

Оріон

М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова,
І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць,
З. О. Сердюк

ГЕОМЕТРІЯ

Профільний рівень

11



М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова,
І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць,
З. О. Сердюк

Геометрія

Підручник для 11 класу
закладів загальної середньої освіти

Профільний рівень



Київ
Оріон
2019

УДК
Б91

ЗМІСТ

ДОРОГІ ДРУЗІ!..... 4

РОЗДІЛ 1. МНОГОГРАННИКИ..... 6

§ 1. Многогранні кути 8

§ 2. Многогранник 21

§ 3. Призма 34

§ 4. Паралелепіед 47

§ 5. Піраміда 59

§ 6. Правильні многогранники 74

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання 84

Тестові завдання до розділу 1 85

РОЗДІЛ 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ

§ 7. Тіла й поверхні обертання 8

§ 8. Циліндр 21

§ 9. Конус 34

§ 10. Вписані й описані призми та піраміди 47

§ 11. Куля 59

§ 12. Описані та вписані кулі 74

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання 84

Тестові завдання до розділу 2 85

РОЗДІЛ 3. ОБ'ЄМИ МНОГОГРАННИКІВ

§ 13. Поняття про об'єм тіла. Об'єм прямокутного паралелепіеда

§ 14. Об'єм призми

§ 15. Об'єм піраміди

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання 84

Тестові завдання до розділу 3 85

РОЗДІЛ 4. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

§ 16. Об'єми циліндра та конуса 8

§ 17. Площі бічної і повної поверхонь циліндра та конуса 21

§ 18. Об'єм і площа поверхні кулі 34

Перевірте, як засвоїли матеріал

Контрольні запитання 84

Тестові завдання до розділу 4 85

Готуємось до ЗНО 8

Відповіді та вказівки 21

Предметний покажчик 34

Додатки 74

Бурда М. І.
Б91 Геометрія. Профільний рівень : підруч. для 11 кл.
загальноосвіт. навч. закл. / М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова,
І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць, З. О. Сердюк, 2019. —
К. : УОВЦ «Оріон», 2019. — 224 с. : іл.

ISBN

УДК

© М. І. Бурда, Н. А. Тарасенкова,
І. М. Богатирьова, О. М. Коломієць,
З. О. Сердюк, 2019
© УОВЦ «Оріон», 2019

ISBN

Дорогі друзі!

Ви продовжуєте вивчати стереометрію — розділ геометрії про властивості фігур у просторі. У 10 класі ви ознайомилися із взаємним розміщенням прямих і площин у просторі, дізналися про координати, вектори та геометричні перетворення у просторі.

Тепер ви розширите й поглибите свої знання зі стереометрії. Дізнаєтесь про властивості многогранників і тіл обертання, як знаходити їх об'єми та площі поверхонь. Виробите вміння застосовувати вивчені поняття, властивості й ознаки під час розв'язування задач та на практиці.

*Як успішно вивчати геометрію за підручником? Увесь матеріал поділено на чотири розділи, а розділи — на параграфи. У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Вивчаючи теорію, особливу увагу звертайте на текст, біля якого є позначка «флешка». Це — найважливіші означення і властивості геометричних фігур. Їх потрібно зрозуміти, запам'ятати й уміти застосовувати під час розв'язування задач. Інші важливі відомості надруковано **жирним шрифтом**. *Курсивом* виділено терміни (наукові назви) понять.*

Перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Пригадайте головне», які є після кожного параграфа. А після кожного розділу вміщено контрольні запитання й тестові завдання, за якими можна перевірити, як засвоєно тему.

Ознайомтеся з порадами до розв'язування задач, із розв'язаною типовою задачею.

Задачі підручника мають чотири рівні складності. Номери задач початкового рівня складності позначено штрихом ('). Це підготовчі вправи для тих, хто не впевнений, що добре зрозумів теоретичний матеріал. Номери з кружечком (°) позначають задачі середнього рівня складності. Усім треба вміти їх розв'язувати, щоб мати змогу вивчати геометрію далі. Номери задач достатнього рівня складності не мають позначок біля номера. Навчившись розв'язувати їх, ви зможете впевнено демонструвати достатній рівень навчальних досягнень. Зірочкою (*) позначено задачі високого рівня складності. Якщо не зможете відразу їх розв'язати, не засмучуйтесь, а виявіть терпіння й наполегливість. Радість від розв'язання складної задачі буде вам нагородою.

Розв'язавши задачі, виділені жирним шрифтом, запам'ятайте їх формулювання. Ці геометричні твердження можна застосовувати до розв'язування інших задач.

Скориставшись рубрикою «Дізнайтеся більше», ви зможете поглибити свої знання, розширити кругозір.

У підручнику використано спеціальні позначки (пиктограми). Вони допоможуть краще зорієнтуватися в навчальному матеріалі.



Поміркуйте



Типова задача



Зверніть увагу



Домашнє завдання



Як записати/
прочитати



Запам'ятайте

**Бажаємо вам успіхів у пізнанні нового
та задоволення від навчання!**

Розділ 1

Многогранники

У розділі дізнаєтесь:

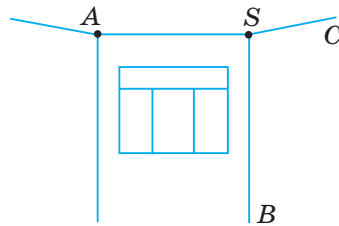
- що таке многогранний кут;
- про многогранник, його різновиди й властивості;
- якими бувають призми, паралелепіпеди та піраміди;
- що таке правильний многогранник та які його властивості;
- як застосувати вивчені означення й властивості на практиці та в розв'язуванні задач



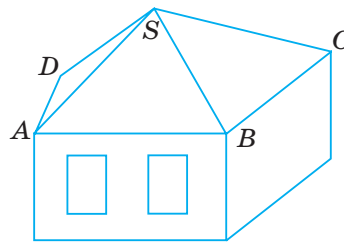
§ 1. МНОГОГРАННІ КУТИ

1. ЩО ТАКЕ МНОГОГРАННИЙ КУТ

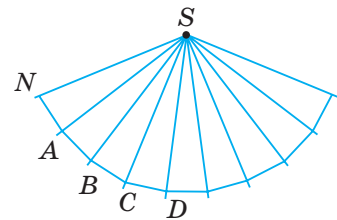
Подивіться на малюнки 1.1–1.3. Ви бачите, що площини двох стін і стелі кімнати (мал. 1.1) сходяться в одній точці S . Прямі SA , SB і SC перетину цих площин не лежать в одній площині. У кожній із площин утворився відповідний плоский кут: ASB , BSC , CSA . Попарно спільні сторони цих кутів SA , SB і SC утворюють своєрідні ребра конструкції. Розглянемо інші приклади. На малюнку 1.2 у спільній точці S сходяться площини чотирьох схилів даху будинку, а на малюнку 1.3 — більш ніж двадцять площин



Мал. 1.1



Мал. 1.2

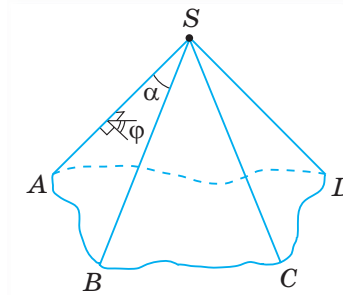


Мал. 1.3

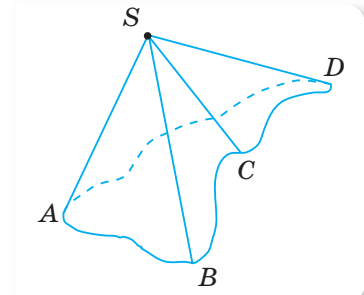
секцій старовинної китайської парасольки. Відповідно, на даху будинку бачимо чотири плоскі кути: ASB , BSC , CSD і DSA , а на парасольці — більше двадцяти плоских кутів: ASB , BSC , CSD , ... NSA . Дах має чотири ребра: SA , SB , SC і SD , а парасолька — більш ніж двадцять ребер: SA , SB , SC , ... SN . Властивості цих та аналогічних їм конструкцій у геометрії вивчають за допомогою фігури «многогранний кут».

Многогранним кутом називається фігура, утворена кількома плоскими кутами зі спільною вершиною й попарно спільними сторонами, причому кожен три послідовні спільні сторони не лежать в одній площині.

Плоскі кути многогранного кута також називають його *гранями*, їх спільні сторони — *ребрами*, а спільну вершину — *вершиною* многогранного кута. На малюнку 1.4 ви бачите чотиригранний кут з вершиною S , гранями ASB , BSC , CSD , DSA та ребрами SA , SB , SC , SD . Елементами многогранного кута є його *плоскі кути при вершині*, а також *двогранні кути при його ребрах*.



Мал. 1.4



Мал. 1.5

Коротко говоримо: чотиригранний кут з вершиною S або многогранний кут $SABCD$. Про многогранний кут з n гранями говоримо: n -гранний кут.

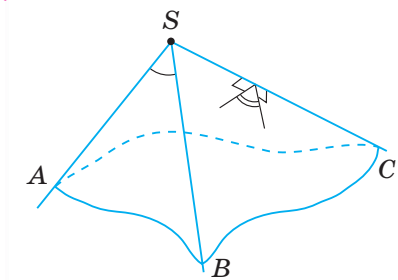
Многогранні кути можуть бути опуклими (як на мал. 1.4) і неопуклими (мал. 1.5). Ми вивчатимемо лише опуклі многогранні кути.

? Чи є двогранний кут многогранним кутом? Ні, оскільки двогранний кут не задовольняє означення многогранного кута.

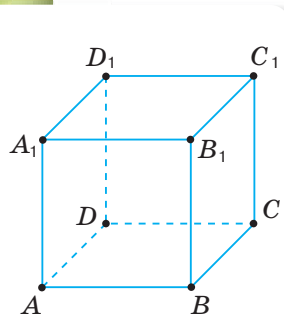
! В опуклого многогранного кута сума всіх плоских кутів менша від 360° .

2. ТРИГРАННИЙ КУТ

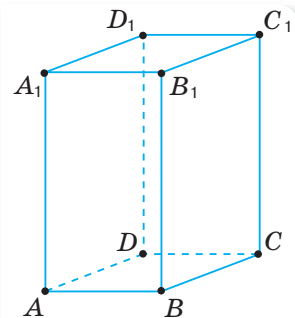
Найменша кількість граней у многогранного кута — три. Такий кут називають *тригранним кутом*. На малюнку 1.6 ви бачите тригранний кут $SABC$. Про взаємне розміщення його плоских і двогранних кутів можна, наприклад, сказати: плоский кут ASB лежить проти двогранного кута з ребром SC , і навпаки.



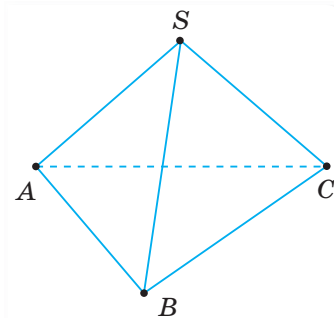
Мал. 1.6



Мал. 1.7



Мал. 1.8



Мал. 1.9

Тригранні й многогранні кути є елементами відомих вам многогранників. При кожній вершині куба (мал. 1.7) і прямокутного паралелепіпеда (мал. 1.8) відповідні площини граней утворюють тригранний кут. Серед пірамід така властивість притаманна лише трикутній піраміді (мал. 1.9). В n -кутній піраміді, де $n > 3$ (мал. 1.10), лише при вершинах основи утворюються тригранні кути, а при вершині піраміди — n -гранний кут.

Сформулюємо основні властивості тригранних кутів.

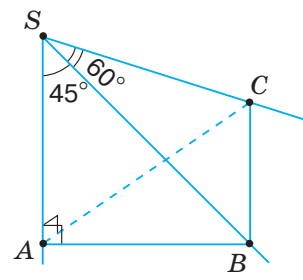
Властивості тригранних кутів.

1. Кожний плоский кут тригранного кута менший від суми двох інших його плоских кутів.
2. Кожен плоский кут тригранного кута більший за різницю двох інших його плоских кутів.

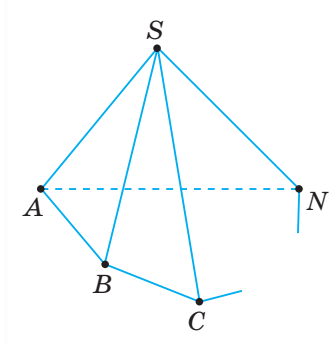


Задача 1. У тригранного кута з вершиною S два плоскі кути дорівнюють по 45° , а третій — 60° (мал. 1.11). Чому дорівнює його двогранний кут, що лежить проти найбільшого плоского кута?

Розв'язання. На спільному ребрі рівних плоских кутів даного тригранного кута позначимо точку A і проведемо через неї площину, перпендикулярну до ребра SA . Позначимо B і C точки її перетину з двома іншими ребрами даного тригранного кута. Тоді $\angle ASB = \angle ASC = 45^\circ$, $\angle BSC = 60^\circ$. Треба знайти $\angle BAC$. Для цього знайдемо сторони $\triangle ABC$ і скористаємося теоремою косинусів. Сторони AB і AC можемо знайти з трикутників SAB і SAC , а сторону BC — з трикутника SBC . $\triangle SAB = \triangle SAC$ за катетом SA і гострим кутом 45° , звідки $AB = AC$, $SB = SC$. Нехай $SA = a$, тоді $AB = AC = a$, $SB = SC = a\sqrt{2}$.



Мал. 1.11



Мал. 1.10

$\triangle SBC$ — рівнобедрений з кутом при вершині 60° , тому він є рівностороннім і $BC = a\sqrt{2}$. За наслідком з теореми косинусів одержимо:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{2})^2}{2 \cdot a \cdot a} = 0.$$

Отже, $\angle BAC = 90^\circ$.



Чи можна вважати кути ABC і ACB трикутника ABC лінійними кутами двогранних кутів при ребрах SB і SC тригранного кута $SABC$ на малюнку 1.11? Ні, оскільки площина трикутника ABC не перпендикулярна до прямих SB і SC .

Лінійні кути двогранних кутів при ребрах тригранного кута не можуть лежати в одній площині, оскільки жодна площина не може бути одночасно перпендикулярною до трьох прямих, що перетинаються.

3. ТЕОРЕМИ ПРО ТРИГРАННІ КУТИ

Ви знаєте, що в трикутнику існують залежності між його сторонами й кутами, зокрема теорема косинусів і теорема синусів.



Чи існує залежність між мірою двогранних кутів тригранного кута та його плоских кутів? Відповідь дають наступні теореми.

ТЕОРЕМА 1

(косинусів для тригранного кута).

Якщо α, β, γ — плоскі кути тригранного кута і $\angle C$ — двогранний кут, що лежить проти кута γ , то $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C$.

Дано: α, β, γ — плоскі кути тригранного кута (мал. 1.12),

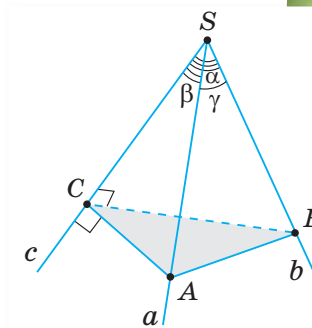
$\angle C$ — двогранний кут, що лежить проти кута γ .

Довести: $\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \cos C$.

Доведення. Розглянемо випадок, коли кути α і β — гострі. На ребрі c візьмемо довільну точку C , відмінну від точки S . Через точку C проведемо у гранях Sac і Sbc перпендикуляри CA і CB до ребра c , де точки A і B — точки перетину цих перпендикулярів з променями a і b . Тоді $\alpha = \angle CSB$, $\beta = \angle CSA$, $\gamma = \angle ASB$. Звідси $\angle ACB$ — лінійний кут двогранного кута при ребрі c .

Позначимо довжину відрізка SC через n , тоді з прямокутних трикутників SCA і SCB маємо: $SA = \frac{n}{\cos \beta}$,

$$SB = \frac{n}{\cos \alpha}, \quad CA = ntg\beta, \quad CB = ntg\alpha.$$



Мал. 1.12

Застосуємо теорему косинусів для трикутників SAB і CAB :

$$AB^2 = SA^2 + SB^2 - 2SA \cdot SB \cdot \cos\gamma, \quad AB^2 = \frac{n^2}{\cos^2\beta} + \frac{n^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2n^2}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \cos\gamma;$$

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos C, \quad AB^2 = n^2 \operatorname{tg}^2\alpha + n^2 \operatorname{tg}^2\beta - 2n^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \cdot \cos C.$$

Прирівнюємо праві частини обох рівностей:

$$\frac{n^2}{\cos^2\beta} + \frac{n^2}{\cos^2\alpha} - \frac{2n^2}{\cos\alpha\cos\beta} \cdot \cos\gamma = n^2 \operatorname{tg}^2\alpha + n^2 \operatorname{tg}^2\beta - 2n^2 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \cos C.$$

Виконавши елементарні тригонометричні перетворення, одержимо:

$$\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \cos C.$$

Інші випадки, коли кути α і β : обидва тупі; обидва прямі; один гострий, а інший прямий; один тупий, а інший гострий, — розгляньте самостійно.

НАСЛІДОК 1 (формула трьох косинусів для тригранного кута).

Якщо у тригранного кута $\angle C = 90^\circ$, то $\cos\gamma = \cos\alpha \cos\beta$ (мал. 1.12). Твердження безпосередньо випливає з доведеної теореми.

НАСЛІДОК 2. Якщо у тригранного кута $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, то $\cos A + \cos B + \cos C = 1$. Справді, рівність одержимо, якщо виразимо $\cos A$, $\cos B$ і $\cos C$ із співвідношення теореми косинусів для тригранних кутів та врахуємо, що, наприклад, $\gamma = 180^\circ - (\alpha + \beta)$.

ТЕОРЕМА 2

(синусів для тригранного кута).

Якщо α, β, γ — плоскі кути тригранного кута, а $\angle A, \angle B, \angle C$ — протилежні їм двогранні кути, то $\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$.

Дано: α, β, γ — плоскі кути тригранного кута;
 $\angle A, \angle B, \angle C$ — протилежні їм двогранні кути
(мал. 1.13).

Довести: $\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}$.

Доведення. За теоремою косинусів для тригранного кута:

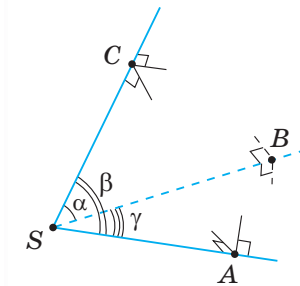
$$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos A.$$

$$\text{Звідси } \cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma}{\sin\beta \sin\gamma},$$

$$\cos^2 A = \frac{(\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma)^2}{\sin^2\beta \sin^2\gamma}.$$

Далі розглянемо відношення

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \cos^2 A} = \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{\sin^2\beta \sin^2\gamma - (\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma)^2} =$$



Мал. 1.13

$$= \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{(1 - \cos^2\beta)(1 - \cos^2\gamma) - (\cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma)^2} =$$

$$= \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{1 - \cos^2\beta - \cos^2\gamma - \cos^2\alpha + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}.$$

Аналогічно отримуємо:

$$\frac{\sin^2\beta}{\sin^2 B} = \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma},$$

$$\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 C} = \frac{\sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma}{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}.$$

$$\text{Тому } \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2 A} = \frac{\sin^2\beta}{\sin^2 B} = \frac{\sin^2\gamma}{\sin^2 C}.$$

Ураховуючи міри кутів $\alpha, \beta, \gamma, \angle A, \angle B, \angle C$, одержимо:

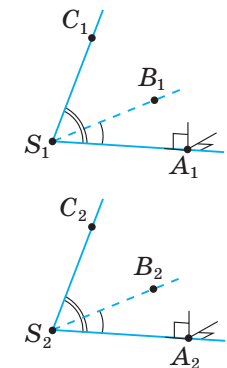
$$\frac{\sin\alpha}{\sin A} = \frac{\sin\beta}{\sin B} = \frac{\sin\gamma}{\sin C}.$$

Два тригранні кути називаються *рівними*, якщо в них відповідно рівні плоскі кути та відповідно рівні двогранні кути.

Для встановлення рівності тригранних кутів, як і для трикутників на площині, використовують ознаки рівності тригранних кутів.

Задача 2 (ознака рівності тригранних кутів). Якщо два плоскі кути і двогранний кут між ними одного тригранного кута відповідно дорівнюють двом плоским кутам і двогранному куту між ними другого тригранного кута, то такі тригранні кути рівні. Доведіть.

Розв'язання. Розглянемо два тригранні кути з вершинами S_1 і S_2 та ребрами S_1A_1, S_1B_1, S_1C_1 і S_2A_2, S_2B_2, S_2C_2 відповідно (мал. 1.14). За умовою задачі, $\angle A_1S_1B_1 = \angle A_2S_2B_2$, $\angle A_1S_1C_1 = \angle A_2S_2C_2$, двогранний кут з ребром S_1A_1 дорівнює двогранному куту з ребром S_2A_2 . Виконаємо переміщення, при якому вершина S_1 першого тригранного кута переходить у вершину S_2 другого тригранного кута, ребро S_1A_1 переходить у ребро S_2A_2 , грані $A_1S_1B_1$ і $A_1S_1C_1$ переходять у грані $A_2S_2B_2$ і $A_2S_2C_2$ відповідно. Тоді, оскільки $\angle A_1S_1B_1 = \angle A_2S_2B_2$ і $\angle A_1S_1C_1 = \angle A_2S_2C_2$, то ребра S_1B_1 і S_1C_1 перейдуть у ребра S_2B_2 і S_2C_2 відповідно. Звідси отримуємо, що дані тригранні кути рівні.



Мал. 1.14

Дізнайтеся більше

1. Доведемо твердження про те, що **в опуклого тригранного кута сума всіх плоских кутів менша від 360°** .

Доведення. Розглянемо довільний тригранний кут з вершиною S і плоскими кутами α, β і γ . З вершини S цього тригранного кута проведемо промінь c' , доповняльний до c (мал. 1.15). Для тригранного кута, утвореного променями a, b і c' , застосуємо властивість тригранного кута про те, що кожний його плоский кут менший від суми двох інших плоских кутів, отримуємо: $\gamma < (180^\circ - \alpha) + (180^\circ - \beta)$. Звідси $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$.

2. Доведемо аналогічне твердження для випадку довільного многогранного кута: **в опуклого многогранного кута сума всіх плоских кутів менша від 360°** .

Доведення. Розглянемо довільний опуклий многогранний кут з вершиною S і проведемо площину, яка перетинає всі його ребра в деяких точках M_1, M_2, \dots, M_n (мал. 1.16). Очевидно, що многокутник $M_1M_2\dots M_n$ — опуклий. Тоді маємо:

$$\begin{aligned} & \angle M_1SM_2 + \angle M_2SM_3 + \dots + \angle M_nSM_1 = \\ & = (180^\circ - \angle SM_1M_2 - \angle SM_2M_1) + \\ & + (180^\circ - \angle SM_2M_3 - \angle SM_3M_2) + \dots + \\ & + (180^\circ - \angle SM_nM_1 - \angle SM_1M_n) = \\ & = 180^\circ \cdot n - (\angle SM_1M_n + \angle SM_1M_2) - \\ & - (\angle SM_2M_1 + \angle SM_2M_3) - \dots - (\angle SM_nM_{n-1} + \angle SM_nM_1). \end{aligned}$$

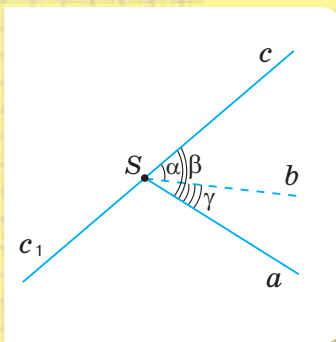
Але, за властивістю тригранного кута, сума двох його плоских кутів більша за третій плоский кут. Тому

$$\begin{aligned} \angle SM_1M_n + \angle SM_1M_2 &< \angle M_nM_1M_2, \\ \angle SM_2M_1 + \angle SM_2M_3 &< \angle M_1M_2M_3, \end{aligned}$$

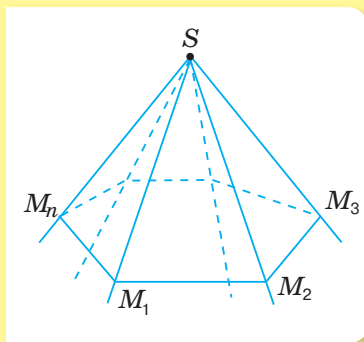
...

$$\angle SM_nM_{n-1} + \angle SM_nM_1 < \angle M_{n-1}M_nM_1.$$

Звідси $\angle M_1SM_2 + \angle M_2SM_3 + \dots + \angle M_nSM_1 < 180^\circ \cdot n - (\angle M_nM_1M_2 + \angle M_1M_2M_3 + \dots + \angle M_{n-1}M_nM_1) = 180^\circ \cdot n - 180^\circ \cdot (n - 2) = 360^\circ$.



Мал. 1.15



Мал. 1.16

3. Мар'ям Мірзахані (1977–2017)

іранська жінка-математик. У 2014 р. стала першою науковицею та першою представницею Ірану, яка удостоїлась медалі Філдса за працю над поясненням симетрії викривлених поверхонь. До тематики її досліджень належать простір Тайхмюллера, геометрія Лобачевського, ергодична теорія та симплектична геометрія.



Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

| Українська | Англійська | Німецька | Французька |
|------------------|--------------------|------------------------|------------------------------|
| Тригранний кут | Triangular angle | Facettenreicher Winkel | Angle triangulaire |
| Многогранний кут | Multifaceted angle | Dreieckiger Winkel | Angle aux multiples facettes |



Пригадайте головце

1. Дайте означення многогранному куту.
2. Що таке плоский кут многогранного кута?
3. Якою має бути сума всіх плоских кутів многогранного кута?
4. Дайте означення тригранному куту.
5. Сформулюйте властивості тригранних кутів.
6. Сформулюйте й доведіть теорему косинусів для тригранного кута.
7. Сформулюйте й доведіть теорему синусів для тригранного кута.
8. Які тригранні кути називаються рівними?
9. Наведіть приклад ознаки рівності тригранних кутів.



Розв'яжіть задачі

- 1'. Скільки тригранних кутів має: 1) трикутна піраміда; 2) чотирикутна піраміда; 3) паралелепіпед?
- 2'. Скільки ребер та двогранних кутів має многогранний кут, у якого: 1) 5 граней; 2) 10 граней; 3) n граней?
- 3'. Скільки площин симетрії може мати тригранний кут?
- 4'. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — куб. Назвіть усі його тригранні кути та визначте градусні міри відповідних їм плоских кутів.



Для одержання наочних динамічних зображень геометричних фігур можна скористатися комп'ютерними програмами, наприклад, GeoGebra: <https://www.geogebra.org/geometry>

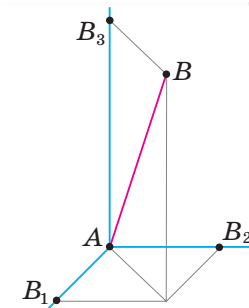
- 5°. Чи існує тригранний кут з такими плоскими кутами:
1) $25^\circ, 35^\circ$ і 70° ; 2) $60^\circ, 70^\circ$ і 80° ; 3) $110^\circ, 155^\circ$ і 160° ?
- 6°. Чи існує чотиригранний кут з такими плоскими кутами:
1) $40^\circ, 70^\circ, 100^\circ$ і 150° ; 2) $30^\circ, 40^\circ, 70^\circ$ і 150° ; 3) $120^\circ, 50^\circ, 50^\circ$ і 60° ?
- 7°. Чи можуть утворити тригранний кут три плоскі кути зі спільною вершиною, які мають градусну міру:
1) $160^\circ, 113^\circ$ і 137° ; 2) $60^\circ, 110^\circ$ і 177° ; 3) $10^\circ, 13^\circ$ і 38° ?
- 8°. У яких межах може лежати плоский кут тригранного кута, якщо два інші плоскі кути дорівнюють: 1) 20° і 90° ; 2) 30° і 120° ; 3) 170° і 190° ?
- 9°. З точки поза площиною до площини проведено дві похилі, одна з яких утворює з площиною кут α , а інша — кут β . Укажіть найбільше та найменше з можливих значень кута між цими похилими, якщо:
1) $\alpha = 70^\circ, \beta = 15^\circ$;
2) $\alpha = 90^\circ, \beta = 20^\circ$;
3) $\alpha = 75^\circ, \beta = 23^\circ$.
- 10°. Як побудувати тригранний кут, який рівний даному тригранному куту?
- 11°. У тригранного кута α, β, γ — його плоскі кути, $\angle C$ — двогранний кут, що лежить проти кута γ . Знайдіть $\angle C$, якщо:
1) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 45^\circ$;
2) $\alpha = 60^\circ, \beta = 90^\circ, \gamma = 45^\circ$;
3) $\alpha = 50^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 35^\circ$.
- 12°. У тригранного кута α, β, γ — його плоскі кути, $\angle A$ — двогранний кут, що лежить проти кута α . Знайдіть α , якщо:
1) $\angle A = 60^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 30^\circ$;
2) $\angle A = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 60^\circ$;
3) $\angle A = 20^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 55^\circ$.
- 13°. У тригранного кута α, β, γ — його плоскі кути, $\angle A$ — двогранний кут, що лежить проти кута α . Знайдіть γ , якщо:
1) $\angle A = 30^\circ, \alpha = 30^\circ, \beta = 90^\circ$;
2) $\angle A = 90^\circ, \alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ$;
3) $\angle A = 60^\circ, \alpha = 90^\circ, \beta = 30^\circ$.
- 14°. У тригранному куті α, β, γ — його плоскі кути, $\angle B$ — двогранний кут, що лежить проти кута β . Заповніть таблицю 1.

Таблиця 1

| | | | | |
|------------|------------|------------|------------|------------|
| α | 30° | 35° | 75° | |
| β | 45° | | 45° | 50° |
| γ | 45° | 40° | | 60° |
| $\angle B$ | | 55° | 60° | 35° |

15. У тригранного кута з вершиною S плоскі кути дорівнюють α, α і β . Через точку A спільного ребра рівних плоских кутів проведено площину ABC , перпендикулярну до цього ребра, де точки B і C — точки

- перетину цієї площини з іншими ребрами тригранного кута. Знайдіть довжину відрізка BC , якщо: 1) $\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ, SA = 5$ см; 2) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, SA = 6$ см; 3) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, SA = 4\sqrt{2}$ см.
16. У тригранного кута з вершиною S плоскі кути дорівнюють α, β і β . Через точку K спільного ребра рівних плоских кутів проведено площину KMN , перпендикулярну до цього ребра, де M і N — точки перетину цієї площини з іншими ребрами тригранного кута. Знайдіть довжину відрізка SK , якщо:
1) $\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ, MN = 3$ см;
2) $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, MN = 8$ см;
3) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, MN = 4\sqrt{2}$ см.
17. У тригранного кута з вершиною S через точку B спільного ребра рівних плоских кутів, які дорівнюють по α , проведено площину ABC , перпендикулярну до цього ребра, де A і C — точки перетину цієї площини з іншими ребрами тригранного кута. Знайдіть невідомий плоский кут тригранного кута, якщо:
1) $\alpha = 45^\circ, AC = 3\sqrt{2}$ см, $AB = 3$ см;
2) $\alpha = 30^\circ, AC = 6\sqrt{2}$ см, $AB = 3$ см;
3) $\alpha = 60^\circ, AC = 6$ см, $AB = 3\sqrt{3}$ см.
18. У тригранного кута з вершиною S через точку C спільного ребра рівних плоских кутів, які дорівнюють по α , проведено площину ABC , перпендикулярну до цього ребра, де A і B — точки перетину цієї площини з іншими ребрами тригранного кута. Двогранний кут при ребрі SC дорівнює β . Знайдіть довжину відрізка AB , якщо:
1) $\alpha = 45^\circ, \beta = 90^\circ, SC = 4\sqrt{2}$ см;
2) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, SC = 7\sqrt{2}$ см;
3) $\alpha = 30^\circ, \beta = 30^\circ, SC = 4\sqrt{3}$ см.
19. Кожний із плоских кутів тригранного кута дорівнює 60° . Від вершини цього тригранного кута на одному з ребер відкладено відрізок завдовжки 3 см, а з кінця цього відрізка проведено перпендикуляр до протилежної грані. Знайдіть довжину перпендикуляра.
20. У тригранному куті всі плоскі кути прямі. У середині цього тригранного кута з його вершини проведено відрізок (мал. 1.17), проекції якого на ребра відповідно дорівнюють 2 см, 3 см і 6 см. Знайдіть довжину цього відрізка.
21. У тригранному куті всі плоскі кути прямі. У середині цього тригранного кута дано точку, відстані від якої до його граней відповідно дорівнюють 1 см, 2 см і 2 см. Знайдіть відстань від даної точки до вершини даного тригранного кута.



Мал. 1.17

- 22.** У тригранному куті два плоских кути дорівнюють по 60° , а третій — прямий. Знайдіть кут між площиною прямого кута і протилежним ребром.
- 23.** У тригранному куті ребра взаємно перпендикулярні. З вершини S цього кута всередині нього проведено відрізок SA . З кінця A цього відрізка до кожного з ребер проведено перпендикуляри довжиною a . Знайдіть відстань від точки A до граней тригранного кута, якщо:
- 1) $a = 5$ см;
 - 2) $a = 6\sqrt{2}$ см;
 - 3) $a = 2\sqrt{6}$ см.
- 24.** У тригранному куті ребра взаємно перпендикулярні. З вершини S цього кута всередині нього проведено відрізок SA . З кінця A цього відрізка до кожного з ребер проведено перпендикуляри, довжини яких дорівнюють a, b, c . Знайдіть довжину цього відрізка, якщо:
- 1) $a = 5$ см, $b = 10$ см, $c = 10$ см;
 - 2) $a = 1$ см, $b = 2\sqrt{6}$ см, $c = 2\sqrt{6}$ см;
 - 3) $a = 2$ см, $b = 6$ см, $c = 2\sqrt{6}$ см.
- 25.** (Друга теорема косинусів для тригранного кута). Якщо $\angle A, \angle B, \angle C$ — двогранні кути тригранного кута, γ — плоский кут тригранного кута, що лежить проти $\angle C$, то $\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos \gamma$.
- 26.** Якщо α, β, γ — плоскі кути тригранного кута, а $\angle A, \angle B, \angle C$ — протилежні їм двогранні кути, і $A + B + C = 360^\circ$, то $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 1$.
- 27.** Якщо α, β — плоскі кути тригранного кута, а $\angle A, \angle B$ — протилежні їм двогранні кути, і $A + B = 180^\circ$, то $\alpha + \beta = 180^\circ$.
- 28.** У тригранному куті $\angle A, \angle B, \angle C$ — його двогранні кути, а α — плоский кут, що лежить проти $\angle A$. Знайдіть $\angle A$, якщо:
- 1) $\angle B = 30^\circ, \angle C = 60^\circ, \alpha = 60^\circ$;
 - 2) $\angle B = 45^\circ, \angle C = 60^\circ, \alpha = 30^\circ$;
 - 3) $\angle B = 45^\circ, \angle C = 30^\circ, \alpha = 30^\circ$.
- 29.** У тригранному куті α, β — два його плоскі кути, а $\angle A, \angle B$ — протилежні їм двогранні кути. Чи існує такий тригранний кут, у якого:
- 1) $\angle A = 30^\circ, \angle B = 150^\circ, \angle C = 60^\circ, \alpha = 60^\circ, \beta = 120^\circ, \gamma = 60^\circ$;
 - 2) $\angle A = 30^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 120^\circ, \alpha = 50^\circ, \beta = 130^\circ, \gamma = 50^\circ$;
 - 3) $\angle A = 20^\circ, \angle B = 140^\circ, \angle C = 160^\circ, \alpha = 40^\circ, \beta = 110^\circ, \gamma = 140^\circ$?
- 30.** У тригранного кута α, β, γ — його плоскі кути, а $\angle A, \angle B, \angle C$ — протилежні їм двогранні кути, і $A + B + C = 360^\circ$. Чи існує такий тригранний кут, у якого:
- 1) $\alpha = 30^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 60^\circ$; 2) $\alpha = 90^\circ, \beta = 60^\circ, \gamma = 60^\circ$; 3) $\alpha = 30^\circ, \beta = 40^\circ, \gamma = 50^\circ$?
- 31.** Плоский кут при вершині правильної чотирикутної піраміди дорівнює 60° . Знайдіть двогранний кут при ребрі основи.

- 32.** Доведіть, що якщо в правильній чотирикутній піраміді плоский кут при вершині дорівнює 60° , то протилежні бічні ребра взаємно перпендикулярні.
- 33.** Знайдіть двогранні кути тригранного кута, якщо всі його плоскі кути дорівнюють по 60° .
- 34.** Знайдіть двогранний кут тригранного кута, якщо два інших його двогранних кута дорівнюють по 135° , а їх спільний плоский кут — прямий.
- 35.** Якщо плоский кут і прилеглі до нього двогранні кути одного тригранного кута відповідно дорівнюють плоскому куту і прилеглим до нього двогранним кутам другого тригранного кута, то такі тригранні кути рівні. Доведіть.
- 36.** Якщо двогранні кути одного тригранного кута відповідно дорівнюють двогранним кутам другого тригранного кута, то такі тригранні кути рівні. Доведіть.
- 37.** Якщо плоскі кути одного тригранного кута відповідно дорівнюють плоским кутам другого тригранного кута, то такі тригранні кути рівні. Доведіть.
- 38.** У тригранного кута з вершиною D два плоских кути ADB і ADC дорівнюють по 60° , а третій кут BDC — прямий. Доведіть, що площина BAC , яка відтинає від ребер даного тригранного кута три рівні відрізки DA, DB, DC , перпендикулярна до площини прямого кута.
- 39.** Знайдіть геометричне місце точок, які лежать усередині тригранного кута й рівновіддалені від: 1) площин усіх трьох граней тригранного кута; 2) усіх трьох ребер тригранного кута.
- 40.** Якщо тригранний кут має два рівні гострі плоскі кути, то площина, яка проходить через їх спільне ребро перпендикулярно до протилежної грані, перетинає її по бісектрисі третього плоского кута. Доведіть.
- 41*.** Знайдіть плоскі кути тригранного кута, якщо його двогранні кути дорівнюють $60^\circ, 120^\circ$ і 90° .
- 42*.** Усередині тригранного кута, плоскі кути якого $90^\circ, 90^\circ$ і 60° , дано точку, відстані від якої до граней дорівнюють 10 см, 13 см і 12 см. Знайдіть відстань від цієї точки до вершини тригранного кута.
- 43*.** Через кожне ребро тригранного кута, у якого жодне з ребер не перпендикулярне до протилежної грані, проведено площину, перпендикулярну до протилежної грані. Доведіть, що всі ці площини мають спільну пряму.
- 44*.** Один із плоских кутів чотиригранного кута дорівнює 168° , а інші відносяться, як $7 : 8 : 10$. Визначте невідомі кути даного чотиригранного кута, якщо відомо, що вони виражені в градусах цілими числами.

- 45*. Доведіть, що чотиригранний кут можна перетнути площиною так, щоб у перерізі утворився паралелограм.
- 46*. Доведіть, що сума двограних кутів чотиригранного кута більша за 360° .
- 47*. Один із плоских кутів шестигранного кута дорівнює 160° , а інші відносяться, як $2 : 3 : 5 : 7 : 9$. Визначте невідомі кути даного шестигранного кута, якщо відомо, що їх градусні міри є цілими числами.



Тривайте компетенції

48. Наведіть приклади з довкілля, які ілюструють многогранні кути.
49. Як за допомогою кутника з'ясувати, що меблі зібрано правильно і двері не перекосило?
50. Дах будинку має форму чотиригранного кута (мал. 1.18). У нього протилежні плоскі кути рівні й дорівнюють 50° і 70° , а довжина кожного ребра — 4 м. Черепицю, якою обшивають дах будинку, кріплять на обрешітку — каркас із дерев'яних дощок (мал. 1.19). Дощки беруть розміром 30×100 мм у перерізі. Відстань між дошками в обрешітці становить 30 см.
- 1) Якої довжини мають бути найдовші дошки кожної частини даху?
 - 2) Скільки дощок потрібно для обрешітки даху?
 - 3) Оцініть вартість обрешітки даху. Необхідні дані знайдіть у мережі Інтернет.



Мал. 1.18



Мал. 1.19

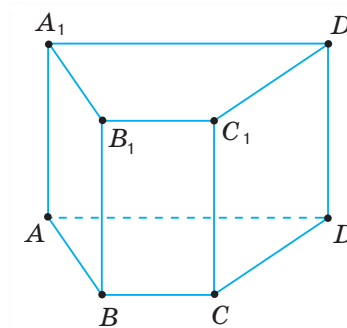
§ 2. МНОГОГРАННИКИ

1. МНОГОГРАННИК ТА ЙОГО ЕЛЕМЕНТИ

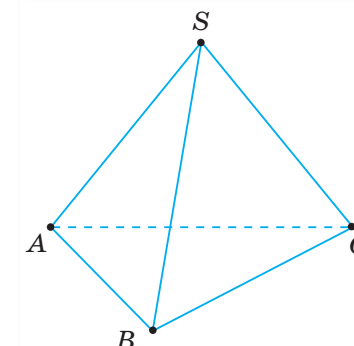
Ви вже знаєте, що таке многогранник і його поверхня, що призма (мал. 2.1) і піраміда (мал. 2.2) є різновидами многогранників.

На практиці вам траплялися такі предмети, як контейнер (мал. 2.3) і цеглина (мал. 2.4). Обидва вони мають форму прямокутного паралелепіпеда (мал. 2.5). Кожний із цих предметів розбиває простір на дві частини — ту, що міститься всередині предмета, і ту, що розміщується ззовні нього. Яку б точку всередині контейнера ви не взяли, вона не є точкою контейнера, а кожна точка всередині цеглини є точкою цеглини. Загалом, контейнер дає приклад *многогранної поверхні*, а цеглина — *многогранного тіла*. Для геометрії ці випадки є принципово різними.

Многогранником називається геометричне тіло, поверхня якого складається з плоских многокутників.



Мал. 2.1



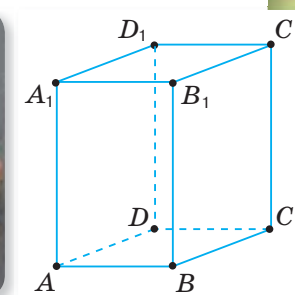
Мал. 2.2



Мал. 2.3

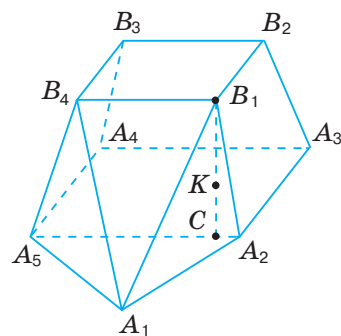


Мал. 2.4



Мал. 2.5

Плоскі многокутники, що утворюють *поверхню многогранника*, називають *гранями*, їхні сторони — *ребрами*, а вершини — *вершинами* многогранника (мал. 2.6). Його поверхня розбиває простір на дві області — внутрішню та зовнішню область многогранника. Точки, що лежать у внутрішній області многогранника, називають його *внутрішніми точками* (наприклад, точка K на мал. 2.6). Точки многогранника, що не є внутрішніми його точками, називають *точками поверхні* многогранника (наприклад, точки B_1 і C на мал. 2.6).



Мал. 2.6

Многогранник позначають назвами його вершин, наприклад, $A_1A_2A_3A_4A_5B_1B_2B_3B_4$ (мал. 2.6), або $ABCD A_1B_1C_1D_1$ (мал. 2.1), або $SABC$ (мал. 2.2).

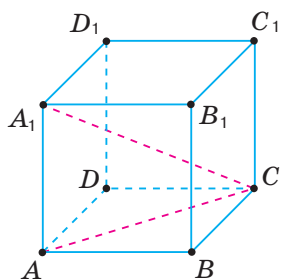
Яка найменша кількість граней у многогранника? Чотири (мал. 2.2).

Вершини, що є кінцями одного ребра, називають *сусідніми вершинами* многогранника, два ребра, що мають спільну вершину, — *сусідніми ребрами* многогранника, а дві грані, що мають спільне ребро, — *суміжними гранями* многогранника. Відрізок, що з'єднує дві вершини многогранника, які не лежать в одній грані, називають *діагоналлю* многогранника (наприклад, відрізок A_1C на мал. 2.7). Якщо дві вершини лежать в одній грані, але не є сусідніми, тоді відрізок, що їх з'єднує, називають *діагоналлю грані* многогранника (наприклад, відрізок AC на мал. 2.7).

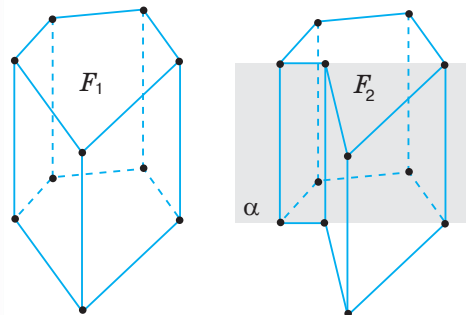
На малюнку 2.8 ви бачите многогранники F_1 і F_2 . У чому їх відмінність?

Жодна із площин, які містять грані многогранника F_1 , не розбиває його на частини. Він лежить з одного боку від будь-якої із цих площин. Такий многогранник називають *опуклим*. Многогранник F_2 розбивається на частини площиною α . Він лежить з різних боків від цієї площини. Тому цей многогранник не є опуклим.

Надалі ми розглядатимемо лише опуклі многогранники.

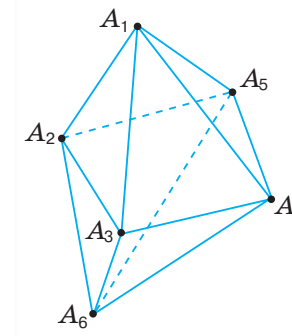


Мал. 2.7



Мал. 2.8

Дві грані многогранника, що мають спільне ребро, утворюють *двогранний кут при даному ребрі многогранника*, а три й більше граней, що сходяться в одній вершині, — *многогранний кут при даній вершині многогранника*. На малюнку 2.9 ви бачите, що в многогранника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ є: 12 ребер, тому він має 12 двогранних кутів; 6 вершин, тому в нього 6 многогранних кутів, з яких 4 тригранні (при вершинах A_2, A_3, A_4 і A_5) і 2 чотиригранні (при вершинах A_1 і A_6).



Мал. 2.9

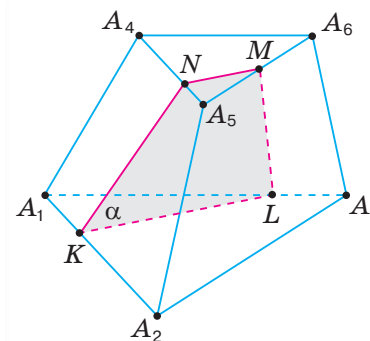
2. ПЕРЕРІЗ МНОГОГРАННИКА

Площина, що перетинає многогранник, називається *січною площиною*.

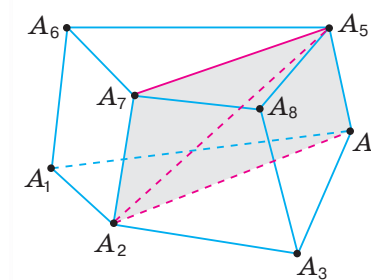
Січну площину можна задати або трьома точками, що не лежать на одній прямій, або прямою і точкою, що не належить їй, або двома прямими, що перетинаються, або двома паралельними прямими.

У результаті перетину многогранника січною площиною утворюється *переріз многогранника*. Ви знаєте, що це — плоский многокутник, сторонами якого є відрізки, по яких січна площина перетинає грані многогранника. Сторони перерізу лежать у гранях многогранника, а вершини — на ребрах многогранника. На малюнку 2.10 ви бачите чотирикутник $KLMN$, що є перерізом многогранника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ січною площиною α . Якщо січна площина проходить через діагональ многогранника, тоді цей переріз називають *діагональним перерізом многогранника* (мал. 2.11).

Оскільки дві площини не можуть перетинатися більше ніж по одній прямій, то в грані многогранника не може бути більше одного відрізка перетину із січною площиною.



Мал. 2.10



Мал. 2.11

3. ПЛОЩА ПОВЕРХНІ МНОГОГРАННИКА

Площею поверхні многогранника називається сума площ усіх його граней.

Площу поверхні многогранника позначають: $S_{\text{пов}}$.

Наведене означення підказує спосіб знаходження площі поверхні многогранника.

Задача 1. У многогранника $ABCA_1B_1C_1$ (мал. 2.12) грані ABC і $A_1B_1C_1$ — подібні правильні трикутники з коефіцієнтом подібності $k = 2$, а інші грані — рівні рівнобедрені трапеції з гострим кутом 60° , основи яких лежать у площинах ABC і $A_1B_1C_1$. Знайдіть площу поверхні многогранника, якщо $AB = 8$ см.

Розв'язання. За умовою, грань ABC даного многогранника — правильний трикутник зі стороною 8 см. Тому

$$S_{\Delta ABC} = \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Оскільки трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ — подібні з коефіцієнтом $k = 2$, то:

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A_1B_1C_1}} = k^2 = 2^2 = 4.$$

Звідси:

$$S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{S_{\Delta ABC}}{4} = \frac{16\sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

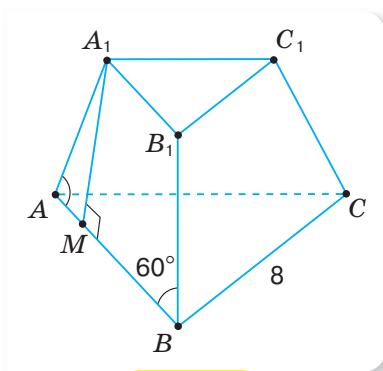
Оскільки інші грані даного многогранника — рівні трапеції, то достатньо знайти площу, наприклад, грані ABB_1A_1 , за її основами AB і A_1B_1 та висотою A_1M :

$$S_{ABB_1A_1} = \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot A_1M = \frac{8 + 4}{2} \cdot \frac{8 - 4}{2} \cdot \text{tg}60^\circ = 12\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Отже, площа поверхні даного многогранника дорівнює:

$$S_{\text{пов}} = S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A_1B_1C_1} + 3S_{ABB_1A_1} = 16\sqrt{3} + 4\sqrt{3} + 3 \cdot 12\sqrt{3} = 56\sqrt{3} \text{ (см}^2\text{)}.$$

Щоб знайти площу поверхні многогранника, знайдіть площі всіх його граней і отримані значення додайте.



Мал. 2.12

4. ТЕОРЕМА ЕЙЛЕРА

Позначимо в многограннику кількість його вершин V , кількість граней Γ , а кількість ребер — P . Тоді має місце теорема.

ТЕОРЕМА

(Теорема Ейлера).

У будь-якому опуклому многограннику $V + \Gamma - P = 2$.

Дано: довільний опуклий многогранник, у якого V — кількість його вершин, Γ — кількість граней, P — кількість ребер.

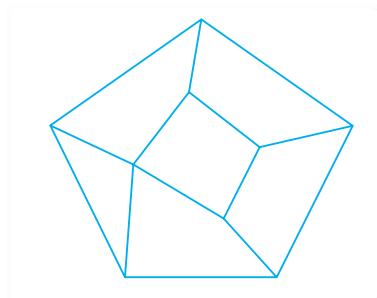
Довести: $V + \Gamma - P = 2$.

Доведення. Видалимо умовно одну з граней многогранника. У результаті дістанемо деяку многогранну поверхню F , яка має таку само кількість ребер і вершин, що й даний многогранник, але число її граней дорівнює $\Gamma - 1$.

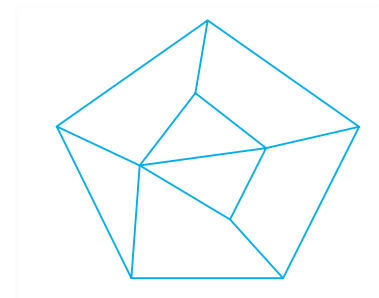
Розгорнемо умовно цю многогранну поверхню F на площині (мал. 2.13). Вона складається з $\Gamma - 1$ багатокутників. Позначимо $\Gamma - 1 = \Gamma_1$. Кількість вершин усіх цих багатокутників дорівнює V , а кількість сторін — P . Якщо провести діагональ у будь-якому із цих багатокутників, то кількість вершин не зміниться, а кількість багатокутників і кількість сторін збільшиться на 1. Тому загалом різниця кількості багатокутників і кількості сторін не зміниться (мал. 2.14).

Розгортка поверхні F утворює так звану «трикутну сітку», в якій різниця кількості сторін трикутників і суми кількості трикутників та їх вершин дорівнює $V + \Gamma_1 - P$.

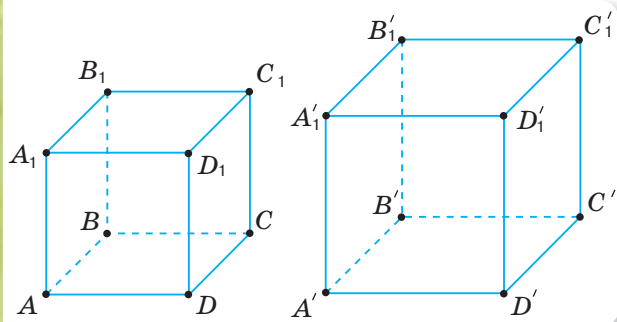
Вилучатимемо із сітки по одному «крайньому» трикутнику. При цьому число $V + \Gamma_1 - P$ не зміниться, оскільки відкидаються один трикутник, одна вершина та два ребра (або один трикутник й одне ребро). У результаті дістанемо один трикутник, для якого $V + \Gamma_1 - P = 3 + 1 - 3 = 1$. Тоді $V + \Gamma - P = 2$.



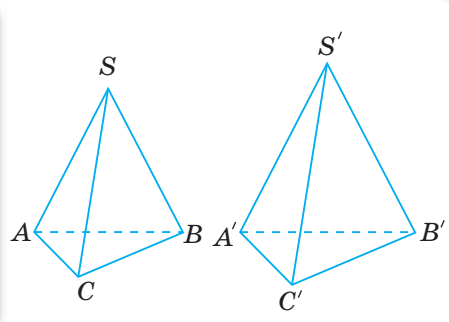
Мал. 2.13



Мал. 2.14



Мал. 2.15



Мал. 2.16

5. ПОДІБНІ МНОГОГРАННИКИ

Два многогранники називаються *подібними*, якщо вони суміщаються перетворенням подібності.

На малюнку 2.15 ви бачите два подібні куби — $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ та $A' B' C' D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$. У них: тригранні кути при відповідних вершинах рівні; двогранні кути при відповідних ребрах однаково розміщені та рівні; відповідні бічні грані й основи — подібні квадрати ($ABCD \sim A' B' C' D'$, $A_1 B_1 C_1 D_1 \sim A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$, $ABB_1 A_1 \sim A' B' B'_1 A'_1$ тощо). На малюнку 2.16 — дві подібні правильні трикутні піраміди — $SABC$ та $S' A' B' C'$. У них: тригранні кути при відповідних вершинах рівні; двогранні кути при відповідних ребрах однаково розміщені та рівні; відповідні бічні грані й основи — подібні трикутники ($\triangle ABC \sim \triangle A' B' C'$, $\triangle SAB \sim \triangle SA' B'$, $\triangle SBC \sim \triangle SB' C'$, $\triangle SAC \sim \triangle SA' C'$).

Число, яке дорівнює відношенню відповідних сторін подібних многогранників, називають *коефіцієнтом їх подібності*.

У подібних многогранників:

- 1) відповідні многогранні кути рівні;
- 2) відповідні двогранні кути рівні й однаково розміщені;
- 3) відповідні ребра пропорційні;
- 4) відповідні грані є подібними многокутниками.

ТЕОРЕМА (про відношення площ поверхонь подібних многогранників).

Площі поверхонь подібних многогранників відносяться, як квадрати довжин відповідних ребер.

Дано: Многогранники $F \sim F'$ з коефіцієнтом подібності k , d_i і d'_i — довжини двох будь-яких відповідних ребер, S — площа поверхні многогранника F , S' — площа поверхні многогранника F' .

Довести: $\frac{S}{S'} = \frac{d^2}{d'^2}$.

Доведення. Нехай $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ — площі граней многогранника F , $S'_1, S'_2, S'_3, \dots, S'_n$ — площі відповідних граней многогранника F' . Тоді $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n$, $S' = S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n$. Оскільки відповідні грані подібних многогранників — подібні многокутники, то їх площі

відносяться, як квадрати довжин відповідних ребер. Тому $\frac{S_1}{S'_1} = \frac{d_1^2}{d_1'^2}$,

$$\frac{S_2}{S'_2} = \frac{d_2^2}{d_2'^2}, \frac{S_3}{S'_3} = \frac{d_3^2}{d_3'^2}, \dots, \frac{S_n}{S'_n} = \frac{d_n^2}{d_n'^2}.$$

За умовою задачі $\frac{d_1}{d_1'} = \frac{d_2}{d_2'} = \frac{d_3}{d_3'} = \dots = \frac{d_n}{d_n'} = k$, тому

$$\frac{S_1}{S'_1} = \frac{S_2}{S'_2} = \frac{S_3}{S'_3} = \dots = \frac{S_n}{S'_n} = k^2.$$

Звідси $S_1 = k^2 S'_1$, $S_2 = k^2 S'_2$, $S_3 = k^2 S'_3$, ..., $S_n = k^2 S'_n$.

$$\text{Тоді } \frac{S}{S'} = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n} = \frac{k^2 S'_1 + k^2 S'_2 + k^2 S'_3 + \dots + k^2 S'_n}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n} =$$

$$= \frac{k^2 (S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n)}{S'_1 + S'_2 + S'_3 + \dots + S'_n} = k^2.$$



Задача 2. Куби $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ та $A' B' C' D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ — подібні з коефіцієнтом подібності $k = \frac{2}{3}$. Знайдіть ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$,

якщо площа повної поверхні куба $A' B' C' D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ дорівнює 24 см^2 .

Розв'язання. Нехай ребро куба $A' B' C' D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ дорівнює a' . Площа повної поверхні цього куба дорівнює шести площам квадратів з ребром a' :

$$S'_{\text{пн}} = 6 \cdot S'_{\text{кв}} = 6a'^2. \text{ Звідси } 6a'^2 = 24 \text{ (см}^2\text{)}, a'^2 = 4 \text{ см}^2, a' = 2 \text{ см. Тоді } a = \frac{2}{3}a' = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3} \text{ (см).}$$

Дізнайтеся більше

1. Поняття многогранника відоме здавна. У Стародавній Греції його називали *polyedron* — той, що має багато опор. Нинішній термін уперше трапляється в перекладі «Начал» Евкліда, зробленому П. І. Суворовим і В. М. Нікітіним. У книзі «Евклідових стихій осьм книг», виданої в Санкт-Петербурзі в 1784 та 1789 рр., автори намагалися перекласти російською мовою всі терміни, які використовував Евклід. Вони також пропонували окремі слов'янські назви замість давньогрецьких чи латинських, щоб досягти більшої наочності термінології й зрозумілості змісту.

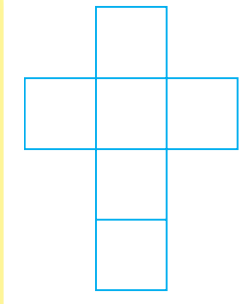
2. Символ S для позначення площі фігури походить від латинської назви *superficils*, що означає «поверхня».

3. Вам уже траплялося поняття «розгортка многогранника». Розгортку многогранника одержимо, якщо його поверхню «розріжемо» вздовж ребер і «розгорнемо» на площину. На малюнку 2.17 зображено розгортку куба.

У вас могло виникнути запитання: Чи будь-яка сукупність многокутників є розгорткою многогранника? Поміркуємо.

Нехай дано кілька многокутників, які задовольняють такі умови: 1) кожна сторона кожного многокутника відповідає тільки одній стороні іншого многокутника (назвемо ці сторони тотожними), отже, тотожні сторони мають бути рівними; 2) від кожного многокутника до будь-якого наступного можна перейти, проходячи через многокутники, які мають тотожні сторони. Лише та сукупність многокутників є розгорткою, яка задовольняє умови 1) і 2).

4. Співвідношення $V + \Gamma - P = 2$ уперше виявив Рене Декарт у 1620 р. Леонард Ейлер, займаючись дослідженням опуклих многогранників, перевірив цю формулу та опублікував її в 1752 р. У роботі Ейлера цю формулу записано так: $S + H = A + 2$, де S — число вершин, H — число граней, A — число ребер опуклого тривимірного многогранника. Число $V + \Gamma - P$ називають *ейлеровою характеристикою* многогранника. У 1899 р. Жюль Анрі Пуанкаре узагальнив співвідношення для випадку n -вимірного многогранника: $\sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i A_i = 1 + (-1)^{n-1}$, де A_i — число i -вимірних граней n -вимірного многогранника.



Мал. 2.17

Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

| Українська | Англійська | Німецька | Французька |
|--------------|------------|----------|------------|
| Многогранник | Polyhedron | Polyeder | Polyèdre |

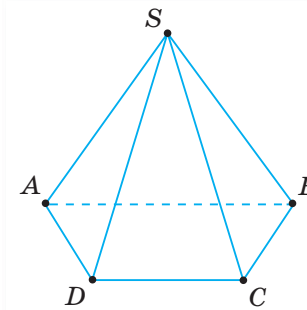
Пригадайте головце

1. Поясніть, що таке многогранник.
2. Що таке грані многогранника; його вершини; його ребра?
3. Що таке сусідні вершини многогранника; сусідні ребра; суміжні грані?
4. Що таке діагональ многогранника; діагональ грані многогранника?
5. Який многогранник називається опуклим?
6. Поясніть, що таке січна площина многогранника. Як її можна задати?
7. Поясніть, що таке переріз многогранника. Що таке діагональний переріз многогранника?
8. Поясніть, що таке площа поверхні многогранника.

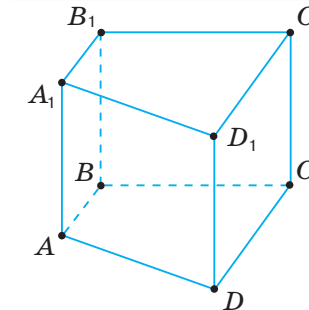
9. Як знайти площу поверхні многогранника?
10. Сформулюйте й доведіть теорему Ейлера.
11. Які многогранники називаються подібними?
12. Сформулюйте й доведіть теорему про відношення площ поверхонь подібних многогранників.

Розв'яжіть задачі

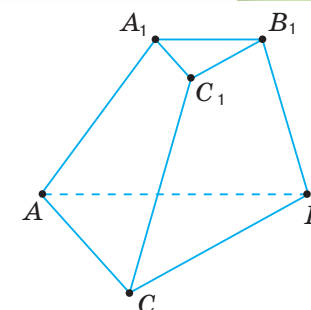
- 51'. За малюнками 2.18–2.20 з'ясуйте:
 - 1) як називається даний многогранник;
 - 2) скільки в нього основ;
 - 3) скільки в нього бічних граней;
 - 4) які многокутники лежать у його основах;
 - 5) які многокутники є його бічними гранями.
- 52'. Назвіть вершини та ребра многогранника (мал. 2.18–2.20). Які його грані:
 - 1) сходяться у вершині: а) A ; б) B ; в) C ;
 - 2) мають спільне ребро: а) AB ; б) AC ; в) BC ?
- 53'. За малюнками 2.18–2.20 з'ясуйте:
 - 1) скільки двограних кутів має даний многогранник;
 - 2) скільки многогранных кутів має даний многогранник, назвіть їх.
- 54'. За малюнками 2.21–2.23 з'ясуйте:
 - 1) яка площина перетинає даний многогранник;
 - 2) по яких відрізках січна площина перетинає його грані;
 - 3) який многокутник утворився в перерізі.



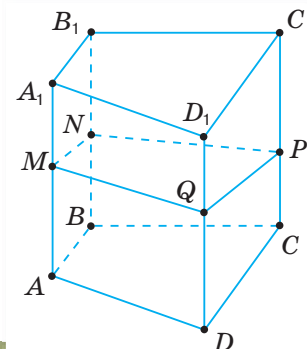
Мал. 2.18



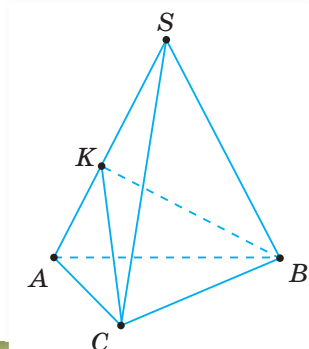
Мал. 2.19



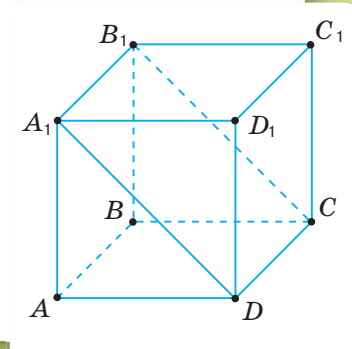
Мал. 2.20



Мал. 2.21



Мал. 2.22



Мал. 2.23

55°. В одного прямокутного паралелепіпеда сторони основи дорівнюють a і b , а в іншого — c і d . Чи будуть подібними ці паралелепіпеди, якщо:

- 1) $a = 3$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см, $d = 10$ см;
- 2) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $c = 12$ см, $d = 12$ см;
- 3) $a = 8$ см, $b = 16$ см, $c = 6$ см, $d = 12$ см?

56°. Площі поверхонь двох подібних кубів дорівнюють S_1 і S_2 . Знайдіть їх коефіцієнт подібності, якщо:

- 1) $S_1 = 4$ см²; $S_2 = 9$ см²;
- 2) $S_1 = 25$ см²; $S_2 = 9$ см²;
- 3) $S_1 = 16$ см²; $S_2 = 36$ см².

57°. Дано призму $ABCA_1B_1C_1$ (мал. 2.24). Назвіть площини, кожна з яких проходить через:

- 1) три вершини многогранника;
- 2) ребро й вершину многогранника;
- 3) два ребра многогранника, що мають спільну точку.

58°. Дано многогранник $SABCD$ (мал. 2.25). Назвіть площини, кожна з яких проходить через:

- 1) три вершини цього многогранника;
- 2) ребро й вершину цього многогранника;
- 3) два ребра цього многогранника, що перетинаються.

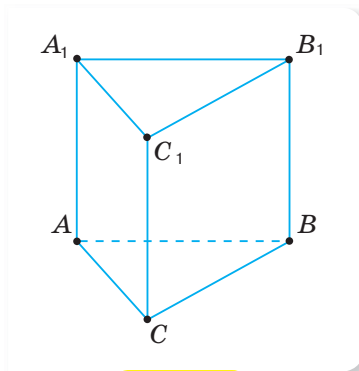
59°. Січна площина многогранника — трикутник зі сторонами 3 см, 4 см і кутом між ними — 45° . Знайдіть площу січної площини многогранника.

60°. Січна площина многогранника — прямокутник зі сторонами 6 см і 8 см. Знайдіть діагональ січної площини многогранника.

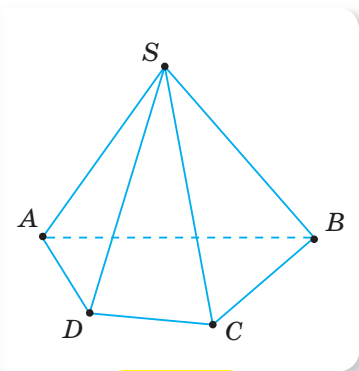
61°. Січна площина многогранника — прямокутний трикутник з гіпотенузою 8 см та гострим кутом 60° . Знайдіть радіус вписаного в цей трикутник кола.

62°. Площі трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють S_1 , S_2 , S_3 . Знайдіть площу його повної поверхні, якщо:

- 1) $S_1 = 5$ см², $S_2 = 13$ см², $S_3 = 21$ см²;
- 2) $S_1 = 14$ см², $S_2 = 23$ см², $S_3 = 31$ см²;
- 3) $S_1 = 15$ см², $S_2 = 16$ см², $S_3 = 24$ см².



Мал. 2.24



Мал. 2.25

63°. Скільки діагональних перерізів можна провести у:

- 1) кубі;
- 2) паралелепіпеді?

64°. Накресліть:

- 1) прямокутний паралелепіпед $ABCA_1B_1C_1D_1$;
- 2) куб $ABCA_1B_1C_1D_1$. Проведіть січну площину через:
 - а) вершини A, C, D_1 ;
 - б) вершини B_1, D_1, C ;
 - в) ребра BC і A_1D_1 ; г) ребра AA_1 і CC_1 .
 Які многокутники дістали в перерізі?

Для одержання наочних динамічних зображень геометричних фігур можна скористатися комп'ютерними програмами, наприклад, GeoGebra: <https://www.geogebra.org/geometry>

65°. Куби $ABCA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — подібні з коефіцієнтом подібності $k = \frac{3}{4}$. Знайдіть діагональ основи другого куба, якщо

ребро першого з них дорівнює $2\sqrt{2}$ см.

66°. $ABCA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — подібні прямокутні паралелепіпеди з коефіцієнтом подібності $k = \frac{1}{2}$. Знайдіть площу повної

поверхні першого з них, якщо ребра другого дорівнюють:

- 1) 4 см, 5 см, 8 см;
- 2) 2 см, 6 см, 10 см;
- 3) 3 см, 8 см, 12 см.

67°. $ABCA_1B_1C_1D_1$ та $A'B'C'D'A_1'B_1'C_1'D_1'$ — подібні прямокутні паралелепіпеди. Знайдіть площі повної поверхні обох паралелепіпедів, якщо найбільше ребро другого паралелепіпеда дорівнює 18 см, а ребра першого дорівнюють:

- 1) 2 см, 3 см, 6 см;
- 2) 4 см, 7 см, 9 см;
- 3) 5 см, 13 см, 24 см.

68. У кубі $ABCA_1B_1C_1D_1$ з ребром a см проведено січну площину через ребра AB та C_1D_1 . Знайдіть площу даного перерізу, якщо:

- 1) $a = 2$ см;
- 2) $a = 4$ см;
- 3) $a = 8$ см.

69. У кубі $ABCA_1B_1C_1D_1$ з ребром a см проведено січну площину через вершини A і B та середини ребер DD_1 та CC_1 . Знайдіть площу даного перерізу, якщо:

- 1) $a = 2$ см;
- 2) $a = 4$ см;
- 3) $a = 8$ см.

70. У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ з площею основи S проведено січну площину через середини ребер AB , BC та $A_1 B_1$ та $B_1 C_1$. Знайдіть площу даного перерізу, якщо:
- 1) $S = 16 \text{ см}^2$;
 - 2) $S = 36 \text{ см}^2$;
 - 3) $S = 8 \text{ см}^2$.
71. У многогранника бічні грані — рівнобедрені трикутники з бічною стороною 5 см та гострим кутом при вершині — 30° , основа — квадрат. Знайдіть площу бічної поверхні многогранника.
72. У многогранника бічні грані — два прямокутники зі сторонами 10 см і $4\sqrt{2}$ см та два прямокутники зі сторонами 10 см і 6 см, основи — також прямокутники. Знайдіть площу діагонального перерізу даного многогранника.
73. Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед; 2) куб. Через діагональ бічної грані та вершину верхньої основи, яка не збігається з жодним кінцем цієї діагоналі, проведіть січну площину так, щоб у перерізі одержати: а) трикутник; б) чотирикутник.
74. Паралелепіпеди $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ та $A' B' C' D' A'_1 B'_1 C'_1 D'_1$ — подібні з коефіцієнтом подібності $k = \frac{5}{3}$. Площі трьох граней першого з них відносяться, як 3 : 4 : 5, а площа його повної поверхні дорівнює 48 см^2 . Знайдіть площі граней другого паралелепіпеда.
75. Многогранники $ABCA_1 B_1 C_1$ та $A' B' C' A'_1 B'_1 C'_1$ — подібні. У них бічні грані — прямокутники, у яких сторони відносяться, як 1 : 3, а основи — правильні трикутники. Площа повної поверхні першого з них дорівнює 64 см^2 , а другого — 48 см^2 . Знайдіть ребра обох многогранників.
76. Многогранники $ABCA_1 B_1 C_1$ та $A' B' C' A'_1 B'_1 C'_1$ — подібні з коефіцієнтом подібності $k = \frac{2}{3}$. У многогранника $ABCA_1 B_1 C_1$ бічні грані — рівні паралелограми зі сторонами 6 см і $4\sqrt{2}$ см та гострим кутом 45° , а основа — правильний трикутник зі стороною 6 см. Знайдіть площу поверхні многогранника $A' B' C' A'_1 B'_1 C'_1$.
- 77*. Визначте площу поверхні куба за даною площею S його діагонального перерізу.
- 78*. На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?
- 79*. Знайдіть усі плоскі кути граней чотиригранного кута при одній з вершин многогранника, якщо два з них відносяться, як 1 : 7, а інші два дорівнюють 80° і 170° . Усі бічні грані — рівнобедрені трикутники. Кути виражені цілими числами.

- 80*. α, β, γ — плоскі кути тригранного кута при одній з вершин многогранника. Доведіть, що $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha < \frac{4}{3}\pi^2$.
- 81*. Сума двох плоских кутів тригранного кута при одній з вершин многогранника дорівнює 180° . Доведіть, що спільне ребро цих плоских кутів перпендикулярне бісектрисі третього плоского кута.
- 82*. Доведіть, що в будь-якому многограннику число граней з непарним числом сторін є парним.
- 83*. Чи може многогранник мати 11 плоских кутів?
- 84*. Гранями опуклого многогранника є трикутники. Скільки він має вершин (B) і граней (G), якщо кількість його ребер (P) дорівнює: 1) $P = 12$; 2) $P = 15$? Які многогранники одержимо?
- 85*. Многогранник має п'ять граней. Скільки може бути в нього вершин і ребер?
- 86*. У кожній вершині опуклого многогранника сходяться три ребра. Скільки він має вершин (B) і граней (G), якщо кількість його ребер (P) дорівнює: 1) $P = 12$; 2) $P = 15$? Назвіть вид отриманого многогранника.



Троявність компетентності

87. Наведіть приклади многогранників на предметах довкілля.
88. Побудуйте розгортку: 1) куба; 2) трикутної призми.
89. Виготовте паперові макети: 1) прямої чотирикутної призми; 2) прямої шестигрутної призми.
90. Які потрібно зробити виміри, щоб розрахувати кількість покрительного матеріалу для садової альтанки із чотирихилим дахом (мал. 2.26), якщо кути нахилу всіх схилів — однакові?



Мал. 2.26

§ 3. ПРИЗМА

Подивіться на малюнок 3.1. Ви бачите надзвичайну пам'ятку природи — базальтові стовпи, що мають форму різноманітних призм. Вони розміщуються на Рівненщині, де проходить західний схил Українського кристалічного щита. Призми нерідко трапляються в природі, їх часто використовують в архітектурі, на виробництві, у побуті (мал. 3.2).



Мал. 3.1



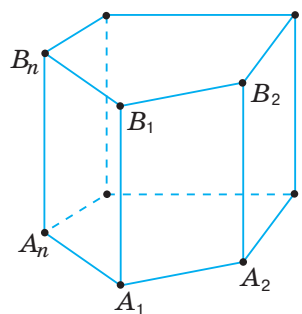
Мал. 3.2



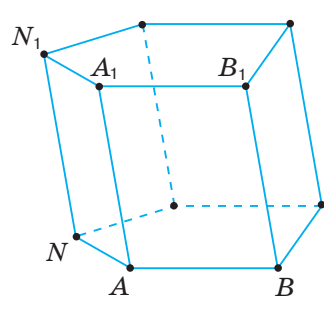
У цьому параграфі ви дізнаєтеся про різновиди призм та їхні геометричні властивості.

1. ПРИЗМА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ

Ви вже знаєте, що призма — один з видів многогранників. Своєю чергою, призми теж поділяють на види. У попередніх класах ви ознайомилися з прямою призмою та її елементами — основами, бічними гранями, ребрами, висотою (мал. 3.3). Знаєте, що таке бічна й повна поверхня прямої призми та як їх обчислювати. Крім прямих призм, до цього виду многогранників належать і похилі призми (мал. 3.4). Обидва види призм мають як спільні, загальні для всіх призм властивості, так й особливі властивості, якими володіють лише призми певного виду. Вивчення призм розпочнемо з їх загальних властивостей.



Мал. 3.3



Мал. 3.4

Призмою називається многогранник, у якого дві грані — рівні n -кутники з відповідно паралельними сторонами, а решта n граней — паралелограми.

Призму позначають назвами її вершин, наприклад, $A_1A_2\dots A_nB_1B_2\dots B_n$ (мал. 3.3) або $AB\dots NA_1B_1\dots N_1$ (мал. 3.4).

Рівні n -кутники $A_1A_2\dots A_n$ і $B_1B_2\dots B_n$ називають *основами призми*, а паралелограми $A_1A_2B_2B_1, \dots, A_nA_1B_1B_n$ — *бічними гранями призми*. Відрізки A_1A_2, \dots, A_nA_1 називають *ребрами основ призми*, а відрізки A_1B_1, \dots, A_nB_n — *бічними ребрами призми*.

Залежно від того, який многокутник лежить в основі, призму називають *трикутною, чотирикутною* чи *n -кутною*. На малюнках 3.3 і 3.4 ви бачите п'ятикутні призми.

Чи є елементами призми двогранні та многогранні кути? Так, оскільки призма є многогранником.

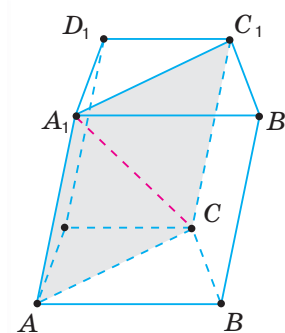
У n -кутної призми $3n$ ребер і $2n$ вершин, тому в неї $3n$ двограних кутів і $2n$ тригранних кутів, оскільки кожний многогранний кут призми є тригранним.

Відрізок, що з'єднує дві вершини призми, які не лежать в одній грані, називають *діагоналлю призми* (наприклад, відрізок A_1C на малюнку 3.5). Якщо дві вершини лежать в одній грані, але не є сусідніми, тоді відрізок, що їх з'єднує, називають *діагоналлю грані призми* (наприклад, відрізок AC на малюнку 3.5). Якщо січна площина проходить через діагональ призми, то утворений переріз називають *діагональним перерізом призми* (наприклад, переріз AA_1C_1C на малюнку 3.5).

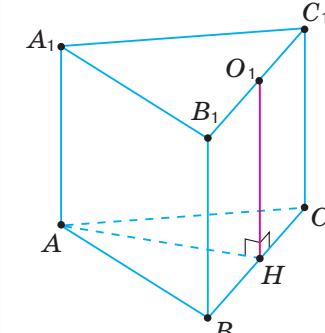
Чи можна стверджувати, що діагональний переріз призми є паралелограмом? Так. Це твердження є справедливим для всіх n -кутних призм, якщо $n > 3$.

Перпендикуляр, проведений з будь-якої точки однієї з основ призми до площини другої основи, називають *висотою призми* (наприклад, відрізок O_1H на малюнках 3.6 і 3.7).

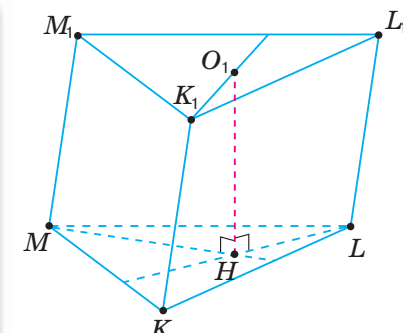
З означень призми та її елементів випливають її властивості.



Мал. 3.5



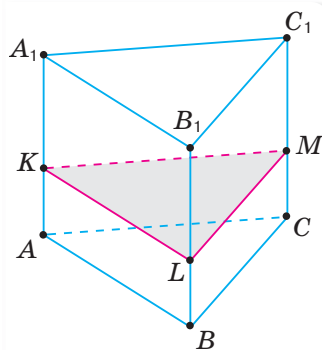
Мал. 3.6



Мал. 3.7

Властивості призми.

1. Основи призми — рівні многокутники з відповідно паралельними сторонами, що лежать у паралельних площинах.
2. Бічні ребра призми паралельні й рівні.
3. Бічні грані призми — паралелограми.
4. Будь-який діагональний переріз призми є паралелограмом (мал. 3.5).
5. Перерізом призми площиною, паралельною основам, є многокутник, що дорівнює многокутникам основ (мал. 3.8).



Мал. 3.8

2. БІЧНА ТА ПОВНА ПОВЕРХНІ ПРЯМОЇ ПРИЗМИ

Бічну поверхню призми утворюють многокутники її бічних граней, а повну поверхню — усі її грані.

Площею бічної поверхні призми називається сума площ її бічних граней.

Площею повної поверхні призми називається сума площ усіх її граней.

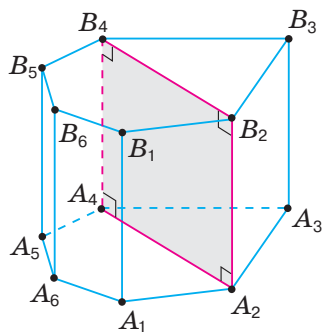
Площу бічної і повної поверхні призми відповідно позначають: $S_{\text{бн}}$ і $S_{\text{пов}}$.

Наведені означення підказують спосіб знаходження площ бічної та повної поверхонь призми.

Ви знаєте, що призма може бути прямою та похилою. На малюнках 3.4, 3.5 і 3.7 ви бачите приклади похилої призми. Її бічне ребро не перпендикулярне до основ і не дорівнює висоті цієї призми.

У прямої призми (мал. 3.3, 3.6, 3.8) кожне бічне ребро перпендикулярне до її основ. Звідси й назва — «пряма призма». Пряма призма має всі властивості призми, а також особливу властивість: її бічні грані — прямокутники, у яких дві протилежні сторони є бічними ребрами призми, а дві інші — ребрами основ призми. Крім того, будь-який її діагональний переріз є прямокутником (мал. 3.9).

Для обчислення площ бічної і повної поверхонь прямої призми зручно користуватися відповідними формулами. Виведіть їх самостійно.



Мал. 3.9

Формула площі бічної поверхні прямої призми:

$$S_{\text{бн}} = P_{\text{осн}} \cdot H,$$

де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи, H — висота призми.

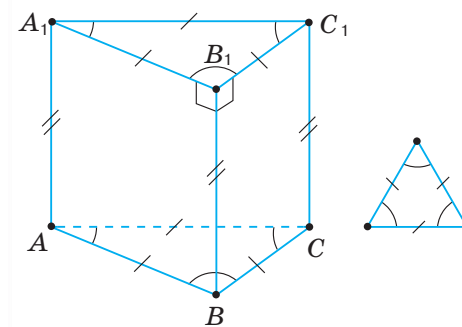
Формула площі повної поверхні прямої призми:

$$S_{\text{пов}} = P_{\text{осн}} \cdot H + 2S_{\text{осн}},$$

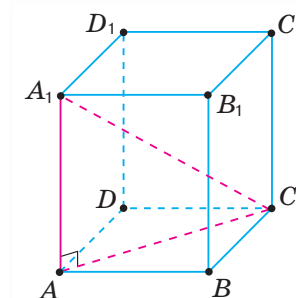
де $P_{\text{осн}}$ — периметр основи, $S_{\text{осн}}$ — площа основи, H — висота призми.

Пряму призму, основами якої є правильні многокутники, називають правильною призмою. На малюнку 3.10 ви бачите правильну трикутну призму.

Правильна призма має всі властивості прямої призми. Її особлива властивість полягає в тому, що всі бічні грані правильної призми — рівні прямокутники. Доведіть цю властивість самостійно.



Мал. 3.10



Мал. 3.11

Задача 1. Площа основи правильної чотирикутної призми дорівнює 144 см^2 , а висота — 14 см . Знайдіть діагональ призми.

Розв'язання. Нехай $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (мал. 3.11) — дана призма.

Оскільки її основа — квадрат, то $AB = \sqrt{144} = 12 \text{ (см)}^2$.

Діагональ квадрата $AC = AB\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$.

З прямокутного трикутника ABC дістанемо:

$$A_1 C = \sqrt{AC^2 + AA_1^2} = \sqrt{288 + 196} = \sqrt{484} = 22 \text{ (см)}^2.$$

У правильної n -кутної призми:

- 1) основою є:
 - правильний трикутник, якщо $n = 3$;
 - квадрат, якщо $n = 4$;
 - правильний п'ятикутник, якщо $n = 5$ тощо;
- 2) бічне ребро є висотою.

3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИЙ ПЕРЕРІЗ ПРИЗМИ. БІЧНА ПОВЕРХНЯ ПОХИЛОЇ ПРИЗМИ.

Перпендикулярним перерізом призми називається переріз призми площиною, перпендикулярною до її бічного ребра.

Оскільки бічні ребра призми паралельні, то перпендикулярний переріз призми є перпендикулярним до всіх її бічних ребер. У прямої призми перпендикулярний переріз є паралельним площинам основ призми.

ТЕОРЕМА

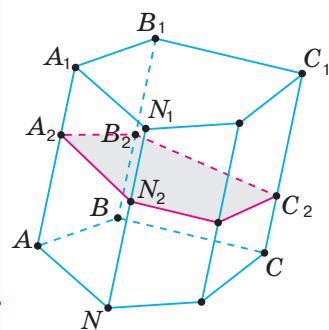
(про бічну поверхню похилої призми).

Бічна поверхня похилої призми дорівнює добутку довжини бічного ребра і периметра перпендикулярного перерізу.

Дано: $ABC\dots NA_1B_1C_1\dots N_1$ (мал. 3.12) — n -кутна призма, $A_2B_2C_2\dots N_2$ — її перпендикулярний переріз, його периметр P .

Довести: $S_{\text{бн}} = P \cdot AA_1$.

Доведення. Бічні грані даної призми є паралелограмами. Розглянемо один з них, наприклад, паралелограм ABB_1A_1 . У ньому одна зі сторін перпендикулярного перерізу A_2B_2 буде висотою, проведеною до сторони AA_1 . Тоді площа цього паралелограма $S_1 = A_2B_2 \cdot AA_1$. Аналогічно можна знайти площі всіх бічних граней призми: $S_2 = B_2C_2 \cdot BB_1, \dots, S_n = N_2A_2 \cdot AA_1$. За означенням площа бічної поверхні дорівнює сумі площ всіх її бічних граней, тобто $S_{\text{бн}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = A_2B_2 \cdot AA_1 + B_2C_2 \cdot BB_1 + \dots + N_2A_2 \cdot AA_1$. Але $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \dots = NN_1$, $P = A_2B_2 + B_2C_2 + \dots + N_2A_2$, тому $S_{\text{бн}} = S_1 + S_2 + \dots + S_n = A_2B_2 \cdot AA_1 + B_2C_2 \cdot BB_1 + \dots + N_2A_2 \cdot AA_1 = (A_2B_2 + B_2C_2 + \dots + N_2A_2) \cdot AA_1 = P \cdot AA_1$.



Мал. 3.12

Очевидно, що теорема про бічну поверхню похилої призми є правильною і для прямої призми. Зокрема перпендикулярним перерізом прямої призми є будь-який переріз цієї призми площиною, паралельною площинам її основ.

Якщо деякий многокутник є перпендикулярним перерізом призми, то його внутрішні кути є лінійними кутами двогранних кутів при відповідних бічних ребрах.

У прямої призми лінійними кутами двогранних кутів при бічних ребрах є безпосередньо кути основи.

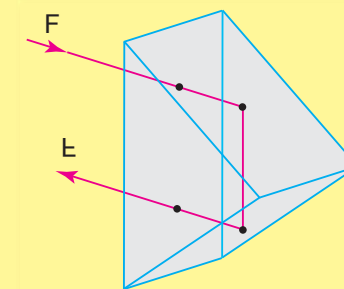
Дізнайтеся більше

1. Термін «призма» походить від грецького слова *prisma*, що означає «розпилений». Призми широко використовуються в оптиці. Оптичний прилад, який називають оптичною призмою, виготовляють із прозорого матеріалу (наприклад, оптичного скла) у формі призми, яка має плоскі поліровані грані, через які входить і виходить світло. Світло в такій призмі заломлюється так, як показано на малюнку 3.13.



Мал. 3.13

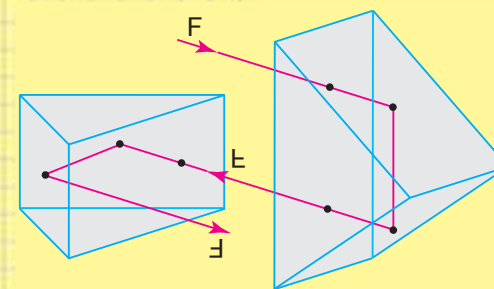
Один з видів оптичної призми — *призма Порро* (мал. 3.14). Названа іменем її винахідника, італійського інженера та оптика — Ігнаціо Порро (1795–1875). Використовується в оптичних приладах для зміни орієнтації зображення (перевертання). В основі такої призми лежить рівнобедрений прямокутний трикутник. Зображення при проходженні через призму віддзеркалюється відносно площини симетрії, перпендикулярної основи. Напрямок променів змінюється на 180° .



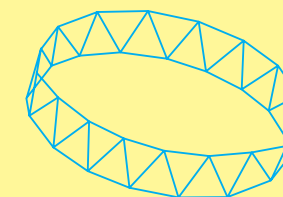
Мал. 3.14

Призми Порро часто використовують парами (так звані подвійні призми Порро). Друга призма цієї пари, що повернута на 90° відносно першої, встановлюється так, щоб промінь потрапив у неї після виходу з першої призми (мал. 3.15). Подвійна призма Порро часто використовується в біноклях для перевертання зображення, збільшення відстані між об'єктивом та окуляром.

2. *Призматоїдом* називається многогранник, у якого дві грані (основи призматоїда) лежать у паралельних площинах, а інші грані — трикутники або трапеції, причому в трикутників одна сторона, а в трапецій обидві основи є сторонами основи призматоїда. На малюнках 3.16 і 3.17 зображено два види призматоїдів: антипризма та клин.



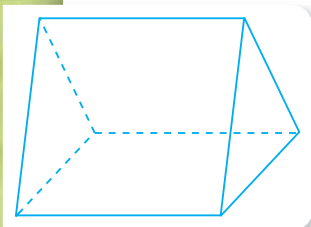
Мал. 3.15



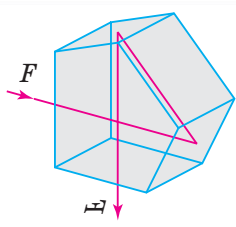
Мал. 3.16

3. Пентапризма (мал. 3.18) — загальна назва оптичних систем, які слугують для повороту осі світлового потоку на 90° і подовження шляху його слідування за рахунок двох і більше відображень від дзеркальних поверхонь за мінімальних зовнішніх розмірів оптичної системи.

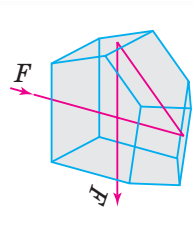
У видошукачах дзеркальних фотоапаратів застосовується так звана пентапризма з «дахом» (мал. 3.19). «Дах» — це дві грані призми, розміщені під кутом 90° , при парному відображенні від яких зображення дзеркально не розвертається. Пентапризма з дахом перетворює зворотне зображення на матовому склі в пряме, не дзеркальне, яке можна далі розглядати через окуляр.



Мал. 3.17



Мал. 3.18



Мал. 3.19



Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

| Українська | Англійська | Німецька | Французька |
|--------------------------|----------------------------------|---|----------------------------------|
| Пряма призма | Direct prism | Direktes Prisma | Prisme direct |
| Похила призма | Inclined prism | Geneigtes Prisma abfallendes Prisma | Prisme en pente |
| Бічна поверхня призми | The side surface of the prism | Die Seitenfläche des Prismas | La surface latérale du prisme |



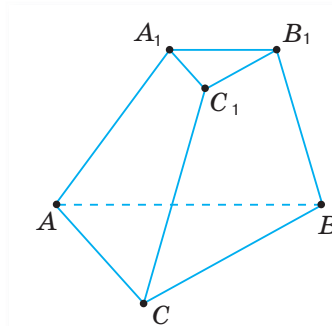
Пригадайте головце

1. Що таке призма; основи та бічні грані призми; ребра основ та бічні ребра призми?
2. Яку призму називають трикутною, чотирикутною, n -кутною; прямою; похилою?
3. Що таке діагональ призми; діагональ грані призми; діагональний переріз призми; висота призми?
4. Сформулюйте властивості призми.
5. Поясніть, що таке бічна поверхня призми, її повна поверхня.
6. Як знайти площу бічної поверхні прямої призми; площу її повної поверхні?
7. Поясніть, що таке правильна призма.
8. Поясніть, що таке перпендикулярний переріз призми.
9. Як знайти площу бічної поверхні похилої призми; площу її повної поверхні?

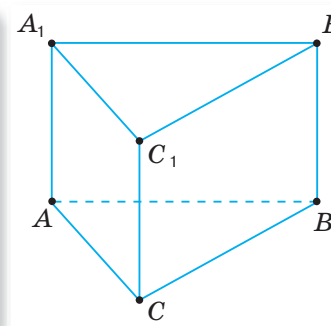


Розв'яжіть задачі

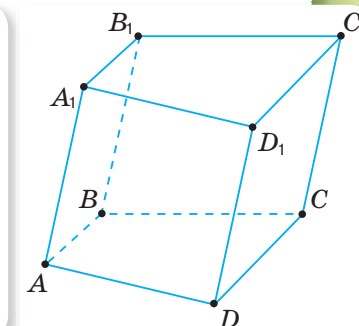
- 91'. На якому з малюнків 3.20–3.22 зображено призму? Яка із цих призм пряма, а яка — похила?
- 92'. На якому з малюнків 3.23–3.26 зображено:
1) трикутну призму; 2) чотирикутну призму?
- 93'. На малюнку 3.27 зображено пряму чотирикутну призму $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назвіть: 1) висоту призми; 2) діагональ призми; 3) діагональ грані $ABB_1 A_1$ призми; 4) діагональний переріз призми.



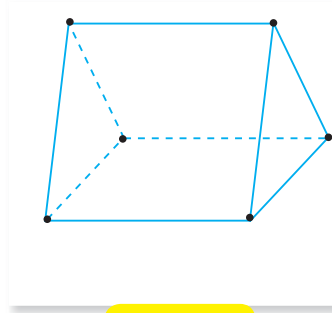
Мал. 3.20



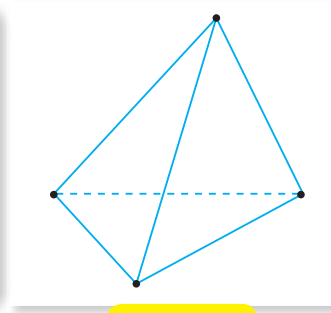
Мал. 3.21



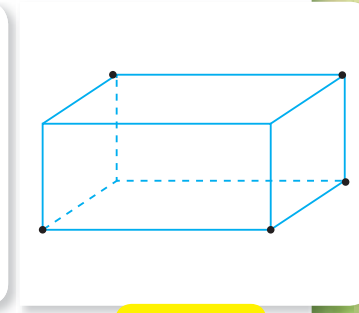
Мал. 3.22



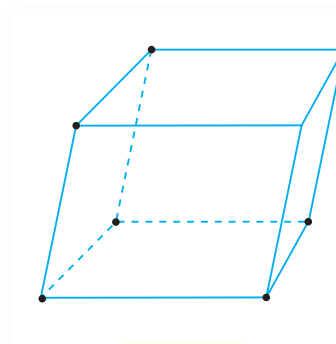
Мал. 3.23



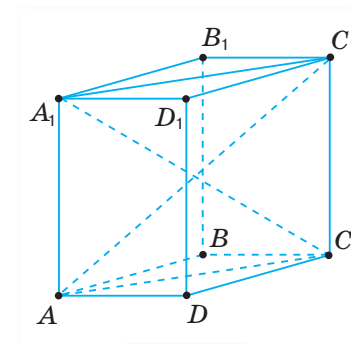
Мал. 3.24



Мал. 3.25



Мал. 3.26



Мал. 3.27

- 94°.** Дано пряму трикутну призму $ABCA_1B_1C_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить через: 1) три вершини призми; 2) ребро та вершину призми; 3) два ребра призми, що мають спільну точку.
- 95°.** Чи може бути похилою призма, у якої всі бічні грані — квадрати?
- 96°.** Скільки діагоналей можна провести:
1) у трикутній призмі;
2) чотирикутній призмі;
3) шестикутній призмі;
4) n -кутній призмі?
- 97°.** Чи існує призма, у якій тільки одне бічне ребро перпендикулярне до площини основи?
- 98°.** Чи правильно, що перпендикулярний переріз похилої призми паралельний до площин її основ?
- 99°.** Яку найменшу кількість граней (ребер, вершин) може мати пряма призма?
- 100°.** Чи є правильною пряма призма, якщо в її основі лежить:
1) квадрат; 2) ромб; 3) трапеція? Відповідь поясніть.
- 101°.** Основою прямої призми є прямокутний трикутник з катетами a і b , а висота призми — h . Знайдіть бічну й повну поверхні призми, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $h = 5$ см;
2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $h = 2,5$ см;
3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $b = 2$ см, $h = 8$ см.

Для одержання наочних динамічних зображень геометричних фігур можна скористатися комп'ютерними програмами, наприклад, GeoGebra: <https://www.geogebra.org/geometry>

- 102°.** Основою прямої призми є прямокутник зі сторонами 5 см і 8 см, а бічне ребро дорівнює:
1) 6 см; 2) 12 см; 3) $2\sqrt{2}$ см.
Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми.
- 103°.** Площа бічної поверхні правильної трикутної призми дорівнює S , а бічне ребро дорівнює c . Знайдіть ребро основи призми, якщо:
1) $S = 16\sqrt{3}$ см², $c = 4$ см; 2) $S = \sqrt{3}$ см², $c = 1$ см; 3) $S = 64\sqrt{3}$ см², $c = 3$ см.
- 104°.** Площа основи правильної трикутної призми дорівнює S , а висота — h . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо:
1) $S = 4\sqrt{3}$ см², $h = 2$ см; 2) $S = 9\sqrt{3}$ см², $h = 3$ см; 3) $S = 16\sqrt{3}$ см², $h = 6$ см.
- 105°.** Сторона основи правильної чотирикутної призми дорівнює a , висота призми — h . Знайдіть бічну й повну поверхні призми, якщо:
1) $a = 2$ см, $h = 5$ см; 2) $a = 6$ см, $h = 10$ см; 3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $h = 15$ см.

- 106°.** Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює S , а бічне ребро дорівнює h . Знайдіть ребро основи призми, якщо:
1) $S = 16$ см², $h = 4$ см; 2) $S = 18$ см², $h = 3$ см; 3) $S = 54$ см², $h = 6$ см.
- 107°.** Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює S , а повної поверхні — Q . Знайдіть ребро основи призми, якщо:
1) $S = 24$ см², $Q = 56$ см²; 2) $S = 12$ см², $Q = 30$ см²; 3) $S = 15$ см², $Q = 65$ см².
- 108°.** Площа бічної поверхні правильної чотирикутної призми дорівнює S , а діагональ основи дорівнює d . Знайдіть бічне ребро призми, якщо:
1) $S = 24$ см², $d = 3\sqrt{2}$ см; 2) $S = 48$ см², $d = 6\sqrt{2}$ см; 3) $S = 16\sqrt{2}$ см², $d = 4$ см.
- 109°.** Побудуйте розгортку правильної n -кутної призми зі стороною основи a і висотою H , якщо:
1) $n = 3$, $a = 4$ см, $H = 5$ см;
2) $n = 4$, $a = 3$ см, $H = 5$ см;
3) $n = 6$, $a = H = 4$ см.
- 110°.** У похилої призми бічне ребро a , а перпендикулярний переріз — квадрат, площа якого S . Знайдіть площу поверхні даної призми, якщо:
1) $a = 4$ см, $S = 9$ см²;
2) $a = 6$ см, $S = 16$ см²;
3) $a = 3\sqrt{3}$ см, $S = 27$ см².
- 111°.** У похилої призми бічне ребро a , а перпендикулярний переріз — прямокутник, у якого сторони відносяться, як 1 : 3, а діагональ d . Знайдіть площу поверхні даної призми, якщо:
1) $a = 4$ см, $d = 2\sqrt{5}$ см;
2) $a = 3$ см, $d = 3\sqrt{10}$ см;
3) $a = 2\sqrt{3}$ см, $d = 2\sqrt{15}$ см.
- 112°.** У похилої призми бічне ребро a , а перпендикулярний переріз — рівнобічна трапеція з основами b і c та висотою h . Знайдіть площу поверхні даної призми, якщо:
1) $a = 3$ см, $b = 3$ см, $c = 9$ см, $h = 4$ см;
2) $a = 5$ см, $b = 4$ см, $c = 14$ см, $h = 12$ см;
3) $a = 3\sqrt{3}$ см, $b = 3\sqrt{2}$ см, $c = 7\sqrt{2}$ см, $h = 2$ см.
- 113°.** Відстані між прямими, які містять бічні ребра похилої трикутної призми дорівнюють a , b , c , а бічне ребро — h . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо:
1) $a = 8$ см, $b = 12,5$ см, $c = 19,5$ см, $h = 20$ см;
2) $a = 15$ см, $b = 14$ см, $c = 13$ см, $h = 10$ см;
3) $a = 3\sqrt{3}$ см, $b = 6\sqrt{3}$ см, $c = 7\sqrt{3}$ см, $h = 5\sqrt{3}$ см.

- 114.** Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник з основою a і висотою, проведеною до цієї основи — b , висота призми — h . Знайдіть бічну й повну поверхні призми, якщо:
- $a = 6$ см, $b = 4$ см, $h = 10$ см;
 - $a = 10$ см, $b = 12$ см, $h = 16$ см;
 - $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 2$ см, $h = 15$ см.
- 115.** У прямої трикутної призми сторони основи b і c утворюють кут α , а бічне ребро дорівнює d . Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми, якщо:
- $b = 2$ см, $c = 4$ см, $d = 10$ см, $\alpha = 30^\circ$;
 - $b = c = 12$ см, $d = 16$ см, $\alpha = 60^\circ$;
 - $b = 2\sqrt{2}$ см, $c = 3$ см, $d = 8$ см, $\alpha = 45^\circ$.
- 116.** Основою прямої призми є трикутник зі сторонами a , b і c , а бічне ребро дорівнює h . Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми, якщо:
- $a = 13$ см, $b = 14$ см, $c = 15$ см, $h = 4$ см;
 - $a = 4$ см, $b = 13$ см, $c = 15$ см, $h = 6$ см;
 - $a = 7$ см, $b = 15$ см, $c = 20$ см, $h = 8$ см.
- 117.** В основі прямої призми лежить правильний n -кутник зі стороною a . Висота призми дорівнює h . Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми. Заповніть таблицю 2.

Таблиця 2

| | | | | | | |
|-----------------|------|-------|-------|-------|------|------|
| N | 3 | 3 | 4 | 4 | 6 | 6 |
| A | 4 см | 6 см | 3 см | 4 см | 2 см | 3 см |
| H | 6 см | 10 см | 18 см | 12 см | 3 см | 4 см |
| $S_{\text{бп}}$ | | | | | | |
| $S_{\text{пп}}$ | | | | | | |

- 118.** Основа прямої призми — ромб, сторона якого дорівнює b , гострий кут — β . Через більшу діагональ основи й середину однієї сторони другої основи проведено переріз, який утворює з площиною основи кут γ . Знайдіть площу перерізу, якщо:
- $b = 2$ см, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 30^\circ$;
 - $b = 10$ см, $\beta = 30^\circ$, $\gamma = 60^\circ$;
 - $b = 4\sqrt{2}$ см, $\beta = 60^\circ$, $\gamma = 45^\circ$.
- 119.** Основою прямої призми є рівнобічна трапеція з основами a і b та висотою c , висота призми — h . Знайдіть бічну й повну поверхні призми, якщо:
- $a = 10$ см, $b = 8$ см, $c = 10$ см, $h = 15$ см;
 - $a = 2$ см, $b = 1,5$ см, $c = 1$ см, $h = 10$ см;
 - $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 5$ см, $h = 12$ см.
- 120.** Діагональ основи правильної чотирикутної призми дорівнює d , а висота призми — h . Знайдіть площі бічної та повної поверхонь

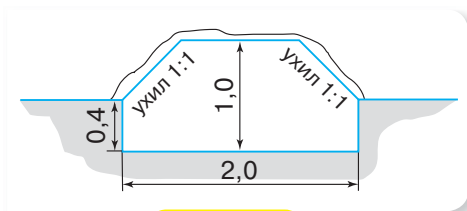
- призми, якщо: 1) $d = 4\sqrt{2}$ см, $h = 5$ см; 2) $d = 9\sqrt{2}$ см, $h = 5$ см; 3) $d = 8$ см, $h = 4\sqrt{2}$ см.
- 121.** У правильній чотирикутній призмі сторона основи дорівнює a ; переріз, проведений через діагональ основи й протилежну вершину іншої основи, перетинає бічні грані по відрізках, кут між якими — α . Знайдіть площу бічної поверхні призми, якщо:
- $a = 2$ см, $\alpha = 30^\circ$;
 - $a = 4$ см, $\alpha = 60^\circ$;
 - $a = 8$ см, $\alpha = 60^\circ$.
- 122.** У правильній чотирикутній призмі через середини двох суміжних сторін основи проведено площину, яка перетинає три бічних ребра й нахилена до площини основи під кутом α . Сторона основи — a . Знайдіть площу отриманого перерізу, якщо:
- $a = 6$ см, $\alpha = 60^\circ$;
 - $a = 4\sqrt{2}$ см, $\alpha = 45^\circ$;
 - $a = 12$ см, $\alpha = 30^\circ$.
- 123.** Площа основи правильної шестикутної призми дорівнює $54\sqrt{3}$ см², а висота — 5 см. Знайдіть найбільшу діагональ призми.
- 124.** Чи залежить кількість вершин (ребер, граней) у призми від того, що в її основі лежить правильний многокутник?
- 125.** Виведіть формулу для обчислення кількості: 1) вершин n -кутної призми; 2) ребер n -кутної призми; 3) граней n -кутної призми.
- 126.** Побудуйте розгортку призми, основа якої — квадрат зі стороною 5 см, а всі бічні грані — ромби з гострим кутом 60° .
- 127.** Основою прямої призми є трикутник зі стороною a та прилеглими до неї кутами α , β , а бічне ребро дорівнює c . Знайдіть площі бічної та повної поверхонь призми, якщо: 1) $a = 6$ см, $c = 4$ см, $\alpha = 70^\circ$, $\beta = 60^\circ$; 2) $a = 8$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 65^\circ$, $\beta = 55^\circ$; 3) $a = 2$ см, $c = 3$ см, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 75^\circ$.
- 128.** Основою призми є квадрат зі стороною a . Одна з бічних граней також квадрат, а інша — ромб із гострим кутом 60° . Знайдіть повну поверхню призми.
- 129.** Основа похилої призми — правильний трикутник зі стороною 3 см. Одна з бічних граней — квадрат, а спільне ребро двох інших бічних граней нахилена до площини основи під кутом 30° . Знайдіть повну поверхню призми.
- 130*.** Діагоналі правильної шестикутної призми дорівнюють 7 см і 8 см. Знайдіть висоту призми.
- 131*.** Прямокутник зі сторонами 8 см і 34 см пряма m розбиває на два подібних прямокутники, площі яких відносяться, як 1 : 3. На кожному з прямокутників як на основі побудовано пряму призму висотою 8 см. Знайдіть площі бічної та повної поверхонь побудованих призм.
- 132*.** На сторонах прямокутного трикутника з катетами a і b побудовано квадрати. Їх вершини з'єднано відрізками так, що утворився опуклий шестикутник. Він є основою прямої призми з висотою h . Знайдіть площі бічної та повної поверхонь цієї призми.

- 133***. У правильній трикутній призмі кут між діагоналлю бічної грані й іншою бічною гранню дорівнює α . Знайдіть висоту та бічну поверхню призми, якщо ребро основи дорівнює a .
- 134***. Діагональ бічної грані правильної трикутної призми утворює з іншою бічною гранню кут 30° . Знайдіть висоту призми, якщо сторона основи дорівнює $3\sqrt{2}$ см.
- 135***. Основа похилої призми — правильний трикутник зі стороною a , а довжина бічного ребра b . Одне з бічних ребер утворює з прилеглими сторонами основи кути по 45° . Знайдіть бічну поверхню призми.

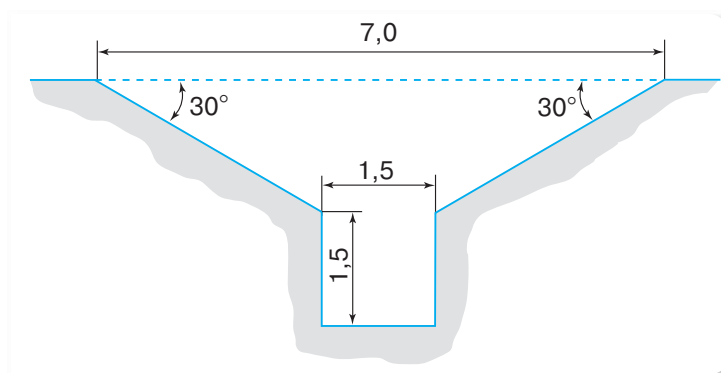


Проявіть компетентність

- 136.** Наведіть приклади з довкілля, що ілюструють пряму призму.
- 137.** Які призми та які їх властивості використовують під час ремонту квартири?
- 138.** Для кращого зберігання овочі складають у бурти. Перпендикулярний розріз такого бурта зображено на малюнку 3.28, розміри вказано в метрах. Визначте площу, яку потрібно вкрити шаром соломи, якщо довжина бурта — 15 м.
- 139.** Під час розвантаження торфу викопують траншею, перпендикулярний розріз якої зображено на малюнку 3.29, розміри вказано в метрах. Дно і стіни траншеї обшивають дошками. Знайдіть площу укріплення траншеї, довжина якої 120 м.
- 140.** Намалюйте розгортку правильної восьмикутної призми, сторона основи якої дорівнює 5 см, а висота призми — 16 см.



Мал. 3.28



Мал. 3.29

§ 4. ПАРАЛЕЛЕПЕД

1. ПАРАЛЕЛЕПЕД, ЙОГО ВИДИ

Подивіться на малюнки 4.1–4.4. Ви бачите кристали кухонної солі (мал. 4.1) та ісландського шпату (мал. 4.2), що мають природну форму паралелепіеда. Нас оточують різноманітні предмети (мал. 4.3) й споруди (мал. 4.4), що мають таку само геометричну форму. Узагалі, форма паралелепіеда є найпоширенішою серед рукотворних об'єктів.

Паралелепіед належить до окремого виду призми. У попередніх класах ви ознайомилися з прямокутним паралелепіедом і кубом, який є різновидом прямокутного паралелепіеда. Проте ці многогранники не вичерпують усіх видів паралелепіедів.



Мал. 4.1



Мал. 4.2



Мал. 4.3



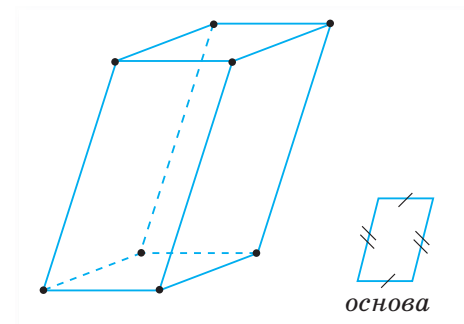
Мал. 4.4

Паралелепіедом називається **призма**, основами якої є **паралелограми**.

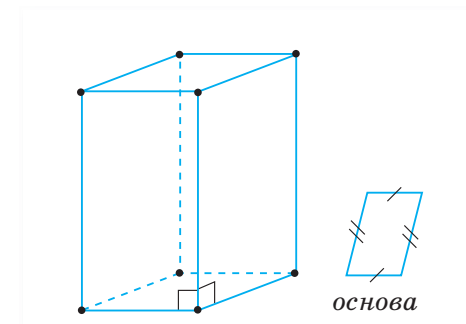
З означення випливає, що в паралелепіеда: 1) бічні грані — паралелограми, оскільки цей многогранник є призмою; 2) основи — паралелограми (за означенням).

Ви знаєте, що прямокутник — окремий вид паралелограма. Тому можливі такі види паралелепіеда:

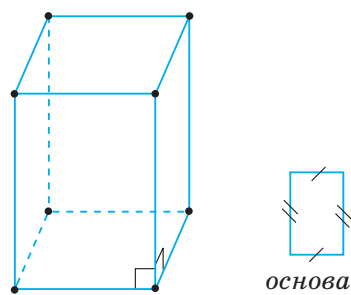
- *похилий паралелепіед* (мал. 4.5), у нього бічні грані — паралелограми, які не є прямокутниками, основи — паралелограми;
- *прямий паралелепіед* (мал. 4.6), у нього бічні грані — прямокутники, основи — паралелограми;



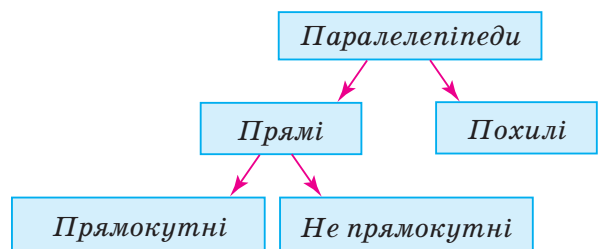
Мал. 4.5



Мал. 4.6



Мал. 4.7



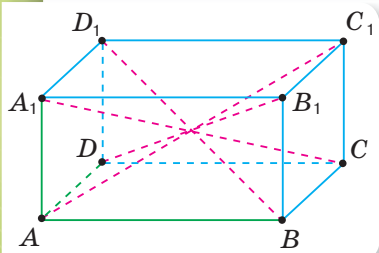
Мал. 4.8

— *прямокутний паралелепіед* (мал. 4.7), у нього бічні грані — прямокутники, основи — прямокутники.

Зв'язок між паралелепіедами різних видів показано на малюнку 4.8.

Оскільки прямий паралелепіед є різновидом прямої призми, то він має всі її властивості. Особлива його властивість полягає в тому, що в ньому **протилежні грані рівні й паралельні**. Доведіть цю властивість самостійно.

? Чи кожний прямий паралелепіед є правильною чотирикутною призмою? Ні, лише той, у якого основи — квадрати.



Мал. 4.9

Прямокутний паралелепіед (мал. 4.9) — один з найбільш відомих вам многогранників. У ньому: 6 граней, які є прямокутниками, 12 ребер, 8 вершин, 12 двограних кутів, кожний з яких є прямим, 8 тригранних кутів, у кожного з яких усі три плоских кути є прямими, 4 діагоналі, 6 діагональних перерізів. Три ребра зі спільною вершиною можуть мати різну довжину. Наприклад, на малюнку 1.4.5 — це два сусідні ребра основи AB , AD і бічне ребро AA_1 . Такі ребра (і їх довжини) називають *вимірами* прямокутного паралелепіеда.

Також на малюнку 1.4.5 — це два сусідні ребра основи AB , AD і бічне ребро AA_1 . Такі ребра (і їх довжини) називають *вимірами* прямокутного паралелепіеда.

2. ВЛАСТИВОСТІ ДІАГОНАЛЕЙ ПАРАЛЕЛЕПІЕДА

ТЕОРЕМА (про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіеда).

Квадрат діагоналі прямокутного паралелепіеда дорівнює сумі квадратів трьох його вимірів.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіед (мал. 4.10), $AB = a$, $AD = b$, $AA_1 = c$, $A_1 C = d$.

Довести: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Доведення. Трикутник $A_1 AC$ — прямокутний із прямим кутом A , оскільки ребро $A_1 A$ даного паралелепіеда перпендикулярне до площини його основи. Тому, за теоремою Піфагора, $d^2 = AC^2 + c^2$ (1). Основа даного паралелепіеда — прямокутник, тому трикутник ABC — прямокутний.

У ньому: $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = a$, $BC = AD = b$, отже, за теоремою Піфагора, $AC^2 = a^2 + b^2$ (2). З рівностей (1) і (2) одержимо:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

НАСЛІДОК. У прямокутному паралелепіеді усі діагоналі рівні. Твердження безпосередньо впливає з доведеної теореми.



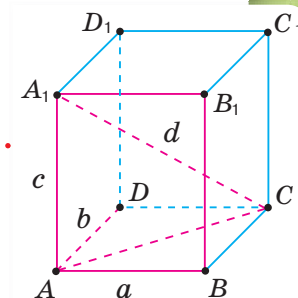
Задача 1. У прямокутному паралелепіеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (мал. 4.11) $AD : AB : A_1 A = 3 : 4 : 12$, а діагональ на 1 см довша за його висоту $A_1 A$. Яка довжина діагоналі паралелепіеда?

Розв'язання. За умовою, виміри даного паралелепіеда відносяться, як 3 : 4 : 12. Введемо коефіцієнт пропорційності $k > 0$. Тоді $AB = 4k$ см, $AD = 3k$ см, $A_1 A = 12k$ см, $A_1 C = 12k + 1$ (см). За теоремою про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіеда, $A_1 C^2 = AB^2 + AD^2 + A_1 A^2$. Одержали рівняння відносно k :

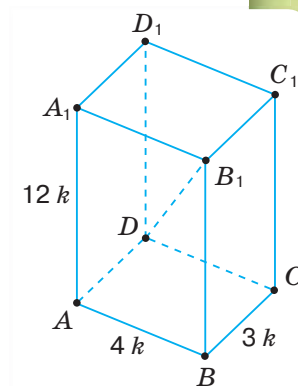
$$(12k + 1)^2 = (4k)^2 + (3k)^2 + (12k)^2.$$

Це рівняння зводиться до квадратного рівняння $25k^2 - 24k - 1 = 0$, яке має два корені: 1 і $-\frac{1}{25}$.

Оскільки $k > 0$, то $k = 1$. Отже, $A_1 C = 12 \cdot 1 + 1 = 13$ (см).



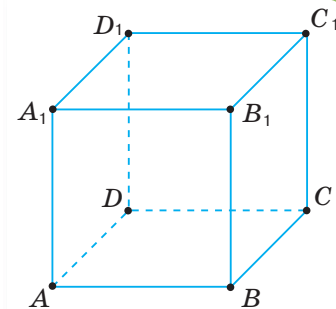
Мал. 4.10



Мал. 4.11

Якщо в ході розв'язування геометричної задачі одержали квадратне рівняння, то його корені необхідно дослідити.

Прямокутний паралелепіед, який має три рівні виміри, називають *кубом* (мал. 4.12). З означення випливає, що всі грані куба — квадрати. Оскільки куб — окремий вид прямокутного паралелепіеда, то він має всі його властивості. Особливі властивості куба сформулюйте самостійно.



Мал. 4.12

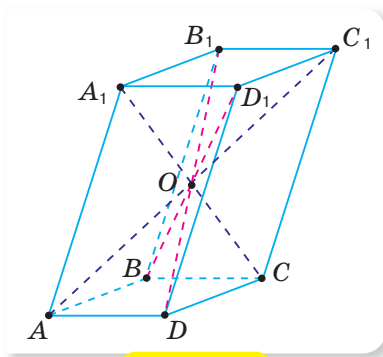
ТЕОРЕМА (про точку перетину діагоналей паралелепіеда).

Усі чотири діагоналі паралелепіеда перетинаються в одній точці й діляться цією точкою навпіл.

Дано: $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — паралелепіед (мал. 4.13), AC_1 , BD_1 , $B_1 D$ і $A_1 C$ — його діагоналі.

Довести: Діагоналі AC_1 , BD_1 , $B_1 D$ і $A_1 C$ перетинаються в точці O ; точка O — середина діагоналей AC_1 , BD_1 , $B_1 D$ і $A_1 C$.

Доведення. Діагоналі AC_1 і BD_1 паралелепіпеда та діагоналі граней AD_1 і BC_1 утворюють чотирикутник ABC_1D_1 . У нього $AB = DC$, $D_1C_1 = DC$, тому $AB = D_1C_1$. Оскільки AB і D_1C_1 відповідно паралельні ребру DC , то, за ознакою паралельності прямих, вони паралельні між собою. Отже, чотирикутник ABC_1D_1 — паралелограм. У нього AC_1 і BD_1 — діагоналі. За властивістю діагоналей паралелограма, вони перетинаються в точці O й діляться цією точкою навпіл.



Мал. 4.13

Для діагоналей AC_1 і B_1D паралелепіпеда побудуємо чотирикутник ADC_1B_1 . Він також є паралелограмом. Дані діагоналі AC_1 і B_1D в цьому паралелограмі є його діагоналями, тому вони перетинаються і точкою перетину діляться навпіл. Оскільки серединою діагоналі AC_1 є точка O , то вона є і точкою перетину діагоналей AC_1 і B_1D . Міркуючи аналогічно, одержимо, що діагоналі B_1D і A_1C перетинаються і в точці перетину діляться навпіл, а точкою їх перетину є також точка O . Отже, всі чотири діагоналі паралелепіпеда перетинаються в одній точці O і діляться цією точкою навпіл.

НАСЛІДОК 1. Протилежні грані паралелепіпеда рівні й паралельні.

Справді, основи паралелепіпеда $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$ рівні й паралельні за означенням. Його бічні грані, наприклад, AA_1D_1D і BB_1C_1C , — паралелограми (за властивістю паралелепіпеда), тому $AA_1 \parallel BB_1$, $AD \parallel BC$ і, за ознакою паралельності площин, $AA_1D_1D \parallel BB_1C_1C$. Далі, $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$ як бічні ребра, $AB = CD = A_1B_1 = C_1D_1$ як сторони основ, тому паралелограми AA_1D_1D і BB_1C_1C — рівні.

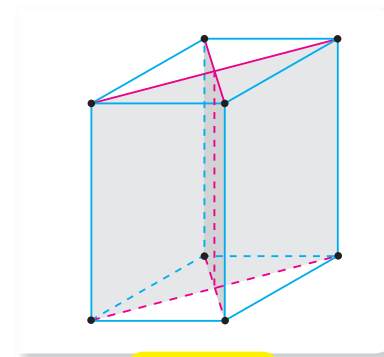
НАСЛІДОК 2. Середина діагоналі паралелепіпеда є його центром симетрії.

Справді, при центральній симетрії відносно точки O — середини діагоналі BD_1 паралелепіпеда $ABCD$ і $A_1B_1C_1D_1$, точка B переходить у точку D_1 , точка A — у точку C_1 , відрізок AB переходить у відрізок C_1D_1 . Аналогічно, відрізок CD переходить у відрізок A_1B_1 . Поверхня паралелепіпеда відображається на себе. Внутрішня область також відображається на себе. Отже, при симетрії з центром в точці O паралелепіпед відображається на себе, а точка O — центр симетрії даного паралелепіпеда.

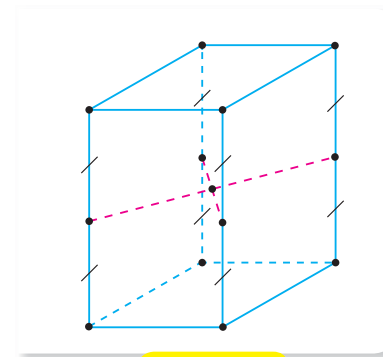
3. СИМЕТРІЯ В ПАРАЛЕЛЕПІПЕДІ

Згідно з наслідком 2 з теореми про точку перетину діагоналей паралелепіпеда, будь-який паралелепіпед має центр симетрії — точку перетину його діагоналей.

Про осі та площини симетрії паралелепіпеда так однозначно сказати не можна. У довільного паралелепіпеда осей і площин симетрії немає. Проте прямий паралелепіпед (не прямокутний) завжди має вісь симетрії — пряму, яка проходить через центри симетрії його основ, і площину симетрії, яка проходить через середини його бічних ребер. Якщо у прямого паралелепіпеда основами є ромби (не квадрати), то він має ще дві площини та дві осі симетрії (мал. 4.14–4.15).



Мал. 4.14



Мал. 4.15

триї — пряму, яка проходить через центри симетрії його основ, і площину симетрії, яка проходить через середини його бічних ребер. Якщо у прямого паралелепіпеда основами є ромби (не квадрати), то він має ще дві площини та дві осі симетрії (мал. 4.14–4.15).

? Чи має прямокутний паралелепіпед центри, осі, площини симетрії? Так. Дослідіть це самостійно.

? Чи має куб центри, осі, площини симетрії? Так.

1. Центром симетрії куба є точка перетину його діагоналей.
2. Куб має дев'ять площин симетрії:
 - а) шість діагональних площин;
 - б) три площини, що проходять через середини кожної четвірки його паралельних ребер перпендикулярно до них.
3. Куб має 13 осей симетрії.

Дізнайтеся більше

1. Термін «паралелепіпед» походить від грецьких слів *parallox* — паралельний та *epipedon* — площина. Термін «куб» (cubox) теж античного походження. Таку назву мала гральна кістка з вирізаними на ній вічками. Її виготовляли з баранячого суглоба, який міг падати на чотири грані, але після обточування — на шість граней.

2. Теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда іноді називають просторовою теоремою Піфагора. У стереометрії є декілька аналогів теореми Піфагора. Частіше за все, це теорема, яку ви вивчили. Іноді — це формула відстані між двома точками в просторі, заданих у прямокутній декартовій системі координат. Існує ще й такий аналог: якщо через кінці ребер прямокутного паралелепіпеда, що сходяться в одній вершині, проведено площину, то квадрат площі отриманого перерізу дорівнює сумі квадратів площ трикутників, які відтинає січна площина від його граней, що сходяться в цій вершині. Ще один аналог — теорема французького математика Ж.-П. де Гау, який жив у XVIII ст.

Теорема де Гуа. У трикутній піраміді $ABCD$, у якій три кути при вершині D ($\angle ADB$, $\angle BDC$ і $\angle CDA$) — прямі, квадрат площі грані, що лежить проти вершини D , дорівнює сумі квадратів площ граней, прилеглих до цього кута.

$$\text{Тобто } S_{ABC}^2 = S_{ABD}^2 + S_{BDC}^2 + S_{ADC}^2.$$

3. Поворот навколо деякої прямої на кут 180° називають симетрією відносно прямої (або *поворотною симетрією*).

Якщо поворотом навколо деякої прямої на кут $\frac{360^\circ}{n}$, де n — натуральне число, $n \geq 2$, фігура суміщається сама із собою, то така пряма називається *віссю симетрії n -го порядку* цієї фігури.

Композиція повороту навколо прямої та симетрії відносно площини, перпендикулярної до цієї прямої, називається *дзеркальним поворотом* (або *дзеркальною симетрією*).

У куба:

- шість осей симетрії другого порядку — прямі, які з'єднують середини протилежних ребер куба;
- чотири осі симетрії третього порядку — діагоналі куба.
- три осі симетрії четвертого порядку, які з'єднують точки перетину діагоналей протилежних граней куба;



Словничок

Прочитайте та прослухайте в Інтернеті, як вимовляються ці слова.

| Українська | Англійська | Німецька | Французька |
|---------------|----------------|----------------|-----------------|
| Паралелепіпед | Parallelepiped | Parallelepiped | Parallélépipède |
| Куб | Cube | Würfel | Cube |



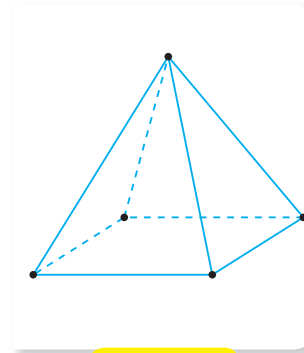
Пригадайте головце

- Поясніть, що таке паралелепіпед.
- Що є основами паралелепіпеда; його гранями?
- Який паралелепіпед називається похилим; прямим; прямокутним?
- Що називають вимірами прямокутного паралелепіпеда?
- Сформулюйте й доведіть теорему про квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда.
- Сформулюйте й доведіть теорему про точку перетину діагоналей паралелепіпеда.

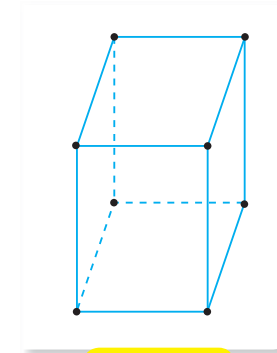


Розв'яжіть задачі

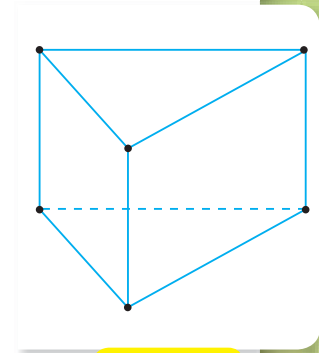
- На якому з малюнків 4.16–4.18 зображено паралелепіпед?
- За малюнком 4.19 назвіть: 1) основи паралелепіпеда; 2) бічні грані паралелепіпеда; 3) діагоналі паралелепіпеда; 3) діагональний переріз паралелепіпеда.



Мал. 4.16



Мал. 4.17



Мал. 4.18

143'. На які многогранники розіб'ється паралелепіпед, у якого проведено діагональний переріз?

144'. Скільки граней непрямокутного паралелепіпеда можуть мати форму прямокутника?

145'. Скільки діагоналей похилого паралелепіпеда можуть бути рівними?

146'. Чи правильно, що паралелепіпед прямий, якщо дві його діагоналі рівні?

147'. Чи може діагональний переріз прямокутного паралелепіпеда бути квадратом?

148'. Чи може існувати паралелепіпед, у якого: 1) тільки одна грань є ромбом; 2) усі кути кожної грані — гострі?

149'. Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами a і b та гострим кутом α , бічне ребро дорівнює c . Знайдіть його повну поверхню, якщо:

1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 30^\circ$;

2) $a = 3$ см, $b = 2\sqrt{3}$ см, $c = 8$ см, $\alpha = 60^\circ$;

3) $a = 5\sqrt{2}$ см, $b = 6$ см, $c = 12$ см, $\alpha = 45^\circ$.



Для одержання наочних динамічних зображень геометричних фігур можна скористатися комп'ютерними програмами, наприклад, GeoGebra: <https://www.geogebra.org/geometry>

150'. Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною a й гострим кутом α , бічне ребро дорівнює c . Знайдіть його повну поверхню, якщо:

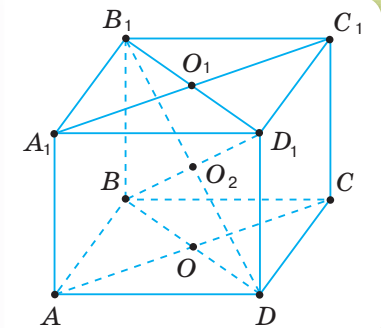
1) $a = 3$ см, $c = 5$ см, $\alpha = 30^\circ$;

2) $a = 4$ см, $c = 6$ см, $\alpha = 45^\circ$; 3) $a = 5\sqrt{3}$ см, $c = 10$ см, $\alpha = 60^\circ$.

151'. Основа прямого паралелепіпеда — ромб із діагоналями d_1 і d_2 , а бічне ребро — h . Знайдіть його бічну й повну поверхні якщо:

1) $d_1 = 6$ см, $d_2 = 8$ см, $h = 5$ см;

2) $d_1 = 10$ см, $d_2 = 24$ см, $h = 8$ см; 3) $d_1 = 48$ см, $d_2 = 20$ см, $h = 10$ см.



Мал. 4.19

- 152°.** У прямокутному паралелепіпеді виміри дорівнюють a, b, c . Знайдіть його діагональ, якщо:
 1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см;
 2) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $c = 5$ см; 3) $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 4\sqrt{6}$ см, $c = 5$ см.
- 153°.** У прямокутному паралелепіпеді діагональ дорівнює d , а сторони основи — a і b . Знайдіть його бічне ребро, якщо:
 1) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $d = 10$ см;
 2) $a = 5$ см, $b = 5$ см, $d = 5\sqrt{3}$ см;
 3) $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 4\sqrt{6}$ см, $d = 13$ см.
- 154°.** Виміри прямокутного паралелепіпеда дорівнюють a, b, c . Знайдіть його бічну поверхню, якщо:
 1) $a = 5$ см, $b = 6$ см, $c = 4$ см;
 2) $a = 8$ см, $b = 10$ см, $c = 2,5$ см;
 3) $a = 4\sqrt{3}$ см, $b = 6\sqrt{3}$ см, $c = 12$ см.
- 155°.** У кубі з однієї вершини проведено дві діагоналі бічних граней. Визначте кут між ними.
- 156°.** Ребро куба дорівнює a . Знайдіть його діагональ, якщо:
 1) $a = 3$ см; 2) $a = 8$ см; 3) $a = 6\sqrt{2}$ см.
- 157°.** Бічна поверхня куба дорівнює: 1) 4 см²; 2) 36 см²; 3) 8 см². Яку довжину має його ребро?
- 158°.** Знайдіть повну поверхню куба, якщо його діагональ дорівнює d .
- 159°.** Знайдіть повну поверхню куба, якщо площа його діагонального перерізу дорівнює S .
- 160°.** Відстані між бічними гранями похилого паралелепіпеда відносяться, як $3 : 25 : 26$, а площа перпендикулярного перерізу дорівнює 144 см². Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 161.** Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами a і b та гострим кутом α . Площа повної поверхні паралелепіпеда дорівнює S . Знайдіть його бічне ребро, якщо:
 1) $S = 18$ см², $a = 3$ см, $b = 2$ см, $\alpha = 30^\circ$;
 2) $S = 188$ см², $a = 6$ см, $b = 10$ см, $\alpha = 30^\circ$;
 3) $S = 63$ см², $a = 5$ см, $b = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$.
- 162.** Основа прямого паралелепіпеда — паралелограм зі сторонами a і b та гострим кутом α . Менша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут β . Знайдіть його діагоналі, якщо:
 1) $a = 5$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$;
 2) $a = 4$ см, $b = 12$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
 3) $a = 12$ см, $b = 8$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$.
- 163.** Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 21 см і 22 см, а бічне ребро — 20 см. Знайдіть площі діагональних перерізів паралелепіпеда, якщо його діагоналі відносяться, як $5 : 9$.

- 164.** У прямокутному паралелепіпеді діагональ дорівнює d , а його виміри відносяться, як $1 : 3 : 5$. Знайдіть його бічне ребро, якщо:
 1) $d = 2\sqrt{35}$ см; 2) $d = 5\sqrt{7}$ см; 3) $d = 7\sqrt{5}$ см.
- 165.** Площа основи прямокутного паралелепіпеда дорівнює 240 см². Знайдіть площу його бічних граней, якщо площа однієї з них становить $\frac{1}{2}$ площі основи, а площа другої — $\frac{1}{4}$ площі основи. Чому дорівнюють площі бічної та повної поверхонь паралелепіпеда?
- 166.** Кути, утворені діагоналлю прямокутного паралелепіпеда з його ребрами, дорівнюють α, β, γ . Доведіть, що $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 1$.
- 167.** Як зміниться площа повної поверхні прямокутного паралелепіпеда, якщо кожну з його сторін:
 1) збільшити у 2 рази; 3) збільшити на 25 %;
 2) зменшити в 3 рази; 4) зменшити на 50 %?
- 168.** Накресліть: 1) прямокутний паралелепіпед; 2) куб. Через діагональ нижньої основи та вершину верхньої основи проведіть січну площину так, щоб у перерізі дістали: а) трикутник; б) чотирикутник.
- 169.** Як зміниться площа повної поверхні куба, якщо його сторону:
 1) збільшити в 4 рази; 3) збільшити на 50 %;
 2) зменшити у 2 рази; 4) зменшити на 75 %?
- 170.** У кубі $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ задано точку: 1) P на ребрі BB_1 ; 2) Q на ребрі BC . Площини яких граней куба перетинає пряма, що лежить у площині грані куба і проходить через дану точку та одну з вершин куба? Скільки таких прямих можна провести?
- 171.** Ребро куба дорівнює a . Знайдіть відстань від вершини куба до його діагоналі.
- 172.** Доведіть, що сума квадратів площ діагональних перерізів паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів площ його бічних граней.
- 173.** Сума всіх ребер паралелепіпеда дорівнює 120 см. Знайдіть довжину трьох ребер, які виходять з однієї вершини, якщо їх довжини відносяться, як $4 : 5 : 6$.
- 174.** Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною a , діагоналі паралелепіпеда утворюють з площиною основи кути α і β . Знайдіть висоту паралелепіпеда, якщо:
 1) $a = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
 2) $a = 6$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$; 3) $a = 12$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
- 175.** У прямому паралелепіпеді сторони основи дорівнюють a і b , більша діагональ основи — d . Більша діагональ паралелепіпеда утворює з площиною основи кут α . Знайдіть площі діагональних перерізів паралелепіпеда, якщо:
 1) $a = 17$ см, $b = 18$ см, $d = 25$ см, $\alpha = 45^\circ$;
 2) $a = 12$ см, $b = 16$ см, $d = 15$ см, $\alpha = 30^\circ$;
 3) $a = 6$ см, $b = 8$ см, $d = 10$ см, $\alpha = 60^\circ$.

176. Основа прямого паралелепіпеда — ромб зі стороною a , діагоналі паралелепіпеда утворюють із площиною основи кути α і β . Знайдіть кути ромба, якщо:
- 1) $a = 3$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
 - 2) $a = 6$ см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$;
 - 3) $a = 12$ см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$.
177. У прямому паралелепіпеді висота дорівнює 20 см, сторони основи — 17 см і 28 см. Площа перерізу, проведеного через дві більші сторони основ, дорівнює 700 см². Знайдіть діагоналі паралелепіпеда.
178. Площі двох граней прямокутного паралелепіпеда відносяться, як 2 : 5. Діагоналі цих граней дорівнюють 10 см і 17 см. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.
179. Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 34 см, 40 см, 58 см. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.
180. Площа поверхні прямокутного паралелепіпеда дорівнює 6240 см², а його виміри відносяться, як 12 : 16 : 21. Знайдіть діагональ паралелепіпеда.
181. Периметри трьох граней прямокутного паралелепіпеда дорівнюють 32 см, 40 см і 48 см. Знайдіть площу поверхні паралелепіпеда.
182. Переріз куба — правильний многокутник. Доведіть, що цим многокутником може бути лише трикутник, чотирикутник або шестикутник.
183. У кубі проведено два діагональних перерізи. Доведіть, що пряма їх перетину перпендикулярна до двох граней куба.
- 184*. На трьох бічних ребрах прямокутного паралелепіпеда розміщено по дві точки. Скільки можна провести площин, кожна з яких проходить принаймні через три з даних точок?
- 185*. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — прямокутний паралелепіпед. Доведіть, що переріз $AB_1 C_1$ — гострокутний трикутник.
- 186*. Доведіть, що квадрат діагоналі прямокутного паралелепіпеда дорівнює $\frac{1}{2}(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2)$, де d_1, d_2, d_3 — діагоналі граней, що виходять з однієї вершини.
- 187*. Знайдіть діагональ прямокутного паралелепіпеда, якщо діагоналі його граней дорівнюють 11 см, 19 см, 20 см.
- 188*. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює d_1 , діагональ бічної грані — d_2 , діагональ основи — d_3 . Знайдіть площу основи паралелепіпеда.
- 189*. Різниця периметра грані одного куба й периметра грані другого куба дорівнює c , а різниця їх площ — d . Знайдіть площі бічної та повної поверхонь, якщо:
- 1) $c = 16$ см, $d = 56$ см²;
 - 2) $c = 12$ см, $d = 105$ см².
- 190*. Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Назвіть площини, кожна з яких проходить принаймні через три вершини куба.

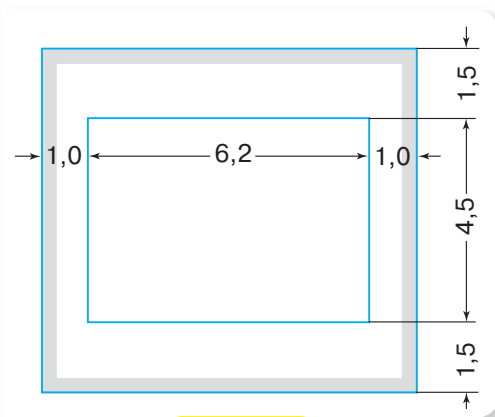
- 191*. На трьох бічних ребрах куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ позначте по точці, кожна з яких ділить ребро у відношенні 2 : 5. На одному ребрі це відношення рахуйте від вершини верхньої основи куба, а на двох інших — від вершини нижньої основи. Побудуйте переріз куба площиною, що проходить через дані точки. Скільки розв'язків має задача?
- 192*. Чи може переріз куба площиною бути правильним шестикутником? Відповідь поясніть.
- 193*. У паралелепіпеді довжини трьох ребер, що виходять з однієї вершини, дорівнюють a, b, c . Ребра a і b взаємно перпендикулярні, а ребро c утворює з кожним із них кут α . Знайдіть площу повної поверхні паралелепіпеда.
- 194*. У прямокутному паралелепіпеді діагональ d утворює з бічними гранями кути 30° і 45° . Знайдіть площу бічної поверхні паралелепіпеда.
- 195*. У прямокутному паралелепіпеді довжина діагоналі дорівнює d . Яку найбільшу площу поверхні може мати такий паралелепіпед?
- 196*. У прямокутному паралелепіпеді сума довжин всіх ребер дорівнює 48 см. Яку найбільшу площу поверхні може мати такий паралелепіпед?
- 197*. Доведіть, що відстань між мимобіжними діагоналями двох суміжних граней куба втричі менша від довжини діагоналі куба.
- 198*. Через діагональ куба з ребром a паралельно одній з діагоналей основи проведено площину. Побудуйте переріз куба цієї площиною та знайдіть його площу.
- 199*. Доведіть, що переріз паралелепіпеда площиною не може бути правильним п'ятикутником.
- 200*. Основою похилого паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ є ромб $ABCD$, у якого $\angle BAD = 60^\circ$. Бічні ребра паралелепіпеда нахилені до площини основи під кутом 60° , а площина $AA_1 C_1 C$ перпендикулярна до площини основи. Доведіть, що площі перерізів $BB_1 D_1 D$ і $AA_1 C_1 C$ відносяться, як 2 : 3.
- 201*. Через вершини A_1, B, D паралелепіпеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено площину. Доведіть, що трикутник, отриманий у перерізі паралелепіпеда цією площиною, перетинається діагоналлю паралелепіпеда AC_1 у точці перетину медіан.



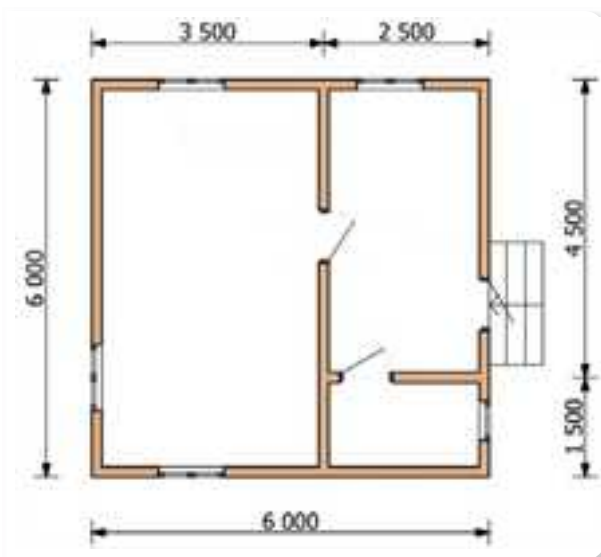
Троявність компетентності

202. Будинок, довжина якого 37,5 м, ширина 10,5 м, висота 12,8 м, потрібно поштукатурити ззовні. У будинку чотири під'їзди, вхідні двері яких мають розміри $1,8 \times 2,4$ м, та 66 вікон розмірами $1,6 \times 2,25$ м. Скільки тон цементного розчину знадобиться для штукатурення будинку, якщо для 1 м² штукатурки використовують 20 кг розчину?

203. Скільки проволочки потрібно взяти для виготовлення каркасної моделі прямокутного паралелепіпеда з вимірами 12 см, 8 см, 5 см? На обрізки відходить 3 % проволочки.
204. На малюнку 4.20 вказано розміри перпендикулярного перерізу тунелю в метрах. Визначте площу гідроізоляції ділянки тунелю завдовжки 300 м.
205. На малюнку 4.21 зображено план двокімнатної квартири (розміри вказано в метрах). Визначте площу стін, які потрібно пофарбувати, якщо висота кімнат 2,5 м, дверей — 2 м, а вікон — 1,5 м.



Мал. 4.20



Мал. 4.21

§ 5. ПІРАМІДА

Подивіться на малюнки 5.1 і 5.2. Ви бачите природні та рукотворні об'єкти, що мають форму піраміди.



Мал. 5.1



Мал. 5.1

1. ПІРАМІДА ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТИ

Піраміда (мал. 5.3), як і призма, — один з видів многогранників. Ви вже знаєте, що є спільного й відмінного в піраміді й призми; як формулюється означення призми. Спробуйте самостійно дати означення піраміді та порівняйте його з наведеним у підручнику.

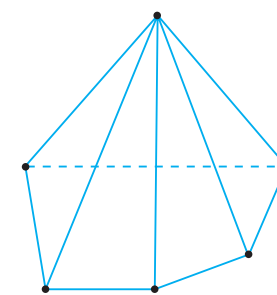
Пірамідою називається многогранник, у якого одна грань — довільний n -кутник, а решта n граней — трикутники, що мають спільну вершину.

Грань, що є довільним n -кутником, називають *основою піраміди*, а грані, що є трикутниками, — *бічними гранями піраміди*. Спільна вершина бічних граней називається *вершиною піраміди*, а інші її вершини — *вершинами основи*.

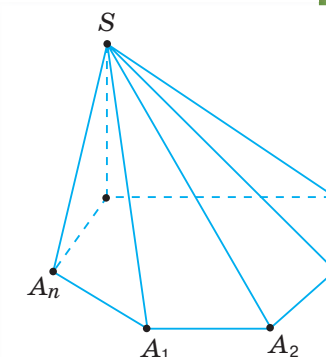
Піраміду позначають назвами її вершин, першою записуючи назву вершини піраміди, наприклад, $SA_1A_2 \dots A_n$ (мал. 5.4) або $SAB \dots N$ (мал. 5.5).

Відрізки A_1A_2, \dots, A_nA_1 (мал. 5.4) називають *ребрами основ піраміди*, а відрізки SA_1, SA_2, \dots, SA_n — *бічними ребрами піраміди*.

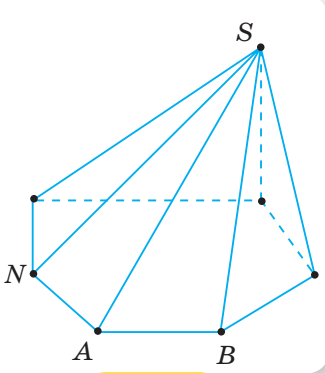
Залежно від того, який многокутник лежить в основі, піраміду називають *трикутною*, *чотирикутною* чи *n -кутною*. На малюнку 5.6 ви бачите п'ятикутну піраміду.



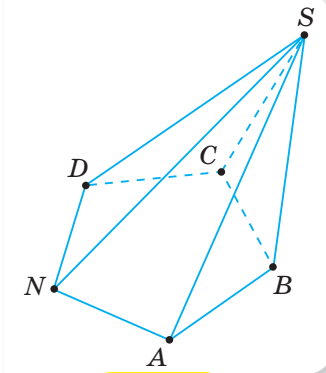
Мал. 5.3



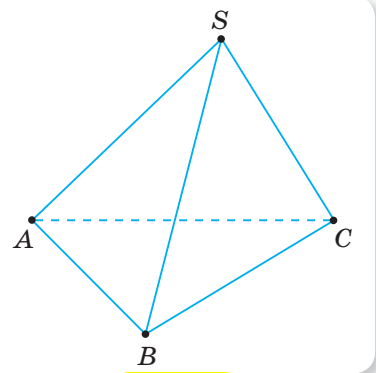
Мал. 5.4



Мал. 5.5



Мал. 5.6



Мал. 5.7

Особливою є трикутна піраміда. У неї будь-яку грань можна вважати основою. Тоді, дотримуючись традиції першою називати вершину піраміди, треба лише відповідно змінити порядок назв вершин піраміди. Наприклад, якщо піраміді на малюнку 5.7 дати назву $SABC$, тоді її основою треба вважати трикутник ABC , а вершиною — вершину S . Якщо цій піраміді дати назву $ABCS$, тоді її основою треба вважати трикутник BCS , а вершиною — вершину A .



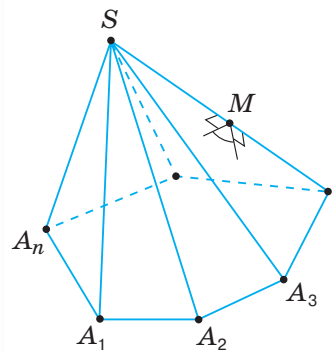
Чи є елементами піраміди двогранні та многогранні кути? Так, оскільки піраміда є многогранником.

У n -кутної піраміди $2n$ ребер, тому в неї $2n$ двограних кутів (мал. 5.8). У вершині n -кутної піраміди сходяться n бічних граней, тому при ній утворюється n -гранний кут. При вершинах основи n -кутної піраміди утворюється n тригранних кутів. Якщо піраміда трикутна, тоді всі її многогранні кути є тригранними (мал. 5.7).

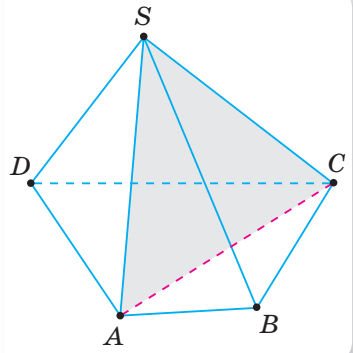
Відрізок, який з'єднує дві несусідні вершини основи n -кутної піраміди, називається *діагоналлю основи піраміди* (наприклад, відрізок AC на малюнку 5.9). На відміну від призми, у піраміді немає діагоналей. Але в піраміді, як і в призмі, можна побудувати *діагональний переріз*. Він проходить через два несусідніх бічних ребра піраміди й відповідну діагональ основи. Кожний діагональний переріз піраміди є трикутником (наприклад, трикутник SAC на малюнку 5.9).



Чи є правильним твердження: «У кожній піраміді можна побудувати діагональний переріз»? Ні. Наприклад, у трикутної піраміди будь-яка пара бічних ребер є сусідніми й у її основі не можна провести жодної діагоналі. Тому діагональний переріз побудувати не можна.



Мал. 5.8



Мал. 5.9