \quad -\frac{2}{3} \cdot 3 = -2.$$

Для будь-яких раціональних значень a і b правильні рівності:

$$(-a) \cdot (-b) = ab; \quad (-a) \cdot b = -ab.$$

Добуток парного числа від'ємних множників — додатний, а непарного — від'ємний (якщо він не містить множника 0). Квадрат від'ємного числа додатний, а куб — від'ємний.

Частка двох раціональних чисел дорівнює частці від ділення їх модулів, якщо знаки діленого і дільника однакові. Якщо знаки діленого і дільника різні, то частка дорівнює частці від ділення їх модулів, узятій зі знаком «мінус». Наприклад,

$$-15 : (-3) = 5; \quad 20 : (-4) = -5; \quad -40 : 5 = -8.$$

Якщо число a відмінне від 0, то $0 : a = 0$, $a : a = 1$.

Як натуральні, так і раціональні та будь-які інші числа на 0 ділити не можна!

Для будь-яких раціональних чисел правильні рівності:

$$a + b = b + a \text{ — переставний закон додавання,}$$

$a + (b + c) = (a + b) + c$ — сполучний закон додавання,

$ab = ba$ — переставний закон множення,

$a \cdot (bc) = (ab) \cdot c$ — сполучний закон множення,

$(a + b)c = ac + bc$ — розподільний закон множення.

Якщо перед дужками стоїть знак «плюс», їх можна опустити. Якщо перед дужками стоїть знак «мінус», їх можна опустити, змінивши знаки всіх виразів у дужках на протилежні (правило розкриття дужок). Наприклад,

$$20 + (3 - 7) = 20 + 3 - 7;$$

$$0,5 - (2,3 - 3) = 0,5 - 2,3 + 3.$$

ВІДНОШЕННЯ І ПРОПОРЦІЇ

Частку від ділення двох чисел називають також їх *відношенням*. Приклади відношень:

$$3 : 7; 0,5 : \frac{1}{3}.$$

Основна властивість відношення. Значення відношення не зміниться, якщо обидва його члени помножити або поділити на одне й те саме число, відмінне від нуля. Тому, наприклад, значення відношень $300 : 200$ і $3 : 2$ рівні.

Відношення дробових чисел завжди можна замінити відношенням цілих чисел. Для цього досить обидва члени відношення помножити на спільне кратне їх знаменників. Наприклад,

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{3} = 3 : 2.$$

Кожний звичайний дріб є відношення його чисельника до знаменника:

$$\frac{a}{b} = a : b.$$

Рівність двох відношень — *пропорція*. Приклади пропорцій:

$$45 : 15 = 21 : 7; \frac{2}{3} = \frac{10}{15}; x : 3 = 20 : 30.$$

Числа, які складають пропорцію, називають її *членами* (середніми і крайніми).

Крайні члени

$$a : b = c : d.$$

середні члени

Основна властивість пропорції. Якщо пропорція правильна, то добуток її крайніх членів дорівнює добутку середніх. Тобто, якщо

$$a : b = c : d, \text{ то } ad = bc.$$

Дві величини називають *пропорційними*, якщо із збільшенням значень однієї з них у кілька разів відповідні значення другої збільшуються у стільки ж разів. Наприклад, маса шматка сталі пропорційна його об'єму ($m = kv$), пройдена автомобілем відстань пропорційна часу ($s = kt$) (за умови, що автомобіль їде зі сталою швидкістю).

Примітка. Іноді розглядають й *обернену пропорційність величин* (коли із збільшенням значень однієї величини в кілька разів відповідні значення другої зменшуються у стільки ж разів). У такому випадку розрізняють прямо пропорційні й обернено пропорційні величини. Коли говорять: пропорційні величини, пропорційні відрізки і т. ін., то мають на увазі прямо пропорційні.

Розглядають також пропорційність трьох і більшої кількості величин. Коли, наприклад, говорять, що капітали a , b і c пропорційні числам 3, 5 і 4, це означає, що

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{4}.$$

Примітка. Іноді пишуть $a : b : c = 3 : 5 : 4$, говорячи про «відношення трьох чисел». Але на такі записи основна властивість відношення не поширюється. Наприклад, $6 : 2 : 3 \neq 60 : 20 : 30$. Бо значення першого з цих виразів дорівнює 1, а другого — 0,1.

Задача. Знайдіть сторони чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 3, 6, 4, 2, а периметр чотирикутника дорівнює 300 см.

Розв'язання. Оскільки сторони чотирикутника пропорційні числам 3, 6, 4, 2, то вони дорівнюють відповідно $3k$, $6k$, $4k$, $2k$, де k — якесь число (коефіцієнт пропорційності). Отже,

$$3k + 6k + 4k + 2k = 300, \quad 15k = 300, \quad k = 20.$$

Шукані сторони чотирикутника дорівнюють:

$$3 \cdot 20 = 60 \text{ (см)}, \quad 6 \cdot 20 = 120 \text{ (см)},$$

$$4 \cdot 20 = 80 \text{ (см)}, \quad 2 \cdot 20 = 40 \text{ (см)}.$$

ВІДСОТКИ

Відсоток — сота частина, $1\% = 0,01$. *Відсоток числа* — сота частина цього числа, 50% числа — це половина цього числа.

Відсотковим відношенням називають відношення, виражене у відсотках. Якщо серед 40 членів бригади є 8 жінок, то про це можна сказати так: відношення числа жінок до числа всіх робітників бригади дорівнює $8 : 40$. Або інакше: жінки становлять $\frac{1}{5}$ (чи $0,2$) робітників бригади. Або: жінки становлять 20% усіх робітників бригади.

Число, більше за a на $p\%$, дорівнює $a \left(1 + \frac{p}{100}\right)$, число,

менше за a на $p\%$, дорівнює $a \left(1 - \frac{p}{100}\right)$. Збільшити число вдвічі — це означає збільшити його на 100% . Зменшити число вдвічі — це означає зменшити його на 50% .

Розрізняють три основні види задач на відсотки: 1) знаходження відсотків від числа; 2) знаходження числа за відсотками; 3) знаходження відсоткового відношення двох чисел.

Задача 1. Руда містить 56% заліза. Скільки заліза можна виплавити з 1000 т руди?

Розв'язання. $56\% = 0,56$; $1000 \cdot 0,56 = 560$ (т).

Відповідь. 560 т.

Задача 2. Цукровий буряк містить 14% цукру. Із скількох тонн буряків можна одержати 10 т цукру?

Розв'язання. $14\% = 0,14$; $x \cdot 0,14 = 10$ (т), звідки $x = 10 : 0,14 = 71$ (т).

Відповідь. 71 т.

Задача 3. Посадили 200 зернин нового сорту сої, з них проросло 186 зернин. Знайдіть відсоток проростання цього сорту сої.

Розв'язання. $186 : 200 = 0,93$; $0,93 = 93\%$.

Відповідь. 93% .

ВІДПОВІДІ ТА ВКАЗІВКИ ДО ЗАДАЧ І ВПРАВ

Розділ 1

6. б) 0,6; в) 2. 7. а) 0,2. 8. а) 16. 11. а) 2; в) 1,25. 12. а) 6,5; в) -60.
 15. а) 2. 16. б) $5 \cdot 10 + b$; г) $100a + c$. 17. а) 2700; 810.
 18. б) $0,5(38 - 7,6)$. 19. а) 5,23. 20. а) 0; в) 186,5. 21. а) -0,5.
 22. а) 1,884. 25. а) -5; г) $3\frac{5}{12}$. 26. а) $100c + 10b + a$;
 в) $a + 0,1n + 0,01m$. 27. а) $5k$; б) $10k$. 29. а) 4; в) -2. 30. а) -7;
 б) 2. 31. $100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 101(a + c) + 20b$.
 32. а) 7. 33. 40 і 80 нетбуків. 34. 9, 10 і 11 см. 38. а) Так; в) ні.
 41. а) $5c - 5$; в) $10n - 17$. 42. а) $-4ac - 4a$; в) $-16 + 8ac$.
 48. г) $3 - 2,9x$. 49. а) $28 + 7x$. 50. а) $10x + 28$. 53. а) 3.
 55. а) $8x - 20$. 56. а) $164a - 163x$. 57. а) $18x^2 - 74$; в) $-8c^2 + 6c$.
 61. а) Так; б) так. 66. а) Ні; б) так. 70. $P = 3a + 4$. 71. 60 випуск-
 ників. 73. а) -1; г) 3. 79. а) 25, 32, 1000, 1000000, 625; г) 16,
 169, -32. 80. б) 31. 81. а) 270; г) -0,1. 82. в) 1,8; г) 13,31.
 84. а) Так; б) ні. 86. а) 9 см^2 ; в) $72,25 \text{ км}^2$. 87. а) 5^3 ; г) 3^5 .
 88. б) 810. 89. а) 225; в) 17. 90. а) 1 і -1; в) -5. 91. а) -1; в) 1.
 93. а) $2 \cdot 10^4$; б) $7,53 \cdot 10^6$. 94. а) 52000; г) 444; д) 3125000.
 95. а) Так; в) так. 96. а) 324; в) 1. 97. а) 81; г) -12,1. 98. а) 1.
 108. а) 6; г) 2. 109. а) 1 і -1; в) 0; д) 6. 110. а) $2,87287 \cdot 10^8$;
 $1,753 \cdot 10^7$; $2,205 \cdot 10^5$; $9,099 \cdot 10$. 111. б) 0,0002, 0,0011,
 0,00009, 0,00000675. 115. а) Так; г) ні; д) ні. 117. 8 год.
 123. а) 3^{19} ; в) $(-11)^9$; е) $(-1,2)^2$. 124. г) y^{16} . 125. а) 4^{12} ; г) $0,2^8$.
 126. а) a^6 ; в) y^{14} ; д) $-b^{21}$. 132. а) 1; в) 1. 133. а) 10000000; д) 1.
 134. а) Ні; б) так. 135. а) 1; г) -1. 136. а) $5,4 \cdot 10^5$; $-6 \cdot 10^4$;
 $7,2 \cdot 10^{10}$; 0,8. 137. а) $5,8 \cdot 10^5$; в) 2. 139. в) $\frac{1}{2}$; д) 256.
 140. а) 25; в) -0,16. 141. а) a^{19} ; г) b^{16} . 142. а) $(ax)^6$; г) $(2x)^5$.
 143. а) 5^9 . 144. а) -1; в) 1. 145. а) x^9 . 146. а) 2. 147. а) -1; д) -2.
 150. б) $4,8 \cdot 10^{10}$; $4,2 \cdot 10^{10}$; $1,35 \cdot 10^{20}$; $1,5 \cdot 10$. 152. а) $3,55 \cdot 10^5$.

154. а) Ні; в) так. 161. б) 1,08. 162. б) $\frac{1}{10}x^3y^3$. 163. а) $36a^6z^4$.
 164. г) $0,04x^6m^2$; $0,008x^9m^3$. 165. г) $-8a^6b^3$. 166. а) $18am^2c^2$.
 167. а) $-14a^2x$. 168. в) $30a^2x^5$. 169. б) -4500 ; г) $-13,5$.
 170. в) $3a^2b^6$. 172. в) $0,125a^3x^3y^9$. 173. д) $5\frac{1}{16}a^4b^8c^4$.
 175. в) $-27x^{11}y^3$. 176. г) $-1\frac{2}{3}a^9x^8$; е) $0,1x^9y^6$. 178. б) -1 і 1 .
 179. а) $(4a^2b)^2$. 180. а) $(-2a^2)^3$. 181. а) $-0,3y^2$; г) $-\frac{1}{5}m^3n^3$.
 182. а) $4,2$; г) $81\frac{2}{3}$. 183. а) -4500 ; б) 250 . 185. 320 дерев;
 192 дерев — вишні. 191. б) $5abc^2$. 192. г) $5a^2x$. 193. а) $-x^2 +$
 $+x - 12$; д) $-\frac{2}{3}xy^3 + 1\frac{2}{5}x^3y$. 194. а) $-9x^3 - 3x^2$; в) $-3m^5 -$
 $-7m^3 - 7$. 195. а) $2b^2 + 4a - b$; г) $\frac{1}{2}a$. 196. а) $3x^4 - x^3 - 5x^2 - 2x$;
 г) $-x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 1$. 197. а) 0 ; в) $-0,632$. 198. б) $-1,2$.
 200. г) $-a^3 - 3a^2c + 2ac + c^2$. 201. г) $1,2$. 202. в) $a^2c - ac + 1$;
 е) $-x^5 - 6x^4$. 203. в) $2x^8 - 3x^5 - 4x^2 + 10$. 206. $2a + b$.
 207. $8m + 4n$. 208. $S = 52a^2$; $V = 22a^3$. 211. $\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}v_2$.
 212. $v_1 + \frac{1}{2}v_2$. 213. $1,5v_1 - 1,5v_2$. 216. в) $4ax^3 - a^2x^3 + 9a^2$.
 217. в) -900 . 219. а) $9x^2 - 25y^2$. 223. в) $-5a^3b + 5ab^2 - 5ab +$
 $+ 3a^2b$. 224. а) $x^3 - x^2 - 10$; в) $8a^2c - 7ac^2 - 7a^2c^2 + c - 4$.
 225. а) $x^2 + 9x + 5$. 226. б) $6x^3 - 4x^2$. 227. а) $c^2 + 3c + 1$.
 228. а) 26 ; в) 3 . 229. $\frac{5}{14}$. 230. -3 . 231. а) -5 ; в) 12 . 232. а) 1 і -1 ;
 г) $\frac{1}{4}$. 233. а) $n^4 + n^3 + 4$; г) $x^4 + x^2 - x + 2$. 234. в) $a^2 + 1,5b^2 -$
 $- 2,5a$; д) $2\frac{1}{2}y^2 + \frac{2}{5}x^2y - 3xy$. 236. в) $1\frac{5}{6}z^3 + 4\frac{1}{2}az^2 - \frac{2}{3}a^2z$;
 г) $-3c + 5$. 237. а) $-1\frac{1}{2}ax^2 - 1\frac{1}{3}a^2x$; в) $ax^3 + a - 5$.

241. а) $8a^3 - 3a^2 + 10$; б) $-3x^2 - x - 23$; в) $2xy - 16x^2 + 6y^2 + 6$.
 242. а) $a^3 - 4a^2 + 4$. 243. а) $x^3 - 13x^2 + 4x - 8$. 244. а) $5c^3 + c^2 - 12c - 6$. 245. а) $5y^3 - 4y^2 - 2$. 248. а) $100a + 10b + c$;
 р) $101a + 110b + 11c$. 252. а) $-\frac{7}{9}$. 253. а) 6,9. 254. $43\frac{1}{3}$ ц.
 258. а) $6a^2 + 2ac$; г) $m^5 + 3m^3$. 259. в) $0,5a^2c^2 - c^3$.
 260. г) $9x^3y^2 - 15x^2y^2 + 6xy^2$. 261. а) $x^3 + x^2$; д) $-2a^3 + 2a$.
 262. а) $8a^5$; е) $-2c^3 - c^2$. 263. а) Так; г) ні. 264. а) 2,7; г) -5.
 265. а) 4; в) $-4\frac{2}{11}$. 266. б) $\frac{5}{6}$. 267. а) $\frac{1}{5}$; в) $2\frac{9}{19}$. 268. а) $6x^5 - 8x^4 + 10x^3$;
 г) $-5yz^6 + 6yz^5 + 30yz^3 - 9yz^2$. 269. б) $6x^4n + 10x^3n^2 - 2x^2n + 8n^3x$;
 г) $-4x^5y^2 + 2x^3y^3 + 2\frac{2}{3}x^2y^4 + 6x^2y^3$.
 270. а) $2a^3x^4 + 3a^2x^3$; г) $-14x^4y^3 - x^5y$. 271. а) $3x^5$; в) $1,8ac^2$.
 272. а) $b - a$; г) $\frac{2}{3}z^3 - \frac{3}{4}x^2z$. 273. а) 7; в) $a^4 - a - 2$. 274. б) 2.
 275. а) 1,2; в) 9. 276. а) $1\frac{1}{4}$; в) 5. 277. а) -5; г) 10. 278. а) $3\frac{1}{7}$;
 в) 9. 280. 82 корови. 281. 70 і -10. 282. 20 зошитів; 15 блокнотів.
 283. 2 см; 8 см. 284. 40 см; 120 см. 285. 2,5 і 15. 286. 12 років; 48 років.
 287. 15 років. 288. Через 4 дні. 289. 20 г. 298. а) $am + bm - an - bn$; г) $ac + a^2x + cx + ax^2$.
 299. а) $ac - bc + ad - bd$. 300. а) $1 - 4x^2z^2$; в) $a^4 + 2a^2b + b^2$.
 301. а) $6x^2 + 5x - 6$. 302. в) $x^3 + 1$; д) $0,25x^2 - 1,69$. 303. а) Так;
 в) ні. 304. а) $x^3 - 3x^2 + 4x - 2$; д) $x^2 + x$. 305. а) 0,36; в) -0,04.
 306. а) $5x^2 - 18x + 14$; в) $a^2 - 2ab$. 307. а) $-a^2 - a - ab + 3b$;
 в) $-y^2 + 3x$. 308. б) $x^2 - 2xy + y^2$. 309. а) $7b^2 + 1$. 310. а) $\frac{3}{4}$;
 в) $-\frac{5}{9}$. 313. а) $-5a^2$; в) $-a^4 - x^2$. 314. а) $a^3 - 3a^2 + 4a - 2$;
 в) $0,49z^2 - 6,25c^2$. 315. а) $x^4 - 2x^3 - 15x^2 + 2x - 10$; в) $8a^3 + b^3$.
 316. а) $5x^4 + 6x^3y - 33x^2y^2 + 5y^3x + 12y^4$; в) $4a^4 + 5a^3 - a^2 - a + 1$.
 317. а) $\frac{1}{12}a^2 - \frac{1}{72}ab + \frac{11}{48}ac - \frac{1}{6}bc + \frac{1}{8}c^2 - \frac{1}{6}b^2$. 318. а) 1;

- в) c^2 . 319. а) 1; в) $8a^3$. 320. а) 1; в) a^6 . 322. б) $9a^2c^2 + 6acb^2 + b^4$.
 323. а) a^4 ; в) 1. 325. а) $-\frac{1}{3}$; в) -1. 326. а) 0,01; г) $-2\frac{1}{4}$ і $2\frac{1}{4}$.
 327. а) -3,5; в) 1,1. 328. а) 1. 329. а) Немає розв'язків; в) немає розв'язків. 330. На 4. 331. На 7. 334. б) 10.

Розділ 2

340. а) $x(a + b)$; г) $2b(2b - a)$. 341. а) $a(2a + 3)$; д) $15(ab + 3c)$.
 342. б) $m(mx + y)$; д) $5a^2x(2 + x)$. 343. а) $ab^3(a^2 - 6b)$; г) $a^4(3a^2 + 6a + 1)$. 344. а) $2c(ac - 4c^2d + 2ad)$; д) $ax^2(-2ax - a^4cx^2 + 3c)$. 345. б) $ab(a - 2a^2b + 3b^2 - b)$. 346. а) $(3x - 2y)(a + b)$; в) $(5a + 3)(x - y)$. 347. а) 12,3; в) 113. 350. а) 0 і 3; г) 0 і 2,5. 351. а) 0 і 1; д) 0 і 0,1. 352. а) $a(3ab + 2b - 5)$; в) $ac(5c - c^2 - 3a)$. 354. б) $x^3yz^3(9z + 7xy)$. 355. а) $5a^2mx(3ax^3 + 4mx^2 - 5a^2)$. 356. а) $a(a^2 + 3ax - 3x^2 - a^3 + 2)$. 357. б) $0,6a^2b^3c^4(2 - a + 3a^2)$. 358. а) $36x^{18}y^{10}(4x^2y^8 + 1)$. 359. в) $\frac{1}{5}a^3x^7(2x^3 - 3a)$. 361. а) $(x + y)(a - 2)$; г) $(x^2 - a + c)(a - c)$. 362. а) $(1 - x)(x + 1)$. 363. б) $(4 + 3a)(x - y)$. 364. а) $3(x + 2y)(2x - y)$. 366. а) $a^3(b^2 - a^3)^3$; г) $\frac{1}{4}a^2b^2\left(a + \frac{1}{2}b\right)^2$. 367. а) 0 і 3. 368. а) 0 і -2. 369. в) 0; 1 і -1.
 370. а) 0,1; в) 22,5. 371. б) $x^2(2x + 3)(4x + 3)$; г) $(2x - 1)(2x^2 - x - 2)$. 372. а) $x^n(x + 1)$; д) $3a^{n+2}(3a^3 - 1)$. 373. На 50 %.
 374. 4 ц. 375. 32ц. 379. а) $(x + y)(a + 1)$; в) $(1 + a)(c + y)$. 380. а) $(1 + a)(x + y)$; г) $(a + b)(x - y)$; е) $(x + 2y)(3 - x - 2y)$. 381. а) $(a + b)(x + y + z)$; б) $(a + 1)(z - x + 1)$. 382. а) $(a + b + c) \times (x + 3)$; в) $(x + y + 1)(a^2 - 5)$. 383. а) $(a + b)(x - y)$; в) $(z + c) \times (a - z)$. 384. а) $(2a - b)(x + 5y)$; в) $(3p + q)(m - n)$. 385. а) $(x + y) \times (x + a)$; б) $(3a^2 - 1)(a + 4)$. 386. а) 3620. 387. а) 1728. 388. а) -3 і 15; в) 3. 389. а) 1,5. 390. а) $(4a - 3)(a - z)$; г) $a(a + b)(a - c)$. 391. а) $(a - 4)(a - b)$; в) $(c - 1)(a - b)$. 392. а) $(a + n)(x + y - z)$; в) $(2a + c)(-3x^2 + x + c)$. 393. а) $(z^2 + z - 1)(a - b)$; в) $x(x + 1) \times (a + b - c)$. 394. а) $(m - c)(2a + 3x - 7)$; в) $(9x^2 + 2x - 1)(c^3 + 1)$. 395. а) $(x^3 + a^3 + c^3)(x - a)$; в) $(x^2 + y^2)(x + y + z)$. 396. а) $(x^2 - y^2) \times (x + y + xy)$; г) $\frac{1}{13}(x + 4ay)(3axy - 1)$. 401. б) $(x + 1)(x + 5)$;

- е) $2(x - 3y)(x - 0,5y) = (2x - y)(x - 3y)$. 402. а) $2i - 7$; в) 4.
 403. а) 5; в) $(z - 2)(z^4 + z^2 + 1) = 0, z = 2$. 404. а) $-1\frac{11}{24}$; г) $\frac{1}{4}$.
405. а) $-2, 4$; г) $-\frac{29}{30}$. 410. г) $(3z + 2)^2$. 411. а) $a^2 + 2ac + c^2$.
412. б) $4a^2 + 20ax + 25x^2$; е) $c^2q^2 - 4pcq + 4p^2$. 413. а) $a^2x^2 + 10ax + 25$; г) $25a^2 + 30ab + 9b^2$. 414. а) $9c^2 - 30c + 25$; д) $4a^4 - 12a^2cx^2 + 9c^2x^4$. 415. а) $m^2 + 4m + 4$; в) $4a^2 + 4ab + b^2$.
416. а) $n^2 + n + \frac{1}{4}$; в) $4a^6 + 4a^3 + 1$. 417. а) $b^2 + 2bc^3 + c^6$;
 г) $\frac{1}{4}c^2 + 2ca + 4a^2$. 418. а) $9a^2 - 30a + 25$; в) $1,69x^6 - 2,6x^3 + 1$.
420. а) $(3 - x)^2$; г) $(ab + 6c)^2$. 421. а) $(3a + c)^2$; в) $(2m + 1)^2$.
 422. а) 9; в) $-4a^2 + 4a$. 423. а) $2x^2 - 2x - 31$; в) $-x^2$. 424. а) 1;
 в) 4. 425. а) Немає розв'язків; г) 0 і 20. 426. а) $x^2 + 6xy + 9y^2$.
 427. а) $0,04c^2 - 0,4p^3c + p^6$; г) $a^4 - 16a^2c^5 + 64c^{10}$.
 428. а) $\frac{1}{4} + 2c^2 + 4c^4$; в) $\frac{1}{25}c^2 + \frac{1}{5}ca^2 + \frac{1}{4}a^4$. 429. а) $(x + 6)^2$;
 г) $(4m + 2n)^2$. 431. а) 16. 432. а) $20a + 34$; в) $5a^2$. 433. а) y^2 ;
 в) $c^2 - 10x^4$. 434. а) 20; в) 57. 436. а) 9; б) 1. 437. а) 1; в) $\frac{1}{3}$.
438. а) -5 ; г) -2 . 447. а) $x^{2n} + 2x^n + 1$; в) $a^{2n} + 2a^{n+m} + a^{2m}$.
 450. а) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; г) $m^6 + 6acm^4 + 12m^2a^2c^2 + 8a^3c^3$.
 451. г) $27x^3 + 27x^2 + 9x + 1$. 452. а) $(a - 1)^3$; в) $(3x + 4)^3$.
 456. а) $8a^3 + 36a^2c + 54ac^2 + 27c^3$; в) $0,008c^9 - 0,12c^6 + 0,6c^3 - 1$.
 457. а) $\frac{1}{3}$. 458. а) 0. 459. а) $a^3 + a^2 + 3a + 4$. 460. а) $-4a^3 +$
 $+ 3a^2c - c^2 - 3c^3$. 461. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$. 463. а) $x^2 - m^2$; г) $25 - a^2$.
467. а) $(5 - x)(5 + x)$. 470. а) $16a^2 - 1$; г) $a^2 - c^4$. 471. а) $9p^2 - q^2$;
 г) $m^4 - n^4$. 472. а) $\frac{4}{9}x^2 - 1$; г) $2,25 - m^4$. 473. а) $32x^2 - 2$;
 в) $4q^2 - c^6n^2$. 474. в) $7a^2 - 63a^6b^2$. 475. а) a^2 ; в) 1. 476. а) $x^4 - 81$;
 в) $16a^4 - 1$. 479. а) $(x - m)(x + m)$; в) $(b - c^2)(b + c^2)$; е) $(c^2 + 3a) \times$

$\times (-c^2 + 3a)$. 480. а) 1000; в) 14 400; г) 452. 482. а) $4a^2b^2c^2 - 9a^4$; в) $16a^2b^4 - 25a^2c^2$. 483. а) $0,04a^2x^2 - 1,44a^2y^2$; в) $\frac{1}{4}a^2x^2 - \frac{4}{9}a^2z^4$.

484. а) $9x^2 - y^4$; в) $4a^2x^4 - 9a^4x^2$. 485. в) $-x^3y + 4xy^3$. 486. а) $a^4 - 16$; в) $81x^8 - y^4$. 487. а) $16x^8$; в) c^8 . 490. а) $(0,2x^3 - 1) \times (0,2x^3 + 1)$; г) $\left(\frac{2}{9}z^5 - x^8\right)\left(\frac{2}{9}z^5 + x^8\right)$. 496. а) $-\frac{1}{2}$; б) 3; в) -25.

497. а) 27; в) $\frac{1}{9}$. 504. а) 5 см; б) 13 м; в) 25 дм. 505. а) $1 - x^{32}$.

507. 0. 508. а) -0,5; б) 2. 509. 5. 512. а) Так; в) ні. 513. 70° і 110° . 514. 100° і 80° . 516. а) $(p - q)(p + q)$; г) $(p - x^2)(p + x^2)$.

517. а) $(1 - p^2)(1 + p^2)$; г) $(-c + 4)(c + 4)$. 518. а) $(3m - 2x) \times (3m + 2x)$; в) $(x^2 - 2c^2)(x^2 + 2c^2)$. 519. а) $(x + 5)(x + 5)$; в) $(a - 4x)(a - 4x)$.

520. а) $(a + m)(a + m)$; г) $(b - 3)(b - 3)$.

521. а) $(1 + 3x)(1 + 3x)$; в) $3(a - b)(a - b)$. 522. а) $-(2c + 1)(2c + 1)$; в) $-(c - 2)(c - 2)$.

523. а) $(2a + 9)(2a - 11)$; в) $(x + c + 3xc^2) \times (x + c - 3xc^2)$. 524. а) $-5(4x + 5)(2x - 1)$; в) $(0,5 - 3a - 4a^2) \times (0,5 - 3a + 4a^2)$.

525. а) $(3x - 5)(3x + 1)$; в) $(9x + 1)(-x - 1)$.

526. а) $(8a + 13)(2a + 1)$. 527. а) $(4 + a)(4 + a)$; в) $(x^2 - 7)(x^2 - 7)$.

528. а) $(3a - 1)(3a + 1)(9a^2 + 1)$. 529. а) $3(a - 1)(a + 1)$; в) $5(x - 2) \times (x + 2)$.

530. а) 3; -3; в) 10; -10. 531. а) 3; в) 4. 532. а) 3; в) 1.

533. а) $-\frac{1}{3}$; в) $-\frac{1}{2}$. 534. а) $(xy - 9)(xy + 9)$; в) $\left(\frac{1}{3}p^3 - 4a\right)\left(\frac{1}{3}p^3 + 4a\right)$;

д) $(a^5b^4c^2 - 1)(a^5b^4c^2 + 1)$. 535. а) $(1 - a - b - c)(1 + a + b + c)$; г) $(x^2 - 6x + 1)(x^2 + 1)$.

536. а) $(a^2 - n)(a^2 - n)$; г) $(3c^4 + x^3) \times (3c^4 + x^3)$. 537. а) $(n + 4)(3n + 2)$; г) $4(p + 2q)(2p + q)$; д) $9c^2$.

538. а) $(x - 1)(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$. 539. а) 20; в) 17. 540. а) 1.

541. а) 1; г) 9. 542. а) $(x - 11)^2 \geq 0$; г) $-(x - 3)^2 + 1 < 0$.

545. а) $4c^2$; г) $36z$. 547. а) $(x - 1)(x - 1)(x - 1)$; г) $(2y - 1) \times (2y - 1)(2y - 1)$.

548. а) $(m + n)(m + n)(m + n)$; в) $(3a - b) \times (3a - b)(3a - b)$. 549. а) $(3x + 2y)(3x + 2y)(3x + 2y)$; г) $(0,5a + b^2)(0,5a + b^2)(0,5a + b^2)$.

550. а) 5; г) $-\frac{1}{4}$. 551. а) $\frac{1}{2}$; г) 10.

552. а) -1; 0. 553. б) $-\frac{1}{2}$; 3. 555. 35; 37. 557. 17; 38.

558. а) $(x^n - 1)(x^n + 1)$; г) $(a^p - 1)(a^p + 1)$. 562. а) $2 \cdot 10^8$; $3,8 \cdot 10^8$; $8 \cdot 10^{15}$; $2 \cdot 10$. 571. б) $(0,1 - a^2)(0,01 + 0,1a^2 + a^4)$; в) $(3x^2 - ay) \times (9x^4 + 3x^2ay + a^2y^2)$. 573. г) $-(z + p)(z^2 - zp + p^2)$.

575. д) $\left(\frac{2}{3} - axz\right)\left(\frac{4}{9} + \frac{2}{3}axz + a^2x^2z^2\right)$. 579. в) $27x^3 + 125$.

580. б) 0,000008. 581. б) 4. 582. а) 27. 583. в) $0,125a^6 + b^3$; г) $64m^3 - m^6$. 585. в) $27x^3 + y^3$. 586. а) $8a^{21} + b^{12}$. 587. а) $a^{24} - 8x^3$.

589. б) $p^3 - q^6$. 590. в) $x^6 + y^6$. 591. г) $(3a + 1)(21a^2 - 6a + 1)$.

592. в) $(x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1)$; г) $(a^2 + ab + b^3)(a - b - 1)$.

593. б) 8. 594. в) 12. 595. $(x^3 - y^n)(x^6 + x^3y^n + y^{2n})$. 598. б) 16.

599. б) -1. 605. 700 000 грн.; 200 000 грн. 612. г) $3(3x - 5) \times (3x + 5)$; д) $a^2(10a - 1)(10a + 1)$. 613. в) $x^2y(8 - 3y)(8 + 3y)$.

614. д) $5a(3 - a)(3 + a)$. 615. б) -6; 0; д) -1; 0; 1. 616. г) 0; 0,04.

617. б) $5a(2a - 1)(2a + 1)$; д) $p^2(1 + 3x)(1 + 3x)$. 618. б) $-(a + 3) \times (a + 3)$; в) $5(x - y^2)(x + y^2)$. 619. г) $(x + 1 - a)(x + 1 + a)$.

620. а) $4(b - 1)(a + 3)$; в) $(m - x - 2)(m + x + 2)$. 621. а) $(x - a) \times (1 + x + a)$; г) $(c + m)(c - m - 1)$. 622. б) $(c + 3)(c - d)(c + d)$;

г) $(a + b)(1 - a^2 + ab - b^2)$. 624. в) $-8y(y + 2)(y^2 - 2y + 4)$;

г) $a(0,2 + a^2)(0,04 - 0,2a^2 + a^4)$. 625. б) $a^3c(3a - c)(3a + c)$;

д) $2(x^2 - 2)(x^2 + 2)$. 627. б) $\frac{1}{2}z\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}z\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}z\right)$. 628. б) $x(2a - 0,5x) \times$

$\times (2a - 0,5x)$; г) $0,5a^2(x - 1)(x - 1)$. 629. а) $a\left(\frac{1}{2}c - 1\right)\left(\frac{1}{2}c - 1\right)$.

631. а) $a(x + y)(2 - y)$; г) $(3a + 1)(3a + 2)$. 632. б) $x(x + a + 2)(x - c)$.

633. б) $(a^2 + a + 1)(x^2 + y^2)$. 634. б) $(a^2 - 1 - a + c)(a^2 - 1 + a - c)$.

635. б) $(x^2 + 2)^2 + (y^2 + 2)^2$; г) $(x + 1)^2 + x^2$. 636. а) $(ab - 1)^2 - (c + 3)^2$; в) $(a - 2x)^2 - (x - c)^2$; г) $(a^2 - 2)^2 - (a + x)^2$. 637. б) $(5c^2 + 5)^2$.

640. а) 0; в) 3; г) -2. 641. б) 0; г) 1. 655. б) 2; г) 3. 656. б) 3;

г) -2. 657. б) $-\frac{1}{2}$; 2. 658. б) -2; 2; 0; 3. 659. б) 1. 660. б) -9; 9.

661. б) -2; 1; 2. 662. б) -3; $\frac{3}{2}$; 3. 663. а) -2; $\frac{1}{3}$; 2.

Розділ 3

676. $m = 8,6V$. 679. $P = 3a$; так. 681. $\alpha = 180 - \beta$; так; β .
 683. 7; 5; -1; 19; 2005. 686. Так. 687. Так. 688. 30.
 691. а) Множина дійсних чисел; б) множина дійсних чисел, крім $x = -5$. 692. $y = 500 - 60x$; 1, 2, 3, ..., 7, 8. 693. $z = 2,5m$; $z = 45$ грн; $m = 50$ кг. 694. $m = 12t$, де час t — у годинах, маса m — у тоннах. 695. $x = 60t$, де час t — у годинах, а x — у хвили-
 нах. 696. а) $y = -2x$. 697. а) -21; -5; 7; 91; 195. 698. а) 2; 0.
 699. $\alpha = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$; так. 701. $s = 5 - 4t$, де час t — у годинах, s — відстань у кілометрах. 702. $m = 600 + 40t$; так.
 704. $l = 2,54d$, $d = \frac{l}{2,54}$, де l — відстань у сантиметрах, а d — у дюймах. 706. $r = \frac{1}{2\pi}C$. 707. а) Множина дійсних чисел;
 в) множина дійсних чисел, крім $x = -4$. 708. а) Множина дійсних чисел; в) множина дійсних чисел, крім $x = -5$; г) множи-
 на дійсних чисел, крім $x = \pm 6$. 709. $S = 100 - \pi x^2$, $0 < x < 5$.
 713. $\frac{0,5n+3}{n}$. 716. а) $x = 5$. 717. 4 ключі. 722. Так. 723. б);
 в); г); д). 729. а) Ні; в) так. 730. а) D; в) E. 740. б); г); д).
 741. а) Так. 742. в) Т. А не належить, т. В і С належать.
 749. $m = 9$. 750. $k = 2$. 751. $m = 0$. 753. а) $(a + c)(b + c)$;
 г) $(5x + y)(2a - b)$. 755. = 22%. 756. а) $x = 3$; г) $x = 1$. 758. б) Так.
 759. 2; 0. 765. Так, так, ні. 766. а) Так; б) ні; в) так.
 769. $m = 180S$, так. 772. а) (0; 8), (-2; 0). 774. а) (0; -3,4),
 (2; 0); д) (0; 1,5), (1,5; 0). 775. а) (2; 2); г) (-3; 0). 777. а) $k = -2$;
 б) $k = -3$. 778. $k = 1$, $p = -0,5$. 782. а) $y = \frac{1}{2}x + 1$. 786. = 180 грн;
 = 400 грн; 490 грн. 789. а) $x = -\frac{1}{2}$. 790. а) $x = 7,5$; в) $y = 10$.
 791. 60 км. 792. Через 50 хв.

Розділ 4

796. г) Так. 797. в) $-0,1$ і $0,1$. 799. д) -8 . 804. а) 4. 805. в) 9.
 806. а) 4; в) -2 . 807. г) -24 . 808. в) 2; г) $2\frac{1}{17}$. 809. г) -2 .
 810. а) 17; г) -2 . 814. а) $-1\frac{5}{6}$. 815. а) $12\frac{2}{3}$. 816. а) 5; г) 3.
 817. а) 2,8; д) 0. 818. а) 6. 819. а) Немає розв'язків; б) -8 .
 820. а) 8. 821. а) -3 . 822. 57. 823. 315 биків. 824. а) 2.
 825. а) 6,5. 830. а) 4; б) 3; в) 6. 831. а) $a = 2$; б) $a \neq 0$.
 832. а) $m = 7$. 833. а) $k < 0$; в) $k \neq -6$. 836. 9,6. 837. На 25 %;
 на 20 %. 846. в) Всі числа. 847. б) Всі числа; в) немає розв'язків.
 848. а) 36. 849. а) $\frac{4}{5}$. 850. а) 62. 852. а) $-\frac{4}{15}$; в) $\frac{5}{8}$. 853. 0,5.
 854. а) 23; в) 27. 855. а) 1. 856. в) -2 . 857. а) 1; в) 1. 858. а) 2;
 в) 20. 859. а) 16 і 10. 860. 132 і 22. 861. в) -11 і 11. 862. б) -10
 і 14. 863. в) 5,5 і 0,5. 868. 1200 г. 870. 1) а) $k \neq 0$; г) $k \neq 2$; 2)
 а) $k = 0$; г) таких значень немає; 3) г) $k = 2$. 875. б) -13 ; г) 1,125.
 877. а) 70; г) 1,75. 883. а) 7,6 і 6. 885. 35 і 70. 886. 3.
 887. 40 років і 8 років. 888. 150 га і 280 га. 889. 21 м і 63 м.
 890. 10 м і 15 м. 891. 240 комп'ютерів. 892. 23,5 см і 35,5 см.
 893. 31 га, 25 га і 16 га. 894. 26 учнів, 29 учнів і 24 учні.
 895. 11 кг, 23 кг і 22 кг. 897. 172, 258 і 430 га. 898. 120 квіток.
 899. 28 учнів. 900. Через 5 років. 902. 49,5 км. 903. 27,625 км.
 904. 210 км. 905. 70 км/год і 50 км/год. 906. 8 км/год і
 12 км/год. 907. 20 км. 908. До 36. 909. 19 і 81. 910. 32 і 20.
 911. 25 уболівальників і 30 уболівальників. 912. Через 1 рік;
 через 14 років. 913. 28 років. 914. 11 років і 47 років. 915. 35.
 916. 52. 917. 221. 918. 91. 919. 40 і 72 кг. 920. 25,6 грн.
 921. 4,5 год. 922. 150 км. 923. 288 км. 924. 210 км і 240 км.
 925. 80 км/год і 60 км/год. 926. 12 км/год і 12 км/год.
 927. 750 км. 928. 60 км/год. 929. 10 000 грн. і 15 000 грн.
 930. 7,5 кг. 931. 372 кг. 932. г) 1,56. 934. г) $a - 9$. 936. б) 3840.
 942. а) (3; 2). 947. 1) а) $y = 3 - \frac{3}{4}x$. 949. а) Ні. 950. а) один;

- г) жодного. 951. а) (0; 1). 952. а) (3; -1); г) (0; 1). 953. а = 7. 956. а) $c = -20$; г) $c = 2$. 957. а) $n = 3$; г) $n = 2$. 958. а) $n = 0$; г) $n = 0$. 959. а) (0; 0); в) (5; 0). 960. а) (1; 0); г) (-1; 2). 961. а) (-2; 0); г) (-2; 2). 963. а) (1; 1). 964. а) Ні. 965. а) $a = 8$; г) $a = \pm 3$. 966. а) $a = 8$; г) $a = -3$. 967. 18. 968. а) 27; г) 72. 969. 25. 970. 36. 971. 37. 972. 5 труб по 7 м і 4 труби по 8 м. 977. $a = 1$. 982. б) Ні. 983. а) (0; -2) і (10; 0); г) $(0; \frac{1}{4})$ і $(-\frac{1}{2}; 0)$. 984. б) Ні. 988. 2,5. 990. а) 7; г) -2. 992. а) $c = 11$; г) $c = -9$. 994. а) $b = -4$; г) $b = -9$. 996. а) (0; 3) і (2; 0). 1013. Так; ні. 1017. На 28 %. 1018. а) $x = \pm 8$; б) $x = 7$ або $x = -3$. 1020. а) Безліч. 1021. а) Ні. 1023. а) Так; г) так. 1030. а) Один; г) безліч. 1032. Безліч. 1037. а) 1) При $a \neq \frac{1}{3}$; 2) при $a = \frac{1}{3}$. 1038. а) 1) При $b = -6$; 2) при $b \neq -6$. 1039. а) Ні; б) так (1, 2). 1040. а) $k = 1$. 1042. а) -75. 1043. а) $x^2 + x - 6$; г) $-z^2 - 2z + 15$. 1044. $100a + 10b + c$. 1045. 5. 1047. Міді — 170 кг, цинку — 20 кг, олова — 10 кг. 1048. б) $y = -5x$. 1049. б) $x = 5 - 3y$. 1050. а) $y = 3x - 8$. 1052. а) (7; 1). 1053. а) (1; 2). 1054. а) (11; 13). 1055. а) (3; 2). 1056. а) (8; 1). 1057. а) (7; -3). 1058. а) (0; 2). 1059. а) Система розв'язків не має. 1060. а) (3; 2). 1061. а) (16; 7). 1062. а) (-0,5; -2). 1063. а) (10; 2). 1064. а) (10; 2). 1065. а) (-61; 14). 1066. а) (-1; 8); б) (5; 6). 1067. а) (2; 1); б) $(2; -\frac{1}{11})$; в) (7; -0,7). 1068. а) (1; -1). 1069. а) (8; 13). 1070. а) (18; 6). 1071. а) (20; 20). 1072. а) (1; -1,5); б) (5,6; -0,2). 1073. а) (21; 16); в) (5,25; 1,375). 1074. (11; 4; 5). 1075. (7; 10; 9). 1078. а) $8a^3 - n^3$. 1079. а) $a^9 - 1$. 1080. а) $a^6 + 1$. 1081. а) 1; в) 1. 1086. а) (5; 2). 1087. б) $(1; \frac{2}{3})$. 1088. а) (5,5; 2). 1089. а) (7; 1). 1090. а) (1; 2). 1091. а) (11; 13). 1092. а) (3; 2). 1093. а) (3; 2). 1094. а) (16; 7). 1095. а) (-0,5; -2). 1096. а) (3a; a). 1097. а) $(\frac{n-m}{5}; \frac{8m-3n}{35})$. 1098. б) (2; 2). 1099. а) (3; 1). 1100. а) (2; 1). 1101. а) (10; 2). 1102. а) (3; 3).

1103. а) (1; 1). 1104. а) (9; 8). 1105. а) $\left(\frac{1}{3}; 2\right)$. 1106. а) (4; 3).

1107. б) $(0; -1\frac{3}{7})$. 1108. а) (7; 1). 1109. а) (3; 2). 1110. б) (10; 1).

1111. а) (4; 1). 1112. а) (3; 2). 1113. б) (2, 2; 3). 1114. а) (-1; -2).

1116. а) (1; 2; 3). 1117. а) (1; 3; 5). 1118. а) (3; 5; 7).

1119. а) Розв'язання. Відніmemo перше рівняння від другого — одержимо $z = 2x$. Тоді $y = 12 - 3x$, y буде цілим і додатним при $x = 1, 2, 3, 4$. Підставимо ці значення x в рівності $y = 12 - 3x$ і $z = 2x$ і одержимо розв'язки системи: (1; 9; 2),

(2; 6; 4), (3; 3; 6), (4; 0; 8). 1120. Вказівка: $z = 9, 2x + 3y = 68;$

$y = 0, 2, 4, 6, \dots, 22$. 1121. а) 7, 9. в) 207. 1126. 6 м і 3 м.

1127. 20 мулярів і 30 теслярів. 1128. 20 км/год; 3 км/год.

1131. 24 і 11,5. 1132. 45,4 і 30,4. 1133. а) 11 і 1; б) 25 і 1.

1135. 36 років і 12 років. 1136. 36 книжок і 29 книжок.

1137. 38 учнів і 34 учня. 1138. 8 кг і 5 кг. 1139. 21 м і 14 м.

1140. 14 м і 21 м. 1141. 46 см і 38 см. 1142. а) 33 см і 30 см;

б) $29\frac{16}{19}$ см і $33\frac{3}{19}$ см. 1143. 34 см, 24 см і 24 см. 1144. 22 см,

20 см і 20 см. 1145. а) 7,5 і 3,5; б) 8,5 і 3,5. 1147. 9,8 км/год

і 8,2 км/год. 1150. 12 км/год, 60 км. 1152. а) 19,5%; б) 43%.

1153. 18 і 7 або -18 і -7. 1154. 24 дитини, 9 столів.

1155. 6 стовпців, 8 горобців. 1156. 11 років і 6 років.

1157. 5 мішків і 7 мішків. 1158. 20 баранів. 1159. 23 фазани

і 12 кролів. 1160. 21 м/с і 9 м/с. 1161. 20 м/с і 5 м/с. 1162. 50.

1163. а) $y = 2x + 1$. 1165. а) $\left(50 + \frac{1}{2}n\right)$ га і $\left(50 - \frac{1}{2}n\right)$ га.

1166. а) $\frac{1}{5}a, \frac{3}{10}a, \frac{1}{2}a$; б) $\frac{1000k}{k+p+t}, \frac{1000p}{k+p+t}, \frac{1000t}{k+p+t}$.

1168. $\frac{100m}{p+k}$.

Задачі і вправи для повторення

1171. б) $-0,6$. 1173. б) $-\frac{3}{2}a^2x^5y^2$. 1174. г) $0,125m^6$. 1177. г) $4x - y - 3x^2y + 3xy^2 - 10$. 1178. а) $3x^6 - 2x^2 - 8$; г) $b^2 - 8b^2c - c^2b$. 1179. а) $6x^5 - 15x^2 + 3x$; д) $15mn^5 + 9mn^3 - 3m$. 1180. б) $-7x^4y + 32xy^3 - 10x^3y^3$. 1181. а) $2x^3 + 5x^2 + 14x$. 1183. а) $4a^2 - b^2$; д) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz$. 1184. в) $0,0081x^{12} - x^4y^8$. 1185. г) x^4 . 1186. д) $(abc - 11x^3)(abc + 11x^3)$; ж) $(a - b - c)(a + b + c)$. 1187. г) 404 ; е) $53\frac{1}{3}$. 1188. а) $0,16a^4 - 4a^3b + 25a^2b^2$. 1189. а) $x^2 - 2xy^2 + y^4$; г) $0,01x^2y^2 - xy + 25$. 1190. в) $3x^2 + 7xy$. 1193. а) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27$; д) $8a^3 + 36a^2 + 54a + 27$. 1194. б) $a^2(a - 1)(c^2 + 1)$; г) $x(y - 4)(z - 5)$. 1195. а) $(a - b)(a + b - 1)$. 1196. в) $(x - y + 4)(x + y - 4)$. 1197. г) $(x + 5)(x - b)(x + b)$. 1198. а) $(a - b)^2(x + 1)(x - 1)$. 1201. а) 1 . 1202. а) 25 . 1203. а) 0 і $\frac{1}{5}$; в) 0 і $0,3$. 1204. а) -4 ; -1 ; 1 . 1205. а) $y = x + 4$; г) $y = \frac{1}{x}$. 1206. б) $\frac{12}{a}$. 1207. $180^\circ - 3\alpha$. 1208. $200 - 2,5x$. 1209. а) Всі числа; г) всі числа, крім $\frac{1}{3}$. 1212. а) 3 ; $\frac{2}{3}$; -1 . 1213. а) $y = 3x$. 1217. а) $x + 4y - 11 = 0$. 1218. б) 1 . 1219. а) 8 . 1220. а) 4 . 1224. -5 . 1225. Не може. 1226. При $a = 0$. 1229. -5 . 1230. 9 . 1232. а) $(5; 2)$. 1233. а) $(2; 3)$. 1234. в) $(10; 5)$. 1235. а) $(3; 2)$. 1237. а) $(0; 1)$. 1238. 150 монет, 21 купець. 1239. 84 роки. 1240. 15 бджіл. 1241. $7,5$ і $2,5$. 1242. 4 і 6 . 1243. $9\frac{1}{5}$ флорина. 1244. 36 учнів. 1245. 12 овець. 1246. 32 роки, 14 років і 12 років. 1247. 160 яець. 1248. 9 м. 1249. 46 і 11 . 1250. $1,25$ грн. 1251. 5 чоловік. 1252. $2,1$ км. 1253. 12 км. 1256. 87 і 435 . 1259. 8 л, 5 л і 5 л. 1260. 1800 грн і 2700 грн. 1261. 25 км. 1262. 9 і 28 частин. 1263. 18 років. 1264. 3456 овець. 1265. 79 франків і 96 сантиметрів. 1266. 7 дітей. 1267. 1 віл, 9 корів, 90 телят.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

- Абсциса точки 151
 Алгебра 5
 Аргумент функції 142
 Винесення за дужки 81
 Вирази зі змінними 7
 — цілі 8
 — числові 7
 Від'ємник 263
 Віднімання десяткових дробів 266
 — дробів 267
 — многочленів 53
 — раціональних чисел 269
 Відношення 271
 — відсоткове 273
 Відсотки 272
 Вісь абсцис 151
 — ординат 151
 Властивості рівнянь 178
 — степенів 30
 Графік рівняння 208
 — функції 152
 Групування 88
 Двочлен 46
 Ділення десяткових дробів 266
 — дробів 268
 — раціональних чисел 270
 Дільник 263
 — числа 264
 Добуток 263
 Додавання десяткових дробів 266
 — дробів 267
 — многочленів 53
 — раціональних чисел 270
 Доданки 263
 Дроби взаємно обернені 268
 — десяткові 265
 — звичайні 267
 — мішані 267
 — неправильні 267
 — нескоротні 267
 — правильні 267
 Дробова частина числа 265
 Закони дій 271
 Залежна змінна 142
 Знаки нерівності 269
 — чисел 269
 Знаменник дробу 267
 Значення виразу 8
 Квадрат двочлена 93
 — числа 20
 Коефіцієнт одночлена 37
 Координати точки 151
 Координатна площина 151
 — пряма 151
 Корінь рівняння 178
 Кратне числа 264
 Куб двочлена 94
 — числа 20
 Математична модель 142, 192
 Многочлен 46
 — стандартного вигляду 47
 Множення десяткових дробів 266
 — дробів 268
 — многочленів 67
 — одночленів 37
 — раціональних чисел 270
 — степенів 29
 Модуль 269
 Найбільший спільний дільник 265
 Найменше спільне кратне 265
 Незалежна змінна 142

- Область визначення функції 142
— значень функції 142
- Одночлен 36
— стандартного вигляду 36
- Ознаки подільності 264
- Округлення чисел 266
- Ордината точки 151
- Основа степеня 20
- Основна властивість дробу 267
— пропорції 272
— степеня 29
— частки 266
- Остача 264
- Перетворення виразів 14
- Піднесення до степеня 20
- Подібні члени 46
- Показник степеня 20
- Порівняння чисел 269
- Порядок дій 21
- Початок координат 151
- Пропорційні величини 272
- Пропорція 270
- Пряма пропорційність 163
- Рівняння 177
— з двома змінними 202
— лінійне 185
— першого степеня 185
— рівносильні 178, 203
- Різниця квадратів 102
— кубів 119
— многочленів 53
- Розв'язок рівняння 178
— з двома змінними 202
- Розв'язок системи рівнянь 215
- Розклад на множники 265
— многочлена 81
- Середнє арифметичне 268
- Система рівнянь 215
- Скорочення дробів 267
- Степінь многочлена 47
— числа 20
- Ступені дій 21
- Сума кубів 119
— многочленів 53
— одночленів 46
- Тотожні вирази 14
- Тотожність 14
- Формули скороченого множення 93
- Функція 142
— зростаюча 153
— лінійна 162
— спадна 153
- Цифри 264
- Частка 263
— наближена 264
— неповна 264
- Чисельник дробу 267
- Числа взаємно прості 265
— від'ємні 269
— додатні 269
— натуральні 263
— невід'ємні 269
— непарні 263
— парні 263
— прості 263
— раціональні 269
— складені 263
— цілі 269
- Члени дробу 267
— пропорції 271
— рівняння 185